Apéndice C

C.1 Ecuaciones de estructura y evolución estelar

En ausencia de campos magnéticos, rotación y fuerzas de marea, las ecuaciones que describen la estructura y evolución de una estrella son:

$$\frac{\partial r}{\partial M_r} = \frac{1}{4\pi r^2 \rho}, \tag{C.1}$$

$$\frac{\partial p}{\partial M_r} = -\frac{G M_r}{4\pi r^4}, \tag{C.2}$$

$$\frac{\partial L_r}{\partial M_r} = \epsilon_n - \epsilon_\nu - C_p \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\delta}{\rho}\frac{\partial p}{\partial t}, \tag{C.3}$$

$$\frac{\partial T}{\partial M_r} = -\frac{G M_r T}{4\pi r^4 p} \nabla. \tag{C.4}$$

Las Ecuaciones (C.2), (C.3) y (C.4) representan el equilibrio hidrostático, la conservación de la energía, y la conservación y transporte de energía a través de la estrella. Aquí $\delta = -(\partial \ln \rho / \partial \ln T)_p$ y $\nabla = (d \ln T / d \ln p)$ es el gradiente de temperatura, cuyo valor dependerá de la manera en que el transporte de energía se realiza: en forma radiativa o convectiva. El resto de los símbolos tienen el significado usual.

Estas ecuaciones contienen funciones que describen las propiedades del material estelar tales como la densidad ρ, la energía liberada por reacciones nucleares ϵ_n, las pérdidas de energía por neutrinos ϵ_ν, la opacidad κ y el calor específico C_p. Estas cantidades son funciones de la presión, temperatura y composición química, y son dadas por la microfísica particular del problema. Las Ecuaciones (C.1) a (C.4) constituyen un set de ecuaciones diferenciales parciales no lineales, siendo la coordenada masa M_r y el tiempo t las variables independientes.

Estas ecuaciones deben ser complementadas con las ecuaciones diferenciales que describen los cambios en las abundancias de composición química debido a reacciones nucleares, mezcla convectiva y difusión microcópica. En forma esquemática, estas ecuaciones pueden escribirse como

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} = \left(\frac{\partial n_i}{\partial t}\right)_{\text{nuc}} + \left(\frac{\partial n_i}{\partial t}\right)_{\text{mix}}, \qquad i = 1, ..., I \tag{C.5}$$

donde n_i es el número de partículas por unidad de volumen de la especie i. El primer término del miembro derecho representa el cambio resultante de las reacciones nucleares, y el segundo el cambio producido por diferentes mecanismos de mezcla:

convección, semiconvección, difusión microscópica. Por cada especie química relevante hay una ecuación de la forma (C.5) y todas están acopladas entre sí, es decir que en realidad (C.5) representa un sistema de I ecuaciones diferenciales acopladas (I es el número total de especies nucleares consideradas).

Brevemente, consideremos la contribución debida a las reacciones nucleares. Una dada especie nuclear puede ser creada y aniquilada luego de numerosas reacciones nucleares con otras especies. Si $\langle v\sigma\rangle_{ij}$ indica la tasa de reacciones nucleares por par de partículas entre las especies i y j, y $\langle v\sigma\rangle_{kl}$ la correspondiente a las reacciones entre partículas k y l que producen partículas i, tenemos

$$\left(\frac{\partial n_i}{\partial t}\right)_{\text{nuc}} = -\sum_j \langle v\sigma\rangle_{ij} n_i n_j + \sum_{k,l} \langle v\sigma\rangle_{kl} n_k n_l \tag{C.6}$$

La primer sumatoria corresponde a las reacciones que destruyen partículas de la especie i, mientras que la segunda corresponde a las reacciones que las crean. En particular, se utiliza un esquema de linealización implícito para la solución de estas ecuaciones (Arnett & Truran 1969).

La segunda contribución en la ecuación (C.5) representa una variedad muy amplia de procesos de mezcla que pueden modificar la composición química en una dada región de la estrella, de los cuales el más conocido es la convección. Con respecto a la convección, hemos considerado que los procesos de mezcla son instantáneos, dado que la escala de tiempo de dichos procesos son varios órdenes de magnitud menores que las escalas de tiempo en las cuales las especies químicas cambian por efectos de las reacciones nucleares.

Antes de terminar esta sección, mencionaremos brevemente la forma en que opera el código de evolución en relación a los cambios producidos en las abundancias de composición química. Los cambios de la composición química en un modelo estelar, dados por el conjunto de Ecuaciones (C.5), no son tratados en el código de evolución estelar de manera completamente autoconsistente con los cambios en las variables de estructura estelar. En efecto, al momento de integrar las ecuaciones de estructura estelar en un paso temporal (Δt) la composición química se supone conocida. Una vez obtenidas T, p, r y L_r al tiempo, digamos, t_n, se avanza la composición química mediante la integración (empleando las variables de estructura en t_n) de las Ecuaciones (C.5) al nuevo tiempo, $t_{n+1} = t_n + \Delta t$. Luego se avanzan las variables de estructura al tiempo t_{n+1}, y así sucesivamente. La resolución *simultánea* de las ecuaciones de estructura y de composición química implica un enorme costo computacional. De hecho, no es imprescindible cuando el paso temporal se mantiene suficientemente pequeño como para que, tanto las variables de estructura como la composición química, no cambian demasiado en cada paso de integración.

En la siguiente sección incluímos el formalismo considerado en nuestros cálculos para el tratamiento de la difusion microscópica.

C.2 Ecuaciones de difusión

Bajo la influencia de la gravedad, presiones parciales, gradientes térmicos y campos eléctricos inducidos, las velocidades de difusión en un plasma multicomponente satisfacen el set de ecuaciones de difusión (Burgers 1969)

$$\frac{dp_i}{dr} - \frac{\rho_i}{\rho}\frac{dp}{dr} - n_i Z_i e E = \sum_{j\neq i}^{N} K_{ij}\,(w_j - w_i)$$
$$+ \sum_{j\neq i}^{N} K_{ij}\; z_{ij}\frac{m_j\; r_i\;\; - m_i\; r_j}{m_i\;\; + m_j}, \tag{C.7}$$

y la ecuación de flujo de calor

$$\frac{5}{2} n_i k_B \nabla T = -\frac{5}{2}\sum_{j\neq i}^{N} K_{ij}\;\; z_{ij}\frac{m_j}{m_i\;\; + m_j}\,(w_j - w_i) - \frac{2}{5} K_{ii}\;\; z''_{ii}\;\; r_i$$

$$-\sum_{j\neq i}^{N} \frac{K_{ij}}{(m_i\;\; + m_j)^2}\left(3m_i^2 + m_j^2 z'_{ij} + 0.8 m_i m_j z''_{ij}\right)\; r_i$$
$$+\sum_{j\neq i}^{N} \frac{K_{ij} m_i m_j}{(m_i\;\; + m_j)^2}\left(3 + z'_{ij} - 0.8 z''_{ij}\right)\; r_j. \tag{C.8}$$

Aquí, p_i, ρ_i, n_i, Z_i y m_i significan, respectivamente, la presión parcial, densidad de masa, número densidad, carga media y masa para la especie i (N es el número de especies iónicas más los electrones). T, k_B y ∇T son la temperatura, la constante de Boltzmann y el gradiente de temperatura, respectivamente. Las variables desconocidas son las velocidades de difusión con respecto al centro de masa, w_i, y los flujos de calor residuales r_i (para iones y electrones). En adición, el campo eléctrico E debe ser determinado. Los coeficientes de resistencia (K_{ij}, z_{ij}, z'_{ij} y z''_{ij}) son aquellos de Paquette at al (1986).

Para completar el set de ecuaciones, usamos las condiciones de flujo neto nulo de masa

$$\sum_i A_i n_i w_i = 0, \tag{C.9}$$

y corriente eléctrica nula

$$\sum_i Z_i n_i w_i = 0. \tag{C.10}$$

En términos del gradiente en el número densidad podemos transformar la Ecuación (C.7) en

$$\frac{1}{n_i}\left[\sum_{j\neq i}^{N} K_{ij}\,(w_i - w_j) + \sum_{j\neq i}^{N} K_{ij}\;\; z_{ij}\frac{m_i\; r_j\;\; - m_j\; r_i}{m_i\;\; + m_j}\right] - \; Z_i e E =$$
$$\alpha_i - k_B T\;\frac{d\ln n_i}{dr}, \tag{C.11}$$

donde

$$\alpha_i = -A_i m_H g - k_B T \, \frac{d \ln T}{dr}, \tag{C.12}$$

siendo A_i, m_H, g y T el numero atómico, la masa del átomo de hidrógeno y la gravedad, respectivamente. Escribiendo las incógnitas w_i, r_i y E en términos del gradiente de la densidad de iones en la forma (similarmente para r_i y E)

$$w_i = w_i^{gt} - \sum_{\text{iones}(j)} \sigma_{ij} \, \frac{d \ln n_j}{dr}, \tag{C.13}$$

donde w_i^{gt} indica la componente de la velocidad debida a la sedimentación gravitacional y la difusión térmica. La suma en la Ecuación (C.13) es afectada sobre los iones solamente. Con las Ecuaciones (C.8) y (C.11) junto con (C.9) y (C.10) podemos fácilmente encontrar las componentes w_i^{gt} y σ_{ij} a través de inversiones matriciales.

Ahora estamos en condiciones de encontrar la evolución de la distribución de elementos a través del interior de la estrella resolviendo la ecuación de continuidad. Para tal fin, siguiendo el tratamiento de Iben & MacDonald (1985), escribimos la ecuación de continuidad como

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} = -\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left[r^2\left(w_i^{gt} n_i - \sum_j \frac{n_i}{n_j}\sigma_{ij}\frac{\partial n_j}{\partial r}\right)\right], \tag{C.14}$$

la cual es resuelta por medio de un esquema semi-implícito en diferencias finitas. más detalles son dados en Althaus & Benvenuto (2000). En particular, seguimos la evolución de los isótopos ^{1}H, ^{3}He, ^{4}He, ^{12}C, ^{14}N y ^{16}O. Las condiciones de borde para la Ecuación (C.14) son $\partial n_i / \partial r = 0$ en el centro estelar y $n_i = 0$ en la superficie. Con el objeto de calcular la dependencia de la estructura de la estrella con las abundancias variables en forma autoconsistente, el set de ecuaciones que describen la difusión ha sido acoplado al código evolutivo. Para tal fin, reemplazamos la condición de borde externa por la continuidad de la abundancia por masa X_i en la envoltura. En el centro, empleamos un desarrollo a segundo orden para n_i. Una vez computados los perfiles químicos que resultan de los procesos de difusión microscópica mencionados anteriormente, evaluamos los cambios de abundancia química inducidos por reacciones nucleares y mezcla convectiva. En particular, las opacidades radiativas son calculadas para metalicidades consistentes con lo predicho por la difusión microscópica.

C.3 Aproximación de *trace element*

Aquí describimos las ecuaciones empleadas para incluír procesos de difusión suponiendo equilibrio difusivo en la aproximación *trace element.* Este tratamiento está basado en el trabajo de Arcoragi & Fontaine (1980) (ver también Tassoul et al. 1990). Nos limitaremos a comentar sólo los aspectos más importantes involucrados en este tratamiento.

Arcoragi & Fontaine (1980) consideran un plasma estelar constituído por dos especies iónicas con carga promedio Z_1 y Z_2 y peso atómico A_1 y A_2. También, la difusión térmica es despreciada y se considera la ecuación de estado de un gas ideal bajo la suposición de que el plasma está suficientemente diluído. Bajo estas aproximaciones la velocidad de difusión w_{12} es:

$$w_{12} = D_{12}(1+\gamma)\left[-\frac{\partial \ln c_2}{\partial r} + \frac{A_2 - A_1}{A_1 + \gamma A_2}\frac{\partial \ln p}{\partial r} + \frac{A_2 Z_1 - A_1 Z_2}{A_1 + \gamma A_2}\frac{eE}{k_B T}\right]. \quad \text{(C.15)}$$

D_{12} es el coeficiente de difusión, y c_i, la concentración de iones de especies i, está definido como

$$c_i \equiv \frac{n_i}{n_1 + n_2} = \frac{p_i}{p_1 + p_2} \quad \text{(C.16)}$$

siendo p_i la presión parcial. E es el campo eléctrico, dado por

$$eE = m_p g \frac{A_1 Z_1 + A_2 Z_2 \gamma}{Z_1 (Z_1 + 1) + Z_2 (Z_2 + 1)\gamma}, \quad \text{(C.17)}$$

y γ está definido como

$$\gamma \equiv \frac{n_2}{n_1} = \frac{p_2}{p_1} = \frac{c_2}{c_1}. \quad \text{(C.18)}$$

El resto de los símbolos tienen el significado usual. Notemos que las Ecuaciones (C.16) y (C.18) son válidas en un medio isotérmico, esto es, se están despreciando gradientes de temperatura. Ahora imponemos la situación de equilibrio difusivo considerando $w_{12} = 0$, y a partir de las Ecuaciones (C.15-C.18) obtenemos la equación diferencial ordinaria para el perfil de equilibrio (ecuación A5 of Arcoragi & Fontaine 1980). En la aproximación de *trace element* ($\gamma \ll 1$), para la especie 2 considerada como minoritaria, tenemos

$$\frac{\partial \ln c_2}{\partial r} = \alpha_2 \frac{\partial \ln q}{\partial r}, \quad \text{(C.19)}$$

donde

$$\alpha_2 = \frac{A_2}{A_1}(1 + Z_1) - Z_2 - 1. \quad \text{(C.20)}$$

Con el objeto de implementar este tratamiento, Tassoul et al. (1990) dividen la zona de transición en dos partes: una superior en la cual el elemento 1 es dominante y el elemento 2 es minoritario, y una inferior en la cual los roles de los respectivos elementos son invertidos. Para la región superior el perfil de abundancia para el elemento 2 considerado como minoritario está dado por la Ecuación (C.19) y para la parte inferior de la zona de transición la abundancia del elemento 1 (considerado como minoritario) está dada por

$$\frac{\partial \ln c_1}{\partial r} = \alpha_1 \frac{\partial \ln q}{\partial r}, \quad \text{(C.21)}$$

donde

$$\alpha_1 = \frac{A_1}{A_2}(1 + Z_2) - Z_1 - 1. \quad \text{(C.22)}$$

q es la masa fraccional $(1 - M_r/M_*)$. La integración de las Ecuaciones (C.19) y (C.21) proporciona los perfiles de abundancia en equilibrio:

$$c_2 = k_2 q^{\alpha_2} \qquad \text{(región superior de la interfase)} \tag{C.23}$$

y

$$c_1 = k_1 q^{\alpha_1} \qquad \text{(región inferior de la interfase)} \tag{C.24}$$

Invocando la condición de continuidad en el punto medio de la interfase, obtenemos la relación

$$k_2 q_m^{\alpha_2} = k_1 q_m^{\alpha_1} = \frac{1}{2}, \tag{C.25}$$

donde q_m es la masa fraccional donde las abundancias de los dos elementos son iguales; el valor q_m es obtenido forzando la conservación de la masa del elemento 1. Así, en el caso de la región de transición de hidrógeno-helio, la masa fraccional externa de hidrógeno ($q_{\rm H} = M_{\rm H}/M_*$) es empleada para calcular q_m. Notemos que los posibles cambios en los perfiles de equilibrio resultan sólo de leves cambios en los estados de ionización de los elementos presentes en la interfase, o sea, variaciones en los exponentes α_1 y α_2 (Tassoul et al. 1990).

Para implementar este tratamiento en el modelado de la región de transición hidrógeno-helio, es necesario fijar pequeñas abundancias a cero para evitar la presencia de hidrógeno en regiones suficientemente profundas donde el carbono es abundante. Por otra parte, si no hacemos esto, tendríamos hidrógeno presente en regiones suficientemente calientes como para forzar a la estrella a experimentar un flash termonuclear.