Apéndice A

A.1 Ecuaciones de pulsación

En lo que sigue, vamos a partir de las conocidas ecuaciones de la hidrodinámica para llegar finalmente al conjunto de ecuaciones diferenciales cuya solución proporciona las autofunciones y autovalores (autofrecuencias) de oscilación para el caso de pulsaciones no-radiales adiabáticas y lineales en modelos estelares esféricamente simétricos (esto es, no rotantes y sin campos magnéticos). El tratamiento que seguiremos reproduce en forma abreviada la derivación de Unno et al. (1989).

Las ecuaciones básicas de la hidrodinámica son la ecuación de conservación de la masa

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{u}) = 0, \tag{A.1}$$

la ecuación de conservación del momentum

$$\rho \left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \right) \vec{u} = \rho \, \vec{f} - \vec{\nabla} p - \rho \, \vec{\nabla} \Phi + \mathrm{div} \, \Upsilon, \tag{A.2}$$

y la ecuación de conservación de la energía

$$\rho \, T \left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \right) S = \rho \, (\varepsilon_N + \varepsilon_V) - \vec{\nabla} \cdot \vec{F_R}. \tag{A.3}$$

Aquí ρ es la densidad, p la presión, T la temperatura, $\vec{u}$ la velocidad del fluído, S la entropía específica, Φ el potencial gravitatorio, $\vec{f}$ las fuerzas externas, Υ el tensor de tensiones de viscosidad, ε_N es el rate de generación de energía nuclear, ε_V es la generación de calor por viscosidad, $\vec{F_R}$ el flujo radiativo de energía, y finalmente, $\vec{\nabla}$ es el operador gradiente. Las otras ecuaciones a considerar son la de Poisson,

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G \rho, \tag{A.4}$$

y la ecuación de difusión radiativa,

$$\vec{F_R} = -K \, \vec{\nabla} T, \tag{A.5}$$

donde G es la constante de gravitación y ∇^2 el operador Laplaciano. K es la conductividad radiativa, dada por

$$K = \frac{4ac}{3\kappa\rho} T^3, \tag{A.6}$$

siendo a la constante de densidad de radiación, c la velocidad de la luz y κ la opacidad radiativa. Haciendo las siguientes suposiciones:

- $\vec{f} \approx 0$ en ausencia de campo magnético y considerando un fluído autogravitante,
- $\mathrm{div}\Upsilon \approx 0, \varepsilon_V \approx 0$ ya que la viscosidad es pequeña en el interior estelar en ausencia de convección,

y usando la notación $\vec{v}$ para distinguir la velocidad sin convección de la $\vec{u}$ (velocidad general que puede incluír campos de velocidad turbulentos), las Ecuaciones (A.1)-(A.5) pueden escribirse como:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = 0, \tag{A.7}$$

$$\rho \left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \right) \vec{v} = -\vec{\nabla} p - \rho \, \vec{\nabla} \Phi, \tag{A.8}$$

$$\rho \, T \, \left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \right) S = \rho \, \varepsilon_N - \vec{\nabla} \cdot \vec{F_R}. \tag{A.9}$$

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G \rho, \tag{A.10}$$

$$\vec{F_R} = -\frac{4ac}{3\kappa\rho} T^3 \vec{\nabla} T, \tag{A.11}$$

siendo (A.8) la ecuación de Euler para un fluído no-viscoso.

Si ahora consideramos un estado de equilibrio (designando las correspondientes variables con subíndice 0), para el cual $\vec{v_0} = 0$ y $\frac{\partial}{\partial t} = 0$, las Ecuaciones (A.7)-(A.11) se transforman en:

$$-\vec{\nabla} p_0 - \rho_0 \vec{\nabla} \Phi_0 = 0, \tag{A.12}$$

$$\rho_0 \varepsilon_{N,0} - \vec{\nabla} \cdot \vec{F_{R,0}} = 0, \tag{A.13}$$

$$\nabla^2 \Phi_0 = 4\pi G \rho_0, \tag{A.14}$$

$$\vec{F_{R,0}} = -K_0 \vec{\nabla} T. \tag{A.15}$$

Nótese que la Ecuación (A.12) es la condición de equilibrio hidrostático.

Con el objeto de obtener las ecuaciones de oscilación, vamos a considerar que a este estado de equlibrio del sistema le aplicamos pequeñas perturbaciones. Ya que estas perturbaciones son pequeñas, el análisis será lineal, de modo que conservaremos términos a primer orden y descartaremos ordenes superiores. Perturbaciones de ciertas cantidades f pueden matemáticamente ser descriptas de dos maneras, esto es, como variaciones Lagrangianas, δf, o Eulerianas, f':

$$\begin{aligned} \delta f(\vec{r}, t) &= f(\vec{r}, t) - f_0(\vec{r}) \\ f'(\vec{r}, t) &= f(\vec{r}, t) - f_0(\vec{r}) \end{aligned} \tag{A.16}$$

Definimos $\vec{\xi} = \vec{\delta r} = \vec{r} - \vec{r_0}$ como la variación Lagrangiana de la posición de un elemento de fluído. La relación (a primer orden) entre los dos tipos de variaciones es (Lynden-Bell & Ostriker 1967):

$$\delta f(\vec{r}, t) = f'(\vec{r}, t) + \vec{\xi} \cdot \vec{\nabla} f_0(\vec{r}). \tag{A.17}$$

La variación (Lagrangiana y Euleriana) en la velocidad, dado que $\vec{v_0} = 0$, será:

$$\vec{v} = \delta\vec{v} = \vec{v'} = \frac{d\vec{\xi}}{dt}. \tag{A.18}$$

A continuación vamos a linealizar las Ecuaciones (A.7)-(A.11), para lo cual escribiremos cada variable en su forma perturbada (empleando variaciones Eulerianas):

$$\rho = \rho_0 + \rho';\ p = p_0 + p';\ \Phi = \Phi_0 + \Phi'; \cdots; \vec{v} = \vec{v_0} + \vec{v'} \tag{A.19}$$

Reemplazando la forma (A.19) para las variables perturbadas en las Ecuaciones (A.7)-(A.11), despreciando términos conteniendo potencias ≥ 2 de las perturbaciones o productos de las mismas, y recordando que las variables en equilibrio satisfacen las Ecuaciones (A.12)-(A.15), obtenemos:

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot(\rho_0 \vec{v}) = 0, \tag{A.20}$$

$$\rho_0 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{\nabla} p' + \rho_0 \vec{\nabla}\Phi' + \rho' \vec{\nabla}\Phi_0 = 0, \tag{A.21}$$

$$\rho_0 T_0 \frac{\partial}{\partial t}(S' + \vec{\xi}\cdot \vec{\nabla} S_0) = (\rho\varepsilon_N)' - \vec{\nabla}\cdot \vec{F'_R} \tag{A.22}$$

$$\nabla^2 \Phi' = 4\pi G \rho' \tag{A.23}$$

$$\vec{F_R} = -K_0 \vec{\nabla} T' - K' \vec{\nabla} T_0 \tag{A.24}$$

Las Ecuaciones (A.20)-(A.24) constituyen un sistema de ecuaciones diferenciales parciales lineales y homogéneas, cuya solución proporciona las perturbaciones ρ', T', Φ', etc y la variación en la velocidad $\vec{v} = \vec{v'} = \delta\vec{v}$ o la variación Lagrangiana del desplazamiento, $\vec{\xi}$. Los coeficientes son combinaciones de cantidades en equilibrio las cuales sólo dependen de la coordenada r dado que estamos considerando simetría esférica del modelo no-perturbado: $\rho_0 = \rho_0(r)$, $T_0 = T_0(r)$, $\Phi_0 = \Phi_0(r)$, etc. Por simplicidad en la notación, de aquí en más omitiremos los subíndices 0. Las perturbaciones (variaciones Eulerianas) son funciones del tiempo y las coordenadas:

$$\rho' = \rho'(r,\theta,\phi,t);\ p' = p'(r,\theta,\phi,t);\ \Phi' = \Phi'(r,\theta,\phi,t);\ \text{etc}$$

En este punto podemos hacer una separación de variables, suponiendo que todas las perturbaciones tienen dependencia temporal oscilatoria de la forma $e^{i\sigma t}$, donde σ es la frecuencia angular de oscilación, la cual se relaciona con la frecuencia cíclica ν y el período P a través de $\nu = \sigma/2\pi = 1/P$. De esta forma:

$$\begin{aligned}
\rho'(r,\theta,\phi,t) &= \rho'(r,\theta,\phi)e^{i\sigma t} \\
p'(r,\theta,\phi,t) &= p'(r,\theta,\phi)e^{i\sigma t} \\
\Phi'(r,\theta,\phi,t) &= \Phi'(r,\theta,\phi)e^{i\sigma t} \\
\vec{\xi}(r,\theta,\phi,t) &= \vec{\xi}(r,\theta,\phi)e^{i\sigma t}
\end{aligned} \tag{A.25}$$

Consideremos la siguiente relación termodinámica (Unno et al. 1989):

$$\frac{\rho'}{\rho} = \frac{1}{\Gamma_1}\frac{p'}{p} - A\,\xi_r - \nabla_{\rm ad}\frac{\rho T}{p}\delta S \tag{A.26}$$

donde

$$\Gamma_1 = \left(\frac{\partial \ln p}{\partial \ln \rho}\right)_S\;;\;\nabla_{\rm ad} = \left(\frac{\partial \ln T}{\partial \ln p}\right)_S \tag{A.27}$$

Aquí el subíndice S denota entropía constante, ξ_r es la componente radial de $\vec{\xi}$, y A es una conocida cantidad relacionada con la inestabilidad convectiva:

$$A = \frac{d\ln\rho}{dr} - \frac{1}{\Gamma_1}\frac{d\ln\rho}{dr}.$$

Utilizando las formas (A.25), la relación (A.26), y operando con las Ecuaciones (A.20)-(A.24) obtenemos:

$$\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\rho g}{\Gamma_1 p}\right)p' - \left(\sigma^2 + gA\right)\xi_r + \frac{\partial\Phi'}{\partial r} = g\nabla_{\rm ad}\frac{\rho T}{p}\delta S, \tag{A.28}$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial(r^2\xi_r)}{\partial r} + \frac{1}{\Gamma_1}\frac{d\ln p}{dr}\xi_r + \left(\frac{\rho}{\Gamma_1 p} + \frac{\nabla_\perp^2}{\sigma^2}\right)\frac{p'}{\rho} + \frac{1}{\sigma^2}\nabla_\perp^2\Phi' = \nabla_{\rm ad}\frac{\rho T}{p}\delta S, \tag{A.29}$$

$$\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\,r^2\frac{\partial}{\partial r} + \nabla_\perp^2\right)\Phi' - 4\pi G\rho\left(\frac{p'}{\Gamma_1 p} - A\xi_r\right) = -4\pi G\nabla_{\rm ad}\frac{\rho^2 T}{p}\delta S, \tag{A.30}$$

$$i\sigma\rho T\delta S = (\rho\varepsilon_N)' - \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2 F_r')}{\partial r} + \nabla_\perp^2\left(KT'\right), \tag{A.31}$$

$$F_r' = -K\frac{\partial T'}{\partial r} - K'\frac{dT'}{dr}, \tag{A.32}$$

donde $\nabla_\perp^2$ es el operador diferencial

$$\nabla_\perp^2 = \frac{1}{r^2}\frac{1}{\sin^2\theta}\left[\sin\theta\frac{\partial}{\partial r}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right], \tag{A.33}$$

F_r' es la componente radial de la variación Euleriana en el flujo, $\vec{F_R'}$.

En esta forma hemos eliminado la dependencia temporal. Las Ecuaciones (A.28)-(A.32) poseen coeficientes dependientes solamente de r, y el único operador diferencial respecto de los ángulos θ y ϕ es $\nabla_\perp^2$. Se puede entonces separar la dependencia angular de la radial en cada perturbación. La parte angular puede ser especificada a través de los armónicos esféricos $Y_\ell^m(\theta,\phi)$, los cuales son autofunciones del operador $L^2 = r^2\nabla_\perp^2$ (a veces denominado *Legendriano*) con autovalores $\ell(\ell+1)$. Esto es:

$$L^2 Y_\ell^m(\theta,\phi) = \ell(\ell+1)Y_\ell^m(\theta,\phi). \tag{A.34}$$

donde los armónicos esféricos de grado ℓ y orden acimutal m están dados por:

$$Y_\ell^m(\theta,\phi) = (-1)^{(m+|m|)/2}\left[\frac{2\ell+1}{2\pi}\frac{(\ell-|m|)!}{(\ell+|m|)!}\right]^{1/2} P_\ell^{|m|}(\cos\theta)\,e^{im\phi}$$

con $m = -\ell, \cdots, -1, 0, 1, \cdots, \ell$.

Con esta separación de variables, las perturbaciones toman la forma:

$$\begin{aligned} p'(r,\theta,\phi) &= p'(r)Y_\ell^m(\theta,\phi) \\ \Phi'(r,\theta,\phi) &= \Phi'(r)Y_\ell^m(\theta,\phi) \\ T'(r,\theta,\phi) &= T'(r)Y_\ell^m(\theta,\phi) \\ &\text{etc} \end{aligned} \tag{A.35}$$

y para la variación Lagrangiana del desplazamiento:

$$\vec{\xi}(r,\theta,\phi) = \left[\xi_r(r), \xi_t(r)\frac{\partial}{\partial\theta}, \xi_t(r)\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\right] Y_\ell^m(\theta,\phi), \tag{A.36}$$

donde

$$\xi_t(r) = \frac{1}{\sigma^2 r}\left(\frac{p'}{\rho} + \Phi'\right) \tag{A.37}$$

Con las formas (A.35) para las perturbaciones, las Ecuaciones (A.28)-(A.32) toman la forma:

$$\frac{1}{\rho}\frac{dp'}{dr} + \frac{g}{\rho c_s^2}p' + \left(N^2 - \sigma^2\right)\xi_r + \frac{d\Phi'}{dr} = g\nabla_{\rm ad}\frac{\rho T}{p}\delta S, \tag{A.38}$$

$$\frac{1}{r^2}\frac{d(r^2\xi_r)}{dr} + \frac{1}{\Gamma_1}\frac{d\ln p}{dr}\xi_r + \left(1 - \frac{L_\ell^2}{\sigma^2}\right)\frac{p'}{\rho c_s^2} - \frac{\ell(\ell+1)}{\sigma^2 r^2}\Phi' = \nabla_{\rm ad}\frac{\rho T}{p}\delta S, \tag{A.39}$$

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\Phi'}{dr}\right) - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2}\Phi' - 4\pi G\rho\left(\frac{p'}{\rho c_s^2} + \frac{N^2}{g}\xi_r\right) = -4\pi G\nabla_{\rm ad}\frac{\rho^2 T}{p}\delta S \tag{A.40}$$

$$K\frac{dT'}{dr} = -F_r' - K'\frac{dT}{dr} \tag{A.41}$$

$$i\sigma\rho T\delta S = (\rho\varepsilon_N)' - \frac{1}{r^2}\frac{r^2 F_r'}{dr} - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2}KT', \tag{A.42}$$

siendo $c_s = (\Gamma_1 p/\rho)^{1/2}$ la velocidad local del sonido.

N y L_ℓ son la frecuencias de Brunt-Väisälä y la frecuencia de Lamb, respectivamente, y están dadas por:

$$N^2 = g\left(\frac{1}{\Gamma_1}\frac{d\ln p}{dr} - \frac{d\ln\rho}{dr}\right) = -gA \tag{A.43}$$

$$L_\ell^2 = \frac{\ell(\ell+1)}{r^2}c_s^2 \tag{A.44}$$

Estas dos frecuencias críticas juegan un papel fundamental en la teoría de oscilaciones estelares no-radiales. En particular, la frecuencia de Brunt-Väisälä define las características globales del espectro de modos g. En el caso de pulsaciones de enanas blancas el cómputo de esta cantidad requiere de un tratamiento numérico especial, sobre todo en las regiones centrales (altamente degeneradas) de estas estrellas, donde se cumple que $\Gamma_1^{-1}(d\ln p/dr) \sim (d\ln\rho/dr)$. A raíz de esta propiedad, en el caso de las enanas blancas es necesario evaluar N con una formulación más adecuada desde el punto de vista numérico (Ver Eq. 3.21 del Capítulo 3).

Las Ecuaciones(A.38)-(A.42) proporcionan la parte de las perturbaciones que depende de r, esto es, $p'(r)$, $\Phi'(r)$, $T'(r)$, etc, en el caso de oscilaciones no-radiales, lineales, no-adiabáticas. En la *aproximación adiabática* se supone que no hay intercambio de calor entre las distintas partes del fluído al oscilar[1]. Esta condición es equivalente a decir que la entropía específica se conserva, de tal forma que

$$\delta S = 0. \tag{A.45}$$

Con la condición (A.45), la relación termodinámica (A.26) adquiere la forma simple:

$$\rho' = \frac{p'}{c_s^2} + \frac{\xi_r \rho N^2}{g}, \tag{A.46}$$

la cual proporciona la perturbación en densidad en términos de la perturbación en la presión. Las Ecuaciones (A.38)-(A.40) se reducen ahora a:

$$\frac{1}{r^2}\frac{d(r^2\xi_r)}{dr} - \frac{g}{c_s^2}\xi_r + \left(1 - \frac{L_\ell^2}{\sigma^2}\right)\frac{p'}{\rho c_s^2} = \frac{\ell(\ell+1)}{\sigma^2 r^2}\Phi', \tag{A.47}$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{dp'}{dr} + \frac{g}{\rho c_s^2}p' + \left(N^2 - \sigma^2\right)\xi_r = -\frac{d\Phi'}{dr}, \tag{A.48}$$

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\Phi'}{dr}\right) - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2}\Phi' = 4\pi G\rho\left(\frac{p'}{\rho c_s^2} + \frac{N^2}{g}\xi_r\right). \tag{A.49}$$

Las Ecuaciones (A.47)-(A.49) junto con las condiciones de borde apropiadas para el centro ($r = 0$) y la superficie estelar ($r = R_*$), constituyen un problema de autovalores (con autovalor σ^2) el cual debe resolverse para encontrar los modos normales de oscilación. Notemos aquí que ninguna de las Ecuaciones (A.47)-(A.49) involucra el orden acimutal (m) en sus coeficientes, lo cual dá origen a una degeneración en los autovalores: hay $2\ell + 1$ autovalores degenerados. Dicha degeneración es destruída por la presencia de, por ejemplo, rotación o campos magnéticos.

Las Ecuaciones (A.47)-(A.49) aplicadas a modelos estelares generales no poseen solución analítica[2] por lo cual es necesario resolverlas numéricamente. Para tal fin es adecuado reformularlas en términos de cantidades adimensionales. Consideremos los siguientes cambios de variables:

$$y_1 = \frac{\xi_r}{r};\ y_2 = \frac{1}{gr}\left(\frac{p'}{\rho} + \Phi'\right);\ y_3 = \frac{1}{gr}\Phi';\ y_4 = \frac{1}{g}\frac{d\Phi'}{dr};\ \omega^2 = \frac{R_*^3}{GM_*}\sigma^2. \tag{A.50}$$

De esta manera las incógnitas pueden expresarse como:

$$\xi_r = ry_1;\ p' = \rho gr(y_2 - y_3);\ \Phi' = gry_3;\ \frac{d\Phi'}{dr} = gy_4;\ \sigma^2 = \frac{GM_*}{R_*^3}\omega^2 \tag{A.51}$$

[1] La condición de adiabaticidad se cumple principalmente en las regiones internas de las estrellas, pero no en las regiones próximas a la superficie estelar.

[2] excepto para el caso de una esfera homogénea.

La sustitución de (A.51) en las Ecuaciones (A.47)-(A.49) dá, finalmente, el siguiente sistema de ecuaciones adimensionales:

$$x\frac{dy_1}{dr} = (V_g - 3)\, y_1 + \left[\frac{\ell(\ell+1)}{C_1\omega^2} - V_g\right] y_2 + V_g y_3, \tag{A.52}$$

$$x\frac{dy_2}{dr} = \left(C_1\omega^2 - A^*\right) y_1 + (A^* - U + 1)\, y_2 - A^* y_3, \tag{A.53}$$

$$x\frac{dy_3}{dr} = (1 - U)\, y_3 + y_4, \tag{A.54}$$

$$x\frac{dy_4}{dr} = UA^* y_1 + UV_g y_2 + [\ell(\ell+1) - UV_g]\, y_3 - U y_4, \tag{A.55}$$

donde

$$V_g = \frac{V}{\Gamma_1} = -\frac{1}{\Gamma_1}\frac{d\ln p}{d\ln r} = \frac{gr}{c_s^2} = \frac{gr\rho}{\Gamma_1 p}, \tag{A.56}$$

$$U = \frac{d\ln M_r}{d\ln r} = \frac{4\pi\rho r^3}{M_r}, \tag{A.57}$$

$$C_1 = \left(\frac{r}{R_*}\right)^3 \frac{M_*}{M_r}, \tag{A.58}$$

$$A^* = -rA = \frac{r}{g}N^2 = r\left(\frac{1}{\Gamma_1}\frac{d\ln p}{dr} - \frac{d\ln\rho}{dr}\right). \tag{A.59}$$

La variable adimensional x es la coordenada radial escaleada con el radio estelar ($x = r/R_*$), M_r es la masa dentro de una esfera de radio r, y M_* es la masa total de la estrella.