

Capítulo 3

Resolución del problema adiabático

Resultados publicados en los siguientes artículos:

- A new code for non-radial stellar pulsations and its application to low-mass, helium white dwarfs, Córscico & Benvenuto, *Astrophysics & Space Science*, 279, 281 (2002)
- The potential of the variable DA white dwarf G117-B15A as a tool for fundamental physics, Córscico, Benvenuto, Althaus, Isern & García-Berro, *New Astronomy*, 6, 197, (2001)

En vista de la importancia creciente de la línea de investigación relacionada con enanas blancas variables, como ha sido descrito en el Capítulo introductorio, en nuestro Observatorio hemos comenzado a estudiar las oscilaciones estelares no-radiales. Para tal fin hemos desarrollado en forma independiente un código de pulsaciones con capacidad de proporcionar las cantidades básicas necesarias en la exploración de propiedades pulsacionales de enanas blancas y estudios astrosismológicos en tales estrellas.

El propósito de este Capítulo es describir las técnicas numéricas empleadas en nuestro programa para buscar y calcular los modos no-radiales de pulsación de modelos estelares esféricamente simétricos. El código está basado en una modificación de la técnica Newton-Raphson generalizada presentada en Kippenhahn, Weigert & Hofmeister (1967) para resolver el set de ecuaciones en diferencias representando las ecuaciones diferenciales de oscilaciones no-radiales lineales y adiabáticas en estrellas esféricamente simétricas. También en este Capítulo incluimos algunos tests del funcionamiento del código, en particular sobre modelos politrópicos y modelos (químicamente homogéneos) de enanas blancas de helio. El capítulo termina con una aplicación del código de evolución-pulsación en la cual inferimos una cota superior a la masa de las partículas denominadas *axiones*.

Como un primer paso lógico en este proyecto, nuestro código ha sido diseñado con la capacidad de resolver las ecuaciones que describen oscilaciones *adiabáticas*. Esto responde principalmente a dos razones. En primer lugar, el problema adiabático es obviamente más simple desde el punto de vista matemático que el caso general no-adiabático. Consideramos entonces que un primer paso lógico en este proyecto

a largo plazo es comenzar estudiando las propiedades adiabáticas, aunque dada la forma en que fue construido nuestro programa, es posible generalizarlo al caso no-adiabático sin grandes modificaciones. En segundo lugar, como es bien conocido a partir de cálculos llevados a cabo por otros autores, los períodos adiabáticos difieren muy poco de los no-adiabáticos en el caso de enanas blancas: típicamente las diferencias son del orden de 10^{-4} (Bradley 1998b). Los cálculos adiabáticos, por otra parte, proporcionan suficiente información acerca de la estructura mecánica de la estrella en estudio, por lo cual son corrientemente empleados para llevar a cabo estudios astrosismológicos en enanas blancas¹.

3.1 Código de pulsaciones: esquema numérico

Las ecuaciones diferenciales que gobiernan las pulsaciones no-radiales, lineales y adiabáticas en estrellas esféricamente simétricas pueden encontrarse en el Apéndice A (Ecuaciones A.52 a A.55). Estas ecuaciones, junto con las condiciones de borde adecuadas para el centro y la superficie estelar constituye un problema lineal de autovalores de cuarto orden, el cual en general debe resolverse numéricamente. Con el objeto de escribir las ecuaciones de pulsación en una forma adecuada para el cálculo numérico, dividimos el modelo en equilibrio en un número de capas esféricas concéntricas. Esto es equivalente a discretizar el dominio de la variable independiente x en N puntos ($N-1$ capas) no necesariamente equi-espaciadas $x_j, j = 1, \dots, N$. En nuestro tratamiento definimos $x_1 = 1$ como la superficie estelar y $x_N = 0$ como el punto central del modelo.

Ahora reemplazamos las Ecuaciones (A.52) a (A.55) por ecuaciones en diferencias. El sistema de ecuaciones puede ser escrito como

$$\frac{dy_i}{dx} = f_i(y_1, y_2, y_3, y_4, \lambda), \quad i = 1, 2, 3, 4, \quad (3.1)$$

donde $\lambda = \omega^2$. En diferencias finitas, las Ecuaciones (3.1) pueden ser escritas como²

$$\frac{[y_i]_{j+1} - [y_i]_j}{x_{j+1} - x_j} = f_i([y_1, y_2, y_3, y_4]_{j+\frac{1}{2}}; \lambda); i = 1, 2, 3, 4; j = 1, \dots, N-1, \quad (3.2)$$

donde, para una dada cantidad ψ ,

¹La información acerca de cuáles y cuántos modos son excitados, y en consecuencia son capaces de alcanzar amplitudes observables en estrellas reales, es obtenida sólo a través de cálculos no-adiabáticos. En el caso de las enanas blancas, sin embargo, los resultados no-adiabáticos son fuertemente dependientes de la eficiencia convectiva adoptada en la construcción de los modelos en equilibrio (Bradley & Winget 1994). Dado que esta elección es, en principio, libre, el procedimiento usual es adoptar la eficiencia convectiva que dé como resultado un borde azul en acuerdo con el borde azul observado. Como puede verse, este procedimiento no es del todo autoconsistente, lo cual constituye un defecto de la teoría no-adiabática aplicada a enanas blancas.

²También hemos empleado diferencias finitas de la forma

$$\frac{[y_i]_{j+1} - [y_i]_j}{x_{j+1} - x_j} = \frac{1}{2} (f_i([y_1, y_2, y_3, y_4]_j; \lambda) + f_i([y_1, y_2, y_3, y_4]_{j+1}; \lambda)); i = 1, 2, 3, 4; j = 1, \dots, N-1.$$

Aplicando tal forma para las ecuaciones en diferencias hemos encontrado resultados que no difieren apreciablemente de los obtenidos a partir de la forma (3.2).

$$[\psi]_{j+\frac{1}{2}} = \frac{[\psi]_j + [\psi]_{j+1}}{2},$$

siendo $[\psi]_j$ el valor de la cantidad ψ en el punto j . Las condiciones de borde externas están dadas por ³ (Unno, et al. 1989):

$$\begin{aligned} [y_1]_1 - [y_2]_1 + [y_3]_1 &= 0, \\ (\ell + 1) [y_3]_1 + [y_4]_1 &= 0, \\ [y_1]_1 &= 1. \end{aligned} \quad (3.3)$$

La última ecuación es la condición de normalización, usualmente empleada en estudios previos. Las condiciones de borde centrales están dadas por (Unno, et al. 1989)

$$\begin{aligned} [y_1]_N \frac{[C_1]_N \lambda}{\ell} - [y_2]_N &= 0, \\ \ell [y_3]_N - [y_4]_N &= 0. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Con el objeto de resolver este sistema de ecuaciones en diferencias usaremos el método Newton-Raphson generalizado siguiendo la formulación presentada en Kippenhahn, Weigert & Hofmeister (1967) para el caso de evolución estelar. Aquí supondremos que disponemos de una solución aproximada para el sistema y deseamos mejorarla iterativamente. En caso de que esta solución inicial no está lejos de la solución exacta del sistema, podemos desarrollar las ecuaciones hasta el primer orden en las correcciones para los valores de las autofunciones para cada punto de la grilla y también para el autovalor ω^2 (el cuadrado de la autofrecuencia). En esta forma obtenemos un sistema lineal de ecuaciones cuyas incógnitas son las correcciones, el cual debe ser resuelto.

En forma compacta, el sistema algebraico de ecuaciones para las correcciones a primer orden puede expresarse como:

$$\frac{\partial B_k}{\partial [y_1]_1} \delta [y_1]_1 + \cdots + \frac{\partial B_k}{\partial [y_4]_1} \delta [y_4]_1 + \frac{\partial B_k}{\partial \lambda} \delta \lambda = -B_k; \quad k = 1, 2, 3, \quad (3.5)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial G_i^j}{\partial [y_1]_j} \delta [y_1]_j + \cdots + \frac{\partial G_i^j}{\partial [y_4]_j} \delta [y_4]_j + \frac{\partial G_i^j}{\partial [y_1]_{j+1}} \delta [y_1]_{j+1} + \cdots + \frac{\partial G_i^j}{\partial [y_4]_{j+1}} \delta [y_4]_{j+1} + \\ \frac{\partial G_i^j}{\partial \lambda} \delta \lambda = -G_i^j; \quad i = 1, 2, 3, 4; \quad j = 1, 2, \dots, N-1, \end{aligned} \quad (3.6)$$

$$\frac{\partial C_m}{\partial [y_1]_N} \delta [y_1]_N + \cdots + \frac{\partial C_m}{\partial [y_4]_N} \delta [y_4]_N + \frac{\partial C_m}{\partial \lambda} \delta \lambda = -C_m; \quad m = 1, 2, \quad (3.7)$$

donde $\delta [y_i]_j$ son pequeñas correcciones a las autofunciones y_i en el punto j de la grilla, y $\delta \lambda$ es la corrección al autovalor λ . B_k , G_i^j , y C_m son los valores de las ecuaciones en diferencias evaluadas en la solución a ser mejorada iterativamente. Obviamente, todas ellas deben ser cero cuando son evaluadas con la solución exacta.

³Las primeras dos de estas ecuaciones son las llamadas “condiciones de borde cero”, las cuales emplearemos en el tratamiento de pulsaciones en polítopos. En el caso de modelos realistas de enanas simplemente reemplazamos la primer ecuación por la expresión (Unno et al. 1989)

$$y_1 \left[1 + \left(\frac{\ell(\ell+1)}{\omega^2} - 4 - \omega^2 \right) \frac{1}{V} \right] - y_2 + y_3 \left[1 + \left(\frac{\ell(\ell+1)}{\omega^2} - \ell - 1 \right) \frac{1}{V} \right] = 0.$$

evaluada en $j = 1$.

Ahora tenemos que invertir una gran matriz la cual tiene elementos no nulos sólo en bloques localizados sobre la diagonal y en la última columna (correspondiente a las derivadas con respecto al autovalor). Nótese que esta es una importante diferencia en comparación con el caso de evolución estelar. Por lo tanto necesitamos un algoritmo específico para invertir la matriz y obtener las correcciones.

Evaluando la Ecuación (3.5) para $k = 1, 2, 3$ y la Ecuación (3.6) para $i = 1, 2, 3, 4$ y $j = 1$, podemos escribir el primer bloque de la matriz como

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial B_1}{\partial [y_1]_1} & \cdots & \cdots & \frac{\partial B_1}{\partial [y_4]_1} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial B_2}{\partial [y_1]_1} & \cdots & \cdots & \frac{\partial B_2}{\partial [y_4]_1} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial B_3}{\partial [y_1]_1} & \cdots & \cdots & \frac{\partial B_3}{\partial [y_4]_1} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial G_1^1}{\partial [y_1]_1} & \cdots & \cdots & \frac{\partial G_1^1}{\partial [y_4]_1} & \frac{\partial G_1^1}{\partial [y_1]_2} & \frac{\partial G_1^1}{\partial [y_2]_2} & \frac{\partial G_1^1}{\partial [y_3]_2} \\ \vdots & \ddots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial G_4^1}{\partial [y_1]_1} & \cdots & \cdots & \frac{\partial G_4^1}{\partial [y_4]_1} & \frac{\partial G_4^1}{\partial [y_1]_2} & \frac{\partial G_4^1}{\partial [y_2]_2} & \frac{\partial G_4^1}{\partial [y_3]_2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \delta [y_1]_1 \\ \delta [y_2]_1 \\ \delta [y_3]_1 \\ \delta [y_4]_1 \\ \delta [y_1]_2 \\ \delta [y_2]_2 \\ \delta [y_3]_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\partial B_1}{\partial \lambda} & -B_1 \\ 0 & -\frac{\partial B_2}{\partial \lambda} & -B_2 \\ 0 & -\frac{\partial B_3}{\partial \lambda} & -B_3 \\ -\frac{\partial G_1^1}{\partial [y_4]_2} & -\frac{\partial G_1^1}{\partial \lambda} & -G_1^1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ -\frac{\partial G_4^1}{\partial [y_4]_2} & -\frac{\partial G_4^1}{\partial \lambda} & -G_4^1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \delta [y_4]_2 \\ \delta \lambda \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (3.8)$$

Ahora definimos vectores U_s, V_s, W_s , ($s = 1, \dots, 4N - 5$) de tal forma que podemos escribir

$$\begin{bmatrix} \delta [y_1]_1 \\ \delta [y_2]_1 \\ \delta [y_3]_1 \\ \delta [y_4]_1 \\ \delta [y_1]_2 \\ \delta [y_2]_2 \\ \delta [y_3]_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_1 & V_1 & W_1 \\ U_2 & V_2 & W_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ U_7 & V_7 & W_7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \delta [y_4]_2 \\ \delta \lambda \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

para este bloque. Los coeficientes de estos vectores pueden ser calculados fácilmente resolviendo

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial B_1}{\partial [y_1]_1} & \cdots & \cdots & \frac{\partial B_1}{\partial [y_4]_1} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial B_2}{\partial [y_1]_1} & \cdots & \cdots & \frac{\partial B_2}{\partial [y_4]_1} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial B_3}{\partial [y_1]_1} & \cdots & \cdots & \frac{\partial B_3}{\partial [y_4]_1} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial G_1^1}{\partial [y_1]_1} & \cdots & \cdots & \frac{\partial G_1^1}{\partial [y_4]_1} & \frac{\partial G_1^1}{\partial [y_1]_2} & \frac{\partial G_1^1}{\partial [y_2]_2} & \frac{\partial G_1^1}{\partial [y_3]_2} \\ \vdots & \ddots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial G_4^1}{\partial [y_1]_1} & \cdots & \cdots & \frac{\partial G_4^1}{\partial [y_4]_1} & \frac{\partial G_4^1}{\partial [y_1]_2} & \frac{\partial G_4^1}{\partial [y_2]_2} & \frac{\partial G_4^1}{\partial [y_3]_2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_1 & V_1 & W_1 \\ U_2 & V_2 & W_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ U_7 & V_7 & W_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\partial B_1}{\partial \lambda} & -B_1 \\ 0 & -\frac{\partial B_2}{\partial \lambda} & -B_2 \\ 0 & -\frac{\partial B_3}{\partial \lambda} & -B_3 \\ -\frac{\partial G_1^1}{\partial [y_4]_2} & -\frac{\partial G_1^1}{\partial \lambda} & -G_1^1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ -\frac{\partial G_4^1}{\partial [y_4]_2} & -\frac{\partial G_4^1}{\partial \lambda} & -G_4^1 \end{bmatrix}. \quad (3.10)$$

A partir de la Ecuación (3.6), y después de una breve manipulación algebraica, podemos escribir un bloque arbitrario de la gran matriz (excepto el central) en la forma:

$$\begin{bmatrix} \delta [y_4]_j \\ \delta [y_1]_{j+1} \\ \delta [y_2]_{j+1} \\ \delta [y_3]_{j+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_{4j} & V_{4j} & W_{4j} \\ U_{4j+1} & V_{4j+1} & W_{4j+1} \\ U_{4j+2} & V_{4j+2} & W_{4j+2} \\ U_{4j+3} & V_{4j+3} & W_{4j+3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \delta [y_4]_{j+1} \\ \delta \lambda \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (3.11)$$

donde $j = 2, \dots, N-2$. Ahora, los coeficientes de los vectores U_s, V_s, W_s pueden ser evaluados resolviendo el sistema

$$\begin{bmatrix} \alpha_1^j & \frac{\partial G_1^j}{\partial [y_1]_{j+1}} & \frac{\partial G_1^j}{\partial [y_2]_{j+1}} & \frac{\partial G_1^j}{\partial [y_3]_{j+1}} \\ \alpha_2^j & \frac{\partial G_2^j}{\partial [y_1]_{j+1}} & \frac{\partial G_2^j}{\partial [y_2]_{j+1}} & \frac{\partial G_2^j}{\partial [y_3]_{j+1}} \\ \alpha_3^j & \frac{\partial G_3^j}{\partial [y_1]_{j+1}} & \frac{\partial G_3^j}{\partial [y_2]_{j+1}} & \frac{\partial G_3^j}{\partial [y_3]_{j+1}} \\ \alpha_4^j & \frac{\partial G_4^j}{\partial [y_1]_{j+1}} & \frac{\partial G_4^j}{\partial [y_2]_{j+1}} & \frac{\partial G_4^j}{\partial [y_3]_{j+1}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_{4j} & V_{4j} & W_{4j} \\ U_{4j+1} & V_{4j+1} & W_{4j+1} \\ U_{4j+2} & V_{4j+2} & W_{4j+2} \\ U_{4j+3} & V_{4j+3} & W_{4j+3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\partial G_1^j}{\partial [y_4]_{j+1}} & -\beta_1^j & -\gamma_1^j \\ -\frac{\partial G_2^j}{\partial [y_4]_{j+1}} & -\beta_2^j & -\gamma_2^j \\ -\frac{\partial G_3^j}{\partial [y_4]_{j+1}} & -\beta_3^j & -\gamma_3^j \\ -\frac{\partial G_4^j}{\partial [y_4]_{j+1}} & -\beta_4^j & -\gamma_4^j \end{bmatrix}, \quad (3.12)$$

donde las cantidades $\alpha_i^j, \beta_i^j, \gamma_i^j$ estan definidas como

$$\begin{aligned} \alpha_i^j &= \frac{\partial G_i^j}{\partial [y_4]_j} + U_{4j-3} \frac{\partial G_i^j}{\partial [y_1]_j} + U_{4j-2} \frac{\partial G_i^j}{\partial [y_2]_j} + U_{4j-1} \frac{\partial G_i^j}{\partial [y_3]_j}, \\ \beta_i^j &= \frac{\partial G_i^j}{\partial \lambda} + V_{4j-3} \frac{\partial G_i^j}{\partial [y_1]_j} + V_{4j-2} \frac{\partial G_i^j}{\partial [y_2]_j} + V_{4j-1} \frac{\partial G_i^j}{\partial [y_3]_j}, \\ \gamma_i^j &= G_i^j + W_{4j-3} \frac{\partial G_i^j}{\partial [y_1]_j} + W_{4j-2} \frac{\partial G_i^j}{\partial [y_2]_j} + W_{4j-1} \frac{\partial G_i^j}{\partial [y_3]_j}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

con $i = 1, 2, 3, 4$.

Finalmente, en el punto central del modelo, tenemos $j = N-1$ en la Ecuación Eq. (3.6) y $m = 1, 2$ en (3.7). Es fácil mostrar que el último bloque de la gran matriz puede ser escrito como

$$\begin{bmatrix} \alpha_1^{N-1} & \frac{\partial G_1^{N-1}}{\partial [y_1]_N} & \frac{\partial G_1^{N-1}}{\partial [y_2]_N} & \frac{\partial G_1^{N-1}}{\partial [y_3]_N} & \frac{\partial G_1^{N-1}}{\partial [y_4]_N} & \beta_1^{N-1} \\ \alpha_2^{N-1} & \frac{\partial G_2^{N-1}}{\partial [y_1]_N} & \frac{\partial G_2^{N-1}}{\partial [y_2]_N} & \frac{\partial G_2^{N-1}}{\partial [y_3]_N} & \frac{\partial G_2^{N-1}}{\partial [y_4]_N} & \beta_2^{N-1} \\ \alpha_3^{N-1} & \frac{\partial G_3^{N-1}}{\partial [y_1]_N} & \frac{\partial G_3^{N-1}}{\partial [y_2]_N} & \frac{\partial G_3^{N-1}}{\partial [y_3]_N} & \frac{\partial G_3^{N-1}}{\partial [y_4]_N} & \beta_3^{N-1} \\ \alpha_4^{N-1} & \frac{\partial G_4^{N-1}}{\partial [y_1]_N} & \frac{\partial G_4^{N-1}}{\partial [y_2]_N} & \frac{\partial G_4^{N-1}}{\partial [y_3]_N} & \frac{\partial G_4^{N-1}}{\partial [y_4]_N} & \beta_4^{N-1} \\ 0 & \frac{\partial C_1}{\partial [y_1]_N} & \frac{\partial C_1}{\partial [y_2]_N} & \frac{\partial C_1}{\partial [y_3]_N} & \frac{\partial C_1}{\partial [y_4]_N} & \frac{\partial C_1}{\partial \lambda} \\ 0 & \frac{\partial C_2}{\partial [y_1]_N} & \frac{\partial C_2}{\partial [y_2]_N} & \frac{\partial C_2}{\partial [y_3]_N} & \frac{\partial C_2}{\partial [y_4]_N} & \frac{\partial C_2}{\partial \lambda} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \delta [y_4]_{N-1} \\ \delta [y_1]_N \\ \delta [y_2]_N \\ \delta [y_3]_N \\ \delta [y_4]_N \\ \delta \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\gamma_1^{N-1} \\ -\gamma_2^{N-1} \\ -\gamma_3^{N-1} \\ -\gamma_4^{N-1} \\ -C_1 \\ -C_2 \end{bmatrix}. \quad (3.14)$$

En este caso las cantidades $\alpha_i^{N-1}, \beta_i^{N-1}, \gamma_i^{N-1}$ son evaluadas a partir de las Ecuaciones (3.13) en $j = N-1$.

Notemos que la Ecuación (3.14) puede ser resuelta con el objeto de obtener las correcciones para las autofunciones y_1, y_2, y_3 y y_4 en el punto central de la grilla, y para el autovalor λ . También, nótese que la corrección en la autofunción y_4 correspondiente al punto inmediatamente externo de la malla es obtenido. Esta corrección, digamos $\delta [y_4]_{N-1}$, sirve como “acoplamiento” entre los puntos N y $N-1$. En efecto, podemos usar la Ecuación (3.11) con $j = N-2$ para obtener el resto de las correcciones correspondientes a las autofunciones en el punto $N-1$ de la grilla. A continuación, el empleo de este procedimiento para sucesivos valores decrecientes de j (en Ecuación 3.11) usando $\delta [y_4]_{j+1}$ como acoplamiento entre las cantidades correspondientes a puntos consecutivos, así como también la Ecuación (3.9), conduce a encontrar las correcciones para el autovalor y las autofunciones para el modelo completo. Estas correcciones son aplicadas a la solución inicial y el algoritmo es empleado iterativamente hasta el estado en el cual todas las correcciones (el valor absoluto de ellas) son menores que algún valor previamente adoptado. En este punto,

el set completo de ecuaciones en diferencia representando las ecuaciones diferenciales (A.52-A.55) ha sido resuelto.

Con el objeto de encontrar una primer aproximación a las autofunciones y el autovalor de un modo, hemos aplicado el método del discriminante presentado en Unno et al. (1989). Específicamente, la expresión adoptada como discriminante es $D(\omega^2) = (\ell + 1) [y_3]_1 + [y_4]_1$. Nótese que $D(\omega^2) = 0$ corresponde exactamente a la segunda de las condiciones de borde externas (3.3). Referimos al lector al libro de Unno et al. (1989) para más detalles.

Obviamente, para aplicar esta técnica necesitamos definir una grilla con una distribución apropiada de puntos, y para esto hemos empleado un procedimiento simple. Como una primer aproximación a la solución de las ecuaciones de pulsación, calculamos las autofunciones y el autovalor tomando la grilla de puntos en la cual está definido el modelo en equilibrio. Después de la convergencia, redistribuimos los puntos de la grilla utilizando el mismo criterio usualmente empleado en evolución estelar (Kippenhahn, Weigert & Hofmeister 1967): la variación relativa de cada autofunción dentro de una zona debe ser menor que algún límite de tolerancia preestablecido. Si es necesario, nuestro programa agrega o elimina puntos de la grilla, usando interpolación spline sobre las cantidades del modelo en equilibrio, e interpolación lineal en las autofunciones, ya que éstas son mejoradas posteriormente en la etapa iterativa.

Los esquemas descriptos han sido programados en lenguaje FORTRAN 77.

3.2 Código de evolución-pulsación

Una posible forma de calcular modos de oscilación en modelos evolutivos es primero calcular tales estructuras con un código evolutivo y luego elegir un subconjunto de tales modelos (usualmente correspondientes a un intervalo en T_{eff} predeterminado) para analizarlos pulsacionalmente. Este procedimiento ha sido empleado en la mayoría de los estudios de pulsaciones adiabáticas en enanas blancas (ver, por ejemplo, Tassoul, Fontaine & Winget 1990, Bradley 1996, Brassard et al. 1992a, 1992b) hasta el presente.

Aquí presentamos una manera alternativa para calcular modos no-radiales en secuencias evolutivas. La idea básica es muy simple: si el paso de tiempo en la secuencia evolutiva es suficientemente pequeño, los autovalores y autofunciones correspondientes a un dado modelo deberían ser muy similares a aquellos correspondientes al modelo previo. Entonces, si acoplamos el código de pulsaciones al código evolutivo, es posible evitar el barrido en ω^2 para cada modelo: la búsqueda de modos es realizada *una sola vez*, para el primer modelo dentro del intervalo relevante en T_{eff} . Los modos son calculados y almacenados y sirven como solución inicial aproximada para el siguiente modelo. De esta forma es posible economizar tiempo de CPU, y (mas importante aún) es posible seguir los cambios en el espectro de pulsaciones debido a la evolución de la estructura estelar en forma continua.

3.2.1 Funcionamiento del código de evolución-pulsación

A continuación describimos cómo nuestro código de pulsación y evolución funcionan juntos. En primer lugar, un intervalo en T_{eff} es elegido, así como también la ventana en frecuencias a ser barrida. El código evolutivo calcula los modelos hasta

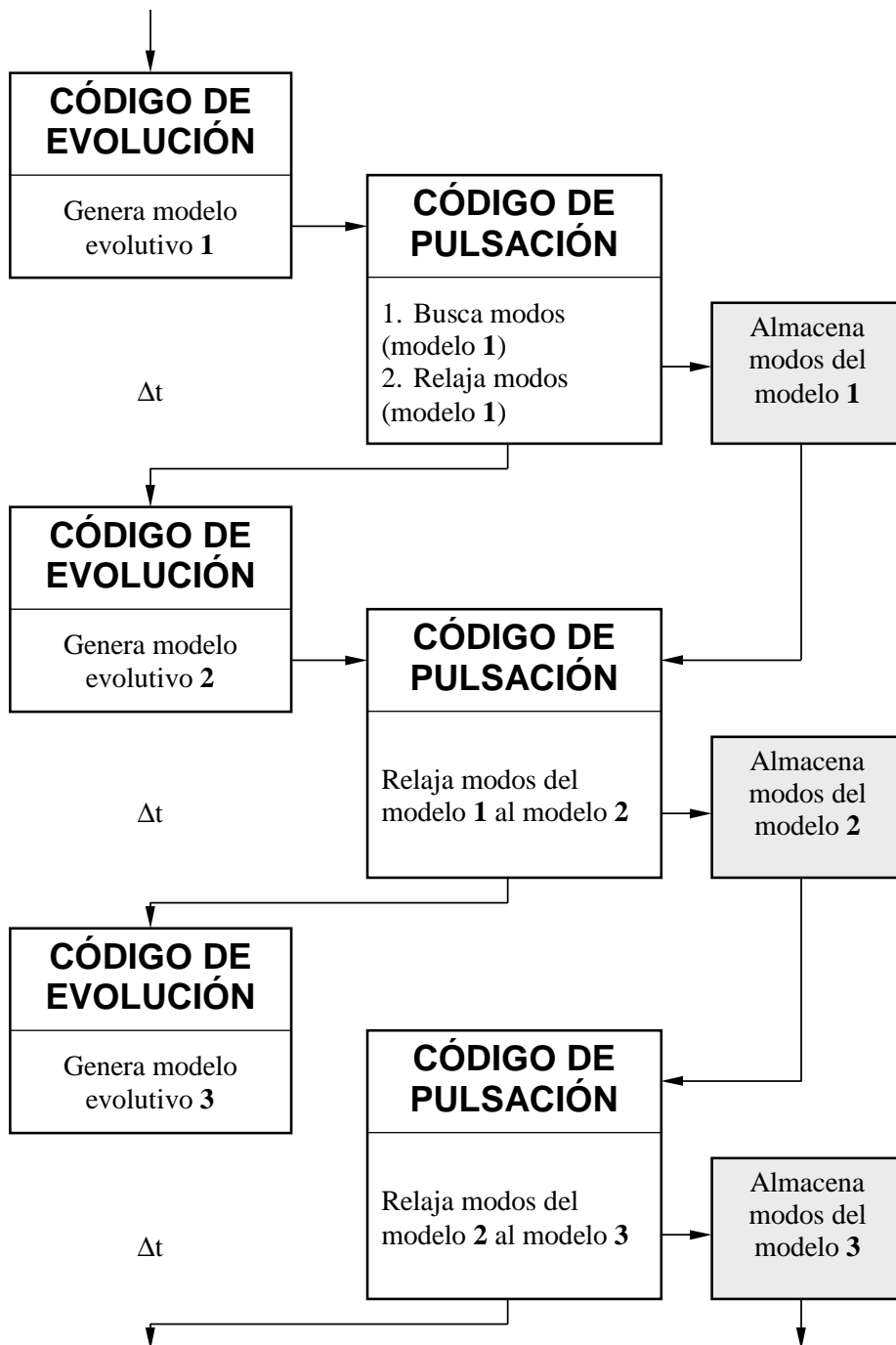


Figura 3.1: Diagrama esquemático ilustrando el funcionamiento conjunto de los códigos de evolución y pulsación. Nótese que la búsqueda de modos es llevada a cabo sólo en el primer modelo del intervalo de interés en T_{eff} ("modelo evolutivo 1"). A partir de ahí los modos encontrados van siendo gradualmente recalculados para los modelos posteriores de la secuencia, empleando en cada oportunidad los modos del modelo anterior como solución inicial a los del modelo actual. La única condición requerida es que el paso de tiempo evolutivo adoptado (Δt) sea lo suficientemente pequeño de forma tal que la solución correspondiente a modelos consecutivos no difiera notablemente.

el momento en que el borde caliente del intervalo en T_{eff} es alcanzado. Entonces el programa llama a la rutina que busca los modos y comienza a barrer el intervalo en frecuencias, en la forma descrita en la Sección anterior (método del discriminante). Cuando un modo es encontrado, el programa genera una solución aproximada para y_i ; $i = 1, \dots, 4$ y ω^2 , la cual es entonces mejorada iterativamente. La calidad de esta solución es evaluada, y si es necesario, los puntos de la malla son redistribuidos como fue descrito en la Sección anterior, y luego iterada hasta la convergencia. Antes de mejorar la solución, los modos han sido almacenados sobre la malla original en un bloque `common`, con el objeto de ser empleados como una solución aproximada para el siguiente modelo estelar de la secuencia. Una vez que el cálculo del modo es terminado, el programa comienza a buscar modos nuevamente, y el procedimiento es repetido hasta que la ventana de frecuencias esté completamente barrida. De esta forma el programa ha terminado de calcular todos los modos correspondientes al intervalo de frecuencias para el primer modelo correspondiente al intervalo en T_{eff} y cada uno de los modos está ahora almacenado en la memoria de la computadora. A continuación el código evolutivo genera el siguiente modelo estelar y el programa llama a la rutina de pulsaciones, pero esta vez la búsqueda de modos no es realizada. En vez de esto, los modos almacenados (autovalores y autofunciones de cada modo) son tomados como entrada al esquema Newton-Rhapson para aproximar los modos del presente modelo estelar. Luego la solución es mejorada con el procedimiento descrito. El proceso completo es repetido automáticamente para todos los modelos evolutivos dentro del intervalo en T_{eff} . Cuando el modelo estelar se torna más frío que el mínimo del intervalo en T_{eff} , el cálculo es terminado.

En términos de CPU, una gran fracción del tiempo de cálculo es invertido en la búsqueda de los modos, pero este paso es ejecutado una sola vez. El proceso de relajación y mejoramiento de los modos es mucho más rápido, y el cálculo de cada modelo estelar es casi instantáneo.

En la figura 3.1 proporcionamos un diagrama esquemático ilustrando la forma en que opera nuestro código de evolución-pulsación.

3.3 Tests

3.3.1 Oscilaciones no-radiales en Polítropas

Como un primer test, hemos aplicado nuestro código de pulsaciones al caso bien documentado de las pulsaciones no-radiales en esferas politrópicas. Esta elección es adecuada para nuestros propósitos, debido a que la estructura politrópica puede calcularse con mucha precisión. De esta forma, podemos aislar las inexactitudes propias del cálculo de pulsaciones, que son las que nos interesa evaluar. En particular hemos calculado modos p , g y f de polítropas con índices $n = 1.5, 2, 2.5, 3, 3.5$ y 4 para los casos $\ell = 2, 3$ y 4 .

En el caso de las polítropas, los coeficientes de las ecuaciones diferenciales que dependen del modelo en equilibrio (Ecuaciones A.56-A.59 del Apéndice A) adoptan

una forma muy simple:

$$\begin{aligned}
 U &= -\frac{r\phi^n}{\phi'}, \\
 V &= -\frac{n+1}{\Gamma_1} \frac{r\phi'}{\phi}, \\
 C_1 &= \frac{r\phi'_1}{\phi}, \\
 A^* &= \left(\frac{n+1}{\Gamma_1} - n\right) \frac{r\phi'}{\phi}.
 \end{aligned}
 \tag{3.15}$$

En nuestros cálculos consideramos $\Gamma_1 = 5/3$. La función ϕ satisface la ecuación de Lane-Emden (ver, por ejemplo, Chandrasekhar 1939), y satisface las siguientes condiciones de borde en el centro:

$$\phi = 1; \quad \phi' = 0, \tag{3.16}$$

y en la superficie:

$$\phi = 0. \tag{3.17}$$

La estructura politrópica ha sido integrada por medio de una técnica Runge-Kutta (Press et al. 1992).

Para buscar los modos hemos calculado el discriminante $D(\omega^2)$ en la forma descrita antes. En el caso de $D(\omega^2) = 0$ estamos ante la presencia de un modo. En la práctica, cuando para dos valores consecutivos de ω^2 el discriminante $D(\omega^2)$ cambia su signo, por medio de una interpolación lineal obtenemos una excelente aproximación inicial para la autofrecuencia exacta.

Para comparar nuestros autovalores con aquellos disponibles en la literatura hemos empleado el trabajo de Christensen-Dalsgaard & Mullan (1994) en el cual se presentan tablas de autovalores muy precisos para una variedad de esferas politrópicas. Para tal fin hemos graficado en la Figura 3.2 la diferencia relativa $(\omega^2 - \omega_{Ch-D}^2) / \omega_{Ch-D}^2$ para los casos de modos p para $n = 1.5, 3$ y $\ell = 2, 3$, modos g para $n = 3$ y $\ell = 2, 3, 4$, y también para modos p para $n = 4$ y $\ell = 2, 3$.

La comparación indica que cuanto mayor es el orden radial del modo mayor es la diferencia relativa con respecto a los resultados de Christensen-Dalsgaard & Mullan (1994), sin dependencia apreciable con el valor de ℓ . Las diferencias relativas encontradas en los autovalores son $\lesssim 4 \times 10^{-4}$, excepto en el caso de $n = 3$ para los modos g , en el cual las diferencias son $\lesssim 2 \times 10^{-3}$. Dado que los cálculos de Christensen-Dalsgaard & Mullan (1994) tienen una precisión de $\sim 10^{-8}$, concluimos que nuestro programa es capaz de calcular los autovalores de polítropas con una precisión de $\sim 10^{-3}$.

En las Tablas D.1 a D.6 del Apéndice D presentamos autovalores de polítropas con $n = 1.5, 2, 2.5, 3, 3.5$ y 4 para modos p, g y f en los casos $\ell = 2, 3$ y 4 .

3.3.2 Oscilaciones no-radiales en enanas blancas de helio - Comportamiento asintótico

Con el objeto de investigar el comportamiento del código de pulsaciones cuando éste es aplicado a modelos estelares realistas, en esta sección consideraremos el cálculos de modos g en modelos evolutivos de enanas blancas de helio de baja masa. El principal motivo para evaluar el funcionamiento del código en estos modelos es que son estructuras *químicamente homogéneas*, y como tales, los períodos de oscilación de

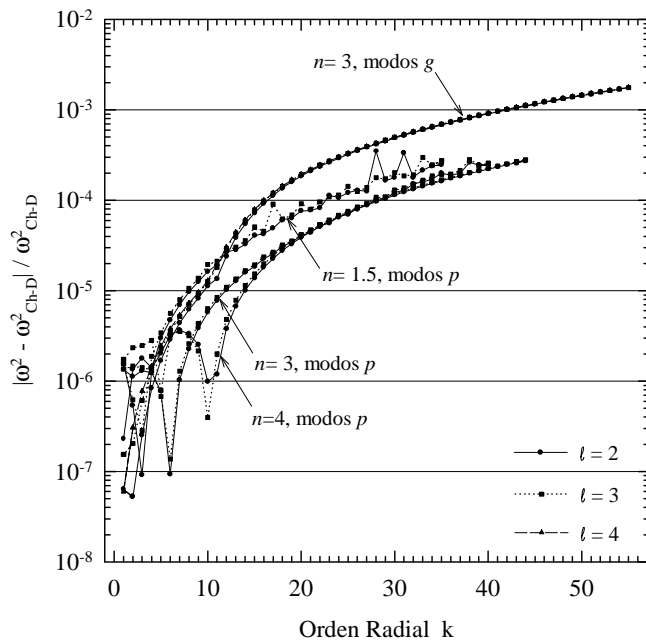


Figura 3.2: Diferencias relativas (en valor absoluto) del cuadrado de la autofrecuencia entre nuestros resultados y los cálculos de Christensen-Dalsgaard & Mullan (1994). Los casos mostrados son para polítopos con $n = 1.5, 3$ y 4 , con $\ell = 2$ (círculos), $\ell = 3$ (cuadrados) y $\ell = 4$ (triángulos). Con propósitos de claridad, los puntos correspondientes a modos del mismo grado ℓ están conectados con líneas. Nótese que las diferencias relativas entre ambos conjuntos de cálculos son mayores cuanto mayor es el orden k del modo (esto es, cuando las autofunciones son más fuertemente oscilantes).

los modos g deben estar igualmente espaciados en el límite de alto orden k , como es predicho por la teoría asintótica (ver Sección 1.2.3 y Sección 1.4.4 de la Introducción). Así, los cálculos de modos g en este tipo de modelos nos proporciona la posibilidad de comprobar esta predicción. Por otra parte, dado que hasta el momento no hay ningún estudio disponible en la literatura sobre las propiedades de pulsación de enanas blancas compuestas puramente de helio, la única manera que tenemos de evaluar nuestros resultados es a través de la teoría asintótica.

Específicamente, hemos llevado a cabo nuestros cálculos de pulsación en modelos con masa $M_* = 0.3M_\odot$, en el rango $5000 \leq T_{\text{eff}} \leq 25000$ K. La secuencia completa comprende 216 modelos analizados. La convección, presente en las capas externas de nuestros modelos, es tratada empleando la versión ML3 de la MLT (ver Tassoul, Fontaine & Winget 1990). Para los cálculos hemos empleado el código de evolución acoplado al de pulsación, como fue descrito en la Sección 3.2. Ya que nuestro interés aquí es evaluar el funcionamiento del código de pulsación a través del comportamiento asintótico de los períodos, hemos calculado para cada modelo modos g para $\ell = 1, 2$ y 3 con orden radial alcanzando valores suficientemente altos ($k = 1$ hasta $k = 50$) como para poder comparar con la predicción teórica de Tassoul (1980).

Para cada modo calculado, las cantidades de interés son el período P_k , las autofunciones $y_i; i = 1, \dots, 4$ (ver Apéndice A para su definición) y la energía cinética de oscilación, $(E_{\text{kin}})_k$, dada por

$$(E_{\text{kin}})_k = \frac{1}{2}(GM_*R_*^2)\omega_k^2 \int_0^1 x^2 \rho \left[x^2 y_1^2 + x^2 \frac{\ell(\ell+1)}{(C_1 \omega_k^2)^2} y_2^2 \right] dx, \quad (3.18)$$

También calculamos para cada modo la función de peso, wf , dada por

$$wf = (4\pi GR_*^2) \frac{x^2 \rho^2}{U} \left[A^* y_1^2 + V_g (y_2 - y_3)^2 - \frac{1}{U} \{ \ell(\ell+1) y_3 + y_4 \}^2 \right] \quad (3.19)$$

y el período variacional, P_k^v , definido como (ver Kawaler, Hansen & Winget 1985 para detalles acerca de la importancia de esta cantidad)

$$P_k^v = \sqrt{\frac{8\pi^2}{GM_*}} \frac{(E_{\text{kin}})_k^{1/2}}{\omega_k} \left[\int_0^1 wf x^2 dx \right]^{-1/2} \quad (3.20)$$

Las cantidades V_g , U , C_1 y A^* son adimensionales, y están definidas por las Ecuaciones (A.56) a (A.59) del Apéndice A. La función de peso proporciona la localización de las zonas del modelo que mayormente contribuyen a la formación del período de un dado modo de pulsación, y ha sido empleada por numerosos autores en estudios de estrellas pulsantes en general (Epstein 1950, Goossens & Smeyers 1974, Schwank 1976), y en el contexto de enanas blancas pulsantes en particular (Kawaler, Hansen & Winget 1985, Brassard et al. 1992ab). En nuestro caso empleamos la función de peso normalizada, esto es $wf/(wf)_{\text{max}}$, con lo cual esta función adopta valores entre 0 y 1. Finalmente, para cada modelo obtenemos el espaciamiento asintótico de períodos, ΔP_ℓ^A , definido por las Ecuaciones (1.8) y (1.9). De la misma manera que en Tassoul, Fontaine & Winget (1990), para calcular P_0 (Ecuación 1.9) hemos ignorado la presencia de una zona convectiva externa, integrando desde el centro hasta la superficie del modelo pero fijando $N = 0$ en la zona convectiva donde $N^2 < 0$. Con esta aproximación estamos sobreestimando el valor de ΔP_ℓ^A , pero debido a que el espesor (en la coordenada r) de la zona convectiva externa es muy pequeño, esta es una muy buena aproximación.

Los resultados obtenidos para $\ell = 1, 2, 3$ son cualitativamente muy similares. Aunque no han sido observadas pulsaciones en enanas blancas de helio, en otras clases de enanas blancas pulsantes (DAVs, DBVs y pre-enanas blancas variables) los modos con $\ell = 1$ son los que mayormente se observan, por lo cual aquí nos concentraremos en los resultados para $\ell = 1$. En la Figura 3.3 hemos graficado la autofunción y_1 para los modos g_1, \dots, g_5 con $\ell = 1, 2$, para un modelo con $T_{\text{eff}} = 11900$ K. En esta figura hemos empleado la coordenada radial $x = r/R_*$ con el propósito de mostrar claramente las autofunciones en el centro del modelo. A partir de la figura es evidente que y_1 tiene grandes amplitudes en toda la estrella, pero especialmente en el núcleo. Este rasgo es mas pronunciado a medida que examinamos modos con k cada vez mayor. Esto constituye una gran diferencia en el comportamiento de y_1 en comparación con el caso de las DAVs y las DBVs. En modelos de ese tipo de enanas blancas pulsantes y_1 tiene amplitudes centrales bajas (ver, por ejemplo, las Figuras 14a y 16a of Brassard et al. 1992b, en el caso de un modelo de enana blanca DA de $0.6M_\odot$).

En la Figura 3.4 mostramos la función de peso normalizada (wf) para los modos g_1, \dots, g_5 ($\ell = 1$) del mismo modelo que en Figura 3.3. El gráfico indica que la regiones de formación de períodos están localizadas principalmente en las regiones externas de la estrella, donde wf es grande. Sin embargo, hay importantes contribuciones de las regiones centrales entre $0.1 \lesssim x \lesssim 0.7$, y este comportamiento es algo diferente al de las funciones de peso de correspondientes al caso de las DAVs y DBVs, en las cuales wf sólo muestra valores apreciables en la envoltura estelar (ver Figuras 15 y 17 of Brassard et al. 1992b).

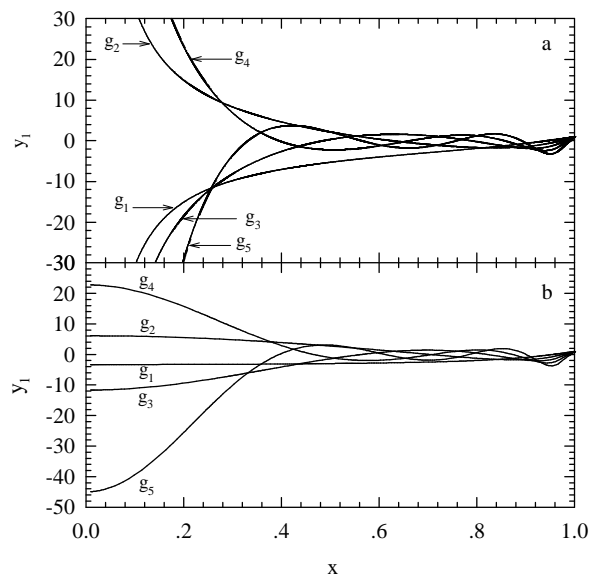


Figura 3.3: **a.** La autofunción y_1 para los modos g_1, \dots, g_5 con $\ell = 1$, correspondientes a un modelo de enana blanca de $0.3 M_{\odot}$ de helio puro con $T_{\text{eff}} = 11900$ K. Nótese las grandes amplitudes de tales modos en el núcleo estelar. **b.** Igual que para el panel **a.**, pero para el caso $\ell = 2$.

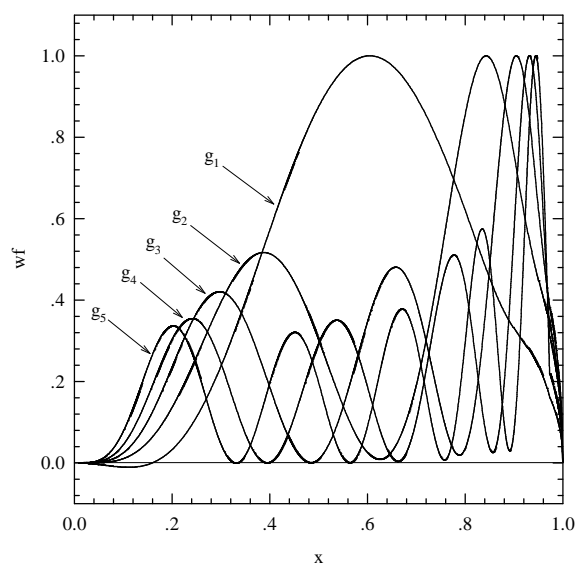


Figura 3.4: La función de peso normalizada (wf) correspondiente a los mismos modos incluídos en Figura 3.3a.

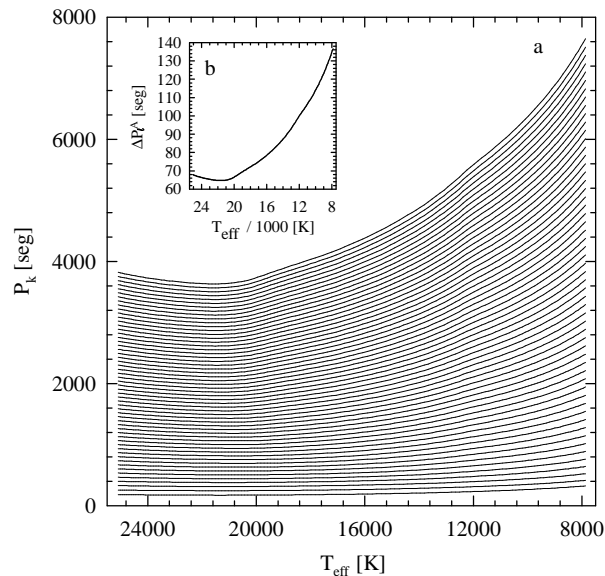


Figura 3.5: **a.** Períodos de modos dipolares ($\ell = 1$) con orden radial desde $k = 1$ hasta $k = 56$ y **b.** el espaciado asintótico de períodos ΔP_ℓ^A predicho por la teoría de Tassoul (1980) en función de la temperatura efectiva. Nótese que los períodos de los modos de alto orden tienen un comportamiento muy similar comparados con ΔP_ℓ^A durante el enfriamiento de la enana blanca.

A continuación discutiremos los resultados concernientes a períodos y energías cinéticas. Los períodos calculados muestran el comportamiento esperado en los modos g , con valores crecientes con el orden radial k . Dado que nuestros cálculos cubren un amplio rango en T_{eff} , es posible inferir la dependencia de los períodos con la temperatura efectiva durante el enfriamiento de la enana blanca. Es importante mencionar que hemos calculado la frecuencia de Brunt-Väisälä como en Tassoul, Fontaine & Winget (1990), en vez de usar su definición (Ecuación A.43 del Apéndice A). Hemos encontrado que la frecuencia de Brunt-Väisälä decrece a medida que el modelo se enfría, un rasgo que es muy pronunciado en el núcleo. Esto es debido al aumento de la degeneración en esa región, lo cual provoca un mayor desacoplamiento entre la presión y la temperatura. Como consecuencia del decrecimiento en N los períodos se incrementan monótonamente, cosa que es muy clara a partir de la Figura 3.5.

Consideremos ahora que sucede con la energía cinética de oscilación $(E_{\text{kin}})_k$ de los modos. Hemos encontrado que, como es esperable en una estrella químicamente homogénea, $(E_{\text{kin}})_k$ es una función suave de k , y así del período. En la Figura 3.6 mostramos $\log(E_{\text{kin}})_k$ en función de T_{eff} para los modelos incluidos en Figura 3.5. Para los modelos más calientes es claro que los modos más energéticos son los de bajo orden, debido a que ellos penetran hasta regiones muy profundas de la estrella, donde la densidad es alta. Sin embargo, cuando T_{eff} cae por debajo de ~ 20000 K la energía de los modos de alto orden (los cuales están concentrados principalmente en la envoltura externa de la estrella) se incrementa fuertemente. La explicación a este efecto (ver Brassard et al. 1992b en el contexto de una enana blanca DA) reside en el hecho de que a tal valor de T_{eff} la zona convectiva externa de la estrella súbitamente

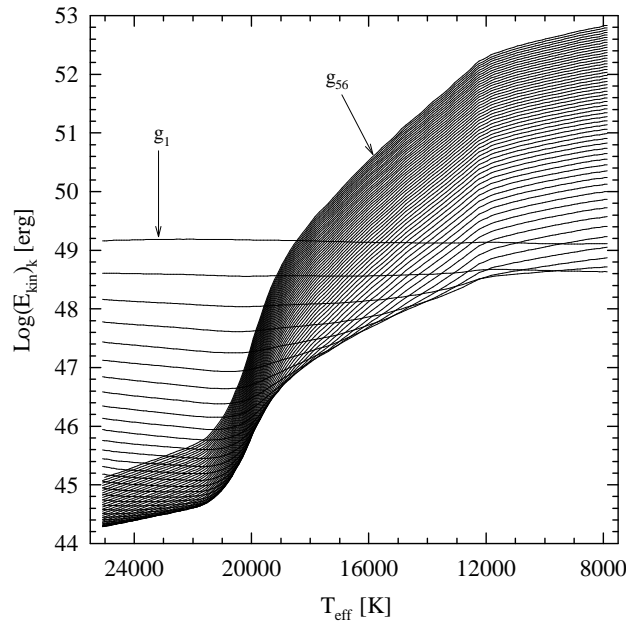


Figura 3.6: La energía cinética en función de la temperatura efectiva para los mismos modos con $\ell = 1$ incluidos en la Figura 3.5. La unidad de $(E_{\text{kin}})_k$ es ergios. La condición de normalización adoptada es $y_1 = 1$ en la superficie del modelo.

se ensancha. Los modos de alto orden que oscilan en la envoltura son afectados gradualmente por la presencia de la convección a medida que la estrella se enfría. Dado que en regiones convectivas los modos g se tornan evanescentes, tales modos son forzados a tener mayores amplitudes en las regiones inmediatamente por debajo de la zona convectiva, donde la densidad es mayor. Dado que la energía cinética es proporcional a la integral del cuadrado del desplazamiento, pesada por ρ (Ecuación 3.18), estos modos oscilan con mayores energías. En contraste con los modos de alto orden, los modos de bajo orden son prácticamente insensibles al ensanchamiento de la zona convectiva externa.

Ahora discutiremos el espaciado de períodos de orden radial consecutivo. Hasta el momento no existe en la literatura ningún estudio dedicado a pulsaciones no-radiales en enanas blancas de helio. Por este motivo no podemos hacer ninguna evaluación directa de nuestros resultados. Sin embargo podemos tener una buena idea del funcionamiento de nuestro código examinando el espaciado de períodos consecutivos y corroborando que exhiben el comportamiento predicho por la teoría asintótica (Ecuación 1.5 y también Ecuaciones 1.8 y 1.9). En la Figura 3.7 mostramos el espaciado de períodos hacia adelante, $\Delta P_k = P_{k+1} - P_k$ vs. el orden radial k para modelos con $T_{\text{eff}} = 13225, 11829$ y 9412 K. Como referencia también incluimos en la figura el correspondiente espaciado asintótico predicho por la teoría de Tassoul (1980). A partir de la Figura 3.7 es claro que el comportamiento de la solución numérica es el correcto.

Con el fin de obtener una estimación de la exactitud de nuestros resultados, hemos calculado los períodos variacionales para cada modo según Ecuación (3.20).

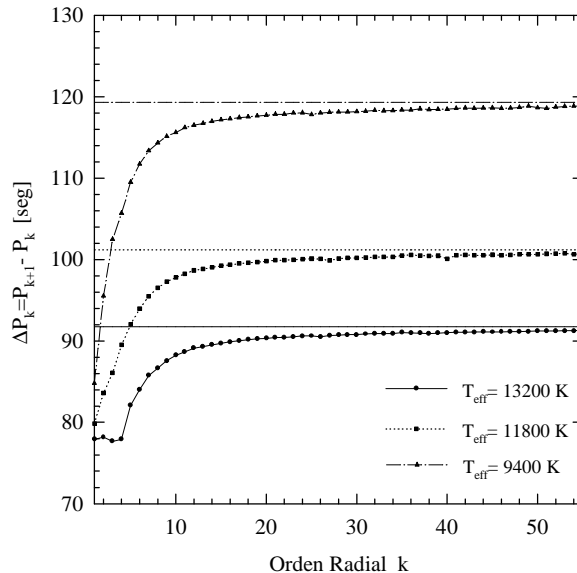


Figura 3.7: Espaciamento de períodos hacia adelante (ΔP_k) vs. orden radial, para modos con $\ell = 2$ para tres modelos con diferentes valores de T_{eff} . Los símbolos correspondientes a modos de la misma T_{eff} están conectados por claridad. Líneas horizontales corresponden al valor del espaciamento asintótico de períodos en cada temperatura efectiva de acuerdo a Tassoul (1980).

La comparación de los períodos numéricos y variacionales para los valores de ℓ considerados aquí dá una diferencia menor que $\approx 1\%$ en modos de bajo k , mientras que para k más altos la diferencia es significativamente mas pequeña.

3.3.3 Oscilaciones no-radiales en enanas blancas DA (WDEC)

Finalmente, comentaremos brevemente aquí que hemos evaluado el funcionamiento de nuestro código corriendo este sobre modelos para los cuales los modos de oscilación fueron previamente calculados con otro código de pulsación (Bradley 2000, comunicación privada). Específicamente, hemos empleado para tal test dos modelos de enanas blancas DA (núcleo de carbono-oxígeno y atmósfera de hidrógeno) de $0.5 M_{\odot}$ y $0.85 M_{\odot}$ calculados con el White Dwarf Evolutionary Code (WDEC; Bradley 1996) para los cuales sus propiedades pulsacionales fueron previamente analizadas (Bradley 1996). Para estos modelos, $M_{\text{H}}/M_{*} = 10^{-4}$ y $M_{\text{He}}/M_{*} = 10^{-2}$ y la temperatura efectiva es de $T_{\text{eff}} \approx 12500$ K. Este test resulta muy valioso dado que las posibles diferencias en los períodos de oscilación son debidas exclusivamente al empleo de diferentes códigos de pulsación. Considerando una gran cantidad de modos con períodos entre 100 y 1200 seg, hemos encontrado los resultados que figuran en la Tabla 3.1. Así, juzgamos que nuestro código produce resultados suficientemente exactos para nuestros propósitos aún en modelos realistas de enanas blancas estratificadas.

Tabla 3.1: Diferencias promedio $\langle |P_k - P_k^B|/P_k^B \rangle$ (%)

	$\ell = 1$	$\ell = 2$	$\ell = 3$
$M_* = 0.5M_\odot$	0.011	0.021	0.047
$M_* = 0.85M_\odot$	0.013	0.020	0.029

3.4 Aplicación: la DAV G117-B15A y la masa de los axiones

En recientes años, argumentos astrofísicos y cosmológicos junto con observaciones se han convertido en herramientas valiosas para obtener información empírica acerca de partículas elementales existentes (o aún hipotéticas) (Raffelt 2000). Esto se debe a que el medio denso de los interiores estelares constituye una potente fuente de partículas débilmente interactuantes de baja masa. Ya que estas partículas subsecuentemente escapan del interior de la estrella, esto constituye un mecanismo extra de pérdida de energía, modificando la evolución estelar, y así permitiendo una comparación con las observaciones. Esto es útil debido a que diferentes teorías físicas no-estandar dejan abierta la posibilidad de que varias partículas “exóticas” puedan existir. Además, para varias de estas partículas no existen aún experimentos de laboratorio capaces de imponer restricciones sobre su existencia. Entre otras partículas débilmente interactuantes, los *axiones* son los candidatos más promisorios como materia oscura no-bariónica (ver el artículo de revisión de Raffelt 2000). Los axiones fueron propuestos hace más de 20 años por Peccei & Quinn (1977), y tienen una pequeña masa de $m_{\text{ax}} = 0.60 \text{ eV } 10^7 (\text{GeV}/f_a)$, donde f_a es la denominada escala de Peccei-Quinn. La fenomenología de los axiones está determinada sólo por este número. Hay dos tipos de modelos de axiones: KVSZ (Kim 1979) y DFSZ (Dine et al. 1981).

Ninguna de las teorías acerca de los axiones proporciona el valor de la cantidad f_a , y así, los límites a la masa de los axiones deberían ser obtenidos experimentalmente. Sin embargo los experimentos con aceleradores de partículas han fallado, y algunos tipos de estrellas y en particular el sol han comenzado a ser utilizados para fijar la masa de estas partículas. Los límites a la masa de los axiones provienen de argumentos astrofísicos y el valor resulta estar entre 10^{-2} y 10^{-5} eV. La mayoría de los límites astrofísicos provienen de la interacción de los axiones con fotones (a través de la conversión Primakov: $\gamma \leftrightarrow a$ en el campo eléctrico de electrones y núcleos), con electrones (a través de procesos Compton: $\gamma + e^- \rightarrow e^- + a$ y procesos Bremsstrahlung: $e^- + (A, Z) \rightarrow e^- + (A, Z) + a$) o con nucleones. En el modelo DFSZ el acoplamiento de los axiones con los electrones es definida usando una constante de acoplamiento adimensional $g_{ae} = 2.83 \times 10^{-11} m_{\text{ax}} / \cos^2 \beta$, donde $\cos \beta$ es un parámetro que usualmente es fijado en la unidad.

Recientemente, Domínguez, Straniero & Isern (1999) han estudiado estrellas de la AGB y han concluido que las características de los pulsos térmicos después del agotamiento del He en el núcleo son modificadas por la inclusión de emisión de axiones, y que la masa del núcleo degenerado de carbono-oxígeno es mucho más baja cuando la emisión de axiones es tomada en cuenta. Las estrellas de la AGB son los progenitores de las enanas blancas, por lo cual las enanas blancas son excelentes candidatos para verificar la existencia de los axiones (Raffelt 1996). Otra razón

importante para esto es la relativa simplicidad de la física que gobierna la evolución de las enanas blancas, lo cual permite obtener modelos muy detallados que pueden satisfactoriamente ser comparados con sus propiedades observadas. Como hemos visto en la Introducción, existe una clase específica de enanas blancas denominadas estrellas ZZ Ceti o DAVs, con envolturas ricas en hidrógeno, las cuales muestran variaciones multiperíodicas en sus curvas de luz. El objeto G117-B15A pertenece a esta clase de estrellas, con períodos observados de 215.2, 271 y 304.4 seg junto con armónicos y combinaciones lineales de estos períodos, siendo el modo dominante el correspondiente al período de 215.2 seg. Como hemos mencionado antes, las variaciones en luminosidad son debidas a pulsaciones no-radiales en modos g . Para G117-B15A se ha podido medir el rate de cambio del período dominante, con un valor de $\dot{P} = (2.3 \pm 1.4) \times 10^{-15} \text{s s}^{-1}$ (Kepler et al. 2000). El rate de cambio del períodos está íntimamente relacionado con la escala de tiempo de enfriamiento, la cual puede ser calculada con mucha exactitud: esto ofrece una oportunidad única de detectar cualquier pérdida adicional de energía. Con este razonamiento, Isern, Hernanz & García-Berro (1992) derivaron un límite superior para la masa de los axiones de 8.7 meV⁴ usando un modelo simplificado y comparando el rate de cambio observado y calculado del modo con período 215.2 seg.

En este Capítulo usaremos las características observacionales de la enana blanca pulsante G117-B15A para obtener un límite superior para la masa de los axiones.

3.4.1 Método de cálculo

Con el objeto de calcular los modos g de los modelos de enanas blancas hemos empleado el código de evolución-pulsación descrito en la Sección 3.2 de este Capítulo. Para una descripción de los ingredientes físicos incluidos en el código evolutivo referimos al lector al Capítulo 2 y a Benvenuto & Althaus (1998).

Como mencionamos antes, una importante cantidad involucrada en el cálculo del espectro pulsacional de modos g , es la llamada frecuencia de Brunt-Väisälä. En vez de calcular esta frecuencia a partir de su definición (Ecuación A.43 del Apéndice A), aquí usaremos la expresión dada en Brassard et al. (1991) con el fin de evitar ruidos numéricos:

$$N^2 = \frac{g^2}{p} \frac{\rho}{\chi_\rho} (\nabla_{\text{ad}} - \nabla + B). \quad (3.21)$$

donde χ denota la derivada parcial logarítmica de la presión con respecto a T o ρ , respectivamente, y B es el denominado “término de Ledoux”, y está dado por

$$B = -\frac{1}{\chi_T} \sum_{i=1}^{n-1} \chi_{X_i} \frac{d \ln X_i}{d \ln p} \quad (3.22)$$

donde X_i es la fracción de masa de átomos de la especie i , n es el número total de especies consideradas, y

$$\chi_{X_i} = \left(\frac{\partial \ln p}{\partial \ln X_i} \right)_{\rho, T, \{X_j \neq i\}}. \quad (3.23)$$

⁴mili electrón volt.

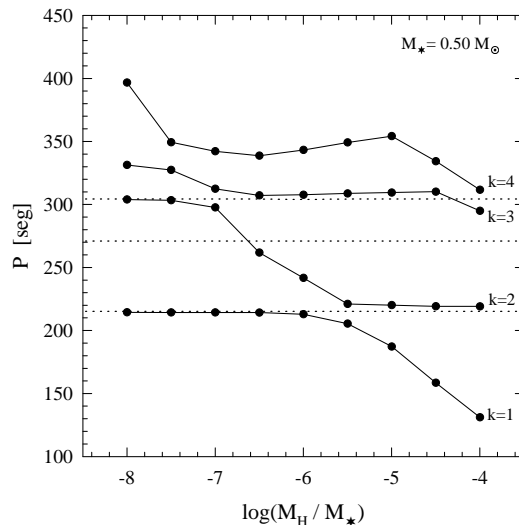


Figura 3.8: Los períodos de los modos dipolares ($\ell = 1$) $k = 1, 2, 3$, y 4 para un modelo de $0.50 M_{\odot}$ a $T_{\text{eff}} = 11620$ K como una función de la fracción de masa de hidrógeno. El resto de los perfiles químicos corresponden al mejor ajuste obtenido (ver el texto para detalles). Los puntos corresponden a los modelos calculados, mientras que las líneas de trazos representan los períodos de oscilación observados en G117-B15A. En este caso, con una masa estelar considerablemente baja, el mejor ajuste corresponde a los modos $k = 1, 2$, y 3 con $\log M_{\text{H}}/M_{*} = -6.6$.

Con el objeto de calcular los efectos de la emisión de axiones, hemos incorporado en el código evolutivo los rates de emisión de axiones de Nakagawa, Kohyama & Itoh (1988). La emisión de axiones produce una pérdida de energía suplementaria a la que normalmente es considerada en la teoría estandar de evolución de enanas blancas. En consecuencia, la emisión de axiones acelera el enfriamiento de la enana blanca. Tal aceleración de la evolución tiene una consecuencia directa sobre las propiedades pulsacionales del objeto, produciendo un valor realzado del rate de cambio de períodos, \dot{P} (Isern et al. 1992). Por supuesto, debido a este mecanismo extra de enfriamiento, la estructura misma de la enana blanca es también afectada, pero en una manera tal que, como veremos más adelante, a una dado valor de T_{eff} corresponde un período P que es independiente del valor exacto de las pérdidas de energía por axiones. Este hecho afortunado nos permitirá identificar una única estructura representativa para G117-B15A independiente de los rates de emisión de axiones, y esto simplificará mucho el análisis.

3.4.2 Características observacionales de G117-B15A

G117-B15A es una estrella enana blanca DA típica; su carácter variable fue descubierto por McGraw & Robinson (1976) y desde entonces esta estrella variable ha sido monitoreada en forma continua. La masa y temperatura efectiva de G117-B15A han sido determinadas espectroscópicamente: $M_{*} = 0.59 M_{\odot}$ y $T_{\text{eff}} = 11620$ K (Bergeron et al. 1995). En un estudio más reciente, Koester & Allard (2000) han sugerido

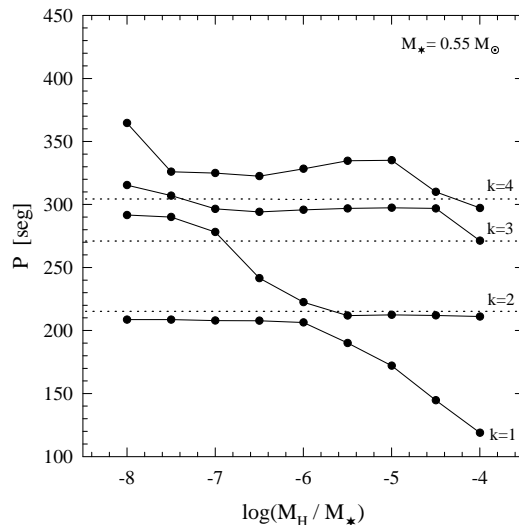


Figura 3.9: Igual que en la Figura 3.8, pero para el caso de un modelo de $0.55 M_{\odot}$. En este caso, el mejor ajuste a las observaciones se encuentra para $k = 2, 3, 4$ y $\log M_{\text{H}}/M_{*} = -4.0$. Como este es el mejor ajuste que hemos encontrado con las observaciones, nos referiremos a este como el modelo fiducial. Otro ajuste aceptable es obtenido con $k = 1, 2, 3$ y $\log M_{\text{H}}/M_{*} = -7.0$ pero las diferencias entre los valores observados y calculados son mayores que en el caso previamente mencionado.

un valor algo menor para la masa, de $0.53 M_{\odot}$. Los períodos independientes observados son de 215.2, 271 y 304.4 seg (Kepler et al. 1982). Para el modo de 215.2 seg, Kepler et al. (2000) han medido el valor del rate de cambio del período, siendo $\dot{P} = (2.3 \pm 1.4) \times 10^{-15} \text{s s}^{-1}$.

Un importante aspecto es la identificación de modos, es decir, la asignación de los valores de ℓ y k para los períodos observados. Robinson et al. (1995) encuentran que el período de 215.2 seg corresponde a un modo con $\ell = 1$. Siguiendo el trabajo de Bradley (1998b) nosotros consideraremos que los otros dos períodos de G117-B15A también corresponden a $\ell = 1$ (Brassard et al. 1993; Fontaine & Brassard 1994), y también que los otros períodos presentes en la curva de luz de la estrella no son modos reales sino debidos a efectos no-lineales en la envoltura (Brassard et al. 1993). Con respecto al orden radial de los modos, hay dos posibles identificaciones: los períodos observados son dipolares ($\ell = 1$) con $k = 2$ (215.2 seg), $k = 3$ (271 seg) y $k = 4$ (304.4 seg) (Clemens 1993), o bien con $k = 1$ (215.2 seg), $k = 2$ (271 seg) y $k = 3$ (304.4 seg) (Fontaine, Brassard & Wesemael 1994). Como veremos en la siguiente Sección, nuestro mejor ajuste a las observaciones está en acuerdo con la identificación de Clemens (1993).

3.4.3 Estructura de G117-B15A y la identificación de modos

Para nuestros cálculos adoptaremos los perfiles químicos internos de carbono-oxígeno de Salaris et al. (1997). Estos perfiles permanecerán fijos (a menos que se indique lo contrario). Sin embargo, con el objeto de ajustar las propiedades pulsacionales de

nuestros modelos al comportamiento observado en G117-B15A, consideraremos el espesor de la envolturas de hidrógeno y helio como parámetros libres. Esto responde al hecho de que el espesor de la capa de hidrógeno depende del momento exacto en el cual el progenitor de la enana blanca se aparta de la fase de pulsos térmicos en la AGB a través de la acción de pérdida de masa (ver, por ejemplo, Iben 1984). Otro importante factor es la pendiente de los perfiles químicos de las capas externas, en particular en las interfases de helio-hidrógeno y carbono-helio. La forma de estas transiciones de composición química tienen una importante influencia sobre las propiedades pulsacionales de las enanas blancas DA, a través del término B de Ledoux de la frecuencia de Brunt-Väisälä, y esto puede conducir consecuentemente al efecto de *mode trapping* (ver Brassard et al. 1992ab y el Capítulo 6 de esta Tesis). Aquí adoptaremos formas Gaussianas para las interfases químicas con el objeto de simplificar los cálculos.

Para nuestros propósitos aquí, hemos buscado un modelo de enana blanca con la temperatura efectiva y masa observadas en G117-B15A que ajuste *simultáneamente* los tres períodos observados lo mas cercanamente posible. En la búsqueda de ese modelo hemos considerado los siguientes rangos de masa estelar (dadas las incertezas de su determinación observacional), la masa de helio y la masa de hidrógeno:

$$0.50 \leq M_*/M_\odot \leq 0.65$$

$$-3 \leq \log M_{\text{He}}/M_* \leq -2$$

$$-8 \leq \log M_{\text{H}}/M_* \leq -4$$

También hemos considerado diferentes espesores para las interfases helio-hidrógeno y carbono-helio. Definiendo la coordenada masa como $q = \log(1 - M_r/M_*)$, y Δq como el espesor de la interfase, hemos adoptado los siguientes valores razonables:

$$-0.8 \leq \Delta q_{\text{H-He}} \leq -0.4$$

$$-0.8 \leq \Delta q_{\text{He-C}} \leq -0.2$$

En las Figuras 3.8-3.10 comparamos los períodos teóricos de los modos dipolares ($\ell = 1$) con $k = 1, 2, 3$, y 4 con aquellos observados en G117-B15A. Para construir estas figuras hemos considerado modelos con $T_{\text{eff}} = 11620$ K, y previamente ajustado el resto de las características a nuestros valores fiduciales ($\log M_{\text{He}}/M_* = -2$, $\Delta q_{\text{H-He}} = -0.8$, y $\Delta q_{\text{He-C}} = -0.4$) excepto el rasgo más crítico, esto es, la masa de la envoltura de hidrógeno. Al calcular estos ajustes no hemos considerado la emisión de axiones. En el caso de modelos de $0.50 M_\odot$ existe un buen ajuste correspondiente a modos con $k = 1, 2$, y 3 con $\log M_{\text{H}}/M_* = -6.6$. En el caso de un modelo de $0.55 M_\odot$ encontramos que el mejor ajuste corresponde a modos con $k = 2, 3$, y 4 y $\log M_{\text{H}}/M_* = -4.0$. Aún hay otro ajuste aceptable para $k = 1, 2$, y 3 y $\log M_{\text{H}}/M_* = -7.0$, aunque el ajuste previamente mencionado puede ser considerado sin duda mucho mejor. En el caso de modelos de $0.60 M_\odot$ no hemos encontrado ningún ajuste satisfactorio para ninguna de las fracciones de hidrógeno consideradas. En este punto debemos mencionar que hemos considerado también el caso de modelos de $0.65 M_\odot$ (no graficados). Para este elevado valor de la masa estelar no hemos encontrado ningún ajuste satisfactorio.

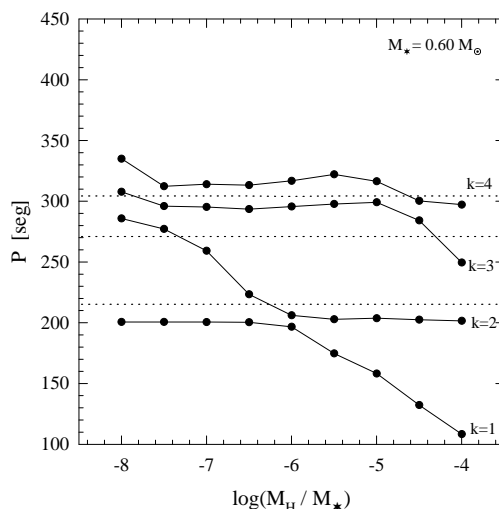


Figura 3.10: Igual que en la Figura 3.8, pero para el caso de un modelo de $0.60 M_{\odot}$. En este caso encontramos que las observaciones no son bien ajustadas por ninguna de las fracciones de hidrógeno consideradas. Esto sugiere, de acuerdo con lo encontrado por otros autores (ver texto), que la masa de esta estrella es más baja que el valor considerado en esta figura.

Como hemos explicado antes, otro parámetro libre es el espesor de la envoltura de helio. Aquí hemos explorado la posibilidad de envolturas más finas de helio ($\log M_{\text{He}}/M_{*} < -3.0$) para todas las masas consideradas antes. Envolturas de helio más gruesas son poco probables, de acuerdo a recientes estudios de estrellas de AGB (Domínguez et al. 1999). En todos los casos los ajustes a las observaciones resultaron ser inaceptables, y los hemos descartado.

Estos resultados claramente indican que la masa de G117-B15A debería ser próxima a $0.55 M_{\odot}$ y que la fracción de masa de hidrógeno presente en la estrella debería ser cercana a $M_{\text{H}}/M_{*} = 10^{-4}$. En efecto, nuestro valor derivado para la masa está comprendido entre las determinaciones espectroscópicas de Bergeron et al. (1995) ($0.59 M_{\odot}$) y las de Koester & Allard (2000) ($0.53 M_{\odot}$). También es notable que nuestro mejor ajuste es muy similar a uno de los presentados por Bradley (1998b) considerando un modo con $\ell = 1$ y $k = 2$ para el período de 215.2 seg, aunque este autor encuentra una masa estelar de $\sim 0.60 M_{\odot}$. También, es notable que la masa de hidrógeno que hemos encontrado en G117-B15A está de acuerdo con las predicciones de la teoría de evolución estelar.

En resumen, el modelo que provee el mejor ajuste a las observaciones ($M_{*} = 0.55 M_{\odot}$; $k = 2, 3, 4$; $\log M_{\text{H}}/M_{*} = -4.0$; $\log M_{\text{He}}/M_{*} = -2$, $\Delta q_{\text{H-He}} = -0.8$, y $\Delta q_{\text{He-C}} = -0.4$) será referido como nuestro *modelo fiducial*. En la Figura 3.11 mostramos los perfiles de composición química del modelo fiducial.

Otro aspecto relevante es estimar cuán cercanos están nuestros períodos teóricos y los períodos observados en G117-B15A. Las diferencias entre los períodos teóricos y los observados son 4.63 seg (para $k = 2$), 0.58 seg (para $k = 3$) y 7.26 seg (para $k = 4$), dando así una diferencia promedio de ~ 4 seg, lo cual está en buen acuerdo con los resultados de Bradley (1998b). Este es un valor razonable ya que muchos de los detalles de los cálculos de pulsación pueden influenciar los períodos calculados a

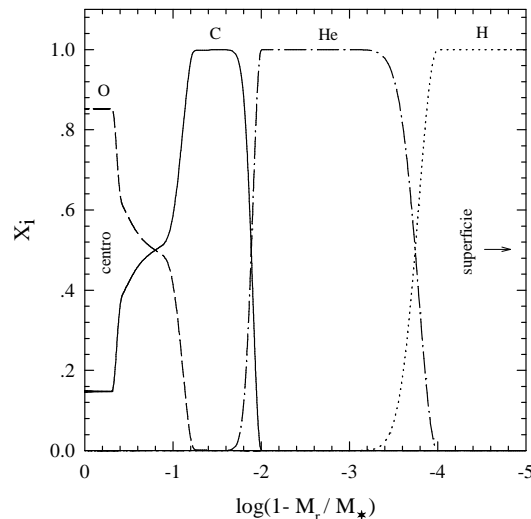


Figura 3.11: La composición química interna de nuestro modelo fiducial.

un nivel de varios segundos.

A continuación exploraremos los efectos resultantes de variar las características del modelo manteniendo fijo el perfil fiducial. Restringiremos el análisis al modo $\ell = 1$, $k = 2$, ya que éste va a ser el modo empleado para obtener la masa de los axiones. En la Figura 3.12 mostramos el período del modo $\ell = 1$, $k = 2$ que mejor representa al período observado de 215.2 seg (panel superior) y la derivada temporal del mismo modo (panel inferior) en términos de la T_{eff} . Notemos el incremento monótono del período de este modo como consecuencia del enfriamiento de la estrella. Notemos también que dado que en estos cálculos no se ha incluido la emisión de axiones, el valor teórico de \dot{P} es un límite inferior. A partir de la Figura 3.12 concluimos que los errores en la determinación de T_{eff} no inducen grandes errores ni en la identificación del modo ni en el valor calculado de \dot{P} .

Ahora consideremos modelos con el perfil químico fiducial y la misma T_{eff} pero para diferentes masas estelares. En la Figura 3.13 ilustramos P y \dot{P} como función de la masa. Cuando consideramos valores mayores para la masa, y así mayores gravedades, la frecuencia de Brunt-Väisälä se incrementa (ver Ecuación 3.21). Como consecuencia todo el espectro de frecuencias se incrementa, y en consecuencia el período del modo considerado decrece. Al mismo tiempo, cuanto mayor es la masa estelar menor es la superficie radiante, con lo cual la capacidad calorífica es mayor. Como estamos a una T_{eff} fija, modelos con mayor masa tienen menores luminosidades y se enfrían más lentamente con menores valores de \dot{P} .

Otra posible fuente de incertezas es el rate de la reacción $^{12}\text{C}(\alpha, \gamma)^{16}\text{O}$, que determina la estratificación dentro del núcleo de carbono-oxígeno de la enana blanca. Es interesante tener una idea cuantitativa de cómo la incerteza en este rate afectaría nuestros resultados. Para tal propósito, hemos considerado diferentes estratificaciones internas de carbono-oxígeno manteniendo la misma forma de los perfiles fiduciales pero con diferentes abundancias centrales de carbono, X_C , desde $X_C = 0.0$ hasta $X_C = 1.0$. Tales perfiles son mostrados con líneas de puntos en la Figura 3.14 junto con el perfil fiducial, el cual es mostrado con línea sólida.

En la Figura 3.15 mostramos el período del modo $\ell = 1$, $k = 2$ y su \dot{P} para un modelo de enana blanca de $0.55 M_{\odot}$ y una T_{eff} de 11620 K como función de su abundancia central de carbono. Notese que cambiando el perfil de carbono en el núcleo

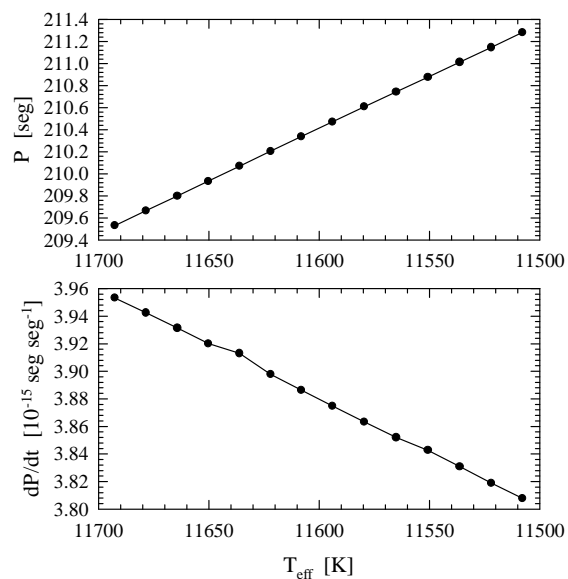


Figura 3.12: Panel superior: El período del modo $\ell = 1$, $k = 2$ del modelo fiducial en función de T_{eff} . El intervalo en T_{eff} ha sido elegido correspondiendo a la temperatura efectiva de G117-B15A ± 200 K. Los puntos corresponden a los modelos calculados. Panel inferior: igual que en el panel superior, pero para la derivada temporal del período.

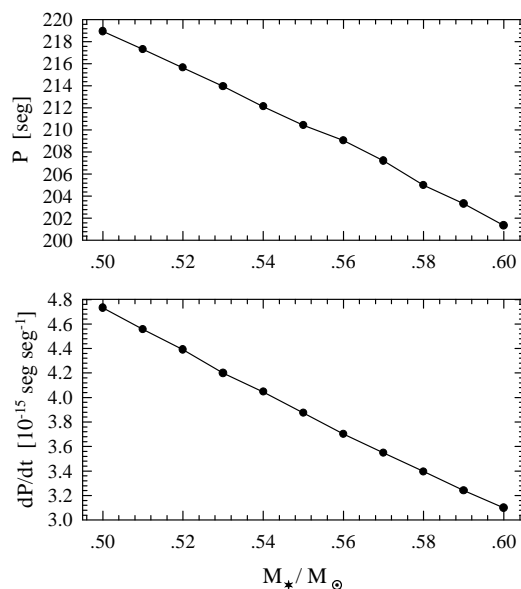


Figura 3.13: Panel superior: El período del modo $\ell = 1$, $k = 2$ para modelos de enanas blancas con el perfil fiducial y $T_{\text{eff}} = 11620$ K en función de la masa estelar. Los modelos calculados son mostrados con puntos. Panel inferior: Igual que en el panel superior pero para la derivada temporal del período.

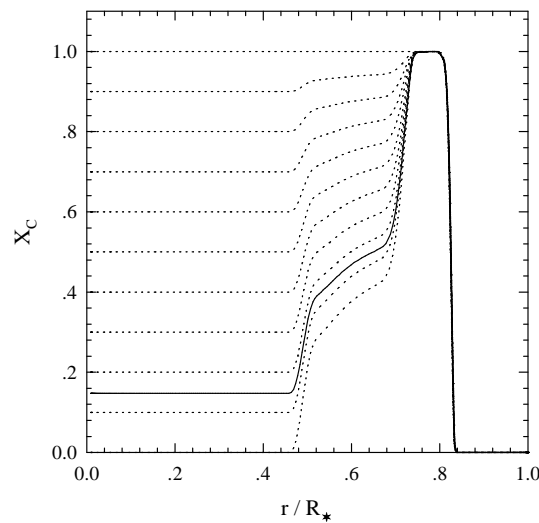


Figura 3.14: Perfil de la abundancia de carbono en función del radio estelar para modelos con abundancias centrales de carbono de $X_C = 0.0, 0.1, \dots, 1.0$. Las líneas de trazos corresponden a los perfiles escaleados mientras que la línea sólida corresponde al perfil fiducial de carbono.

estelar induce un muy leve cambio de $\approx 4\%$ en el período del modelo fiducial. El cambio en el período es debido principalmente a la siguiente razón: menores (mayores) abundancias centrales de carbono producen abruptas (suaves) pendientes en el borde externo del núcleo degenerado en la base de la zona de transición, provocando diferentes configuraciones de las autofunciones. Esto es importante porque en nuestros modelos el modo con $P = 215.2$ seg tiene grandes amplitudes en tal interfase. Como consecuencia, cualquier cambio en la estructura de esta interfase afectará la estructura del modo y así su período. Con respecto al \dot{P} , como es esperable, la mayor abundancia central de carbono conduce a un menor valor de \dot{P} . Esto se debe a que la capacidad calorífica por unidad de masa es inversamente proporcional al número atómico promedio: cuanto más abundante el carbono central respecto del oxígeno mayor será la capacidad calorífica, y más lento el enfriamiento de la estrella. Esto se traduce en menores valores de \dot{P} , tal como se aprecia en el panel inferior de la Figura 3.15. Notemos sin embargo que, aún considerando casos extremos, la variación en \dot{P} es muy modesta: $\approx 7\%$. Así, nuestros resultados no son severamente afectados por nuestra elección del rate de la reacción $^{12}\text{C}(\alpha, \gamma)^{16}\text{O}$.

Luego de examinar todas las posibles incertezas debemos justificar la discrepancia entre el valor medido del rate de cambio del período de 215.2 seg, $\dot{P} = (2.3 \pm 1.4) \times 10^{-15} \text{ss}^{-1}$, y su valor calculado para nuestro modelo fiducial, $\dot{P} = 3.9 \times 10^{-15} \text{ss}^{-1}$. De hecho nuestro valor calculado (el cual por otro lado está en buen acuerdo con el resultado obtenido por Bradley 1998b) es levemente mayor que la barra de error 1σ . La diferencia entre nuestro valor teórico y el valor observado puede deberse al procedimiento de identificación de modos y a las determinaciones observacionales (como la T_{eff} y la masa) de G117-B15A. Otra fuente de incerteza que puede contribuir a la discrepancia del \dot{P} es el movimiento propio, el cual puede contribuir al \dot{P} observado en $\dot{P}_{\text{pm}} = (9.2 \pm 0.5) \times 10^{-16} \text{ss}^{-1}$ (Kepler et al. 2000).

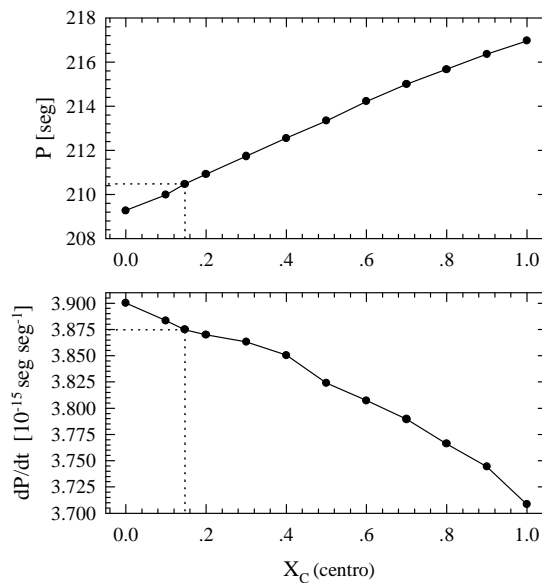


Figura 3.15: Panel superior: El período del modo $\ell = 1$, $k = 2$ para modelos de enanas blancas de $0.55 M_{\odot}$ y una T_{eff} of 11620 K en función de la abundancia central de carbono. Las líneas de trazos señalan la abundancia y el período correspondientes al modelo fiducial. Panel inferior: Igual que en el panel superior, pero para la derivada temporal del período.

3.4.4 El efecto de la emisión de axiones

En esta sección vamos a calcular el efecto de la emisión de axiones sobre la escala de tiempo evolutiva de G117-B15A y sus consecuencias sobre el valor de \dot{P} para el modo $\ell = 1$, $k = 2$. Para este propósito hemos calculado un conjunto de secuencias evolutivas adicionales con diferentes masas de los axiones (cabe aclarar que el rate de emisión de acciones es proporcional a la masa de los axiones) y considerado las características pulsacionales en el rango relevante de T_{eff} . Es importante aclarar que en todos los cálculos evolutivos incluyendo la emisión de axiones, los efectos transitorios debidos a la emisión de estas partículas ocurrían mucho antes de que los modelos alcanzaran temperaturas efectivas cercanas a la de G117-B15A. Considerando un amplio rango en la masa de los axiones, hemos encontrado que los períodos de los modos $\ell = 1$, $k = 2, 3$, y 4 muestran muy pequeñas variaciones. Esto se aprecia en el panel superior de la Figura 3.16, donde graficamos los períodos de estos modos en función de la masa considerada para los axiones. Esta es una situación afortunada que nos permite primero identificar la estructura del modelo fiducial sin axiones y luego incorporar la emisividad de axiones. Si este no fuese el caso, deberíamos encontrar una estructura representativa de G117-B15A por cada valor de la masa de los axiones, complicando extremadamente el análisis. En contraste con lo que sucede con los períodos, el valor de \dot{P} para los tres modos identificados es extremadamente sensible a la masa de los axiones, como puede apreciarse en el panel inferior de la Figura 3.16. Por ejemplo, para el modo de 215.2 seg y para el rango de masa de los axiones considerado aquí ($0 \leq m_{\text{ax}} / \cos^2 \beta \leq 32$ meV), \dot{P} crece por un factor de aproximadamente 18. El \dot{P} correspondiente al modo con $k = 3$ es el menor de los tres modos, lo cual es debido a que este modo está atrapado en la envoltura externa de hidrógeno (ver Bradley, Winget & Wood (1992) para una justificación física).

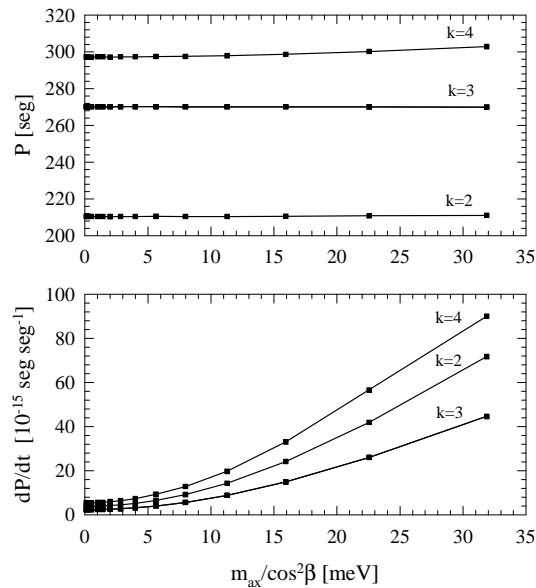


Figura 3.16: Panel superior: Los períodos de los modos $\ell = 1$, $k = 2, 3$, y 4 correspondientes al modelo fiducial a una T_{eff} de 11620 K en función de la masa de los axiones. Nótese que, a pesar de la aceleración del proceso de enfriamiento inducido por la emisión de axiones, el período de los modos no cambia significativamente. Panel inferior: Igual que en el panel superior, pero para el \dot{P} . Notemos que para altos valores de la masa de los axiones, dado que el enfriamiento es fuertemente acelerado, el valor de \dot{P} muestra un crecimiento muy pronunciado.

3.4.5 La masa de los axiones

Finalmente, en la Figura 3.17 mostramos el valor de \dot{P} del modo $\ell = 1$, $k = 2$ del modelos fiducial a $T_{\text{eff}} = 11620$ K en función de la masa de los axiones. El valor observacional de Kepler et al. (2000) es también mostrado con una línea de trazos. También con líneas de trazos son mostrados los errores observacionales a 1σ y 2σ y el valor de la determinación previa de \dot{P} (Kepler et al. 1991). Ahora podemos encontrar un límite superior a la masa de los axiones imponiendo la condición de que el valor de \dot{P} debería ser más bajo que el observado más dos veces la desviación estandard, o sea, más bajo que $5.1 \times 10^{-15} \text{s}^{-1}$. Este procedimiento fija un límite superior sobre la masa de los axiones a un nivel de 95% de confianza. De la Figura 3.17 es claro que para que esto suceda la masa de los axiones debe ser menor que $3.97 \cos^2 \beta$ meV (Nótese que si consideramos el valor previo de \dot{P} de Kepler et al. 1991, el límite superior debería ser $\approx 10 \cos^2 \beta$ meV en buen acuerdo con los resultados de Isern et al. 1992).

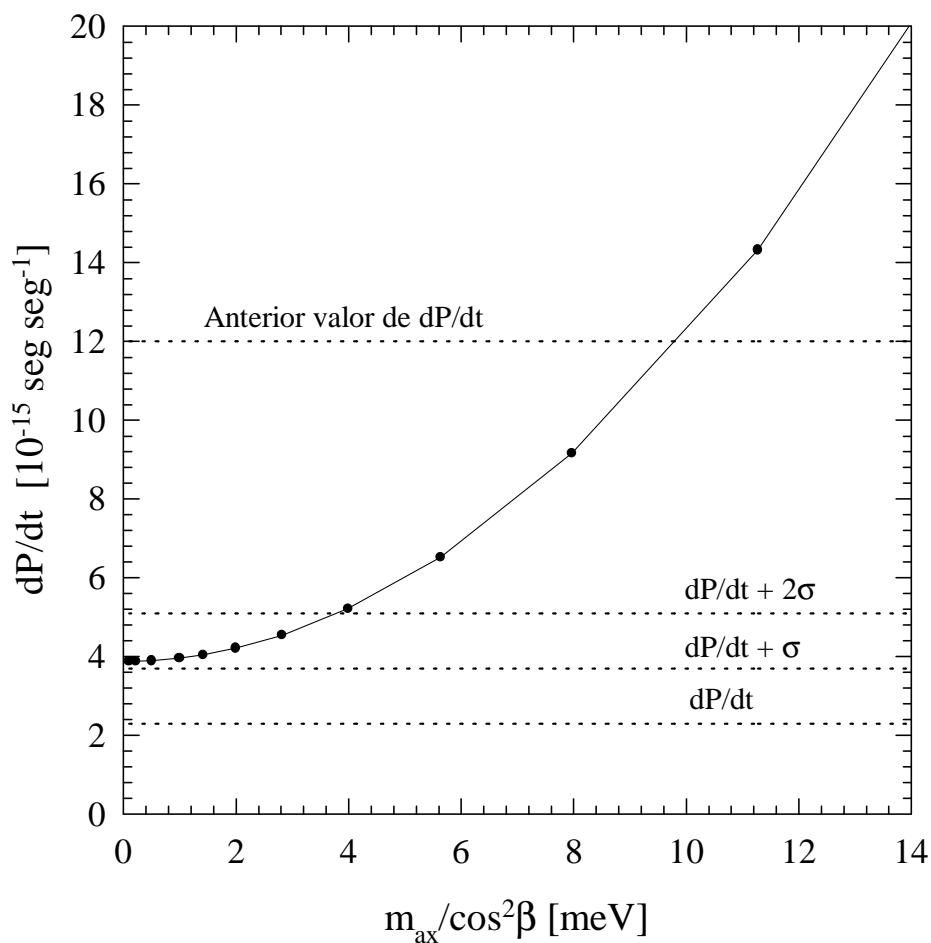


Figura 3.17: La derivada temporal del período del modo $\ell = 1$, $k = 2$ del modelo fiducial a $T_{\text{eff}} = 11620$ K. Las líneas horizontales a trazos indican el valor observado de \dot{P} , $\dot{P} + \sigma$, y $\dot{P} + 2\sigma$ de Kepler et al. (2000). También mostramos el valor previo de \dot{P} derivado por Kepler et al. (1991). Si consideramos dos desviaciones estandar a partir del valor observacional, concluimos que las observaciones son compatibles con una masa de los axiones menor a $3.97 \cos^2 \beta$ meV.