

# TESIS DOCTORAL

## Pulsaciones en Estrellas Enanas Blancas Variables ZZ Ceti

Alejandro Hugo Córscico

Director: Dr. Omar G. Benvenuto (FCAG)  
Co-Director: Dr. Leandro G. Althaus (FCAG)

Miembros del Jurado Examinador:

Dr. Lydia Cidale (FCAG)  
Dr. Andrea Costa (IAFE)  
Dr. Pablo Mauas (IAFE)

Facultad de Ciencias Astronómicas y Geofísicas  
Universidad Nacional de La Plata

La Plata, 25 de Febrero de 2003

*Dedicada a mi madre y a mis hijos*

## Agradecimientos

*La realización de esta Tesis ha sido posible gracias a la orientación y guía de mis directores: Omar Benvenuto y Leandro Althaus. Quisiera expresarles mi agradecimiento por la dedicación y apoyo brindado a lo largo de estos cuatro años de trabajo.*

*También quisiera remarcar aquí que gracias a Leandro Althaus, Jorge Panei y Aldo Serenelli he podido llegar a finalizar esta Tesis, a pesar de diversos momentos “difíciles” que se fueron presentando a lo largo de este tiempo. Ellos me han ayudado incondicionalmente y en todo momento, no sólo en el plano estrictamente “científico”, sino también (y creo que esto es lo importante!) en el plano personal. Vaya a ellos mi profundo agradecimiento por tantas horas de cafés, facturas y charlas muy agradables.*

*Quiero nombrar también a varias personas quienes de una u otra manera me han ayudado desde diferentes lugares: Andrea, Favio, Analía, Ceci, Adriana, Alejandra, Carlos (Villa), Gustavo (Chino) y Rubén (Cocker).*

*Un lugar especial en estos agradecimientos lo reservo para Soledad, quien me ha brindado su inmenso cariño desde que tengo uso de razón. Esta Tesis pretende ser, de alguna manera, un homenaje a ella.*

*Pero no puedo terminar esta sección de agradecimientos sin invocar a mi madre, quien desde mi ciudad natal me ha apoyado en forma constante y ha sido esencial para que este sueño se haya hecho realidad. Por otra parte, mis pequeños hijos, sin ser realmente conscientes de su accionar, han sido el motor principal que me ha empujado a terminar este proyecto. Como tal, la Tesis esta dedicada a ellos. Y también tengo que agradecer a Marcelo (mi mejor y único hermano), quien desde hace unos 15 años ha estado incondicionalmente alentándome en mi decisión (quizá poco práctica) de seguir esta carrera.*

*Para terminar, debo agradecer a la Facultad de Ciencias Astronómicas y Geofísicas y su personal (entre ellos, en particular a Rubén Martínez), al Instituto de Astrofísica de La Plata, y al Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas. Estas instituciones me han facilitado un lugar de trabajo y también un medio de subsistencia que me ha permitido emplear mi tiempo exclusivamente al desarrollo de este trabajo.*

# Resumen

La temática de esta Tesis está orientada hacia el estudio de las propiedades pulsacionales de las estrellas variables ZZ Ceti desde un punto de vista teórico-numérico.

Las estrellas ZZ Ceti son enanas blancas de tipo espectral DA (con atmósferas ricas en hidrógeno) las cuales, durante su lento enfriamiento, experimentan inestabilidades pulsacionales al atravesar el rango de temperaturas efectivas comprendido entre los 10700 y 12500 K (“banda de inestabilidad”). Tales inestabilidades pulsacionales son interpretadas como oscilaciones globales en modos  $g$  (gravedad) no-radiales. Estas oscilaciones se traducen en variaciones fotométricas multiperiodicas observables con amplitudes de hasta 0.30 magnitudes en las curvas de luz, y períodos entre 100 y 1200 segundos.

Una de las motivaciones más importantes para estudiar estrellas pulsantes en general radica en la posibilidad de extraer información de su estructura interna y estado evolutivo a través del análisis de su espectro pulsacional. Esta técnica es análoga en su esencia a la tan conocida sismología en geofísica. El principio básico (muy antiguo en la historia de la física) es estudiar cómo un sistema vibra para luego inferir sus propiedades estructurales. En el caso de las estrellas, esta metodología se enmarca en la disciplina denominada *astrosismología*. Cabe destacar que a través de técnicas astrosismológicas aplicadas al Sol (*heliosismología*) se ha podido obtener en recientes años información extremadamente valiosa acerca de su interior, tal como el perfil interno de rotación, la marcha de la velocidad del sonido y la extensión de la zona convectiva superficial, entre otros importantes resultados.

La clase más fructífera de estrellas variables en lo que respecta a estudios astrosismológicos (a excepción del caso único del Sol), es la de las ZZ Ceti, también denominadas frecuentemente como DAVs. Esto se debe en parte a que tales estrellas son pulsadores de baja amplitud, un hecho que, a diferencia de las variables clásicas como las Cefeidas, RR Lira y Mira, permite estudiarlas en el marco de la teoría lineal de oscilaciones estelares. La primer estrella ZZ Ceti (HL Tau 76) fue descubierta por A. Landolt en el año 1968, y desde entonces este tipo de variables a sido objeto de intensos estudios tanto desde el punto de vista observacional como desde el lado teórico. En la actualidad se conocen más de 30 miembros de esta clase bien establecida de estrellas variables. Las variables ZZ Ceti presentan una gran atractivo para los astrónomos: son pulsantes multiperiodicas, lo cual implica que una gran riqueza de información está presente en sus curvas de luz. En efecto, los distintos modos de pulsación son sensibles a distintas regiones del interior de la estrella. Esto equivale a decir que *diferentes* períodos de pulsación (la principal cantidad observable de las estrellas pulsantes) contienen información implícita acerca de *diferentes* regiones de la estructura estelar. Es importante mencionar, sin embargo, que este carácter multiperiodico torna muy compleja la tarea de interpretar las curvas de luz, y grandes esfuerzos en este sentido han sido realizados en la última década por parte de los astrónomos.

Otro punto a destacar en favor de las variables ZZ Ceti es que, excepto por su variabilidad, son enanas blancas DA completamente normales. Esto tiene la importante consecuencia de que cualquier información que uno pueda inferir acerca de la estructura de las ZZ Ceti debe tener validez también para el resto de la población de enanas blancas DA, no-variables.

Es importante destacar aquí la gran importancia de estudiar la estructura y evolución de estrellas enanas blancas. En primer lugar, estas estrellas constituyen la etapa final más común en la evolución estelar, y esto las provee de un atractivo intrínseco a los ojos de los investigadores. En segundo lugar, un conocimiento más profundo de las propiedades de estas estrellas es deseable para explorar el comportamiento de la materia en condiciones extremas de densidad y temperatura (inaccesibles actualmente en laboratorios terrestres). Pero existen atractivos adicionales, en un contexto astrofísico más general. De acuerdo a la teoría de evolución estelar, las enanas blancas son el producto final de procesos que provocan que estrellas de la secuencia principal (con masas menores a ocho veces la masa del Sol) evolucionen a través de la Rama de las Gigantes (GB) y la Rama Asintótica de las Gigantes (AGB), quedando finalmente un remanente que identificamos como enanas blancas. Las fases de evolución sobre la GB y la AGB no son bien entendidas hasta el presente, con lo cual el estudio de las enanas blancas permite, en principio, obtener información acerca de los procesos que experimentan los progenitores de dichas estrellas durante tales etapas evolutivas. Otra importante motivación para estudiar estos objetos compactos reside en la posibilidad de estimar la edad del disco galáctico local. En efecto, la velocidad de enfriamiento de una enana blanca depende de la composición química de su núcleo. Conocer esta tasa de enfriamiento implica, en principio, conocer sus edades. Si tenemos en cuenta que las enanas blancas más frías son los objetos más antiguos de la galaxia, entonces sus edades nos informan, en principio, acerca del instante de formación de la primer generación de estrellas en Vía Láctea. Así, el estudio de las enanas blancas nos permite estimar (en forma indirecta) la edad del disco galáctico local.

Un aspecto de crucial importancia en astrosismología es el modelado de las configuraciones en equilibrio. Para poder extraer información de las propiedades pulsacionales observadas es necesario un modelado muy detallado de las estrellas. En este sentido, en nuestro Observatorio existe un grupo de investigación que desde hace largo tiempo está abocado al estudio de la evolución estelar, y en particular, a la evolución de estrellas enanas blancas. Dada la amplia experiencia acumulada por dicho grupo en este sentido, hemos decidido comenzar en nuestra Institución el estudio de pulsaciones en estrellas enanas blancas desde un punto de vista numérico.

El comienzo de esta Tesis provee al lector de un Capítulo introductorio conteniendo una reseña histórica acerca del desarrollo de la teoría de pulsaciones estelares, junto con definiciones básicas inherentes a las pulsaciones no-radiales. Una derivación detallada de las ecuaciones que gobiernan el problema en la aproximación adiabática-lineal es provista en el Apéndice A. En el Capítulo 2 describimos los modelos evolutivos de enanas blancas que empleamos en nuestros cálculos pulsacionales. Los modelos estelares empleados en esta Tesis corresponden a dos grupos: en el primero, las estructuras son calculadas teniendo en cuenta los efectos de la difusión dependiente del tiempo y la acción de reacciones term nucleares, partiendo de modelos iniciales en alguna medida artificiales a muy altas temperaturas, pero que posteriormente convergen a la estructura térmica y mecánica correspondiente a estrellas enanas blancas. Estos modelos son empleados en los Capítulos 4, 5 y 6. El segundo conjunto corresponde a una nueva generación de modelos los cuales tienen en cuenta también la historia evolutiva previa completa de las enanas blancas, partiendo desde la secuencia principal de edad cero (ZAMS) hasta llegar al régimen de las ZZ Ceti. Estos nuevos modelos son analizados pulsacionalmente en el Capítulo 6. En el Capítulo 3 de la Tesis una descripción detallada del es-

quema numérico empleado para resolver las ecuaciones diferenciales que gobiernan el problema adiabático es dada. En este mismo Capítulo se incluye un estudio del comportamiento de nuestro código aplicándolo a modelos estelares sencillos (esferas politrópicas), y una comparación de nuestros resultados con aquellos publicados en la literatura. También se incluye en este Capítulo un estudio pulsacional de estrellas enanas blancas de helio de baja masa, con el objeto de explorar el comportamiento de los modos propios de alto orden en objetos estelares químicamente homogéneos. Para esto hemos acoplado el código de pulsaciones al código de evolución de enanas blancas. Nuestros resultados están en muy buen acuerdo con lo que predice la teoría asintótica de pulsaciones no-radiales. El Capítulo culmina con el estudio de un problema puntual relacionado con la física de partículas fundamentales. Específicamente hemos empleado nuestro código de evolución-pulsación para obtener la evolución de modelos de enfriamiento de enanas blancas en el caso en que éstas poseen una fuente adicional de liberación de energía: emisión de *axiones*. Dichas partículas, cuya existencia fue predicha teóricamente hace varias décadas, son actualmente consideradas como serias candidatas a conformar parte de la materia oscura del Universo. En nuestro estudio obtenemos una cota inferior para la masa de los axiones. El Capítulo 4 contiene un estudio astrosismológico detallado de la estrella ZZ Ceti G117-B15A en el marco de nuestro nuevo tratamiento de las abundancias químicas (considerando difusión dependiente del tiempo), y proporciona una comparación de nuestras predicciones con los resultados independientes obtenidos por otros autores. En el Capítulo 5 exploramos el efecto de la difusión dependiente del tiempo sobre las variaciones seculares de los períodos de oscilación, una importante cantidad (actualmente medible en algunas estrellas ZZ Ceti) relacionada con la escala de tiempo evolutiva de las enanas blancas DA. En el Capítulo 6 estudiamos exhaustivamente el fenómeno de “atrapamiento de modos” (*mode trapping*) en esta clase de estrellas. Dicho fenómeno implica que algunos modos propios de oscilación están confinados en la envoltura de hidrógeno, mostrando muy baja amplitud de oscilación en las regiones más internas de los objetos. En este contexto, es aceptado corrientemente el argumento de que los modos atrapados en la envoltura son los únicos capaces de, una vez excitados, alcanzar amplitudes observables. Dado que este fenómeno de resonancia de los modos está íntimamente ligado a la forma precisa de las interfases de composición química, es nuestro interés evaluar cómo se ve afectada la efectividad de selección de modos cuando tales interfases químicas son el resultado de cálculos que contemplan la difusión química dependiente del tiempo. Nuestros resultados indican que el fenómeno de *mode trapping* resulta fuertemente debilitado debido a la forma muy suave de las interfases de composición química, una consecuencia directa de nuestro tratamiento de la difusión de elementos. El Capítulo final sintetiza los principales resultados de nuestro trabajo y los proyectos futuros.

# Tabla de contenidos

<b>1</b>	<b>Introducción</b>	<b>1</b>
1.1	Breve reseña histórica . . . . .	2
1.1.1	Los primeros descubrimientos de estrellas variables . . . . .	2
1.1.2	El desarrollo de la teoría de pulsaciones radiales . . . . .	3
1.1.3	El desarrollo de la teoría de pulsaciones no-radiales . . . . .	4
1.2	Pulsaciones no-radiales . . . . .	6
1.2.1	Características generales de los modos no-radiales . . . . .	9
1.2.2	Análisis local . . . . .	10
1.2.3	Comportamiento asintótico para alto orden radial . . . . .	11
1.2.4	Influencia de la rotación . . . . .	12
1.3	Astrosismología y ejemplos de pulsadores no-radiales . . . . .	13
1.4	Estrellas enanas blancas variables . . . . .	15
1.4.1	Propiedades generales de las estrellas enanas blancas . . . . .	16
1.4.2	Enanas blancas variables . . . . .	18
1.4.3	Bandas de inestabilidad . . . . .	20
1.4.4	Herramientas astrosismológicas . . . . .	23
1.4.5	Resultados astrosismológicos en DAVs . . . . .	27
<b>2</b>	<b>Modelos evolutivos de enanas blancas DA</b>	<b>30</b>
2.1	Nuevos modelos evolutivos de enanas blancas DA . . . . .	31
2.2	Equilibrio difusivo en la aproximación de <i>trace element</i> . . . . .	34
2.3	Difusión de elementos dependiente del tiempo . . . . .	35
<b>3</b>	<b>Resolución del problema adiabático</b>	<b>37</b>
3.1	Código de pulsaciones: esquema numérico . . . . .	38
3.2	Código de evolución-pulsación . . . . .	42
3.2.1	Funcionamiento del código de evolución-pulsación . . . . .	42
3.3	Tests . . . . .	44
3.3.1	Oscilaciones no-radiales en Polítropas . . . . .	44
3.3.2	Oscilaciones no-radiales en enanas blancas de helio - Comportamiento asintótico . . . . .	45
3.3.3	Oscilaciones no-radiales en enanas blancas DA (WDEC) . . . . .	51
3.4	Aplicación: la DAV G117-B15A y la masa de los axiones . . . . .	52
3.4.1	Método de cálculo . . . . .	53
3.4.2	Características observacionales de G117-B15A . . . . .	54
3.4.3	Estructura de G117-B15A y la identificación de modos . . . . .	55
3.4.4	El efecto de la emisión de axiones . . . . .	61
3.4.5	La masa de los axiones . . . . .	62

<b>4</b>	<b>La difusión y astrosismología de G117-B15A</b>	<b>64</b>
4.1	Detalles de los cálculos . . . . .	64
4.2	Perfiles químicos y cantidades pulsacionales . . . . .	65
4.3	Resultados astrosismológicos . . . . .	67
4.4	Conclusiones y resultados . . . . .	73
<b>5</b>	<b>Efectos de la difusión sobre <math>P</math> y <math>\dot{P}</math></b>	<b>74</b>
5.1	Cálculos . . . . .	74
5.2	Resultados . . . . .	76
5.3	El equilibrio difusivo y la ocurrencia de un flash de hidrógeno . . . . .	78
<b>6</b>	<b>La difusión y el <i>mode trapping</i></b>	<b>82</b>
6.1	Modelos con envolturas masivas de hidrógeno . . . . .	83
6.1.1	Detalles de los cálculos . . . . .	83
6.1.2	Resultados . . . . .	85
6.2	Modelos con un rango de envolturas de hidrógeno . . . . .	97
6.2.1	Resultados pulsacionales . . . . .	97
<b>7</b>	<b>Conclusiones y proyectos futuros</b>	<b>106</b>
<b>A</b>		<b>108</b>
A.1	Ecuaciones de pulsación . . . . .	108
<b>B</b>		<b>115</b>
B.1	La aproximación de Cowling . . . . .	115
<b>C</b>		<b>116</b>
C.1	Ecuaciones de estructura y evolución estelar . . . . .	116
C.2	Ecuaciones de difusión . . . . .	117
C.3	Aproximación de <i>trace element</i> . . . . .	119
<b>D</b>		<b>122</b>
D.1	Autovalores de polítropas . . . . .	122
	<b>Bibliografía</b>	<b>129</b>



# Lista de tablas

1.1	Clases de estrellas pulsantes no-radiales y sus características . . . . .	15
1.2	Clasificación espectral de estrellas enanas blancas . . . . .	17
3.1	Diferencias promedio $\langle  P_k - P_k^B  / P_k^B \rangle$ (%) . . . . .	52
4.1	Valores de $\log(M_H/M_*)$ para nuestros modelos a $T_{\text{eff}} = 12500$ K . . . . .	65
4.2	Resumen de los resultados del mejor ajuste. Referencias: (a) Koester & Allard (2000), (b) van Alena et al. (1994), (c) Kepler et al. (1982), (d) Kepler et al. (2000) . . . . .	73
6.1	Características del modelo seleccionado . . . . .	85
D.1	Autovalores $\omega^2$ para modos $p$ (índice politrópico $n= 1.5$ ) . . . . .	123
D.2	Autovalores $\omega^2$ para modos $g, f, y p$ (índice politrópico $n= 2.0$ ) . . . . .	124
D.3	Autovalores $\omega^2$ para modos $g, f, y p$ (índice politrópico $n= 2.5$ ) . . . . .	125
D.4	Autovalores $\omega^2$ para modos $g, f, y p$ (índice politrópico $n= 3.0$ ) . . . . .	126
D.5	Autovalores $\omega^2$ para modos $g, f, y p$ (índice politrópico $n= 3.5$ ) . . . . .	127
D.6	Autovalores $\omega^2$ para modos $g, f, y p$ (índice politrópico $n= 4.0$ ) . . . . .	128

# Lista de figuras

- 1.1 Esquema de contornos de la parte real de los armónicos esféricos  $Y_\ell^m(\theta, \phi)$  sobre la superficie de una estrella que pulsa en modos no-radiales. Los contornos positivos son indicados por líneas continuas, y los negativos por líneas punteadas. El eje  $\theta = 0$  ha sido inclinado un ángulo de  $45^\circ$  hacia el observador; el ecuador es mostrado con símbolos "+". Los casos ilustrados son: a)  $\ell = 1, m = 0$ ; b)  $\ell = 1, m = 1$ ; c)  $\ell = 2, m = 0$ ; d)  $\ell = 2, m = 1$ ; e)  $\ell = 2, m = 2$ ; f)  $\ell = 3, m = 0$ ; g)  $\ell = 3, m = 1$ ; h)  $\ell = 3, m = 2$ ; i)  $\ell = 3, m = 3$ ; j)  $\ell = 5, m = 5$ ; k)  $\ell = 10, m = 5$ ; l)  $\ell = 10, m = 10$ . Adaptado de Christensen-Dalsgaard (1998a). . . . . 8
- 1.2 El cuadrado de la frecuencia de Brunt-Väisälä (con línea llena) y la frecuencia de Lamb (con línea de trazos) normalizadas por el factor  $GM_*/R_*^3$ , para una polítropa de índice  $n=3$  y un valor de  $\ell = 2$ . En el diagrama también hemos incluido los valores de las autofrecuencias adimensionales  $\omega^2 = \sigma^2/(GM_*/R_*^3)$  para los primeros 10 modos  $p$  y  $g$  y el modo  $f$  (el subíndice indica el valor de  $k$ ). 11
- 1.3 Diagrama de Hertzsprung-Russell esquemático ilustrando la localización de varias clases de estrellas pulsantes (ver Tabla 1.1). La línea de trazos muestra la secuencia principal, las curvas continuas representan algunos tracks evolutivos para masas de 1, 2, 3, 4, 7, 12 y  $20 M_\odot$ , la línea de trazos y puntos es la rama horizontal y la curva punteada es el track de enfriamiento de las enanas blancas (Adaptado de Christensen-Dalsgaard 1998b). . . . . 14
- 2.1 Diagrama Hertzsprung-Russell para la evolución de nuestro modelo estelar de  $3 M_\odot$ , desde la ZAMS hasta la etapa de enana blanca. Por claridad, los estados evolutivos correspondientes a los episodios de pérdida de masa no son mostrados. Los números entre paréntesis al lado de cada círculo a lo largo del track dan la edad (en  $10^4$  años) medida desde el final de la pérdida de masa y la masa de hidrógeno en las capas externas en unidades de  $10^{-4} M_\odot$ . La región correspondiente a la banda de inestabilidad de las estrellas ZZ Ceti es mostrada como una región sombreada. Como resultado de los episodios de pérdida de masa, la masa estelar decrece desde 3 a  $0.563 M_\odot$ . Notemos que después del final de la pérdida de masa, la estrella retorna hacia temperaturas efectivas bajas donde se quema una fracción apreciable del contenido de hidrógeno. Durante esta fase, la evolución es muy lenta. . . . . 32

- 2.2 Perfiles de abundancia para nuestro remanente de enana blanca de  $0.563 M_{\odot}$  para dos modelos seleccionados justo después del punto máximo en temperatura efectiva (líneas finas) y cerca del comienzo del régimen de las ZZ Ceti. Los modelos están caracterizados por valores  $(\log L/L_{\odot}, \log T_{\text{eff}})$  de (3.1, 5.15) y (-2.48, 4.07) (líneas finas y gruesas, respectivamente). En particular, la distribución de hidrógeno, helio y carbono (línea sólida, línea de trazos y puntos y líneas punteadas, respectivamente) es mostrada en función de la fracción de masa externa. El efecto de la difusión de elementos en la distribución de abundancias químicas es claramente notable. . . . . 35
- 3.1 Diagrama esquemático ilustrando el funcionamiento conjunto de los códigos de evolución y pulsación. Nótese que la búsqueda de modos es llevada a cabo sólo en el primer modelo del intervalo de interés en  $T_{\text{eff}}$  ("modelo evolutivo 1"). A partir de ahí los modos encontrados van siendo gradualmente recalculados para los modelos posteriores de la secuencia, empleando en cada oportunidad los modos del modelo anterior como solución inicial a los del modelo actual. La única condición requerida es que el paso de tiempo evolutivo adoptado ( $\Delta t$ ) sea lo suficientemente pequeño de forma tal que la solución correspondiente a modelos consecutivos no difiera notablemente. . . . . 43
- 3.2 Diferencias relativas (en valor absoluto) del cuadrado de la autofrecuencia entre nuestros resultados y los cálculos de Christensen-Dalsgaard & Mullan (1994). Los casos mostrados son para polítropas con  $n = 1.5, 3$  y  $4$ , con  $\ell = 2$  (círculos),  $\ell = 3$  (cuadrados) y  $\ell = 4$  (triángulos). Con propósitos de claridad, los puntos correspondientes a modos del mismo grado  $\ell$  están conectados con líneas. Nótese que las diferencias relativas entre ambos conjuntos de cálculos son mayores cuanto mayor es el orden  $k$  del modo (esto es, cuando las autofunciones son mas fuertemente oscilantes). . . . . 46
- 3.3 **a.** La autofunción  $y_1$  para los modos  $g_1, \dots, g_5$  con  $\ell = 1$ , correspondientes a un modelo de enana blanca de  $0.3 M_{\odot}$  de helio puro con  $T_{\text{eff}} = 11900$  K. Nótese las grandes amplitudes de tales modos en el núcleo estelar. **b.** Igual que para el panel **a.**, pero para el caso  $\ell = 2$ . . . . . 48
- 3.4 La función de peso normalizada ( $wf$ ) correspondiente a los mismos modos incluídos en Figura 3.3a. . . . . 48
- 3.5 **a.** Períodos de modos dipolares ( $\ell = 1$ ) con orden radial desde  $k = 1$  hasta  $k = 56$  y **b.** el espaciamiento asintótico de períodos  $\Delta P_{\ell}^A$  predicho por la teoría de Tassoul (1980) en función de la temperatura efectiva. Nótese que lo períodos de los modos de alto orden tienen un comportamiento muy similar comparados con  $\Delta P_{\ell}^A$  durante el enfriamiento de la enana blanca. . . . . 49
- 3.6 La energía cinética en función de la temperatura efectiva para los mismos modos con  $\ell = 1$  incluídos en la Figura 3.5. La unidad de  $(E_{\text{kin}})_k$  es ergios. La condición de normalización adoptada es  $y_1 = 1$  en la superficie del modelo. 50
- 3.7 Espaciamiento de períodos hacia adelante ( $\Delta P_k$ ) vs. orden radial, para modos con  $\ell = 2$  para tres modelos con diferentes valores de  $T_{\text{eff}}$ . Los símbolos correspondientes a modos de la misma  $T_{\text{eff}}$  están conectados por claridad. Líneas horizontales corresponden al valor del espaciamiento asintótico de períodos en cada temperatura efectiva de acuerdo a Tassoul (1980). . . . . 51

- 3.8 Los períodos de los modos dipolares ( $\ell = 1$ )  $k = 1, 2, 3$ , y 4 para un modelo de  $0.50 M_{\odot}$  a  $T_{\text{eff}} = 11620$  K como una función de la fracción de masa de hidrógeno. El resto de los perfiles químicos corresponden al mejor ajuste obtenido (ver el texto para detalles). Los puntos corresponden a los modelos calculados, mientras que las líneas de trazos representan los períodos de oscilación observados en G117-B15A. En este caso, con una masa estelar considerablemente baja, el mejor ajuste corresponde a los modos  $k = 1, 2$ , y 3 con  $\log M_{\text{H}}/M_{*} = -6.6$ . . . . . 54
- 3.9 Igual que en la Figura 3.8, pero para el caso de un modelo de  $0.55 M_{\odot}$ . En este caso, el mejor ajuste a las observaciones se encuentra para  $k = 2, 3, 4$  y  $\log M_{\text{H}}/M_{*} = -4.0$ . Como este es el mejor ajuste que hemos encontrado con las observaciones, nos referiremos a este como el modelo fiducial. Otro ajuste aceptable es obtenido con  $k = 1, 2, 3$  y  $\log M_{\text{H}}/M_{*} = -7.0$  pero las diferencias entre los valores observados y calculados son mayores que en el caso previamente mencionado. . . . . 55
- 3.10 Igual que en la Figura 3.8, pero para el caso de un modelo de  $0.60 M_{\odot}$ . En este caso encontramos que las observaciones no son bien ajustadas por ninguna de las fracciones de hidrógeno consideradas. Esto sugiere, de acuerdo con lo encontrado por otros autores (ver texto), que la masa de esta estrella es más baja que el valor considerado en esta figura. . . . . 57
- 3.11 La composición química interna de nuestro modelo fiducial. . . . . 58
- 3.12 Panel superior: El período del modo  $\ell = 1$ ,  $k = 2$  del modelo fiducial en función de  $T_{\text{eff}}$ . El intervalo en  $T_{\text{eff}}$  ha sido elegido correspondiendo a la temperatura efectiva de G117-B15A  $\pm 200$  K. Los puntos corresponden a los modelos calculados. Panel inferior: igual que en el panel superior, pero para la derivada temporal del período. . . . . 59
- 3.13 Panel superior: El período del modo  $\ell = 1$ ,  $k = 2$  para modelos de enanas blancas con el perfil fiducial y  $T_{\text{eff}} = 11620$  K en función de la masa estelar. Los modelos calculados son mostrados con puntos. Panel inferior: Igual que en el panel superior pero para la derivada temporal del período. . . . . 59
- 3.14 Perfil de la abundancia de carbono en función del radio estelar para modelos con abundancias centrales de carbono de  $X_{\text{C}} = 0.0, 0.1, \dots, 1.0$ . Las líneas de trazos corresponden a los perfiles escaleados mientras que la línea sólida corresponde al perfil fiducial de carbono. . . . . 60
- 3.15 Panel superior: El período del modo  $\ell = 1$ ,  $k = 2$  para modelos de enanas blancas de  $0.55 M_{\odot}$  y una  $T_{\text{eff}}$  of 11620 K en función de la abundancia central de carbono. Las líneas de trazos señalan la abundancia y el período correspondientes al modelo fiducial. Panel inferior: Igual que en el panel superior, pero para la derivada temporal del período. . . . . 61
- 3.16 Panel superior: Los períodos de los modos  $\ell = 1$ ,  $k = 2, 3$ , y 4 correspondientes al modelo fiducial a una  $T_{\text{eff}}$  de 11620 K en función de la masa de los axiones. Nótese que, a pesar de la aceleración del proceso de enfriamiento inducido por la emisión de axiones, el período de los modos no cambia significativamente. Panel inferior: Igual que en el panel superior, pero para el  $\dot{P}$ . Notemos que para altos valores de la masa de los axiones, dado que el enfriamiento es fuertemente acelerado, el valor de  $\dot{P}$  muestra un crecimiento muy pronunciado. . . . . 62

- 3.17 La derivada temporal del período del modo  $\ell = 1, k = 2$  del modelo fiducial a  $T_{\text{eff}} = 11620$  K. Las líneas horizontales a trazos indican el valor observado de  $\dot{P}$ ,  $\dot{P} + \sigma$ , y  $\dot{P} + 2\sigma$  de Kepler et al. (2000). También mostramos el valor previo de  $\dot{P}$  derivado por Kepler et al. (1991). Si consideramos dos desviaciones estandar a partir del valor observacional, concluimos que las observaciones son compatibles con una masa de los axiones menor a  $3.97 \cos^2 \beta$  meV. . . . . 63
- 4.1 El perfil de la base de la envoltura de hidrógeno para nuestro conjunto de modelos de  $0.55 M_{\odot}$  a  $T_{\text{eff}} = 12500$  K representados por líneas sólidas. Para los correspondientes valores de  $\log(M_{\text{H}}/M_{*})$ , ver Tabla 4.1. Las líneas finas representan los perfiles correspondientes al tratamiento estandar de equilibrio difusivo en la aproximación de *trace element* para los mismos valores de  $\log(M_{\text{H}}/M_{*})$ . Nótese que, mientras que para envolturas gruesas de hidrógeno los perfiles son bastantes similares, hay grandes diferencias en el caso de envolturas delgadas. Los círculos indican el cambio en la pendiente en los perfiles calculados con equilibrio difusivo en la aproximación de *trace element*. . . . . 66
- 4.2 Algunas de las principales características de nuestros modelos para el caso de una masa de  $0.55 M_{\odot}$ . Panel superior: perfiles de carbono (líneas sólidas) y helio (líneas de trazos). Panel medio: El término de Ledoux de la frecuencia de Brunt-Väisälä. Panel inferior: El logaritmo del cuadrado de la frecuencia de Brunt-Väisälä. . . . . 68
- 4.3 El valor de  $\psi$  en función de la temperatura efectiva de la estrella para el caso de un modelo de enana blanca de  $0.50 M_{\odot}$ . Las curvas son etiquetadas con los respectivos valores de  $\log(M_{\text{H}}/M_{*})$ . **A** y **B** significan las identificaciones de los modos observados con  $k = 1, 2, 3$  y  $k = 2, 3, 4$  respectivamente. Nótese el profundo mínimo de  $\psi$  para el caso **A** a  $T_{\text{eff}} = 11400$  K. . . . . 69
- 4.4 Igual que en Figura 4.3 pero para el caso de modelos de enanas blancas de  $0.55 M_{\odot}$ . Para este valor de la masa estelar, los mínimos correspondientes a ambas identificaciones de modos se han desplazado al borde frío del intervalo en  $T_{\text{eff}}$  considerado. . . . . 70
- 4.5 Igual que en Figura 4.3 pero para el caso de modelos de enanas blancas de  $0.60 M_{\odot}$ . Para este valor de la masa estelar, los valores de la función  $\psi$  son mayores que en los casos de las otras masas consideradas. Así, la masa de G117-B15A debería ser menor a  $0.60 M_{\odot}$ . . . . . 71
- 4.6 El valor de  $\psi$  en función de la temperatura efectiva de la estrella considerando el caso **B** para los valores más grandes de  $\log(M_{\text{H}}/M_{*})$ . . . . . 72
- 5.1 Los perfiles químicos internos del modelo de enana blanca de carbono-oxígeno de  $0.55 M_{\odot}$  para el hidrógeno, helio, carbono y oxígeno a una temperatura efectiva de  $14000$  K. En el caso del equilibrio difusivo en la aproximación de *trace element*, los perfiles fijos son representados por líneas de puntos. Los perfiles para los cuales la difusión dependiente del tiempo ha sido considerada son representados por líneas sólidas.  $q$  es la fracción de masa externa, definida como  $q = 1 - M_r/M_{*}$ . . . . . 75

5.2	Panel A: El perfil interno del helio en función de $q$ en la interfase hidrógeno-helio. La línea sólida corresponde a un modelo con $T_{\text{eff}} = 14000$ K en el cual la difusión dependiente del tiempo ha sido considerada. La línea de trazos indica el mismo tratamiento pero para un modelo a 10000 K. Finalmente la línea de puntos corresponde a la predicción del equilibrio difusivo en la aproximación de <i>trace element</i> . Panel B: El perfil químico para el helio de acuerdo a la predicción del equilibrio difusivo en la aproximación de <i>trace element</i> para un modelo de $0.50 M_{\odot}$ calculado por Bradley (comunicación privada). Notemos que la forma de los perfiles en ambos modelos con equilibrio difusivo es la misma. . . . .	76
5.3	Panel superior: el término de Ledoux $B$ en la interfase hidrógeno-helio en el caso de difusión dependiente del tiempo para valores de $T_{\text{eff}}$ de 14000 K y 10000 K con líneas sólidas y líneas de trazos, respectivamente. Líneas punteadas y líneas de puntos y trazos corresponden a los mismos valores de $T_{\text{eff}}$ pero para el equilibrio difusivo en la aproximación de <i>trace element</i> . Panel inferior: el cuadrado de la frecuencia de Brunt-Väisälä para los mismos casos analizados en el panel A. . . . .	77
5.4	Períodos y derivadas de períodos para modos con $\ell = 1, k = 1, 2, 3$ modos para un modelo de enana blanca de carbono-oxígeno de $0.55 M_{\odot}$ en un intervalo de $T_{\text{eff}}$ conteniendo la banda de inestabilidad de las DAVs. Líneas sólidas (cuadrados llenos) corresponden a períodos (derivadas de períodos) calculadas considerando difusión en no-equilibrio, mientras líneas de puntos (cuadrados vacíos) muestran períodos (derivadas de períodos) calculados de acuerdo al equilibrio difusivo en la aproximación de <i>trace element</i> en la interfase hidrógeno-helio. . . . .	79
5.5	Igual que en la Figura 5.4 pero para modos con $\ell = 1, k = 4, 5, 6$ . . . . .	80
6.1	Panel a: La distribución de abundancias químicas de nuestro modelo. Panel b: el término de Ledoux, $B$ . Panel c: el logaritmo del cuadrado de la frecuencia de Brunt-Väisälä ( $N^2$ ). En el subpanel se muestra esta misma cantidad pero calculada despreciando el término $B$ . Notemos que la presencia de las zonas de transición química en la forma funcional $N^2$ no es completamente eliminada, en particular en las interfases helio-carbono-oxígeno e hidrógeno-helio. La masa estelar del modelo de enana blanca es $0.563 M_{\odot}$ y la temperatura efectiva es $\approx 12000$ K. . . . .	84
6.2	El logaritmo de la energía cinética de oscilación, espaciamiento de períodos y coeficientes de splitting rotacional a primer orden (panel superior, medio e inferior, respectivamente) para modos con $\ell = 1$ en función de los períodos calculados. Las líneas de puntos muestran el comportamiento asintótico para $\Delta P_k$ y $C_{\ell,k}$ . Los valores de $(E_{\text{kin}})_k$ corresponden a la normalización $y_1 = 1$ en $r = R_*$ . . . . .	86
6.3	Igual que en la Figura 6.2, pero para $\ell = 2$ . . . . .	87
6.4	Igual que en la Figura 6.2, pero para $\ell = 3$ . . . . .	87
6.5	La función de peso normalizada (líneas sólidas) en función de la fracción de masa externa, para los modos $g_1$ a $g_8$ con $\ell = 1$ . Con el objeto de comparación, las líneas punteadas muestran el perfil del término de Ledoux (en unidades arbitrarias). . . . .	89
6.6	Igual que en la Figura 6.5, pero para los modos $g_9$ a $g_{16}$ . . . . .	90
6.7	Igual que en la Figura 6.5, pero para los modos $g_{17}$ a $g_{24}$ . . . . .	91

- 6.8 Panel superior: distribución de abundancias para el hidrógeno en la interfase hidrógeno-helio según la predicción de la difusión dependiente del tiempo (línea sólida) y el equilibrio difusivo en la aproximación de *trace element* (línea fina). Panel inferior: el logaritmo del cuadrado de la frecuencia de Brunt-Väisälä para ambos tratamientos de la difusión. El panel pequeño muestra la forma del término de Ledoux. . . . . 92
- 6.9 El logaritmo de la energía cinética de oscilación (panel superior) y el espaciamiento de períodos (panel inferior) para  $\ell = 1$  (Figura a),  $\ell = 2$  (Figura b) y  $\ell = 3$  (Figura c) en términos de los períodos calculados, para el caso del equilibrio difusivo en la aproximación de *trace element*. Comparar con Figuras 6.2 a 6.4. . . . . 94
- 6.10 La función de peso normalizada para los modos  $g_{38}$  y  $g_{39}$  con  $\ell = 2$  correspondientes al modelo estelar en el que la transición química de hidrógeno-helio ha sido tratada según el equilibrio difusivo en la aproximación de *trace element*. Notemos la baja amplitud de  $wf$  debajo de la transición de hidrógeno-helio para el modo con  $k = 39$ , el cual corresponde a un modo atrapado en la envoltura de hidrógeno. . . . . 95
- 6.11 Igual que en la Figura 6.10, pero para el caso en el cual la transición química hidrógeno-helio ha sido calculada suponiendo difusión dependiente del tiempo. 95
- 6.12 La distribución de nodos de las autofunciones  $y_1$  (puntos llenos) e  $y_2$  (puntos vacíos) en la región de la transición química de hidrógeno-helio para modos con  $\ell = 2$ , de acuerdo al equilibrio difusivo en la aproximación de *trace element*. 96
- 6.13 Igual que en la Figura 6.12, pero para el caso en que el perfil químico ha sido calculado de acuerdo a la difusión dependiente del tiempo. . . . . 96
- 6.14 Panel superior: El término de Ledoux  $B$  para modelos de  $0.6 M_{\odot}$  y temperatura efectiva  $\approx 11800$  K, para los cinco valores de la masa de la envoltura de hidrógeno consideradas. Las líneas sólidas corresponden a nuestros modelos con difusión dependiente del tiempo, y las líneas de puntos muestran los resultados correspondientes al uso de la aproximación de *trace element*. Notemos que en el último caso  $B$  muestra picos muy agudos y de gran magnitud en la interfase hidrógeno-helio, en comparación con los resultados de la difusión dependiente del tiempo. Panel inferior: el logaritmo del cuadrado de la frecuencia de Brunt-Väisälä. . . . . 98
- 6.15 El logaritmo de la energía cinética de oscilación y el espaciamiento de períodos para grados armónicos  $\ell=1$  (paneles superiores),  $\ell=2$  (paneles centrales) y  $\ell=3$  (paneles inferiores), para un modelo de enana blanca de  $0.6 M_{\odot}$  a  $T_{\text{eff}} \approx 11800$  K y  $\log(M_{\text{H}}/M_{*}) = -3.941$ . Los valores de  $E_{\text{kin}}$  corresponden a la normalización usual  $y_1 = 1$  en  $r = R_{*}$ . Por claridad, la escala para la energía cinética en el caso de equilibrio difusivo está desplazada hacia arriba por 1 dex. La flecha indica un modo centralmente realzado con  $\ell = 2$ ,  $k = 24$ . . . 100
- 6.16 Igual que en la Figura 6.15, pero para  $\log(M_{\text{H}}/M_{*}) = -4.692$ . . . . . 101
- 6.17 Igual que en la Figura 6.15, pero para  $\log(M_{\text{H}}/M_{*}) = -5.672$ . . . . . 102
- 6.18 Igual que en la Figura 6.15, pero para  $\log(M_{\text{H}}/M_{*}) = -6.700$ . . . . . 103
- 6.19 Igual que en la Figura 6.15, pero para  $\log(M_{\text{H}}/M_{*}) = -7.349$ . . . . . 104

6.20 La densidad de energía cinética de oscilación ( $dE_{\text{kin}}/dr$ ) en función del radio estelar para modos con orden radial  $k = 23$  (línea de puntos),  $k = 24$  (línea sólida) y  $k = 25$  (línea de trazos) para  $\ell = 2$ . El modelo de enana blanca tiene una temperatura efectiva de  $T_{\text{eff}} \approx 11800$  K y una masa de la envoltura de hidrógeno  $M_{\text{H}}/M_{*} = -3.941$ . El panel interno muestra el perfil del término de Ledoux  $B$ . Notemos que el modo  $k = 24$  (el cual es un modo centralmente realzado) adopta grandes amplitudes de ( $dE_{\text{kin}}/dr$ ) en comparación con los modos adyacentes. Esto es particularmente cierto para la región limitada por el centro estelar y la localización del primer pico en  $B$ . Como resultado, el modo  $k = 24$  tiene un valor realzado de su energía cinética de oscilación ( $E_{\text{kin}}$ ) (ver Figura 6.15). . . . . 105



# Capítulo 1

## Introducción

Para un observador casual, las estrellas aparentan ser objetos brillantes fijos e inactivos. Sin embargo, los astrónomos saben desde hace mucho tiempo que numerosas estrellas experimentan una variedad de actividades que involucran, entre otros procesos, cambios en sus brillos que ocurren en escalas de tiempo cortas, medibles a lo largo de la duración de la vida humana. Un ejemplo lo constituyen las *variables cataclísmicas o eruptivas*, tales como las Novas y Supernovas, estrellas explosivas cuyo brillo aumenta repentina e intensamente, y luego disminuye lentamente al cabo de algunas semanas o meses. Otro ejemplo son las denominadas estrellas *variables periódicas*, que cambian su brillo aparente en forma cíclica con períodos que van desde unos pocos segundos hasta algunos años. La clasificación de estrellas variables periódicas es, sin embargo, muy amplia, y abarca fenómenos muy diferentes desde el punto de vista de su origen físico. Algunas variables periódicas deben sus cambios de brillo a efectos puramente geométricos: se trata de sistemas binarios, cuyas dos componentes tienen en general diferentes brillos intrínsecos. En este caso, una de las estrellas es periódicamente eclipsada por la otra componente del sistema, siendo entonces el período de las variaciones de brillo igual al período orbital. Son las llamadas *variables eclipsantes*. Otra importante clase de variables periódicas está conformada por estrellas aisladas, las cuales exhiben variaciones en su brillo debido a cambios periódicos de su volumen. Se dice que tales estrellas pulsan u oscilan, y son conocidas en la literatura como *variables pulsantes*. Se cree que las variables pulsantes son estrellas ordinarias que durante alguna etapa de su evolución alcanzan condiciones físicas adecuadas como para experimentar inestabilidades dinámicas, las cuales se traducen luego en pulsaciones regulares, dando lugar a las variaciones de brillo observadas. Debido a subsecuentes cambios evolutivos, tales estrellas abandonan más tarde su etapa de inestabilidad y retornan a su condición de estrellas ordinarias (no-variables).

El tipo de pulsaciones más general que una estrella puede experimentar es el de las llamadas *pulsaciones (oscilaciones<sup>1</sup>) no-radiales*, en las cuales la estrella se aparta periódicamente de su forma en equilibrio y tales movimientos macroscópicos no mantienen la simetría esférica. En el otro extremo, el tipo más simple de pulsaciones estelares es el de las *pulsaciones radiales*, en las cuales la estrella se expande y contrae periódicamente conservando en todo instante su forma esférica.

---

<sup>1</sup>Los términos *pulsaciones* y *oscilaciones* serán usados alternativamente a lo largo de esta Tesis con el mismo significado.

## 1.1 Breve reseña histórica

### 1.1.1 Los primeros descubrimientos de estrellas variables

Las distinciones mencionadas entre las distintas clases de estrellas variables y las causas que provocan las variaciones de brillo eran completamente desconocidas por los astrónomos en la época de los primeros descubrimientos de estrellas variables. Dejando de lado algunos registros de supernovas (la del año 1006, por parte de los Arabes, la de 1054, observada por Chinos y Japoneses, la supernova de 1572 observada por Tycho Brahe, y la de 1604 estudiada por Kepler), el registro concreto más antiguo de un objeto celeste mostrando una variación *periódica* de su brillo se remonta al año 1596. En agosto de aquel año un astrónomo llamado Fabricius notó en la constelación de Cetus (Ballena) una estrella no reconocible en ningún catálogo, y que meses más tarde dejó de verse. Recién en 1638 Holwarda reconoció que esta estrella, hoy conocida como  $\alpha$  Ceti (Mira, el prototipo de variables pulsantes de gran amplitud), se hacía visible e invisible alternadamente<sup>2</sup>. No fue hasta 1660 que se concluyó que el período con que esta estrella cambiaba su brillo era de unos 11 meses.

Cronológicamente, la siguiente variable detectada fue  $\beta$  Persei en 1667, con un período de  $\approx 3$  días, la cual es el prototipo de las variables eclipsantes Algol. En los 100 años siguientes sólo otras dos estrellas variables (tipo Mira) fueron descubiertas:  $\chi$  Cygni en 1686 y R Hydrae en 1704. La siguiente variable descubierta fue otra Mira, R Leonis en 1782. En 1784 Goodricke descubrió tres variables más, una de las cuales era  $\beta$  Lyrae (eclipsante). Las dos restantes,  $\delta$  Cephei y  $\eta$  Aquilae, eran de una clase nueva: las pulsantes Cefeidas, las cuales tienen períodos más cortos y menores amplitudes que las variables Mira. En 1795 Herschel descubrió la variabilidad de  $\alpha$  Herculis, una estrella rojiza con cambios irregulares de brillo de pequeña amplitud, el prototipo de la clase de *variables irregulares*, y en ese mismo año, Pigott descubrió la estrella R Scuti, con periodicidad *semiregular*. Así, antes de fines del siglo XVIII solo un número muy reducido de estrellas variables había sido descubiertas<sup>3</sup>. Esta situación cambió luego de la aparición del catálogo de Argelander en 1844, que contenía unas 18 estrellas variables, y la velocidad de descubrimientos a partir de ahí experimentó un marcado crecimiento. De hecho, en 1912 ya se habían detectado unas 4000 estrellas variables. Gran parte de esta revolución se debió a la aparición de la fotografía estelar, que permitía búsquedas sistemáticas de estrellas variables.

Mientras los descubrimientos de estrellas variables se sucedían, algunos intentos teóricos comenzaron a aparecer tratando de explicar el origen de sus comportamientos. Una extensa lista de las diversas teorías propuestas puede encontrarse en Ledoux & Walraven (1959). En particular, las teorías preponderantes para explicar el comportamiento de las Cefeidas eran aquellas que involucraban estrellas dobles. Sin embargo, era necesario descartar a los eclipses como una explicación a la forma de las curvas de luz (el brillo aparente en función del tiempo). La explicación frecuentemente dada para la variación de la luz era que debía existir alguna clase de medio resistente rodeando el sistema, y a medida que la componente principal se moviera

<sup>2</sup>Resulta curioso que los antiguos Griegos no hayan detectado ninguna estrella variable mucho antes, teniendo en cuenta que Hiparco y Tolomeo ya habían comenzado la clasificación de cientos de objetos estelares con el fin de detectar nuevas estrellas.

<sup>3</sup>Sin embargo, la gran mayoría de las variables periódicas conocidas actualmente entran en alguna de las categorías definidas por estas pocas estrellas conocidas en aquella época.

a través de ese medio, su superficie frontal sería calentada por rozamiento. En consecuencia la estrella debería mostrar fases como las de la Luna según el hemisferio más frío o más caliente se enfrentara al observador; en particular la fase brillante se presentaría cuando la estrella tuviera su máxima velocidad hacia el observador, en buen acuerdo, por otra parte, con la relación observada entre brillo y velocidad radial. Estas ideas fueron perdiendo vigencia paulatinamente debido a un número de incongruencias físicas, y más tarde fueron descartadas, aunque algunos importantes astrónomos defenderían la hipótesis binaria hasta casi mediados del siglo XX.

### 1.1.2 El desarrollo de la teoría de pulsaciones radiales

Quizá el primer intento de explicar las estrellas variables como estrellas aisladas experimentando algún tipo de oscilaciones fue formulado por el físico alemán August Ritter. En el sexto de una larga serie de artículos publicados entre 1878 y 1889, Ritter (1879) consideró por primera vez las pulsaciones radiales adiabáticas de esferas de densidad constante. Él encontró la hoy conocida relación período-densidad:  $P \propto \rho^{-1/2}$ . Ritter concluyó que el origen físico de las estrellas variables podía atribuirse a pulsaciones radiales de esferas de gas. En este contexto, el cambio de temperatura superficial durante un ciclo de pulsación provocaría el cambio en luminosidad. Inexplicablemente estas ideas fueron ignoradas por la comunidad astronómica de la época. Aparentemente sólo fueron citadas y revalorizadas por Emden recién en 1907, en su famosa obra “Esferas de gas” (Gaskugeln). En 1909 Moulton abordó el tema de los posibles cambios en la forma y dimensiones del Sol, proponiendo la idea de que ciertas clases de estrellas variables periódicas podían deber su variabilidad, al menos en parte, a oscilaciones no-radiales<sup>4</sup>. La hipótesis binaria se debilitó fuertemente en 1914, cuando Shapley publicó un importantísimo artículo en el cual analizaba detallada y sistemáticamente la situación observacional de las variables Cefeidas. Ya en aquel entonces los astrónomos comenzaban a aceptar la distinción entre estrellas gigantes y enanas, y Shapley sabía a ciencia cierta que las Cefeidas eran estrellas gigantes. Su objeción más importante a la teoría binaria era que las complicadas órbitas elípticas necesarias para reproducir las observaciones deberían ser por demás pequeñas, más pequeñas aún que el radio de las componentes mismas. Shapley apoyaba la idea de las pulsaciones, en acuerdo con Moulton (1909) y Emden (1907). Su creencia era que las Cefeidas experimentaban algún tipo de oscilaciones no-radiales provocadas por (en las propias palabras de Shapley) “... la colisión con masas de dimensiones planetarias o la aproximación de dos estrellas ...” (Shapley 1914).

Como apuntado por Ledoux & Walraven (1959), es difícil explicar por qué unos pocos años más tarde el énfasis recayó sobre las oscilaciones radiales. Eddington apareció en la escena del problema, y más tarde estableció los cimientos de la teoría radial de pulsaciones estelares. Una detallada descripción cronológica de los trabajos teóricos de Eddington (1917, 1918ab, 1926) en su esfuerzo por darle una base formal a la teoría de pulsaciones puede ser encontrada en el artículo de A. Gautschy (1997).

El desarrollo de la teoría de pulsaciones con simetría radial, luego del trabajo pionero de Eddington, se vió impulsado por el advenimiento de las nuevas capaci-

---

<sup>4</sup>Los primeros desarrollos de la teoría de oscilaciones no-radiales aparecieron *antes* que la teoría de Ritter sobre pulsaciones puramente radiales, por obra de Lord Kelvin (Thompson 1863). Los primeros intentos de aplicar los conceptos de deformaciones no-radiales a estrellas variables fueron realizados por Emden (1907), Moulton (1909) y Shapley (1914).

dades de cálculo que ofrecían las computadoras electrónicas. Esto condujo a varios investigadores a llevar a cabo experimentos numéricos en los cuales las ecuaciones no-lineales de pulsación eran resueltas, y los resultados confirmaban esencialmente las predicciones hechas a través de cálculos lineales. A mediados de la década de 1960 el problema de la excitación de las oscilaciones en las variables Cefeidas y RR Lira estaba aparentemente resuelto, y los astrónomos podían predecir mediante cálculos teóricos la localización observada de las zonas de inestabilidad en el diagrama Hertzsprung-Russell (HR) (“bandas de inestabilidad”). Algunos de los investigadores responsables de este éxito de la astrofísica moderna fueron Aleshin, Baker, Kippenhahn, Christy, Cox, Eilers, King, Olsen y Zhevakin, entre otros. Una extensa descripción de este tópico puede encontrarse en Cox (1974, 1980) y Gautschy (1997).

### 1.1.3 El desarrollo de la teoría de pulsaciones no-radiales

En contraste con el éxito alcanzado por la teoría radial, la teoría de oscilaciones no-radiales permaneció durante largo tiempo lejos del alcance de las aplicaciones astronómicas. Por largo tiempo se consideró que la única posibilidad para que una estrella experimentase oscilaciones no-radiales era la acción de fuerzas externas, siendo el escenario imaginado por los astrónomos el de un sistema binario en el cual las interacciones gravitatorias entre sus componentes directamente introducirían una perturbación no-radial, la cual, en el caso de resonancia, conduciría a oscilaciones no-radiales de una de las componentes. Otro escenario plausible era el de encuentros ocasionales entre estrellas aisladas. Sin embargo, era una creencia corriente que una vez establecidas, las pulsaciones no-radiales se amortiguarían rápidamente por efectos de disipación, debido a los complejos movimientos horizontales involucrados (Gautschy 1997).

La teoría de pulsaciones no-radiales había comenzado a ser desarrollada tempranamente por Lord Kelvin en 1863, estudiando las oscilaciones de una esfera de fluido incompresible con densidad constante. Desarrollando una pequeña perturbación en términos de armónicos esféricos, Kelvin (Thompson 1863) derivó una expresión para las autofrecuencias de oscilaciones no-radiales, las únicas posibles para esta clase de estructuras.

Oscilaciones no-radiales en esferas politrópicas fueron estudiadas por Emden (1907). Con el objeto de simplificar el problema, Emden despreció la perturbación del potencial gravitacional en las ecuaciones, pero erróneamente redujo la ecuación de continuidad a una forma apropiada para un fluido homogéneo incompresible. De esta manera fue incapaz de obtener un *espectro* de modos de oscilación, y en cambio sólo obtuvo un único período, el cual era función de la densidad media de la estrella y del valor de  $\ell$ , el grado armónico esférico de la oscilación.

El caso de una esfera homogénea compresible fue estudiado en detalle por Pekeris (1938). Como modelo estelar, la esfera homogénea compresible resulta poco realista, aunque más apropiada que una esfera de fluido incompresible. Este modelo tiene, por otra parte, la particularidad única de admitir soluciones analíticas para el problema adiabático de oscilaciones no-radiales. En efecto, como fué demostrado por Pekeris, las ecuaciones diferenciales que describen oscilaciones lineales adiabáticas (un sistema diferencial de cuarto orden) pueden reducirse a un problema de segundo orden. Una solución en serie de potencias puede ser obtenida para estas ecuaciones. Por imposición de condiciones de borde, Pekeris obtuvo fórmulas analíticas sencillas

para los autovalores ( $\sigma^2$ , siendo  $\sigma$  la autofrecuencia de oscilación) para este modelo. Este estudio reveló la existencia de dos espectros de oscilación, uno con autovalores positivos y el otro con autovalores negativos (Ledoux & Walraven 1958).

Un gran progreso en el desarrollo de la teoría de oscilaciones no-radiales tuvo lugar con la aparición del artículo titulado “The Non-Radial Oscillations of Polytropic Stars” por Cowling en 1941. En su artículo, Cowling<sup>5</sup> consideró como buena aproximación despreciar la variación del potencial gravitatorio<sup>6</sup>, y resolvió numéricamente las ecuaciones de pulsación para modelos de polítropas de baja densidad central. Cowling notó, por medio de consideraciones asintóticas, la presencia de dos espectros de modos de diferentes características físicas. Cuando el autovalor es muy grande, existe un espectro de modos propios caracterizados por movimientos mayormente radiales, a los que Cowling denominó modos  $p$ . En el otro límite, cuando  $\sigma^2 \rightarrow 0$ , Cowling obtuvo un espectro de modos cuyos desplazamientos son principalmente horizontales, a los que denominó modos  $g$ . El también obtuvo una solución sin nodos en la dirección radial, con características intermedias entre las otras dos clases, a la que denominó modo  $f$ .

El desarrollo de la teoría no-radial adiabática continuó lentamente, impulsado por aislados esfuerzos de algunos investigadores. Importantes trabajos publicados en la literatura posteriormente a los mencionados son aquellos de Pekeris & Ledoux (1941) y Cowling & Newing (1949). Sobre oscilaciones no-radiales en polítropas, los trabajos pioneros de Kopal (1949), Owen (1957), Hurley, Roberts & Wright (1966), Robe (1968), Scuflaire (1974), entre otros, sirvieron para conocer más en profundidad la naturaleza intrincada de esta clase de oscilaciones. Las primeras aplicaciones de esta teoría a estrellas variables se produjeron recién con los trabajos de Schwarzschild & Savedoff (1949) y Ledoux (1951). El primero intentaba explicar las variabilidades magnéticas observadas en ciertas estrellas. El segundo estudio tenía la finalidad de explicar la doble periodicidad y las grandes variaciones temporales en el ensanchamiento de las líneas espectrales observadas en la estrella  $\beta$  Canis Majoris (una pulsante no-radial multiperiodica, prototipo de las  $\beta$  Cephei).

La teoría no-radial no-adiabática comenzó a desarrollarse a fines de la década de 1960 y comienzos de la década de 1970. Los conceptos no-adiabáticos fueron importados desde la teoría radial. El problema matemático de oscilaciones no-radiales no-adiabáticas en la teoría lineal fue resuelto numéricamente y en forma independiente por primera vez por Christensen-Dalsgaard & Gough (1975), Dziembowski (1975) y Ando & Osaki (1975). Pronto los astrónomos llegaron a la conclusión de que el comportamiento exhibido por un gran número de estrellas variables podía explicarse en términos de pulsaciones no-radiales.

En la actualidad es un hecho bien establecido que diferentes tipos de estrellas localizadas en una variedad de lugares del diagrama HR, cubriendo varios estados evolutivos, experimentan oscilaciones no-radiales. Ejemplos de pulsadores no-radiales serán dados mas adelante en este Capítulo (Sección 1.3).

---

<sup>5</sup>Aparentemente la motivación de su estudio era la exploración del efecto de marea sobre una de las componentes en un sistema binario, más que el estudio de oscilaciones no-radiales en una estrella aislada.

<sup>6</sup>No obstante haber sido empleada por primera vez por Emden en 1907, esta aproximación se conoce actualmente en la literatura como *aproximación de Cowling*.

## 1.2 Pulsaciones no-radiales

Como mencionamos antes, el tipo más general de oscilaciones estelares son las pulsaciones no-radiales. En esta clase de oscilaciones, el desplazamiento de un elemento de masa de la estrella a partir de su posición de equilibrio puede estar en cualquier dirección, no necesariamente paralela a la dirección radial<sup>7</sup>. Por lo tanto, tales desplazamientos deben ser descritos por vectores en tres dimensiones. Como resultado, la teoría de oscilaciones no-radiales es marcadamente más intrincada que la correspondiente a oscilaciones puramente radiales. En el Apéndice A proporcionamos una derivación de las ecuaciones diferenciales que gobiernan el problema de oscilaciones no-radiales en la aproximación adiabática, siguiendo el tratamiento de Unno et al. (1989). A continuación describiremos brevemente las propiedades básicas de las pulsaciones no-radiales. Remitimos al lector a las monografías de Cox (1980) y Unno et al. (1989) para un tratamiento detallado de la teoría de oscilaciones estelares no-radiales.

Consideremos un estrella esféricamente simétrica como un estado no-perturbado (o estado en equilibrio) sobre el cual son impuestas pequeñas perturbaciones, sin importar el origen de tales perturbaciones. No consideraremos efectos como rotación o campos magnéticos. Si las perturbaciones sobre las variables físicas son muy pequeñas en relación a sus valores en equilibrio, es posible adoptar un tratamiento lineal (ver Apéndice A). En general, cada variable física  $f$  será considerada como la suma de su valor en equilibrio  $f_0$  (sólo dependiente de la coordenada radial, dada la simetría esférica), más una perturbación Euleriana o Lagrangiana ( $f'$  o  $\delta f$ , respectivamente), la cual dependerá no sólo de la coordenada radial  $r$  sino también del ángulo polar  $\theta$ , el ángulo acimutal  $\phi$ , y del tiempo  $t$ :

$$f(r, \theta, \phi, t) = f_0(r) + f'(r, \theta, \phi, t),$$

o bien,

$$f(r, \theta, \phi, t) = f_0(r) + \delta f(r, \theta, \phi, t),$$

con la condición  $f', \delta f \ll f_0$ . La relación entre los diferentes tipos de perturbaciones es  $\delta f(\vec{r}, t) \approx f'(\vec{r}, t) + \vec{\xi} \cdot \vec{\nabla} f_0(\vec{r})$  (ver Lynden-Bell & Ostriker 1967). Una perturbación Euleriana  $f'$  es la variación de  $f$  medida por un observador ubicado en un punto fijo del espacio, mientras que una perturbación Lagrangiana  $\delta f$  es la variación de  $f$  medida por un observador fijo a un dado elemento de fluido en movimiento. La forma que adquieren las ecuaciones diferenciales luego de la linealización permiten describir la dependencia angular de las perturbaciones en términos de los armónicos esféricos  $Y_\ell^m(\theta, \phi)$ , con  $m = -\ell, \dots, -1, 0, 1, \dots, \ell$ . Finalmente, considerando una dependencia temporal sinusoidal del tipo  $e^{i\sigma t}$  (con  $\sigma$  la frecuencia de oscilación), podemos realizar la siguiente separación de variables:

$$f'(r, \theta, \phi, t) = f'(r) Y_\ell^m(\theta, \phi) e^{i\sigma t},$$

$$\delta f(r, \theta, \phi, t) = \delta f(r) Y_\ell^m(\theta, \phi) e^{i\sigma t},$$

---

<sup>7</sup>De hecho, las oscilaciones radiales pueden considerarse como un caso especial de las no-radiales, cuando  $\ell = 0$ .

donde la partes dependientes solamente del radio son funciones (denominadas autofunciones del problema) que proporcionan la amplitud *relativa* de las pulsaciones dentro de la estrella, y son obtenidas junto con  $\sigma$  (el autovalor) como solución de las ecuaciones de pulsación (ver Apéndice A). Aquí la letra  $f$  ha sido empleada para describir indistintamente variables físicas tales como la presión, densidad, temperatura, potencial gravitatorio, etc. El desplazamiento (Lagrangiano) del fluido está especificado por:

$$\vec{\xi}(r, \theta, \phi, t) = \delta\vec{r}(r, \theta, \phi, t) = \left[ \xi_r(r)\check{e}_r + \xi_t(r)\frac{\partial}{\partial\theta}\check{e}_\theta + \xi_t(r)\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\check{e}_\phi \right] Y_\ell^m(\theta, \phi)e^{i\sigma t},$$

donde  $\xi_r(r)$  y  $\xi_t(r)$  son las componentes radial y tangencial respectivamente (dependientes sólo de  $r$ ) asociadas con un modo de oscilación de frecuencia  $\sigma$ .

Para una dada estructura estelar existen infinitos modos propios posibles en los cuales la estrella puede oscilar<sup>8</sup>. Cada modo tiene asociado un conjunto de valores del grado armónico  $\ell$ , el orden acimutal  $m$  y el orden radial, al que llamaremos  $k$ . Veamos el significado de cada uno de estos números cuánticos. El valor de  $\ell$  corresponde al número de líneas nodales (sobre las cuales el movimiento es nulo) sobre la superficie estelar; si  $m = 0$  todas las líneas nodales constituyen paralelos sobre la superficie estelar. Estos son modos *zonales*. El caso  $|m| = \ell$  corresponde a líneas nodales meridianas sobre la superficie estelar; son los modos *sectoriales*. En casos intermedios la superficie estelar está dividida por  $\ell - |m|$  paralelos y  $m$  meridianos, y los modos se denominan *teserales*. La superficie estelar queda dividida por estas líneas nodales en zonas que están en fase opuesta en brillo (temperatura) y velocidad del material estelar. Esto puede apreciarse en la Figura 1.1, adaptada de Christensen-Dalsgaard (1998a). La alternancia en brillo en las diferentes zonas del disco estelar es lo que provoca las variaciones en la curva de luz de una estrella que experimenta pulsaciones no-radiales. Como puede verse, cuanto mas grande es el valor de  $\ell$  mayor es el número de zonas alternadas en que la superficie estelar queda dividida, y menores son los cambios de brillo aparente sobre su curva de luz. Como consecuencia, los modos con bajo grado armónico  $\ell$  son preferencialmente observados<sup>9</sup>. El índice  $k$ , por otra parte es (para modelos estelares sencillos) el número de nodos radiales, ubicados en posiciones internas  $r_i$  de la estrella tales que  $\xi_r(r_i) = 0$  ( $i = 1, 2, \dots, k$ ). Los nodos radiales son superficies esféricas donde el movimiento radial del fluido es nulo. La correspondencia uno a uno entre el orden radial  $k$  y el número de nodos radiales desaparece en algunos modelos estelares en los que la condensación central de masa es alta, como en el caso de polítropas de alto índice politrópico ( $n \gtrsim 3.25$ ), o estrellas en etapas avanzadas de evolución.

Es importante notar que el orden acimutal  $m$  no aparece en las ecuaciones de pulsación (ver Apéndice A). Esto implica que las frecuencias (autovalores) de oscilaciones no-radiales de estrellas esféricas son degeneradas con respecto a  $m$ : por cada

<sup>8</sup>Aquí sólo nos limitaremos a describir modos no-radiales *esferoidales*, para los cuales se cumple que  $(\vec{\nabla} \times \vec{\xi})_r = 0$ . Existe otro conjunto de modos no-radiales, llamados *toroidales* para los cuales  $\vec{\nabla} \cdot \vec{\xi} = \xi_r = p' = \rho' = \Phi' = 0$ . Estos modos poseen  $\sigma = 0$  en ausencia de rotación, campos magnéticos o fases sólidas. Cuando la rotación está presente, los modos toroidales adquieren carácter oscilatorio y se denominan modos  $r$  (Rossby). En presencia de regiones sólidas los modos toroidales también tienen frecuencias no nulas, y se denominan modos torsionales o modos  $t$ .

<sup>9</sup>Por su proximidad, una excepción a la anterior aseveración es el caso del Sol, para el cual es posible distinguir modos con altos valores de  $\ell$ .

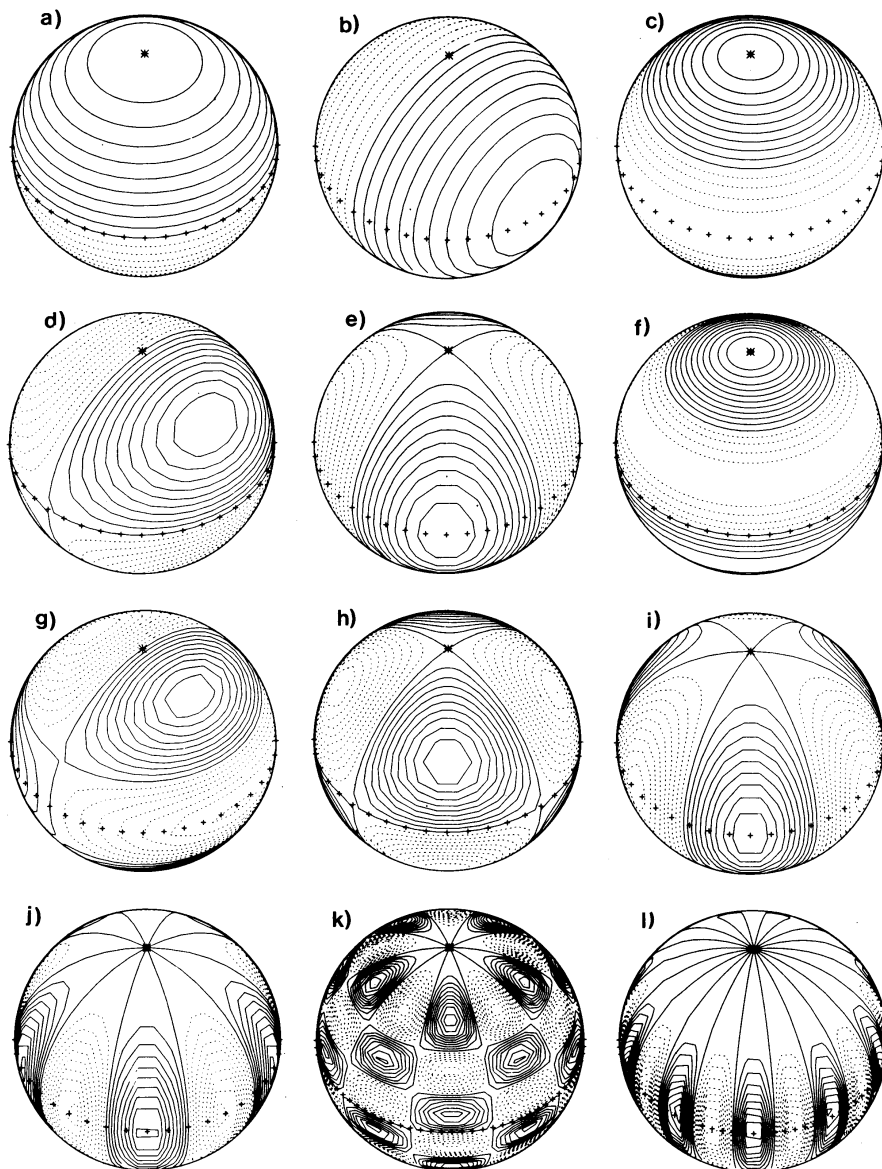


Figura 1.1: Esquema de contornos de la parte real de los armónicos esféricos  $Y_\ell^m(\theta, \phi)$  sobre la superficie de una estrella que pulsa en modos no-radiales. Los contornos positivos son indicados por líneas continuas, y los negativos por líneas punteadas. El eje  $\theta = 0$  ha sido inclinado un ángulo de  $45^\circ$  hacia el observador; el ecuador es mostrado con símbolos "+". Los casos ilustrados son: a)  $\ell = 1, m = 0$ ; b)  $\ell = 1, m = 1$ ; c)  $\ell = 2, m = 0$ ; d)  $\ell = 2, m = 1$ ; e)  $\ell = 2, m = 2$ ; f)  $\ell = 3, m = 0$ ; g)  $\ell = 3, m = 1$ ; h)  $\ell = 3, m = 2$ ; i)  $\ell = 3, m = 3$ ; j)  $\ell = 5, m = 5$ ; k)  $\ell = 10, m = 5$ ; l)  $\ell = 10, m = 10$ . Adaptado de Christensen-Dalsgaard (1998a).



valor de  $\ell$  existen  $2\ell + 1$  valores de  $m$ , y los modos correspondientes oscilan todos con la misma frecuencia  $\sigma$ . Esta degeneración es destruida en presencia de cualquier agente que implique apartamientos de la simetría esférica del modelo en equilibrio, tales como rotación o campos magnéticos.

### 1.2.1 Características generales de los modos no-radiales

Podemos examinar las características cualitativas de los modos no-radiales estudiando el caso adiabático, el cual constituye un problema de autovalores de cuarto orden (ver Apéndice A). En la aproximación adiabática se considera que las diferentes regiones de la estrella no intercambian calor durante el curso de las pulsaciones. La solución de este problema (en el cual las autofunciones y autovalores son reales) debe obtenerse en general numéricamente. Para un dado valor de  $\ell > 0$  (ver nota al pie de página<sup>10</sup>), el espectro de modos no-radiales se divide en las clases de modos  $p$  y los modos  $g$ . Una tercer clase de modos, los modos  $f$ , existe sólo para  $\ell > 1$ .

Los modos  $p$  (o modos de presión) se caracterizan por variaciones Eulerianas de presión relativamente grandes y movimientos principalmente en dirección radial ( $\xi_r > \xi_t$ ), en especial cerca de la superficie estelar. La principal fuerza de restitución actuante sobre los movimientos oscilatorios proviene de los gradientes de presión mismos (en forma similar a las ondas del sonido). Estos modos corresponden a la región de alta frecuencia de oscilación, y tales frecuencias se incrementan con  $k$  y  $\ell$  crecientes. La naturaleza de los modos  $p$  es la misma que la de los modos radiales.

Los modos  $g$  (o modos de gravedad) se distinguen por pequeñas variaciones Eulerianas de la presión y desplazamientos mayormente tangenciales ( $\xi_r < \xi_t$ ). Aquí la principal fuerza de restitución es la flotación (*buoyancy*). Los modos  $g$  corresponden al dominio de baja frecuencia de oscilación, y tales frecuencias decrecen con  $k$  y  $\ell$  crecientes. Por su naturaleza, los modos  $g$  resultan similares a las ondas de gravedad, y no tienen contrapartida en las oscilaciones radiales.

El modo  $f$  es único para un dado valor de  $\ell (> 1)$ . Este modo en general no posee (para modelos estelares sencillos) ningún nodo en la dirección radial, y posee características intermedias entre las familias de modos  $p$  y  $g$ . Su autofrecuencia, de hecho, tiene un valor intermedio entre los modos  $g$  y  $p$  de orden radial más bajo ( $k = 1$ ), y en general se incrementa lentamente para valores crecientes de  $\ell$ .

Cuando existe una zona convectiva dentro de la estrella aparece un espectro adicional de modos con  $\sigma^2 < 0$  (frecuencias imaginarias). Estos modos son usualmente denominados modos  $g^-$  para distinguirlos de los modos  $g$  (a veces designados modos  $g^+$ ). Los modos  $g^-$  crecen o decrecen exponencialmente con el tiempo y poseen carácter espacial oscilatorio sólo en regiones convectivas<sup>11</sup>. Como contrapartida, los modos  $g^+$  son oscilatorios sólo en regiones radiativas, y se tornan evanescentes en zonas convectivas.

---

<sup>10</sup>Por largo tiempo los cálculos de oscilaciones no-radiales se limitaron a valores  $\ell > 1$ . Entre los investigadores predominaba la creencia errónea de que los modos dipolares ( $\ell = 1$ ) no tenían significado físico ya que corresponderían a un desplazamiento del centro de masa de la estrella en ausencia de fuerzas externas. Smeyers (1966) demostró, en el contexto de pulsaciones adiabáticas, que tratándose de modelos compresibles lo que se desplaza con  $\ell = 1$  es el centro geométrico de la estrella, en tanto que el centro de masa permanece fijo. más tarde, la validez física del caso  $\ell = 1$  fue extendida al caso no-adiabático por Christensen-Dalsgaard (1976).

<sup>11</sup>Estos son los únicos modos de gravedad posibles para la esfera homogénea compresible, desde que este es un modelo completamente convectivo.

### 1.2.2 Análisis local

Consideremos la aproximación de Cowling (Cowling 1941). Bajo esta aproximación, en el Apéndice B obtenemos las ecuaciones diferenciales (B.5) y (B.6) para las autofunciones  $\tilde{\xi}$  y  $\tilde{\eta}$ . Desde un punto de vista local, los coeficientes de tales ecuaciones pueden considerarse como lentamente variables cuando son comparadas con la variación espacial de las perturbaciones  $\tilde{\xi}$  y  $\tilde{\eta}$  en el caso en que  $k \gg 1$ . Bajo esta suposición podemos ensayar soluciones del tipo  $\tilde{\xi}, \tilde{\eta} \propto \exp(ik_r t)$ , donde  $k_r$  es el número de ondas local en dirección radial. Aquí,  $k_r \gg 1$ , ya que las autofunciones en modos de alto orden son rápidamente oscilantes espacialmente. La sustitución de  $\tilde{\xi}, \tilde{\eta}$  en las Ecuaciones (B.5) y (B.6) proporciona la siguiente relación de dispersión local:

$$k_r^2 = \frac{1}{\sigma^2 c_s^2} (\sigma^2 - L_\ell^2) (\sigma^2 - N^2) \quad (1.1)$$

$N$  y  $L_\ell$  son, respectivamente, las frecuencia de Brunt-Väisälä y la frecuencia de Lamb (Ecuaciones A.43 y A.44 del Apéndice A). De esta expresión queda claro el papel fundamental de las frecuencias críticas  $N$  y  $L_\ell$ : si  $\sigma^2 > L_\ell^2, N^2$  ó  $\sigma^2 < L_\ell^2, N^2$ , entonces  $k_r^2 > 0$ , y el número de ondas  $k_r$  es real. Esto significa que bajo tales condiciones  $\tilde{\xi}, \tilde{\eta}$  son ondas que se propagan espacialmente en dirección radial. En los otros casos, digamos  $L_\ell^2 < \sigma^2 < N^2$  ó  $L_\ell^2 > \sigma^2 > N^2$ ,  $k_r$  es imaginario puro, y  $\tilde{\xi}, \tilde{\eta}$  son ondas evanescentes, esto es, decaen exponencialmente. Esto define en el interior de la estrella zonas de propagación y zonas evanescentes. El comportamiento local de los modos queda clarificado cuando graficamos  $L_\ell^2$  y  $N^2$  en función de la coordenada radial. Tales diagramas se denominan “diagramas de propagación” (ver Cox 1980, Unno et al. 1989).

En Figura 1.2 hemos graficado un tal diagrama, en este caso particular para una polítropa de  $n = 3$  para el caso  $\ell = 2$ . En el diagrama aparecen los cuadrados de la frecuencia de Lamb y la frecuencia de Brunt-Väisälä adimensionales  $\hat{L}_\ell^2 = L_\ell^2 / (GM_* / R_*^3)$  y  $\hat{N}^2 = N^2 / (GM_* / R_*^3)$ , junto con las autofrecuencias adimensionales  $\omega^2 = \sigma^2 / (GM_* / R_*^3)$  para los primeros 10 modos  $p$  y  $g$  y el modo  $f$ . Aquí,  $G$  es la constante de gravitación, y  $M_*$  y  $R_*$  son la masa y el radio total del modelo politrópico, respectivamente. En la figura se vé claramente la existencia de las diferentes zonas de propagación (o “cavidades resonantes”): aquella correspondiente a los modos  $p$  (denotada por la letra P, donde  $\omega^2 > \hat{L}_\ell^2, \hat{N}^2$ ), y la correspondiente a los modos  $g$  (denotada por la letra G, donde  $\omega^2 < \hat{L}_\ell^2, \hat{N}^2$ ). Para este caso particular (y en general para las estrellas de secuencia principal) los modos  $p$  pueden propagarse principalmente en la zona externa de la estrella, mientras que en la zona central tales modos son evanescentes. Lo contrario sucede para los modos  $g$ , los cuales se propagan principalmente en la región central<sup>12</sup>.

Los modos que se propagan se tornan ondas estacionarias sólo si poseen frecuencias (las autofrecuencias) para las cuales las ondas son reflejadas en los bordes de las cavidades resonantes de tal manera que retornan en fase con ellas mismas. Estos son los modos propios del modelo estelar. De esta forma se vé que los modos están principalmente “atrapados” dentro de las cavidades (la densidad de energía de oscilación adquiere en esas zonas sus valores máximos), aunque los modos se extienden desde el centro hasta la superficie, obedeciendo ciertas condiciones de borde.

<sup>12</sup>En estrellas enanas blancas sucede lo contrario: los modos  $g$  son modos principalmente de envoltura, mientras que los modos  $p$  se propagan mayormente en la zona del núcleo.

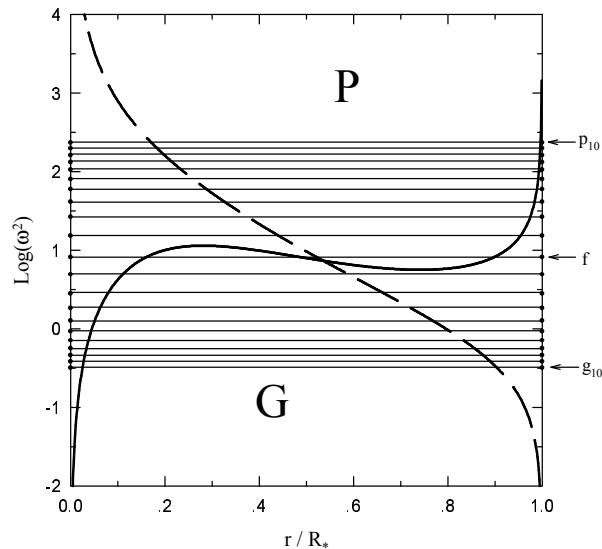


Figura 1.2: El cuadrado de la frecuencia de Brunt-Väisälä (con línea llena) y la frecuencia de Lamb (con línea de trazos) normalizadas por el factor  $GM_*/R_*^3$ , para una polítropa de índice  $n=3$  y un valor de  $\ell=2$ . En el diagrama también hemos incluido los valores de las autofrecuencias adimensionales  $\omega^2 = \sigma^2/(GM_*/R_*^3)$  para los primeros 10 modos  $p$  y  $g$  y el modo  $f$  (el subíndice indica el valor de  $k$ ).

Normalmente, el modo  $f$  tiene un valor de  $\sigma^2$  próximo al máximo de  $N^2$ , separando las zonas de propagación P y G.

En este punto podemos concluir que la naturaleza física de un modo (su carácter  $p$  o  $g$ ) y su zona de propagación estarán determinados por el valor de su propia autofrecuencia en relación a las frecuencias críticas  $N$  y  $L_\ell$ .

Es importante señalar que la distinción entre modos  $p$ ,  $g$  y  $f$ , como fue descrita antes, se torna menos clara para modos de bajo orden radial en modelos estelares con alta condensación central de masa. Scuflaire (1974) y Osaki (1975) encontraron que la formación de un núcleo estelar denso y una envoltura extendida durante la evolución modifica las características de propagación de ciertos modos. Modos de bajo orden radial adquieren un carácter dual, comportándose como modos  $g$  en las regiones centrales y como modos  $p$  en la parte externa de la estrella. En otras palabras, estos modos tienen carácter oscilatorio (no-evanescente) en ambas cavidades P y G en un diagrama de propagación. Los modos de carácter mixto muestran una relación complicada entre  $k$  (orden radial) y el número de nodos de la autofunción en dirección radial. Así, por ejemplo, el modo  $f$  exhibe 4 nodos, y los modos  $p_1$ ,  $p_2$ ,  $p_3$ ,  $g_1$ ,  $g_2$  y  $g_3$  adquieren dos nodos extra cuando uno considera una polítropa de  $n=4$  en el caso  $\ell=2$  (ver la Tabla D.6 del Apéndice D de esta Tesis).

### 1.2.3 Comportamiento asintótico para alto orden radial

Cuando el orden radial es alto ( $k \gg 1$ ) y para un dado valor pequeño de  $\ell$ , la autofrecuencia de los modos  $p$  está dada aproximadamente por (Tassoul 1980):

$$\sigma_{k,\ell} \approx \frac{\pi}{2} \left( 2k + \ell + n + \frac{1}{2} \right) \left[ \int_0^{R_*} \frac{1}{c_s(r)} dr \right]^{-1}, \quad (1.2)$$

Aquí  $n$  es el índice politrópico que caracteriza la estructura de las capas superficiales del modelo estelar. Por otra parte, en modelos estelares ya sea completamente radiativos o completamente convectivos, la frecuencia de los modos  $g$  para  $k \gg 1$  está dada por (Tassoul 1980):

$$\frac{1}{\sigma_{k,\ell}} \approx \frac{\pi}{2} \left( 2k + \ell + n + \frac{1}{2} \right) \frac{1}{\sqrt{\ell(\ell+1)}} \left[ \int_0^{R_*} \frac{N(r)}{r} dr \right]^{-1}, \quad (1.3)$$

De la Ecuación (1.2) tenemos, para los modos  $p$  con  $\ell$  fijo,

$$\Delta\sigma = \sigma_{k+1,\ell} - \sigma_{k,\ell} = \pi \left[ \int_0^{R_*} \frac{1}{c_s(r)} dr \right]^{-1} = \text{constante}, \quad (1.4)$$

esto es, el espaciado asintótico de frecuencias de los modos  $p$  es constante (e independiente de  $\ell$ ) en el límite de alto orden radial. Dicho valor constante depende sólo de la marcha de la velocidad del sonido,  $c_s(r)$ , en el interior del modelo.

De la misma manera, de la Ecuación (1.3) tenemos, para modos  $g$  con  $\ell$  fijo,

$$\Delta P_\ell = P_{k+1,\ell} - P_{k,\ell} = \frac{2\pi^2}{\sqrt{\ell(\ell+1)}} \left[ \int_0^{R_*} \frac{N(r)}{r} dr \right]^{-1} = \text{constante}, \quad (1.5)$$

donde  $P_{k,\ell} = 2\pi/\sigma_{k,\ell}$  es el período de oscilación. Notemos entonces que el espaciado asintótico de períodos de los modos  $g$  es un valor constante (aunque dependiente de  $\ell$ ) en el límite de alto orden radial. Este valor es función de la frecuencia de Brunt-Väisälä.

Las propiedades asintóticas de los modos no-radiales han sido ampliamente utilizadas en recientes años, tanto en el estudio de los modos  $p$  en el Sol (Gough & Toomre 1991) como así también en la exploración del espectro de modos  $g$  de estrellas enanas blancas variables (Tassoul, Fontaine & Winget 1990).

## 1.2.4 Influencia de la rotación

Hemos visto antes que, en ausencia de rotación, las  $2\ell + 1$  autofrecuencias (correspondientes a cada uno de los  $2\ell + 1$  valores del orden acimutal  $m$  para un dado  $\ell$ ) son iguales. Esta degeneración aparece por la ausencia de un eje preferencial de simetría para las oscilaciones. Si ahora suponemos la presencia de rotación lenta, la teoría de perturbaciones a primer orden predice que cada autofrecuencia es dividida en  $2\ell + 1$  componentes igualmente espaciadas en frecuencia, eliminando por completo la degeneración. Si la rotación es uniforme, cada componente estará dada por:

$$\sigma_{k,\ell,m} = \sigma_{k,\ell} + m(1 - C_{k,\ell})\Omega, \quad (1.6)$$

donde  $\Omega = \text{constante}$  es la frecuencia angular de rotación de la estrella y  $C_{k,\ell}$  son coeficientes que dependen de la estructura estelar y de las autofunciones del modelo no-rotante. Tales coeficientes están dados por (Cowling & Newing 1949, Ledoux 1951):

$$C_{k,\ell} = \frac{\int_0^{R_*} \rho r^2 [2\xi_r \xi_t + \xi_t^2] dr}{\int_0^{R_*} \rho r^2 [\xi_r^2 + \ell(\ell+1)\xi_t^2] dr} \quad (1.7)$$

Notemos que en el caso de modos  $p$ , cuando se incrementa el orden radial se cumple que  $\xi_r \gg \xi_t$ , de manera que  $C_{k,\ell} \rightarrow 0$ . En el caso de modos  $g$ , por otra parte, cuando  $k$  es grande se verifica que  $\xi_r \ll \xi_t$ , de modo que  $C_{k,\ell} \rightarrow 1/\ell(\ell+1)$ .

### 1.3 Astrosismología y ejemplos de pulsadores no-radiales

Cuando un conjunto de frecuencias (períodos) de oscilación es conocido para una dada estrella pulsante, dicho conjunto puede ser comparado con las frecuencias calculadas teóricamente para un modelo que represente a dicha estrella. Esta interrelación entre observaciones de oscilaciones estelares y cálculos de modelos teóricos de pulsación dá lugar a la disciplina denominada *astrosismología*. Una de las principales motivaciones para llevar a cabo estudios astrosismológicos reside en que las frecuencias de oscilación son las propiedades que más exactamente pueden medirse para una estrella.

La astrosismología, la cual está relacionada principalmente con pulsadores no-radiales, permite en principio obtener valiosa información (inaccesible mediante otras técnicas) acerca de la estructura interna y evolución de las estrellas (ver los artículos de revisión de, por ejemplo, Brown & Gilliland 1994, Gautschy & Saio 1995, 1996).

Cada modo individual de oscilación se propaga en una región específica de la estrella. Por lo tanto, cada frecuencia proporciona información de una zona particular del interior estelar, la zona en que el modo correspondiente principalmente oscila. Como resultado, cuanto mayor es el número de frecuencias observadas más rica y precisa será la información que pueda extraerse mediante técnicas sismológicas<sup>13</sup>.

La astrosismología como una potente herramienta de la astrofísica ha motivado grandes esfuerzos observacionales que han permitido en recientes años revelar el carácter de pulsadores no-radiales en una creciente variedad de estrellas, y ha permitido al mismo tiempo obtener frecuencias de oscilación cada vez más precisas. Paralelamente, un gran número de estudios teóricos han sido dedicados al modelado estelar con el afán de poder ajustar las frecuencias de los modelos a las frecuencias observadas.

Un ejemplo de astrosismología por excelencia lo constituye la *heliosismología* (Gough & Toomre 1991), que ha posibilitado a los astrónomos inferir el perfil de rotación interna y la marcha de la velocidad del sonido del Sol. El Sol oscila en  $\approx 10^7$  modos  $p$  simultáneamente, cuyas frecuencias pueden ser medidas con una altísima precisión. En contraste, en la mayoría de las estrellas pulsantes distantes sólo unas pocas decenas de modos con  $\ell \lesssim 3$  (debido a efectos de cancelación geométrica; ver Dziembowski 1977a) son detectables. Esto explica porqué la heliosismología está en un estado mucho más avanzado y ha alcanzado un grado de sofisticación mucho mayor comparado con la astrosismología.

Si bien las enanas blancas variables son tal vez la clase de variables no-radiales mejor establecida (Winget 1988, Vauclair 1997), otras varias clases de estrellas localizadas en una variedad de regiones del diagrama HR exhiben este tipo de oscilaciones. La Tabla 1.1 contiene las principales clases de estrellas pulsantes no-radiales, junto con el tipo espectral, el rango de períodos y la clase de modo no-radial en que aparentemente pulsan. Dicha tabla es una adaptación de la proporcionada por Chitre (1998) (ver también Unno et al. 1989).

La localización aproximada en el diagrama HR de algunas de las clases de es-

---

<sup>13</sup>Como un ejemplo, las Cefeidas (pulsadores radiales) en general pulsan en el modo radial fundamental o en el primer armónico ( $k = 1$ ), y a expensas de estas pulsaciones es posible inferir la densidad media de la estrella. En Cefeidas de doble período es posible obtener la masa estelar, en adición a la densidad media.

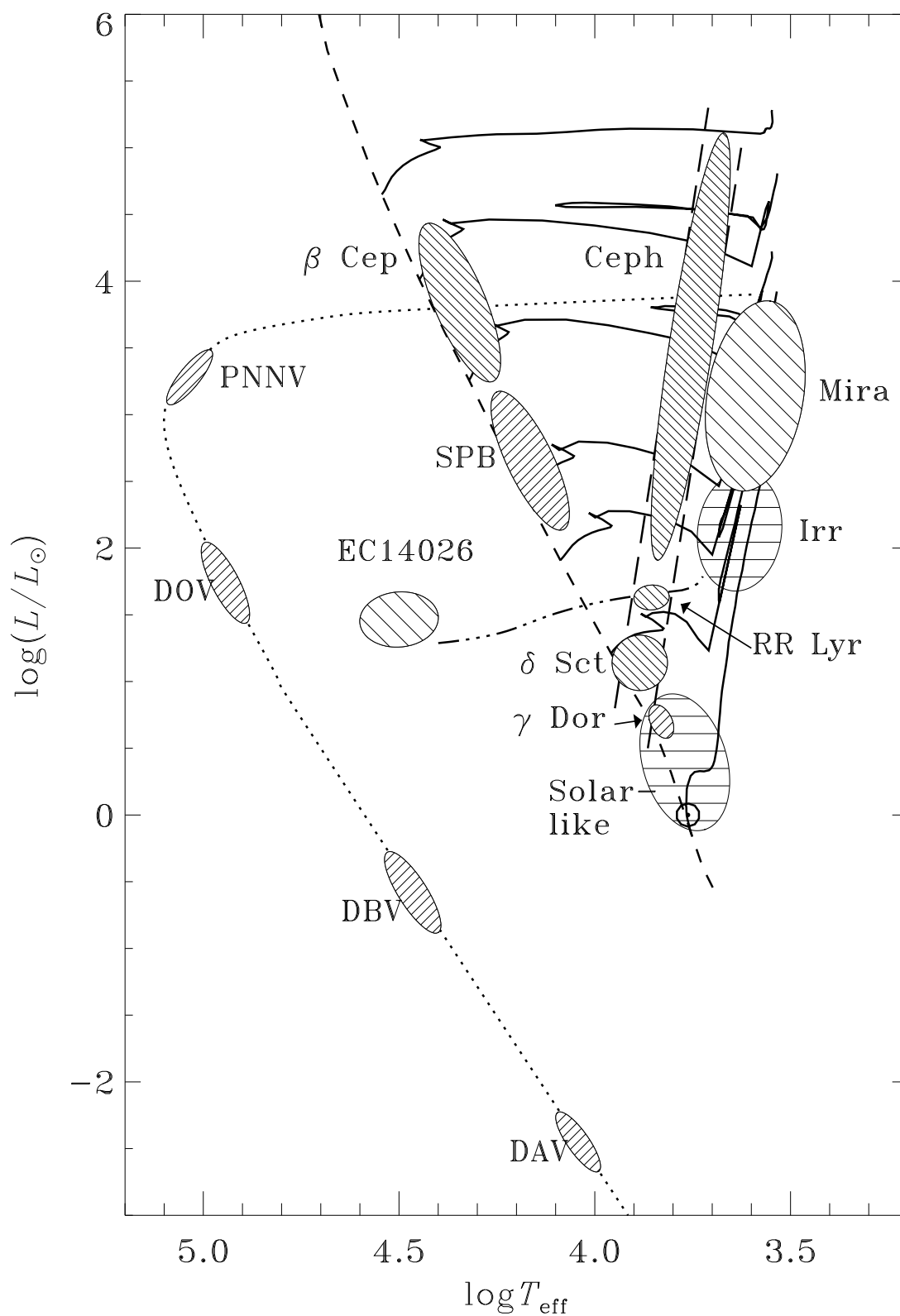


Figura 1.3: Diagrama de Hertzsprung-Russell esquemático ilustrando la localización de varias clases de estrellas pulsantes (ver Tabla 1.1). La línea de trazos muestra la secuencia principal, las curvas continuas representan algunos tracks evolutivos para masas de 1, 2, 3, 4, 7, 12 y 20  $M_{\odot}$ , la línea de trazos y puntos es la rama horizontal y la curva punteada es el track de enfriamiento de las enanas blancas (Adaptado de Christensen-Dalsgaard 1998b).

Tabla 1.1: Clases de estrellas pulsantes no-radiales y sus características

Clase de pulsante	Tipo Espectral	Rango de Períodos	Clase de modos (Orden radial)
Sol	G	2–6 min	$p$
Tipo solar	G	$\gtrsim 10$ min	$p$ ( $k \gg 1$ )
enanas y pre-enanas blancas DAV, DBV, DOV, PNNV	DA, DB, DO	2–30 min	$g$ ( $k \gg 1$ )
roAp	F, A	5–15 min	$p$ ( $k \gg 1$ )
$\delta$ Scuti	F5–A2	0.5–7 hs	$p, g$
$\beta$ Cephei	B1–B2	2–6 hs	$p, g$
SPB	B3–B9	1–4 días	$g$ ( $k \gg 1$ )
$\gamma$ Doradus	F tempranas	1–2 días	$g$ ( $k \gg 1$ )
EC14026 (Subenanas B)	B	2–9 min	$p, f$

estrellas pulsantes no-radiales que figuran en la Tabla 1.1 (junto con las variables pulsantes clásicas) puede verse en la Figura 1.3.

La pulsaciones en enanas blancas es el tema central de esta Tesis, por lo cual la siguiente sección está dedicada a describir las principales características de estos pulsadores compactos.

## 1.4 Estrellas enanas blancas variables

Las pulsaciones en enanas blancas fueron detectadas por primera vez a fines de la década de 1960, y desde entonces cuatro diferentes clases de variables degeneradas han sido identificadas, en general oscilando en más de un modo no-radial. Pulsaciones en enanas blancas son observadas como fluctuaciones fotométricas con amplitudes de hasta 0.3 magnitudes, con períodos en el rango  $100 \lesssim P \lesssim 1200$  segundos. Los siguientes factores se conjugan para que estas estrellas sean un objetivo ideal de la astrosismología (Winget 1988, Brown & Gilliland 1994): 1) oscilan con amplitudes suficientemente grandes como para ser detectables (aunque suficientemente pequeñas de tal forma que permiten un tratamiento lineal); 2) sus períodos son suficientemente cortos, lo cual permite observar en poco tiempo muchos ciclos de oscilación; 3) muchos modos son excitados (típicamente varias decenas); 4) la estructura en equilibrio de estas estrellas es relativamente simple, y esto se traduce en que sus propiedades pulsacionales también lo son.

Con el objeto de entender las pulsaciones en enanas blancas, es necesario revisar antes las características básicas de estas estrellas, lo cual haremos a continuación, basándonos en el artículo de revisión de Fontaine, Brassard & Bergeron (2001). Para más detalles sobre las propiedades físicas y observacionales de enanas blancas recomendamos ver, por ejemplo, Hansen & Kawaler (1989), Koester & Chanmugam (1990), Tassoul, Fontaine & Winget (1990), D’Antona & Mazzitelli (1990) y Kepler & Bradley (1995).

### 1.4.1 Propiedades generales de las estrellas enanas blancas

A partir del análisis de su distribución de energía, espectros ópticos y ultravioletas, se sabe que la temperatura efectiva ( $T_{\text{eff}}$ ) de las enanas blancas es de  $T_{\text{eff}} \sim 150000$  K para los objetos más calientes hasta  $T_{\text{eff}} \sim 4000$  K para los más fríos y degenerados. Los análisis espectroscópicos también proporcionan la gravedad superficial ( $\log g$ ), debido a que la intensidad y el ancho de las líneas espectrales son sensibles a la densidad del gas en la atmósfera, la cual es función de la gravedad superficial. Sin embargo, para las enanas blancas más frías toda información deducible a partir de los rasgos espectrales desaparece y no pueden obtenerse determinaciones espectroscópicas de  $\log g$ . En este caso es necesario, a partir de mediciones de la paralaje, determinar el radio estelar y la masa (por medio de una relación masa-radio), y finalmente deducir la gravedad. El valor promedio para enanas blancas es de  $\log g \sim 8$  (nótese que el valor solar es de  $\log g \sim 4.4$ ). El intervalo en luminosidad ( $L$ ) cubierto por las enanas blancas es muy amplio, reflejando el enorme rango en  $T_{\text{eff}}$ . Así, las enanas blancas más calientes alcanzan un valor de  $L \sim 10^2 - 10^3 L_{\odot}$ , mientras que las más frías tienen un valor de  $L \sim 10^{-4.7} L_{\odot}$ . La magnitud visual aparente ( $V$ ) de las enanas blancas es, en promedio, de  $V \sim 15.5$ .

En general las enanas blancas son detectadas a partir de muestras de objetos evidenciando apreciables movimientos propios, esto es, objetos muy próximos al Sol. De estos objetos, los candidatos a ser enanas blancas son aquellas estrellas azules o muy azules, que las distinguen de estrellas de secuencia principal o próximas a ella; la confirmación proviene por medio de análisis espectroscópicos. Es un hecho bien establecido que la distribución de enanas blancas en las vecindades del Sol corresponde a una población de disco (Población I), con una escala de altura de  $250 - 300$  pc. La densidad espacial es del orden de  $0.005 \text{ pc}^{-3}$  para magnitudes bolométricas  $M_{\text{bol}} < 15$ . El rate de nacimientos de enanas blancas se estima en aproximadamente  $(1.5 - 2.3) \times 10^{-12} \text{ pc}^{-3} \text{ año}^{-1}$ , incluyendo las enanas blancas en sistemas binarios.

La teoría de evolución estelar indica que los progenitores de la mayor parte de las enanas blancas son núcleos de nebulosas planetarias, formadas estas últimas a partir de estrellas de masa baja e intermedia de la secuencia principal. Se estima que estrellas que comienzan su evolución en la secuencia principal con una masa estelar  $\lesssim 8M_{\odot}$  (la vasta mayoría de ellas) terminan su vida como enanas blancas. La mayoría de las enanas blancas ha quemado hidrógeno y helio en su interior en su historia previa, por lo cual gran parte de su estructura interna está conformada por un núcleo de carbono y oxígeno (el cual contiene el 99 % de la masa total de la estrella) en proporciones aún (en cierta medida) desconocidas, principalmente a raíz de las incertezas en los rates de reacciones nucleares de la combustión del helio y de los procesos de mezcla que ocurren hacia el final de la combustión del helio en el núcleo.

La distribución observada de masas de enanas blancas aisladas tiene un pico muy pronunciado alrededor de un valor de  $M_* \sim 0.59M_{\odot}$ . Si bien el rango observado de masas es de  $0.3M_{\odot} \lesssim M_* \lesssim 1.2M_{\odot}$  (donde las colas de la distribución podrían deberse a la formación de enanas blancas producto de la evolución binaria), la mayor parte de las enanas blancas tienen masas muy próximas a la masa promedio, con una dispersión muy pequeña de  $\sim 0.13M_{\odot}$ . Aparentemente los procesos de pérdida de masa sobre los progenitores (los cuales tienen inicialmente un rango amplio de masas) actúan de tal manera que el resultado final es, en todos los casos, la aparición



Tabla 1.2: Clasificación espectral de estrellas enanas blancas

Tipo Espectral	Características
DA	Líneas de H, sin He I o metales presentes
DB	Líneas de He I solamente, sin H o metales presentes
DC	Espectro continuo sin líneas distinguibles
DO	Intensas líneas He II; He I o H pueden estar presentes
DZ	Líneas de metales solamente, sin H o He
DQ	Rasgos de C

de enanas blancas con masas muy similares. Así, a pesar de sus diversos orígenes y luminosidades, las enanas blancas forman una clase remarcablemente homogénea de estrellas.

Existe evidencia de que pequeñas cantidades de helio e hidrógeno permanecen en la estrella luego de que los procesos de pérdida de masa han actuado. Tomando en cuenta los procesos termonucleares previos y la acción de la sedimentación gravitacional, la estructura de una enana blanca típica debe ser (esperable desde la teoría) un objeto estratificado formado por un núcleo de carbono-oxígeno rodeado por una fina envoltura rica en helio, rodeada a su vez por una capa rica en hidrógeno. La densidad media debe ser del orden de  $10^6 \text{ g cm}^{-3}$ . El espesor de las envolturas de hidrógeno y helio depende de los detalles de la evolución previa, y no son cantidades conocidas observacionalmente (excepto por determinaciones astrosismológicas; ver al final de este Capítulo). A partir de consideraciones teóricas, sin embargo, se cree que los valores máximos de la masa de helio e hidrógeno que puede sobrevivir a la combustión nuclear en la etapa de nebulosa planetaria son de  $\sim 10^{-2} M_*$  y  $\sim 10^{-4} M_*$ , respectivamente. Si bien estas capas son muy delgadas, ellas son extremadamente opacas a la radiación, y actúan como reguladoras del flujo de energía que escapa al espacio. Por lo tanto el valor preciso del espesor de tales envolturas es de fundamental importancia en la evolución de las enanas blancas.

Observaciones espectrocópicas y fotométricas permiten concluir que la mayoría de las enanas blancas poseen atmósferas de hidrógeno casi puro; usualmente se las denomina enanas blancas DA. Sin embargo, alrededor de un 25 % de las enanas blancas conocidas no poseen tal envoltura de hidrógeno, y exhiben una atmósfera rica en helio; a éstas se las conoce como enanas blancas DB. El resto de las enanas blancas son estrellas con atmósferas híbridas o con abundancias químicas peculiares. El esquema más común de clasificación espectral es reproducido en la Tabla 1.2 (Hansen & Kawaler 1989).

Existen numerosas evidencias observacionales de que alguna clase de evolución espectral tiene lugar a lo largo de la evolución de las enanas blancas, ya que algunas DAs se tornan DBs y viceversa en algunas etapas del enfriamiento. Tal es así que el cociente entre enanas blancas DAs y DBs es diferente para distintas temperaturas efectivas. En particular, es evidente la existencia del llamado gap de las DBs, situado a  $45000 \gtrsim T_{\text{eff}} \gtrsim 30000 \text{ K}$ , en el cual no se han podido encontrar enanas blancas tipo DB. También es conocido otro intervalo en  $T_{\text{eff}}$ , más estrecho, situado entre los 6000 y los 5000 K, en el cual tampoco se encuentran objetos tipo DB. Si bien no hay explicaciones completamente satisfactorias para estas anomalías en la distribución de enanas blancas con atmósferas ricas en helio, se sospecha que algún tipo de interrelación entre procesos de difusión química y convección debe actuar para que

algunas estrellas cambien su composición química superficial.

La mayoría de las enanas blancas nacen (de acuerdo a su condición previa de núcleo de nebulosa planetaria) como objetos compactos extremadamente calientes los cuales comienzan a enfriarse, con sus fuentes de energía nuclear casi agotadas; la energía gravitacional no puede ser liberada eficientemente debido a que la presión de los electrones degenerados impide cualquier contracción adicional: la estrella está obligada a evolucionar a partir de entonces aproximadamente a radio constante. De hecho, la estructura mecánica de la estrella está principalmente gobernada por los electrones degenerados. En particular la degeneración electrónica es responsable de una curiosa relación entre la masa y el radio estelar: cuanto más masiva la estrella menor es el radio estelar. Los electrones degenerados son también responsables de la existencia de una masa límite por encima de la cual la enana blanca no puede existir como un objeto estable: esta es la masa de Chandrasekhar.

Otra propiedad inherente a los electrones degenerados es su alta conductividad del calor, a raíz de lo cual el núcleo de las enanas blancas es casi isotermo. La temperatura de este núcleo degenerado varía entre  $\sim 2 \times 10^7$  K y  $\sim 5 \times 10^6$  K para enanas blancas en el rango de  $T_{\text{eff}}$  de 16000 – 8000 K. La gran caída en la temperatura yendo del centro a la superficie tiene lugar principalmente en la envoltura estelar, que actúa como aislante. Este enorme gradiente de temperatura da lugar a la aparición de zonas convectivas superficiales en las enanas blancas más frías. Estas zonas convectivas, cuando existen, regulan el flujo emergente de energía hacia el exterior. También juegan un papel clave en la tasa de enfriamiento de la estrella cuando la convección alcanza el borde externo del núcleo degenerado, acoplándolo con la superficie y así aumentando el flujo de energía a través de la envoltura (en comparación con el caso en que el transporte es radiativo).

Los responsables de proveer la energía térmica que luego resulta en la luminosidad de la enana blanca son los iones (no degenerados). De hecho, la estrella brilla principalmente a expensas del calor acumulado en los iones durante su historia evolutiva previa (los electrones no contribuyen significativamente). A medida que la energía térmica es gradualmente perdida por la estrella en forma de radiación, la energía cinética de los iones disminuye y el gas de iones pasa de un estado gaseoso a un estado fluido y luego a un estado sólido. El pasaje del estado fluido a sólido (cristalización) trae aparejada una liberación de calor latente, capaz de frenar considerablemente el enfriamiento de la estrella. Finalmente la reserva de energía térmica se agota y la estrella, ahora casi completamente cristalizada, deja de brillar.

Una interesante propiedad de las enanas blancas es que, como mencionamos antes, algunas de ellas experimentan inestabilidades pulsacionales. Las inestabilidades se manifiestan en términos de modos  $g$  no-radiales. De esta manera estas estrellas ofrecen la posibilidad de sondear su interior estudiando sus propiedades vibracionales. De hecho, los estudios de pulsaciones de enanas blancas constituyen el mejor ejemplo de aplicación de la astrosismología. A continuación describiremos las características más relevantes de esta clase de pulsadores.

## 1.4.2 Enanas blancas variables

Gran parte del material histórico que incluimos a continuación fue proporcionado por F. Vuille (2000, comunicación privada). En la década de 1960 era una creencia generalizada entre los astrónomos que las enanas blancas eran muy estables en cuanto a su luminosidad, de forma tal que estas estrellas podrían ser utilizadas como

estrellas de referencia. A fines de esa década, A. Landolt observaba la enana blanca HL Tau 76 con esas intenciones, cuando, para su sorpresa, encontró que esta estrella mostraba variaciones de brillo de 0.3 magnitudes con un período de unos 12 minutos (Landolt 1968). De esta manera Landolt descubrió, accidentalmente, la primer enana blanca variable. Sin embargo este hallazgo no causó un gran impacto en la comunidad astronómica, ya que no se ajustaba a las predicciones teóricas debido a que el período de las variaciones en esta estrella era dos ordenes de magnitud más grande que lo esperado, y no quedaba claro si realmente se debían o no a pulsaciones. Poco tiempo después otras dos enanas blancas variables fueron descubiertas: G44-32, con períodos de 10 y 13.7 minutos (Lasker & Hesser 1969), y R 548 (ZZ Ceti) con períodos de 3.6 y 4.5 minutos (Lasker & Hesser 1971). Warner & Robinson (1972) y Chanmugam (1972) fueron los primeros en reconocer que las variaciones eran debidas a pulsaciones en modos  $g$  no-radiales, descartando los modos radiales y los modos  $p$  no-radiales los cuales (siguiendo la relación período-densidad) deberían estar caracterizados por períodos mucho más cortos ( $\lesssim 10$  segundos) para pulsadores compactos.

En la primer mitad de la década de 1970 aparecieron otros numerosos reportes de variabilidad en enanas blancas. McGraw & Robinson (1976) demostraron que las enanas blancas formaban una clase homogénea de pulsadores, las denominadas variables DAVs (o ZZ Ceti). Una confirmación acerca de la naturaleza no-radial de las oscilaciones en estas estrellas provino de un estudio observacional llevado a cabo por Robinson, Nather & McGraw (1976) en R 548, que mostraba la presencia de “splitting” rotacional de las frecuencias, debido a la ruptura de la degeneración de los modos por la presencia de rotación lenta (ver Sección 1.2.4). Otro importante trabajo confirmó la hipótesis de los modos  $g$ : McGraw (1979) mostró que las variaciones en luminosidad eran debidas principalmente a cambios en la temperatura superficial de la estrella, y no a variaciones del radio estelar (típicas de los modos  $p$  no-radiales y de las oscilaciones puramente radiales)<sup>14</sup>.

El modelado teórico de pulsaciones no-radiales en enanas blancas comenzó quizá con el artículo de Osaki & Hansen (1973), seguido poco tiempo después por el trabajo de Brickhill (1975). En estas investigaciones adiabáticas se demostró que modos  $g$  de bajo orden radial, con períodos de alrededor de 200 segundos eran compatibles con modelos de enanas blancas, reforzando (al menos en el rango de cortos períodos) la hipótesis de que modos  $g$  podían ser la causa de las periodicidades en las curvas de luz de las variables ZZ Ceti.

Los primeros cálculos no-adiabáticos fueron llevados a cabo por Dziembowski (1977b) y Keeley (1979). El mecanismo exacto que desencadena las pulsaciones no estaba claro aún, aunque se sospechaba que los modos de oscilación podrían ser excitados por acción del denominado mecanismo  $\kappa - \gamma$  (ver Cox 1980) en zonas de ionización parcial. Esto fue finalmente confirmado por tres grupos en forma independiente y simultánea (Dziembowski & Koester 1981, Dolez & Vauclair 1981, y Winget et al. 1982a), quienes encontraron que modelos estratificados de enanas blancas con composiciones químicas más realistas que en las consideradas en estudios previos eran inestables a modos  $g$  no-radiales, con períodos en buen acuerdo con los observados, debido a la acción del mecanismo  $\kappa - \gamma$  actuando en zonas de ionización parcial, principalmente de hidrógeno. Debido al papel crucial de las zonas

---

<sup>14</sup>La confirmación teórica a esta conclusión provino más tarde a través de un importante estudio por Robinson, Kepler & Nather (1982) sobre la DAV R 548.

de ionización parcial de hidrógeno, los modelos inestables estaban confinados a un angosto dominio en  $T_{\text{eff}}$  aproximadamente consistente con la banda de inestabilidad observada.

El éxito alcanzado con las enanas blancas DA impulsó a Winget (1981) y Winget et al. 1982a) a postular que también las enanas blancas DB deberían pulsar a causa del mismo mecanismo, pero operando esta vez sobre zonas de ionización parcial de helio. Esta predicción teórica se vió confirmada por el descubrimiento de la primer enana blanca DB pulsante, GD 358, por Winget et al (1982b). Este subgrupo de enanas blancas pulsantes se conoce como estrellas DBV. Pronto un mecanismo de excitación relacionado con zonas de ionización parcial se encontró para las pre-enanas blancas pulsantes, las estrellas PG 1159, primero observadas por McGraw et al. (1979) y Bond et al. (1984), y las variables PNNV, descubiertas por Grauer & Bond (1984). En efecto, los estudios de Starrfield et al. (1983, 1984, 1985) demostraron que la ionización parcial de carbono y oxígeno podría excitar las pulsaciones en esas estrellas.

Si bien la naturaleza de las oscilaciones había sido dilucidada al menos en sus aspectos fundamentales en el comienzo de la década de 1980, algunos problemas quedaban aún por resolver, y de hecho han permanecido en el mismo estado hasta la actualidad. Una de tales cuestiones está relacionada al problema de selección de modos. En efecto, de todos los modos propios posibles predichos por cálculos numéricos en modelos realistas de enanas blancas, sólo unos pocos son observados en estrellas reales. El mecanismo de filtro que excitaría solo algunos modos hasta amplitudes observables ha sido históricamente asociado al fenómeno de *mode trapping* (ver Sección 1.4.4), provocado por la naturaleza estratificada de las enanas blancas (Winget, van Horn & Hansen 1981). Esta explicación ha sido ampliamente aceptada, aunque su validez no ha sido aún completamente demostrada (ver Capítulo 6 de esta Tesis). Otro problema que ha perdurado a través del tiempo, es de una naturaleza mas básica aún: todos los cálculos de pulsación de enanas blancas llevados a cabo hasta la fecha consideran linealidad de las pulsaciones, y sus resultados son, en rigor, sólo aplicables a los pulsadores de baja amplitud. Sin embargo, como lo demuestran las observaciones, existen dos tendencias entre las enanas blancas variables: algunas son pulsadores de baja amplitud, con curvas de luz sinusoidales, modos estables en frecuencia y amplitud (Stover et al. 1980, Kepler et al. 1982); otras muestran un comportamiento mas complejo, con curvas de luz no-sinusoidales y mayores amplitudes, y la presencia de armónicos y combinaciones lineales de frecuencias (McGraw & Robinson 1975), con modos que frecuentemente cambian sus amplitudes en escalas de tiempo cortas. Estos problemas permanecen no resueltos en la actualidad.

### 1.4.3 Bandas de inestabilidad

Existen varias clases de enanas blancas pulsantes, las cuales definen bandas de inestabilidad bien localizadas en el diagrama HR (ver Figura 1.3). Una lista completa conteniendo las propiedades de las distintas clases de enanas blancas pulsantes puede encontrarse en Bradley (2000).

**Estrellas pre-enanas blancas variables:** Están ubicadas en la región del diagrama HR donde el track de las estrellas post-AGB se une a las secuencias de enfriamiento de las enanas blancas. Estas estrellas tienen muy altas temperaturas efectivas, con  $7 \times 10^4 \lesssim T_{\text{eff}} \lesssim 1.7 \times 10^5$  K. Espectroscópicamente muestran fuertes

deficiencias de hidrógeno y rasgos pronunciados de carbono, helio y oxígeno (Werner 1992, Dreizler et al. 1995). Estas estrellas muestran periodicidades fotométricas con períodos entre 7 y 30 minutos, y se cree que son debidas a modos  $g$  de bajo grado  $\ell$  y alto orden  $k$ . Aquellas pre-enanas blancas variables las cuales están rodeadas por nebulosas planetarias se denominan en la literatura como núcleos de nebulosas planetarias variables (PNNV), y las que carecen de cualquier rastro de nebulosa son llamadas variables PG 1159 (GW Vir)<sup>15</sup>. Los períodos de pulsación de las PNNVs son más largos que los correspondientes a las PG 1159, indicando que las PNNVs tienen mayores radios. Desde el punto de vista evolutivo, las PG 1159 son consideradas como objetos que están entrando en las primeras etapas de enfriamiento del track de enanas blancas, mientras que, en contraste, las PNNVs están todavía desplazándose hacia altas temperaturas a luminosidad constante. Se conocen nueve miembros de la categoría PNNV. Por otra parte sólo cinco miembros de la clase PG 1159 son conocidos hasta el momento. Entre ellas hay una PG 1159 “híbrida”, denominada HS 2324+3944, la cual muestra hidrógeno en su espectro (Silvotti et al. 1994). Es notable que, si bien la región del diagrama HR donde las PG1159 pulsan está bien determinada, existen entre las variables objetos no-variables: la banda de inestabilidad no es “pura” (Werner 1993). En el caso de las PG 1159, las que pulsan se pueden distinguir de las no variables por el hecho de que muestran nitrógeno en sus espectros (Dreizler 1998).

Como mencionamos, la excitación de las pulsaciones en estas estrellas parece provenir de la acción del mecanismo  $\kappa - \gamma$  actuando en zonas de ionización parcial de carbono y oxígeno (Starrfield et al. 1984, 1985). Aparentemente para obtener modos inestables son requeridas envolturas conteniendo una mezcla homogénea de carbono y oxígeno, y la localización y extensión de la región de inestabilidad en el diagrama HR es fuertemente dependiente del contenido exacto de helio en dicha mezcla (Stanghellini et al. 1991). Por otra parte, también el mecanismo  $\epsilon$  de excitación ha sido examinado (Kawaler et al. 1986, Kawaler 1988), estudiando el efecto desestabilizante de la combustión de hidrógeno en el núcleo de nebulosas planetarias ricas en hidrógeno, y la combustión del helio en capas, en núcleos deficientes de hidrógeno. Los resultados indican la existencia de modos  $g$  inestables pero con períodos demasiado cortos respecto de aquellos observados en estrellas pre-enanas blancas variables (Hine & Nather 1987).

**Estrellas variables DBVs (o V4777 Her):** Estas enanas blancas variables están confinadas a un rango de  $T_{\text{eff}}$  entre los 21500 y 24000 K, con luminosidades  $\sim 10^{-1.3} L_{\odot}$ . Esta clase de estrellas variables es la única cuya existencia fue predicha (Winget et al. 1982a) antes de su descubrimiento, por Winget et al. (1982b). Los períodos encontrados están en el rango de 140 a 1000 segundos. Actualmente se conocen unas ocho estrellas miembros de esta clase, la mayoría de las cuales muestran espectros de pulsación complejos, con muchas frecuencias presentes. La DBV más estudiada (la primera en descubrirse) es GD358, la cual es al mismo tiempo la más brillante del grupo. La banda de inestabilidad de las DBVs tampoco es pura: existe entre un 25 % y un 50 % de estrellas DBs no pulsantes en el dominio de inestabilidad, dependiendo de que sus parámetros atmosféricos sean derivados a partir de atmósferas con helio puro o conteniendo pequeñas cantidades de hidrógeno (Beauchamp et al. 1999).

Las pulsaciones en las DBVs son excitadas por el mecanismo  $\kappa - \gamma$  operando en la

---

<sup>15</sup>En la literatura es también muy común denominarlas DOVs.

base de la zona de convección de helio (Bradley & Winget 1994, Winget et al. 1983). También se ha examinado la posibilidad de que las DBVs pulsen en modos radiales, encontrándose que los modelos son inestables a estas pulsaciones (Kawaler 1993). Sin embargo su búsqueda observacional ha dado resultados negativos (Kawaler et al. 1994).

**Estrellas variables DAVs (o ZZ Ceti):** Se conocen 31 miembros de esta clase. En contraste con el caso de las pre-enanas blancas y las DBVs, la banda de inestabilidad de las DAVs es pura: no hay estrellas DA no-variables en el dominio del diagrama HR donde las DAVs están localizadas, en el rango de temperaturas efectivas  $12500 \gtrsim T_{\text{eff}} \gtrsim 10700$  K. Estudios espectroscópicos de DAVs muestran un continuo de cuerpo negro con líneas de absorción de hidrógeno superpuestas, sin señales de helio o metales presentes (Koester & Chanmugam 1990). Las variabilidades fotométricas de las DAVs son multiperiodicas, con períodos entre los 100 y 1200 segundos y amplitudes hasta de 0.3 magnitudes. En muchos casos las frecuencias están divididas en multipletes, debido a rotación lenta (ver Sección 1.2.4).

Las observaciones de DAVs sugieren que ellas tienden a acumularse en dos grupos principales (Unno et al. 1989): un grupo de estrellas calientes que exhiben un pequeño número de períodos cortos y estables (cambios de amplitud muy pequeños), y otro grupo de estrellas más frías con muchos más períodos presentes pero mostrando fuertes efectos no-lineales y variaciones de amplitud. Claramente, las DAVs calientes, con tan pocos períodos presentes son difíciles de estudiar desde el punto de vista astrosismológico, por dos razones. Primero, con tan pocos modos es problemática su identificación, esto es, la asignación de valores  $k$  y  $\ell$  a cada período observado. Segundo, la escasez de modos presentes proporciona en principio poca información y dificulta imponer restricciones sobre su estructura interna. Las DAVs más frías tienen muchos más períodos presentes, pero esta ventaja es aparente. El espectro de Fourier en este caso contiene varias frecuencias ( $\nu_i$ ) con gran amplitud, correspondientes a modos propios “auténticos”, junto con armónicos ( $n\nu_i$ ), sumas de frecuencias ( $\nu_i + \nu_j$ ) y diferencias de frecuencias ( $\nu_i - \nu_j$ ), las cuales no son modos propios de la estrella sino que corresponden a la respuesta no-lineal de la atmósfera estelar al flujo de radiación proveniente del interior (Vuille & Brassard 2000). Así, la primer dificultad para estudiar estas estrellas es extraer primero los modos reales.

La excitación de pulsaciones en las DAVs, como mencionamos antes, es el mecanismo  $\kappa - \gamma$  actuando en la zona de ionización parcial de hidrógeno (Dolez & Vauclair 1981, Winget et al. 1982a). La cuestión del espesor de la capa superficial de hidrógeno en estrellas DAVs y su influencia sobre la inestabilidad de modos  $g$  fue extensivamente estudiada en la década de 1980. Los primeros resultados (Winget et al. 1982a) admitían solo envolturas finas de hidrógeno ( $M_{\text{H}} \lesssim 10^{-8} M_{\star}$ ). Sin embargo nuevos estudios no-adiabáticos demostraron que las inestabilidades pueden ocurrir aún con envolturas tan masivas como  $M_{\text{H}} \sim 10^{-4} M_{\star}$  (Cox et al. 1987, Bradley & Winget 1994, Fontaine et al. 1994). Actualmente se cree que la excitación de modos  $g$  en DAVs es insensible a la masa de la envoltura de hidrógeno.

Un aspecto importante relacionado con la localización del borde azul de la banda de inestabilidad de las DAVs es el de la influencia de la eficiencia convectiva utilizada en la construcción de los modelos en equilibrio. Aparentemente sólo zonas de convección muy extendidas, tratadas con la Mixing Length Theory (MLT), dan lugar a bordes azules compatibles con los datos observacionales (Bradley & Winget). Las prescripciones ML2 o ML3 (ver Tassoul, Fontaine & Winget 1990) de la MLT son las que proporcionan el mejor acuerdo con la observación.

Otro mecanismo posible para la excitación de modos  $g$  en DAVs es el llamado *convective driving*, debido a la acción de la convección superficial en estas estrellas (Goldreich and Wu 1999, Brickhill 1991). Aunque actualmente este mecanismo es aparentemente físicamente más plausible que el mecanismo  $\kappa - \gamma$ , ambos predicen en forma igualmente aceptable el borde azul de la banda de inestabilidad observada, pero ninguno de los dos es capaz de predecir el borde rojo, donde las pulsaciones aparentemente se detienen abruptamente (Kanaan 1996).

Finalmente mencionaremos aquí que también la posible existencia de modos radiales fue investigada para modelos de DAVs (Saio et al. 1983). Al igual que en el caso de las DBVs, sin embargo, no se han detectado hasta ahora este tipo de oscilaciones de corto período en ninguna DAV (Robinson 1984). No está claro si esto se debe a que estas oscilaciones realmente existen en DAVs pero con amplitudes por debajo del umbral de detectabilidad, o bien la ausencia se debe a una falla en la teoría empleada en el modelado de las pulsaciones (Gautschy & Saio 1996).

#### 1.4.4 Herramientas astrosismológicas

El principal atractivo para llevar a cabo astrosismología en enanas blancas es que permite a los astrónomos determinar la estructura del estado final más común de la evolución estelar. Esto, a su vez, posibilita poner restricciones a los procesos experimentados por los progenitores de enanas blancas antes de que estas se formaran. También, un mejor conocimiento de la estructura interna de las enanas blancas a través de la astrosismología proporciona valiosa información acerca de las propiedades de la materia bajo condiciones extremas de temperatura y densidad, no reproducibles en los laboratorios terrestres. Adicionalmente, un mejor conocimiento del enfriamiento de enanas blancas puede brindar potencial información acerca de la historia de formación estelar en el disco galáctico y permite obtener la edad de la Galaxia (*cosmocronología*; ver, por ejemplo, Winget et al. 1987 y Wood 1992). Otro beneficio de la astrosismología de enanas blancas es la obtención de la luminosidad de la estrella y posteriormente la distancia empleando la magnitud aparente y la corrección bolométrica. De esta forma es posible obtener una “distancia astrosismológica”, independiente de la distancia inferida por las técnicas de paralaje tradicionales.

A continuación describimos algunos métodos astrosismológicos empleados hasta el presente en enanas blancas pulsantes.

**Espaciamiento medio de períodos.** El análisis asintótico (ver Sección 1.2.3) predice que el espaciamiento de períodos consecutivos de modos  $g$  para un dado  $\ell$  está dado por (para valores elevados de  $k$ ):

$$\Delta P_\ell^A = \frac{P_0}{\sqrt{\ell(\ell + 1)}} \quad (1.8)$$

y  $P_0$  está definido como

$$P_0 = 2\pi^2 \left[ \int_0^{R_*} \frac{N(r)}{r} dr \right]^{-1}. \quad (1.9)$$

Si para una estrella podemos observar suficientes modos consecutivos en  $k$  y con el mismo valor  $\ell$ , podemos calcular el espaciamiento de períodos ( $\Delta P_{k,\ell} = P_{k+1,\ell} - P_{k,\ell}$ )

y promediarlo; designamos a este espaciamento medio como  $\langle \Delta P_{k,\ell} \rangle$ . Resulta que, en general, se cumple que

$$\langle \Delta P_{k,\ell} \rangle \approx \Delta P_\ell^A \propto \left[ \int_0^{R_*} \frac{N(r)}{r} dr \right]^{-1}. \quad (1.10)$$

aún para enanas blancas estratificadas y con zonas convectivas externas (Tassoul et al. 1990).

Ahora bién, si consideramos masas estelares cada vez mayores para una  $T_{\text{eff}}$  fija, la frecuencia de Brunt-Väisälä crece (dada su dependencia con la gravedad), lo cual provoca que la integral en la Ecuación (1.10) adopte un mayor valor y en consecuencia el espaciamento medio de períodos decrezca. Si ahora consideramos una masa estelar fija, pero valores decrecientes de  $T_{\text{eff}}$ , debido al aumento de la degeneración en el núcleo de la enana blanca la frecuencia de Brunt-Väisälä decrecerá, provocando un incremento en el espaciamento medio de períodos. Así, la dependencia de  $\langle \Delta P_{k,\ell} \rangle$  con la temperatura efectiva es opuesta a la dependencia con la masa estelar. Sin embargo, las bandas de inestabilidad en enanas blancas son (afortunadamente) suficientemente angostas en  $T_{\text{eff}}$ , de modo que la sensibilidad de  $\langle \Delta P_{k,\ell} \rangle$  sobre la masa estelar es mayor; esto tiene como consecuencia que el espaciamento medio de períodos resulta ser una cantidad extremadamente útil para obtener el valor de la masa de enanas blancas. Notemos, sin embargo, que la mayoría de las DAVs exhiben pocos períodos consecutivos del mismo  $\ell$ , por lo cual esta técnica para obtener la masa estelar es particularmente útil sólo para las DBVs y las pre-enanas blancas, las cuales presentan un número suficiente de períodos en sus curvas de luz.

**Mode trapping.** Las enanas blancas tienen una estructura estratificada la cual provoca que algunos modos  $g$  experimenten una resonancia mecánica, y esto afecta la estructura global del espectro de períodos. Como mencionamos antes, este fenómeno fue primero explorado por Winget, Van Horn & Hansen (1981) y luego estudiado en profundidad por Brassard et al. (1992a). Físicamente el *mode trapping* es un fenómeno de resonancia que se produce cuando la longitud de onda local de las autofunciones de un dado modo coincide aproximadamente con el espesor de la capa de hidrógeno (o la de helio) en el interior de una enana blanca. Esto sucede entonces cuando un nodo de las autofunciones está ubicado en proximidades de una zona de transición de composición química (por ejemplo, helio  $\rightarrow$  hidrógeno, carbono  $\rightarrow$  helio). Cuando este tipo de resonancia se produce, la amplitud de oscilación de las autofunciones es grande principalmente en una región limitada por una de las transiciones químicas y la superficie estelar, o entre dos interfases químicas<sup>16</sup>. El principal efecto (el cual es observable en estrellas reales cuando oscilan en varios modos consecutivos) es que los modos atrapados y los de orden radial adyacentes tienen espaciamientos de períodos mucho más cortos que el espaciamento medio. Otra consecuencia de este fenómeno es el efecto (no observable) sobre la distribución de energía cinética de oscilación de los modos,  $(E_{\text{kin}})_{k,\ell}$ . Dependiendo de la región interna de la estrella en la que el modo tiene sus máximas amplitudes de oscilación, la energía cinética adopta valores máximos (si el modo es confinado al interior denso de la enana blanca) o mínimos (cuando el modo queda atrapado en la envoltura estelar), respecto de los modos adyacentes que no sufren la resonancia mecánica.

<sup>16</sup>También puede producirse un confinamiento de las autofunciones entre una interfase química y el centro estelar; en ese caso el fenómeno se denomina *mode confining*.



Un aspecto de crucial importancia relacionado con este fenómeno es la forma y el ancho de las zonas de transición química, especialmente la de helio-hidrógeno en las DAVs. La efectividad de las zonas de transición química (las cuales constituyen saltos en densidad) para provocar resonancias sobre ciertos modos, esto es, la efectividad de *mode trapping* de un modelo, depende fuertemente de los detalles de tales interfases. Usualmente en el modelado teórico de estas regiones se consideran condiciones de equilibrio difusivo (ver Tassoul, Fontaine & Winget 1990, Brassard et al. 1992ab) o aún discontinuidades puras en composición (Winget, Van Horn & Hansen 1981). Sin embargo, un tratamiento autoconsistente en el cual los procesos de difusión de elementos dependientes del tiempo son tomados en cuenta es necesario para obtener la forma y el ancho correctos de las interfases químicas. Dado que este es uno de los puntos más relevantes en esta Tesis, posponemos una discusión detallada de este tópico a Capítulos posteriores.

La principal utilidad del *mode trapping* reside en la potencial capacidad de medir el espesor de la capa de trapping. Brassard et al. 1992a desarrollaron una relación entre los períodos de los modos atrapados y la localización de la interfase helio-hidrógeno en el modelo. Dicha relación es la siguiente:

$$P_{i,\ell}^2 = 4\pi^2 \lambda_i^2 \left[ \left( 1 - \frac{r_t}{R_*} \right) \ell(\ell + 1) \frac{GM_*}{R_*^3} \right]^{-1},$$

donde  $P_{i,\ell}$  es el período del  $i$ -ésimo modo atrapado ( $i$  es el número de nodos de las autofunciones entre la superficie estelar y la interfase helio-hidrógeno;  $i = 1, 2, 3, \dots$ ),  $\lambda_i$  son coeficientes de trapping obtenibles de los modelos (ver Kawaler & Weiss 1990, Brassard et al. 1992a), y  $r_t$  es el valor del radio donde la transición en composición está localizada. Utilizando esta expresión es posible, en principio, obtener  $r_t$  a partir de los períodos de modos atrapados, y encontrar así la masa fraccional de la envoltura de hidrógeno en DAVs. Esta técnica también es aplicable a modelos de DBVs para medir la masa de la envoltura de helio. Hay que aclarar que la relación descrita supone la existencia de una *única* interfase química en el modelo, la de helio-hidrógeno en las DAVs y la de carbono-helio en las DBVs, ignorando la presencia de las otras interfases.

Otra manera de inferir información acerca de la estructura de las capas externas es graficar las diferencias de períodos entre sucesivos modos en función del período para modos de un dado  $\ell$ . Estos son los diagramas  $\Delta P_{k,\ell}$  vs  $P_{k,\ell}$ , donde  $\Delta P_{k,\ell} = P_{k+1,\ell} - P_{k,\ell}$  es la diferencia hacia adelante entre períodos de orden radial consecutivo y  $\ell$  fijo. En estos diagramas el *mode trapping* se manifiesta como mínimos de  $\Delta P_{k,\ell}$  regularmente espaciados, correspondientes a modos atrapados sucesivos. La diferencia de período entre modos atrapados sucesivos (“ciclo de trapping”) proporciona información acerca de la profundidad a la que se encuentra la zona de transición de composición química: el ciclo de trapping permite en principio estimar la masa de hidrógeno en las DAVs (o helio en las DBVs). Por otra parte la amplitud de la variación de  $\Delta P_{k,\ell}$  en torno de  $\langle \Delta P_{k,\ell} \rangle$  (“amplitud de trapping”) es sensible al espesor de la zona de transición química. Transiciones abruptas dan lugar a mayores valores de los apartamientos: mayor amplitud de trapping. De esta forma la amplitud de trapping permitiría dilucidar la forma de las interfases químicas (Brassard et al. 1992ab, Bradley 1996).

**Rates de cambio de períodos.** La evolución de enanas blancas involucra enfriamiento y (en menor medida) contracción, y la frecuencia de Brunt-Väisälä cambia en respuesta a esos cambios evolutivos. En particular, como respuesta al

enfriamiento la frecuencia de Brunt-Väisälä decrece en las regiones del núcleo, debido al aumento en la degeneración. Una disminución de esta frecuencia provoca el corrimiento gradual del espectro de períodos de oscilación hacia valores mayores<sup>17</sup>.

Para enanas blancas, el cambio secular en los períodos puede escribirse como (Winget, Hansen & van Horn 1983):

$$\frac{\dot{P}}{P} = -a\frac{\dot{T}}{T} + b\frac{\dot{R}_*}{R_*},$$

donde  $T$  es la temperatura del núcleo, y  $a, b > 0$  son constantes del orden de la unidad determinadas por las propiedades del modelo. Notemos que en este tratamiento analítico simplificado, el enfriamiento ( $\dot{T}/T < 0$ ) produce un incremento en el período, mientras que la contracción ( $\dot{R}_*/R_* < 0$ ) provoca un decrecimiento. En estrellas PG 1159 aún en su etapa de contracción hacia la secuencia de enanas blancas, tanto el enfriamiento como la contracción están actuando sobre  $\dot{P}$ . Dado que los modos atrapados tienen sus autofunciones confinadas principalmente a la envoltura, son más sensibles a la contracción que al enfriamiento, por lo cual muestran valores de  $\dot{P}$  más bajos (o incluso negativos) respecto de los no-atrapados (Kawaler & Bradley 1994). Como contrapartida, los modos confinados son susceptibles al enfriamiento del núcleo, y el valor de  $\dot{P}$  está especificado casi exclusivamente por el enfriamiento (principalmente por emisión de neutrinos), con lo cual sus valores son siempre positivos. En las DAVs y DBVs la influencia de la contracción es despreciable, y los valores de  $\dot{P}$  están determinados por el enfriamiento y son positivos para todos los modos (aunque más pequeños en el caso de modos atrapados). A partir de modelos teóricos, los valores esperables de  $\dot{P}$  son los siguientes:  $10^{-15} \text{ s s}^{-1}$  para las DAVs,  $10^{-14} \text{ s s}^{-1}$  para las DBVs y  $10^{-11} - 10^{-12} \text{ s s}^{-1}$  para las pre-enanas blancas.

La medición del  $\dot{P}$  en enanas blancas implica la medición de la escala de enfriamiento de estas estrellas, y esto brinda información acerca de la composición química del núcleo. De esta manera la medición de  $\dot{P}$  constituye, en principio, una prueba directa de la validez de las predicciones de la teoría de evolución estelar. Entre las DAVs, la mejor medición de  $\dot{P}$  ha sido obtenida para la estrella G117-B15A, con un valor de  $(2.3 \pm 1.4) \times 10^{-15} \text{ s s}^{-1}$  (Kepler et al. 2000a). En el caso de las PG 1159, un valor  $(13 \pm 1.6) \times 10^{-11} \text{ s s}^{-1}$  para PG 1159-035 ha sido obtenido (Costa et al. 1999). No existe aún un valor medido de  $\dot{P}$  para ninguna estrella DBV.

**Splitting por rotación y por campos magnéticos.** Si la enana blanca está rotando y/o posee un campo magnético la frecuencia de cada modo de oscilación es dividida en multipletes.

La rotación lenta ( $P_{\text{rot}} \ll P_{k,\ell}$ ) dá lugar, suponiendo rotación de cuerpo rígido, a multipletes de  $2\ell + 1$  componentes igualmente espaciadas, aunque la observación de todas las componentes o no depende del ángulo de inclinación de la estrella. Existe evidencia de splitting rotacional en varias enanas blancas variables. Utilizando la expresión vista en la Sección 1.2.4 es posible obtener la frecuencia de rotación  $\Omega$  midiendo la diferencia  $\sigma_{k,\ell,m} - \sigma_{k,\ell}$  en los multipletes observados y utilizando los coeficientes a primer orden  $C_{k,\ell}$  calculados a partir de modelos teóricos. Las separaciones encontradas entre las componentes de los multipletes son del orden de  $3 - 7 \mu\text{Hertz}$ , implicando períodos de rotación comprendidos entre algunas horas y unos pocos días.

---

<sup>17</sup>Esto puede apreciarse examinando la Figura 1.2 para el caso de la polítropa: si  $N^2$  disminuye las frecuencias posibles decrecen, aumentando los períodos.

Si un campo magnético está presente (sin rotación), cada frecuencia es dividida en  $\ell + 1$  componentes. La magnitud de la separación entre las componentes se incrementa para períodos crecientes. Cuando un campo magnético débil está presente junto con la rotación, su efecto es el de correr cada frecuencia (respecto a los valores en ausencia del campo magnético) una cantidad proporcional a  $m^2 B^2$ , donde  $B$  es la intensidad del campo magnético. Las dos componentes  $m = \pm 1$  (si  $\ell = 1$ ) son igualmente desplazadas hacia mas altas frecuencias, mientras que la componente con  $m = 0$  es también corrida pero en una cantidad menor (Unno et al. 1989, Jones et al. 1989). Esto en principio permite obtener un valor para  $B$ . Por ejemplo, para la DBV GD 358 Winget et al. (1994) han obtenido un valor de  $B \sim 1300$  Gauss.

### 1.4.5 Resultados astrosismológicos en DAVs

Muchas de las observaciones de enanas blancas pulsantes son corrientemente realizadas a través del denominado Whole Earth Telescope (WET) (Nather et al. 1990). El WET no es un telescopio sino más bien una red de telescopios terrestres distribuidos de tal manera de poder obtener observaciones continuadas de un mismo objeto, sin las interrupciones de la luz diurna de las que adolecen las observaciones desde sitios individuales. Los datos obtenidos con el WET son de una calidad sin precedentes que permiten análisis muy detallados de los espectros de Fourier de las estrellas observadas.

A pesar de esta importante ventaja, existe aún una seria dificultad para realizar estudios astrosismológicos en enanas blancas. Este problema es la identificación de los modos. En particular, en las DAVs, el pequeño número de períodos presentes en las mas calientes, o la presencia de numerosos armónicos y combinaciones lineales de modos reales en las más frías, dificulta extremadamente la asignación sin ambigüedades de un valor de  $\ell$  y un valor de  $k$  a cada período observado. El procedimiento usual para identificar los índices de los modos es, en primer lugar, calcular períodos teóricos de pulsación en modelos de enanas blancas, luego comparar el patrón de períodos teóricos con el patrón observado, y finalmente ajustar los modelos de manera tal que los patrones de períodos teóricos y observados coincidan<sup>18</sup>.

Un estudio de gran importancia en lo que se refiere a la astrosismología de enanas blancas DAVs fue llevado a cabo por Clemens (1993). Este autor estudió todas las DAVs conocidas como una clase. En su análisis no se consideraron los armónicos y combinaciones de frecuencias, ni tampoco las variaciones temporales de amplitud en el espectro de Fourier. Al considerar las propiedades de las DAVs como un ensamble el autor encontró un interesante resultado (ver también Clemens 1997): cuando se comparan todos los patrones de períodos de las DAVs calientes entre sí, se encuentra una sorprendente similitud entre ellos, lo cual refleja que la estructura de todas las estrellas examinadas debe ser aproximadamente la misma. Clemens llegó a la conclusión de que los períodos de todas las DAVs examinadas caen dentro de seis grupos de períodos los cuales él identificó como correspondientes

---

<sup>18</sup>El problema con este procedimiento es que no funciona con enanas blancas que exhiben muy pocos períodos excitados. Otro método, más reciente, es el de identificación de modos usando espectroscopía UV (Kepler et al. 2000b, Robinson et al. 1995). Este método hace uso del hecho de que las amplitudes de los modos  $g$  dependen fuertemente del valor de  $\ell$  para longitudes de onda más cortas que 3000 Å. Las amplitudes se incrementan hacia el ultravioleta, pero este incremento es mayor para modos con  $\ell = 2$  que para  $\ell = 1$ , y mayor para  $\ell = 3$  que para  $\ell = 2$  (ver figura 1 de Kepler et al. 2000). Esta diferencia en las amplitudes de modos con diferentes grados armónicos provee un método independiente para determinar el valor de  $\ell$  en enanas blancas variables.

a  $\ell = 1$  y  $k = 1, 2, 3, 4, 5$ , y 6. En base a esta identificación, y haciendo uso de las predicciones de modelos teóricos de pulsación, él concluyó que la masa de la envoltura de hidrógeno de *todas* las DAVs (y por ende las DAs) debería ser de  $\approx 10^{-4}M_*$ .

Por otra parte, en los últimos años se han realizado estudios astrosismológicos en un número de estrellas individuales. A continuación resumimos los principales resultados acerca de la estructura de DAVs provenientes de estudios astrosismológicos recientes.

**G226-29:** Esta estrella tiene un triplete de modos con períodos cercanos a  $\approx 109$  segundos. Kepler et al. (1995) identificaron este triplete como un modo con  $\ell = 1, k = 1$  afectado por rotación. El análisis de estos autores indica una masa de la envoltura de hidrógeno de  $M_H \approx 10^{-4}M_*$ , una masa estelar de  $M_* \approx 0.80M_\odot$  y un período de rotación de 9 horas. Bradley (1998a) encuentra valores similares para los anteriores parámetros, y en adición, un valor para la paralaje de  $95.7 \text{ mas}^{19}$ , comparable a la paralaje trigonométrica, de  $91.1 \text{ mas}$ .

**R 548:** Esta estrella oscila principalmente en dos períodos:  $\approx 213$  y  $\approx 274$  segundos. Cada uno de ellos muestra dos componentes, probablemente miembros de tripletes debido a rotación (una componente de cada triplete no se observa). Bradley (1998b) identifica estos períodos como  $\ell = 1, k = 2, 3$ , y haciendo uso de la información del splitting rotacional, deriva un valor para la masa de la envoltura de hidrógeno de  $M_H \approx 1.5 \times 10^{-4}M_*$ , una masa estelar de  $M_* \approx 0.54M_\odot$  y un período de rotación de 21 horas. En adición, Bradley encuentra una paralaje de  $29 \text{ mas}$ , la cual está en fuerte conflicto con la paralaje trigonométrica, de  $\approx 14.5 \text{ más}$  (Van Altena et al. 1994).

**G117-B15A:** Esta estrella oscila en tres períodos de  $\approx 215$ ,  $\approx 274$  y  $\approx 304$  segundos, correspondientes a modos con  $\ell = 1$ . Bradley (1998b) encuentra una ambigüedad en el valor de  $k$  para los períodos: las dos posibles identificaciones son  $215 (k = 1)$ ,  $274 (k = 2)$ ,  $304 (k = 3)$  o bien  $215 (k = 2)$ ,  $274 (k = 3)$ ,  $304 (k = 4)$ . En consecuencia, la masa de la envoltura de hidrógeno resulta ser de  $M_H \approx 1.5 \times 10^{-4}M_*$ , si el período de 215 segundos es  $k = 2$  o  $M_H \approx 1.5 \times 10^{-7}$ , si el período de 215 segundos es  $k = 1$ . En ambos casos, la masa estelar resulta ser de  $M_* \approx 0.60M_\odot$ . Finalmente, Bradley encuentra un gran discrepancia en cuanto a la paralaje: el valor derivado por él es de  $17.5 \text{ mas}$ , frente al valor de la paralaje trigonométrica de  $\approx 14.5 \text{ más}$  (Van Altena et al. 1994).

**L19-2:** Esta estrella es una de las pocas DAVs que tiene modos observados con  $\ell = 2$  además de modos con  $\ell = 1$ . Sus períodos (multipletes rotacionales) de oscilación junto con las identificaciones empleadas por Bradley (2001) son:  $\approx 118 (\ell = 1, k = 1)$ ,  $\approx 192 (\ell = 1, k = 2)$ ,  $\approx 350 (\ell = 1, k = 6)$ ,  $\approx 114 (\ell = 2, k = 2)$  y  $\approx 143 (\ell = 2, k = 4)$ . Bradley (2001) encuentra que la masa de hidrógeno debe ser de  $M_H \approx 1 \times 10^{-4}M_*$  y la masa estelar de  $M_* \approx 0.72M_\odot$ . El período de rotación de la estrella resulta ser de unas 13 horas. El valor de la paralaje astrosismológica derivada, de  $44 \text{ mas}$ , está en perfecto acuerdo con la trigonométrica, de  $(44 \pm 5) \text{ mas}$ .

**GD 165:** Bradley (2001) considera la siguiente identificación para los períodos en que pulsa esta estrella:  $\approx 120 (\ell = 1, k = 1)$ ,  $\approx 192 (\ell = 1, k = 2)$ ,  $\approx 250 (\ell = 1, k = 4)$  y  $\approx 114 (\ell = 2, k = 2)$ . De acuerdo al análisis de Bradley (2001), la masa estelar es de  $M_* \approx 0.65M_\odot$  y la masa de la envoltura de hidrógeno de

---

<sup>19</sup>mili-segundos de arco.

$M_{\text{H}} \approx 2 \times 10^{-4} M_*$ . El período de rotación está en el rango 55 – 60 horas; la paralaje astrosismológica es de 28 mas, en muy buen acuerdo con la paralaje trigonométrica, de  $(27.8 \pm 3.4)$  mas.

**G29-38:** Los períodos de oscilación identificados en esta estrella son numerosos; Bradley & Kleinman (1997) muestran que un modelo que ajusta 14 de los 16 períodos presentes (sin considerar numerosas combinaciones lineales de modos) debe tener una masa de  $M_* \approx 0.75 M_{\odot}$  con  $M_{\text{H}} \approx 5 \times 10^{-7} M_*$ . Sin embargo hay que recalcar que estos valores corresponden a la identificación (no del todo confirmada) de que el período a 110 segundos es un modo con  $\ell = 2, k = 1$ ; si este modo es en realidad  $\ell = 1, k = 1$ , entonces la masa estelar y la masa de la envoltura de hidrógeno de esta estrella deberían ser muy similares a las correspondientes a G 226-29. La paralaje obtenida es de 66 mas, frente a la trigonométrica, de  $(73.4 \pm 4)$  mas.

**GD 154:** Esta estrella ha sido estudiada a través de métodos astrosismológicos por Pfeiffer et al. (1996). Los autores obtienen, utilizando los períodos observados de  $\approx 402$ ,  $\approx 1088$  y  $\approx 1186$  segundos una masa estelar de  $M_* \approx 0.70 M_{\odot}$  y una masa de la envoltura de hidrógeno de  $M_{\text{H}} \approx 2 \times 10^{-10} M_*$ . El período de rotación derivado es de  $\approx 55$  horas.

Notemos que las primeras 5 estrellas (las cuales caen en el grupo de las DAVs calientes en relación a su posición en la banda de inestabilidad), tienen masas de hidrógeno con valores próximos a  $10^{-4} M_*$ , lo cual confirmaría los resultados de Clemens (1993, 1997). Por otra parte, las dos últimas (G29-38 y GD 154), las cuales pertenecen al grupo de las DAVs frías, parecen tener envolturas de hidrógeno mucho más finas. Bradley (2001) señala que existen evidencias de otras fuentes en favor de un *rango* de masas para la envoltura de hidrógeno. En efecto, Vennes et al. (1997) encuentran que el valor de  $M_{\text{H}}$  de las DAs calientes debe ser de  $\approx 10^{-6} M_*$  o menor, como para que la masa media de las enanas blancas estudiadas por ellos esté de acuerdo con la correspondiente a la muestra de DAs frías de Bergeron, Saffer & Liebert (1992).

# Capítulo 2

## Modelos evolutivos de enanas blancas DA

Resultados publicados en el siguiente artículo:

- Evolution of a  $3 M_{\odot}$  star from the main sequence to the ZZ Ceti stage: the role played by element diffusion, Althaus, Serenelli, Córscico & Benvenuto, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 330, 685, (2002)

Antes de abordar el tema central de esta Tesis, en este Capítulo describiremos las principales características de nuestros modelos en equilibrio que representan enanas blancas DA.

Los cálculos pulsacionales presentados en esta Tesis están basados en modelos evolutivos de enanas blancas construidos a partir de una descripción física muy detallada. Estos modelos representan una mejora sustancial respecto de los modelos evolutivos utilizados en estudios pulsacionales previos. Específicamente, en este trabajo hemos empleado dos grupos de modelos en equilibrio. En el primer grupo la evolución de pre-enana blanca no ha sido tenida en cuenta, y los modelos iniciales han sido obtenidos a partir de un procedimiento de calentamiento artificial. Esta técnica para obtener modelos iniciales de enanas blancas ha sido descrita en varios estudios previos, entre ellos en Althaus & Benvenuto (2000), y referimos al lector a ese artículo para más detalles. Aquí sólo mencionaremos que esta técnica inicialmente produce algunos modelos físicamente inconsistentes, los cuales, luego de bloqueado ese calentamiento artificial, convergen hacia el track correcto de enfriamiento de enanas blancas. Así, las estructuras que se obtienen en la etapa de las ZZ Ceti corresponden efectivamente a enanas blancas DA. Este procedimiento para obtener modelos iniciales de enanas blancas es válido siempre que la técnica de calentamiento artificial se aplique a temperaturas efectivas mucho más elevadas respecto de las correspondientes a las de las ZZ Ceti ( $T_{\text{eff}} \approx 12000 \text{ K}$ )<sup>1</sup>. Si bien estos modelos no son completamente autoconsistentes, poseen la cualidad de ser muy apropiados y “flexibles” a la hora de realizar estudios astrosismológicos, en los cuales surge la necesidad de variar parámetros tales como la masa estelar y la masa de las envolturas de helio e hidrógeno para explorar los efectos sobre las pulsaciones.

---

<sup>1</sup>Esta técnica también es válida para generar modelos iniciales de enanas blancas DB, las cuales, como mencionamos en el Capítulo 1, pulsan a temperaturas efectivas cercanas a los 24000 K.

El segundo grupo de estructuras en equilibrio empleadas en esta Tesis corresponde a una nueva generación de modelos de enanas blancas que han sido calculados teniendo en cuenta de manera autoconsistente la historia evolutiva previa, las reacciones nucleares y la difusión microscópica de los elementos. La descripción de estos nuevos modelos es el principal objetivo de este Capítulo.

Es evidente que modelos realistas de estrellas enanas blancas son de importancia fundamental para el entendimiento de las propiedades oscilatorias de estas estrellas, y en especial a la hora de interpretar la riqueza de información ofrecida por las observaciones disponibles. En el contexto de las variables DAV, la mayor parte de las investigaciones existentes se basan en modelos evolutivos estelares muy simplificados. Esto es particularmente cierto con respecto al tratamiento de la distribución de abundancias químicas. En este sentido, los perfiles de carbono y oxígeno son usualmente tratados como parámetros libres. En adición, la distribución de abundancias químicas es considerada fija durante la evolución a través del dominio de inestabilidad, y peor aún, muchos estudios adoptan la aproximación de equilibrio difusivo en la aproximación *trace element* para determinar la distribución de abundancias en las interfases químicas (ver Sección 2.2). También vale la pena mencionar que la liberación de energía nuclear debido al quemado de hidrógeno en la base de la envoltura suele ser despreciada en la construcción de modelos evolutivos empleados en los estudios de pulsación de estrellas DAVs. Esto es solamente justificado si la enana blanca es formada con envolturas de hidrógeno relativamente delgadas. Sin embargo, si la envoltura de hidrógeno es masiva, las reacciones de quema de hidrógeno representan una fuente apreciable de energía aún durante los estados evolutivos de las ZZ Ceti (Althaus, Serenelli, Córscico & Benvenuto 2002; Iben & Tutukov 1984). Los detalles del quemado nuclear son más complejos si la difusión de elementos químicos es considerada. En efecto, cálculos evolutivos de enanas blancas con difusión dependiente del tiempo muestran que la combustión nuclear a través de las reacciones del ciclo CNO desempeña un papel diferente dependiendo del valor de la masa de helio existente entre la envoltura rica en hidrógeno y las capas internas ricas en carbono y helio, la cual depende críticamente de la fase en la cual el progenitor abandona la AGB durante las etapas de pulsos térmicos (ver D'Antona & Mazzitelli 1990 para más detalles).

En la siguiente subsección describiremos las principales características de la nueva generación de modelos de enanas blancas, cuyas propiedades pulsacionales son analizadas en la primera parte del Capítulo 6. Tales modelos evolutivos nunca han sido tenidos en cuenta en cálculos pulsacionales de enanas blancas DAs, y su construcción ha sido parte de los objetivos de esta Tesis, especialmente en lo que concierne a la exploración de sus propiedades pulsacionales.

## 2.1 Nuevos modelos evolutivos de enanas blancas DA

Los cálculos de pulsación presentados en esta Tesis están basados en modelos de enanas blancas generados a partir de un código de evolución estelar utilizado en varios estudios previos de enanas blancas (ver, por ejemplo, Althaus & Benvenuto 1997, 2000; Benvenuto & Althaus 1998; Althaus, Serenelli & Benvenuto 2001). Este código ha sido apropiadamente modificado recientemente con el objeto de calcular los estados evolutivos previos a la formación de enanas blancas (los modelos re-

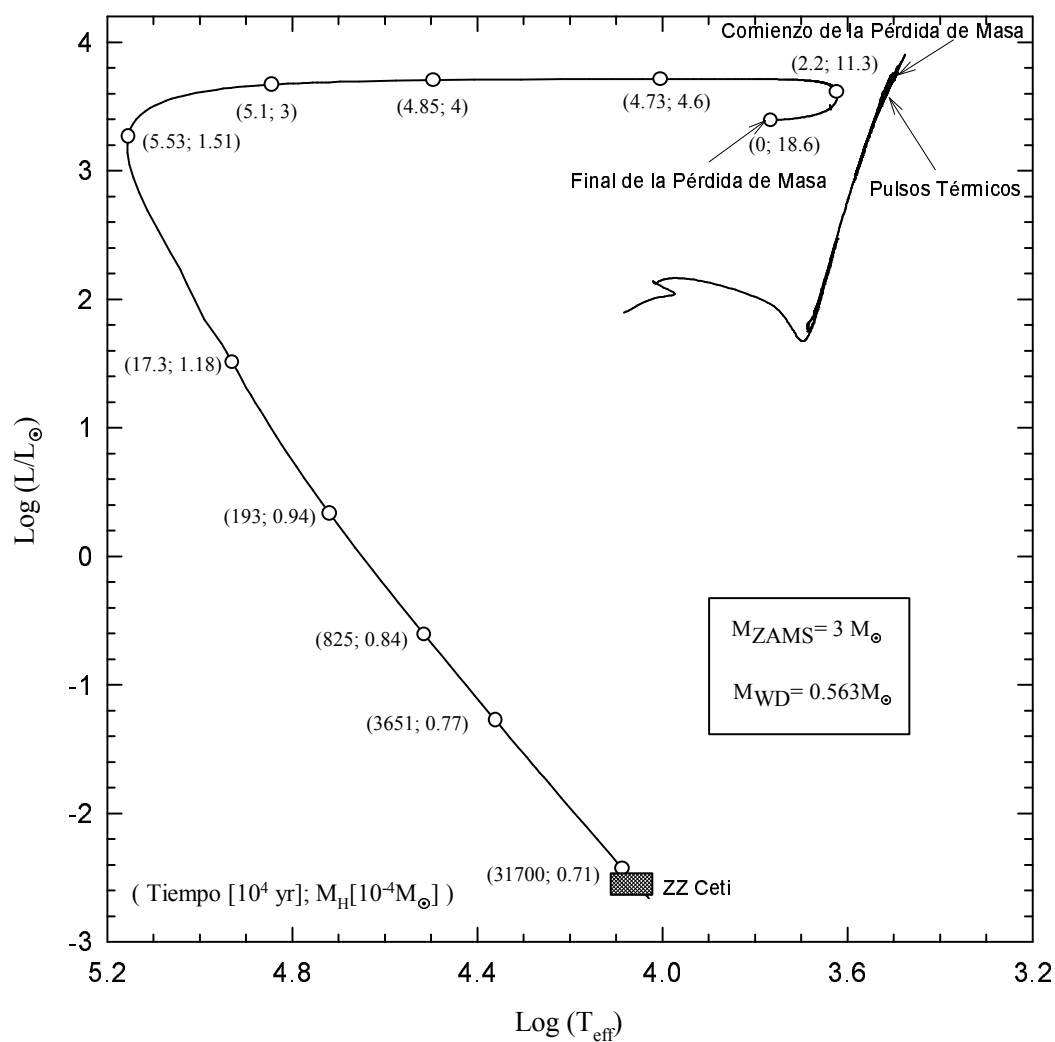


Figura 2.1: Diagrama Hertzsprung-Russell para la evolución de nuestro modelo estelar de  $3 M_{\odot}$ , desde la ZAMS hasta la etapa de enana blanca. Por claridad, los estados evolutivos correspondientes a los episodios de pérdida de masa no son mostrados. Los números entre paréntesis al lado de cada círculo a lo largo del track dan la edad (en  $10^4$  años) medida desde el final de la pérdida de masa y la masa de hidrógeno en las capas externas en unidades de  $10^{-4} M_{\odot}$ . La región correspondiente a la banda de inestabilidad de las estrellas ZZ Ceti es mostrada como una región sombreada. Como resultado de los episodios de pérdida de masa, la masa estelar decrece desde  $3$  a  $0.563 M_{\odot}$ . Notemos que después del final de la pérdida de masa, la estrella retorna hacia temperaturas efectivas bajas donde se quema una fracción apreciable del contenido de hidrógeno. Durante esta fase, la evolución es muy lenta.



sultantes seán analizados pulsacionalmente en el Capítulo 6). En líneas generales, dicho código está basado en el método de Kippenhahn, Weigert & Hofmeister (1967) para el cálculo de evolución estelar. En particular, las ecuaciones que describen la estructura y evolución de una estrella (ver Apéndice C.1) son resueltas utilizando un método Newton-Raphson generalizado el cual permite obtener correcciones a todas las variables y en todas las capas a partir de ecuaciones algebraicas linealizadas.

La descripción física considerada en nuestros modelos es lo mas detallada y actualizada posible. Brevemente, mencionemos que incluye opacidades radiativas OPAL para metalicidades arbitrarias (Iglesias & Rogers 1996), complementadas a bajas temperaturas con las opacidades moleculares de Alexander & Ferguson (1994). En particular, opacidades para distintas metalicidades son requeridas durante la evolución de enanas blancas cuando en los cálculos se tiene en cuenta la difusión de elementos. Las opacidades conductivas para el régimen de alta densidad son aquellas de Itoh et al. (1983) y Hubbard & Lampe (1969) para bajas densidades. Los rates de emisión de neutrinos son tomados en cuenta según la formulación de Itoh y colaboradores (ver Althaus & Benvenuto 1997 para detalles). Con respecto a la ecuación de estado, los modelos consideran ionización parcial, presión de radiación, contribuciones iónicas, electrones parcialmente degenerados e interacciones Coulombianas. Para el régimen de enana blanca empleamos una versión actualizada de la ecuación de estado de Magni & Mazzitelli (1979). Hemos considerado una red nuclear que incluye 30 rates de reacciones nucleares para la combustión del hidrógeno (correspondiendo a la cadena protón-protón y al ciclo CNO) y la quema del helio. Los rates de reacciones nucleares son tomados de Caughlan & Fowler (1988), excepto para la reacción  $^{12}\text{C}(\alpha, \gamma)^{16}\text{O}$  la cual es tomada de Angulo et al. (1999) (este rate es aproximadamente dos veces más grande que la de Caughlan & Fowler 1988). El cambio en la composición química resultante de la combustión nuclear es calculado por medio de un método implícito estandar de integración. En particular, seguimos la evolución de las especies  $^1\text{H}$ ,  $^3\text{He}$ ,  $^4\text{He}$ ,  $^7\text{Li}$ ,  $^7\text{Be}$ ,  $^{12}\text{C}$ ,  $^{13}\text{C}$ ,  $^{14}\text{N}$ ,  $^{15}\text{N}$ ,  $^{16}\text{O}$ ,  $^{17}\text{O}$ ,  $^{18}\text{O}$  y  $^{19}\text{F}$ . La convección es tratada siguiendo la formulación estandar de la Mixing Length Theory (MLT) (Böhm-Vitense 1958). El criterio de Schwarzschild fue usado para determinar los bordes de las regiones convectivas. Overshooting y semi-convección no fueron considerados.

Para los modelos analizados pulsacionalmente cuyos resultados son presentados en la primer parte del Capítulo 6, hemos seguido la evolución de una estrella inicialmente de  $3 M_{\odot}$  comenzando desde la Secuencia Principal de Edad Cero (ZAMS). La metalicidad adoptada  $Z$  es  $Z = 0.02$  y la abundancia por masa de hidrógeno y helio son, respectivamente,  $X_{\text{H}} = 0.705$  y  $X_{\text{He}} = 0.275$ . La evolución ha sido calculada a masa estelar constante durante toda las etapas desde la quema de hidrógeno y helio en el núcleo hasta la AGB donde ocurren los pulsos térmicos del helio. Para alcanzar una configuración de enana blanca, una pérdida de masa artificial ha sido incorporada en nuestro código evolutivo. Específicamente, la pérdida de masa fue iniciada cuando el progenitor de enana blanca estaba experimentando su pulso térmico número 11. El rate de pérdida de masa fue  $10^{-4} M_{\odot} \text{ años}^{-1}$ . Deseamos mencionar que debido a las altas demandas computacionales involucradas en los cálculos que hemos llevado a cabo aquí, particularmente considerando el tratamiento de la evolución de enana blanca con la difusión dependiente del tiempo, nos restringimos exclusivamente a examinar *un* caso de evolución para el progenitor de enana blanca.

El diagrama HR completo de nuestro modelo es mostrado en la Figura 2.1. Nuestra simulación numérica cubre todas las fases evolutivas del objeto desde la

ZAMS hasta el dominio de las estrellas ZZ Ceti sobre la rama de enfriamiento de las enanas blancas. La edad (en unidades de  $10^4$  años) desde el final de los episodios de pérdida de masa y la masa de hidrógeno (en unidades de  $10^{-4} M_{\odot}$ ) son indicados para puntos seleccionados a lo largo del track. Por claridad, las fases evolutivas correspondientes a la pérdida de masa no han sido graficadas.

Detalles específicos de la evolución de este objeto son dados en nuestro artículo Althaus, Serenelli, Córscico & Benvenuto (2002) y en Serenelli (2002). En particular, quisiéramos destacar aquí que como resultado de los episodios de pérdida de masa, la masa estelar es reducida desde  $3 M_{\odot}$  hasta  $0.563 M_{\odot}$ . Notemos finalmente que la masa de hidrógeno que queda en las capas externas al comienzo de la rama de enfriamiento es  $1.5 \times 10^{-4} M_{\odot}$ , y ésta es reducida a  $7 \times 10^{-5} M_{\odot}$  en el momento en que es alcanzado el dominio de las ZZ Ceti. Debido a que no hemos considerado episodios adicionales de pérdidas de masa durante la etapa de nebulosa planetaria o en los comienzos de la rama de enfriamiento, el valor obtenido para la masa final de hidrógeno debería ser considerado como un límite superior. Queremos enfatizar que en los cálculos hemos adoptado una metalicidad inicial de  $Z = 0.02$ ; valores mucho más bajos de  $Z$  deberían dar lugar a mayores masas de la envoltura final de hidrógeno para la misma masa estelar (ver, por ejemplo, Iben & MacDonald 1986).

## 2.2 Equilibrio difusivo en la aproximación de *trace element*

La mayor parte de los estudios de pulsaciones de enanas blancas publicados hasta la fecha se basan en modelos estelares cuyos perfiles de composición química interna en las interfases son modeladas bajo la suposición de equilibrio difusivo en la aproximación *trace element* (ver Tassoul, Fontaine & Winget 1990 y Apéndice C.3). La principal motivación para considerar esta aproximación es evitar la solución del problema de la difusión de elementos dependiente del tiempo a medida que la enana blanca evoluciona. En el marco de tal aproximación, el perfil de la región de la interfase química es muy simple: su forma funcional es una ley de potencias. La transición resultante consta de dos regiones: una parte superior en la cual un elemento es dominante y el otro es considerado como traza (minoritario), y una región inferior en la cual el carácter mayoritario y minoritario de los respectivos elementos es invertido. Debido a que las dos soluciones son ajustadas satisfaciendo la condición de conservación de la masas de cada elemento (ver Apéndice C.3), se produce una discontinuidad en la derivada en el punto de empalme. Los exponentes de la solución en leyes de potencia está directamente relacionado al estado de ionización del plasma estelar (ver Arcoragi & Fontaine 1980). Así, la estratificación química de la zona completa de la interfase, en el marco de este tratamiento estandar, puede ser modificado sólo si el plasma experimenta una modificación en el estado de ionización como resultado de la evolución estelar. Cálculos pulsacionales de enanas blancas en los cuales esta aproximación es usada para el modelado de las interfases químicas son aquellos de, por ejemplo, Bradley (1996, 1998ab, 2001), Bradley & Winget (1994), Brassard et al. (1991, 1992ab), Montgomery & Winget (1999), Metcalfe, Nather & Winget (2000), Metcalfe, Winget & Charbonneau (2001), Montgomery, Metcalfe & Winget (2001).

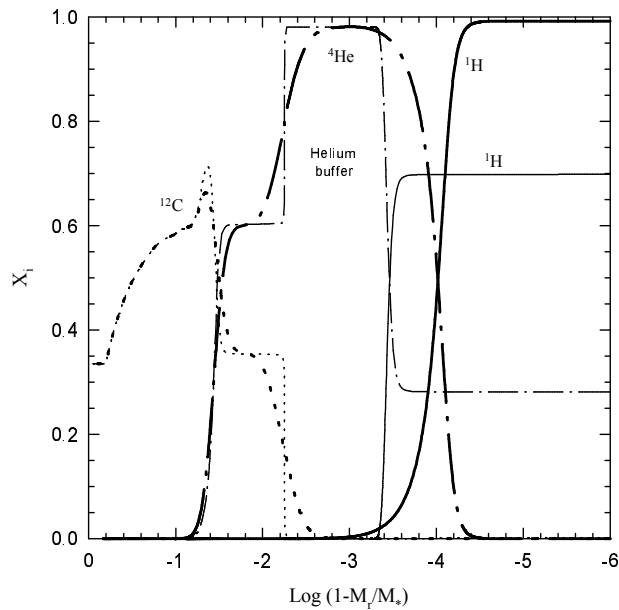


Figura 2.2: Perfiles de abundancia para nuestro remanente de enana blanca de  $0.563 M_{\odot}$  para dos modelos seleccionados justo después del punto máximo en temperatura efectiva (líneas finas) y cerca del comienzo del régimen de las ZZ Ceti. Los modelos están caracterizados por valores  $(\log L/L_{\odot}, \log T_{\text{eff}})$  de  $(3.1, 5.15)$  y  $(-2.48, 4.07)$  (líneas finas y gruesas, respectivamente). En particular, la distribución de hidrógeno, helio y carbono (línea sólida, línea de trazos y puntos y líneas punteadas, respectivamente) es mostrada en función de la fracción de masa externa. El efecto de la difusión de elementos en la distribución de abundancias químicas es claramente notable.

### 2.3 Difusión de elementos dependiente del tiempo

Como se ha mencionado, el cálculo de modelos evolutivos de enanas blancas tratado en forma autoconsistente con la difusión dependiente del tiempo es un aspecto importante de esta Tesis. Como fue descrito en la Sección anterior, en la mayoría de los estudios previos de pulsación de enanas blancas el equilibrio difusivo en la aproximación *trace element* ha sido usada para especificar la forma del perfil químico en las regiones de transición en composición. Sin embargo, la aproximación de equilibrio difusivo no es válida cuando las escalas de tiempo de difusión son comparables a las escalas de tiempo evolutivas. En particular, el equilibrio difusivo en capas profundas de la enana blanca no es una aproximación apropiada aún a edades características de la etapa ZZ Ceti. En efecto, se conoce que durante tales estados, la difusión modifica la distribución espacial de los elementos, en particular en las interfases químicas (ver Iben & MacDonald 1985). Para un tratamiento más adecuado de las interfases químicas, nosotros hemos considerado los procesos de sedimentación gravitacional, difusión química y térmica siguiendo el tratamiento de Burgers (1969) para gases multicomponentes (ver Apéndice C.2 para detalles). En el contexto de la evolución de enanas blancas DA, el tratamiento para la difusión que hemos usado ha sido empleado por Iben & MacDonald (1985, 1986) y también por Althaus, Serenelli & Benvenuto (2001) para evaluar el papel desempeñado por la difusión en la ocurrencia de flashes termonucleares de hidrógeno en enanas blancas de baja masa con núcleos de helio. La forma de la zona de transición en composición química, como mencionamos en el Capítulo 1, es un punto de crucial importancia en lo que se

refiere a las pulsaciones de enanas blancas. En particular, ésta contribuye a la forma del término de Ledoux contenido en la frecuencia de Brunt-Väisälä (ver Ecuaciones 3.21-3.23 del Capítulo 3) y juega un papel crítico en el fenómeno de *mode trapping* en enanas blancas (ver Capítulo 6).

A continuación mostraremos el efecto de la difusión dependiente del tiempo sobre los perfiles químicos. En la Figura 2.2 mostramos la estratificación química de la enana blanca en el dominio de la banda de inestabilidad (líneas gruesas) junto con la correspondiente al comienzo del track de enfriamiento (líneas finas). La acción de la difusión es claramente apreciable en esta figura. Notablemente, cuasi-discontinuidades en la distribución inicial de abundancias son suavizadas considerablemente por la difusión de elementos. En efecto, los procesos de la difusión modifican fuertemente la pendiente de los perfiles químicos en las capas externas a lo largo del track de enfriamiento de la enana blanca. Notemos que debido a la acción de los procesos de difusión y quema nuclear la envoltura pura de hidrógeno para el modelo correspondiente al dominio de inestabilidad de las ZZ Ceti posee una masa de  $\log(M_{\text{H}}/M_*) = -3.905$ . No obstante, como puede verse en la figura, la cola del perfil de hidrógeno llega a regiones profundas del modelo. La forma suave de los perfiles químicos en la transición de hidrógeno-helio tiene una importancia fundamental al momento de considerar el espectro de modos  $g$  de la estrella, como veremos en Capítulos subsiguientes. Notemos que la difusión no modifica los perfiles químicos en la región del núcleo, y esto es debido a que la escala de tiempo de difusión es mucho mayor que la escala de tiempo evolutiva en esa zona. Sin embargo, notemos que la base de la envoltura de helio, a pesar de estar localizada en regiones relativamente profundas, es notablemente afectada por la difusión: el perfil químico es apreciablemente suavizado por la acción de la difusión aún para valores de  $\log(1 - M_r/M_*) \sim -2$ . El valor de la masa de la envoltura de helio es de  $\log(M_{\text{He}}/M_*) = -1.604$ .

# Capítulo 3

## Resolución del problema adiabático

Resultados publicados en los siguientes artículos:

- A new code for non-radial stellar pulsations and its application to low-mass, helium white dwarfs, Córscico & Benvenuto, *Astrophysics & Space Science*, 279, 281 (2002)
- The potential of the variable DA white dwarf G117-B15A as a tool for fundamental physics, Córscico, Benvenuto, Althaus, Isern & García-Berro, *New Astronomy*, 6, 197, (2001)

En vista de la importancia creciente de la línea de investigación relacionada con enanas blancas variables, como ha sido descrito en el Capítulo introductorio, en nuestro Observatorio hemos comenzado a estudiar las oscilaciones estelares no-radiales. Para tal fin hemos desarrollado en forma independiente un código de pulsaciones con capacidad de proporcionar las cantidades básicas necesarias en la exploración de propiedades pulsacionales de enanas blancas y estudios astrosismológicos en tales estrellas.

El propósito de este Capítulo es describir las técnicas numéricas empleadas en nuestro programa para buscar y calcular los modos no-radiales de pulsación de modelos estelares esféricamente simétricos. El código está basado en una modificación de la técnica Newton-Raphson generalizada presentada en Kippenhahn, Weigert & Hofmeister (1967) para resolver el set de ecuaciones en diferencias representando las ecuaciones diferenciales de oscilaciones no-radiales lineales y adiabáticas en estrellas esféricamente simétricas. También en este Capítulo incluimos algunos tests del funcionamiento del código, en particular sobre modelos politrópicos y modelos (químicamente homogéneos) de enanas blancas de helio. El capítulo termina con una aplicación del código de evolución-pulsación en la cual inferimos una cota superior a la masa de las partículas denominadas *axiones*.

Como un primer paso lógico en este proyecto, nuestro código ha sido diseñado con la capacidad de resolver las ecuaciones que describen oscilaciones *adiabáticas*. Esto responde principalmente a dos razones. En primer lugar, el problema adiabático es obviamente más simple desde el punto de vista matemático que el caso general no-adiabático. Consideramos entonces que un primer paso lógico en este proyecto

a largo plazo es comenzar estudiando las propiedades adiabáticas, aunque dada la forma en que fue construido nuestro programa, es posible generalizarlo al caso no-adiabático sin grandes modificaciones. En segundo lugar, como es bien conocido a partir de cálculos llevados a cabo por otros autores, los períodos adiabáticos difieren muy poco de los no-adiabáticos en el caso de enanas blancas: típicamente las diferencias son del orden de  $10^{-4}$  (Bradley 1998b). Los cálculos adiabáticos, por otra parte, proporcionan suficiente información acerca de la estructura mecánica de la estrella en estudio, por lo cual son corrientemente empleados para llevar a cabo estudios astrosismológicos en enanas blancas<sup>1</sup>.

### 3.1 Código de pulsaciones: esquema numérico

Las ecuaciones diferenciales que gobiernan las pulsaciones no-radiales, lineales y adiabáticas en estrellas esféricamente simétricas pueden encontrarse en el Apéndice A (Ecuaciones A.52 a A.55). Estas ecuaciones, junto con las condiciones de borde adecuadas para el centro y la superficie estelar constituye un problema lineal de autovalores de cuarto orden, el cual en general debe resolverse numéricamente. Con el objeto de escribir las ecuaciones de pulsación en una forma adecuada para el cálculo numérico, dividimos el modelo en equilibrio en un número de capas esféricas concéntricas. Esto es equivalente a discretizar el dominio de la variable independiente  $x$  en  $N$  puntos ( $N-1$  capas) no necesariamente equi-espaciadas  $x_j, j = 1, \dots, N$ . En nuestro tratamiento definimos  $x_1 = 1$  como la superficie estelar y  $x_N = 0$  como el punto central del modelo.

Ahora reemplazamos las Ecuaciones (A.52) a (A.55) por ecuaciones en diferencias. El sistema de ecuaciones puede ser escrito como

$$\frac{dy_i}{dx} = f_i(y_1, y_2, y_3, y_4, \lambda), \quad i = 1, 2, 3, 4, \quad (3.1)$$

donde  $\lambda = \omega^2$ . En diferencias finitas, las Ecuaciones (3.1) pueden ser escritas como<sup>2</sup>

$$\frac{[y_i]_{j+1} - [y_i]_j}{x_{j+1} - x_j} = f_i([y_1, y_2, y_3, y_4]_{j+\frac{1}{2}}; \lambda); i = 1, 2, 3, 4; j = 1, \dots, N-1, \quad (3.2)$$

donde, para una dada cantidad  $\psi$ ,

---

<sup>1</sup>La información acerca de cuáles y cuántos modos son excitados, y en consecuencia son capaces de alcanzar amplitudes observables en estrellas reales, es obtenida sólo a través de cálculos no-adiabáticos. En el caso de las enanas blancas, sin embargo, los resultados no-adiabáticos son fuertemente dependientes de la eficiencia convectiva adoptada en la construcción de los modelos en equilibrio (Bradley & Winget 1994). Dado que esta elección es, en principio, libre, el procedimiento usual es adoptar la eficiencia convectiva que dé como resultado un borde azul en acuerdo con el borde azul observado. Como puede verse, este procedimiento no es del todo autoconsistente, lo cual constituye un defecto de la teoría no-adiabática aplicada a enanas blancas.

<sup>2</sup>También hemos empleado diferencias finitas de la forma

$$\frac{[y_i]_{j+1} - [y_i]_j}{x_{j+1} - x_j} = \frac{1}{2} (f_i([y_1, y_2, y_3, y_4]_j; \lambda) + f_i([y_1, y_2, y_3, y_4]_{j+1}; \lambda)); i = 1, 2, 3, 4; j = 1, \dots, N-1.$$

Aplicando tal forma para las ecuaciones en diferencias hemos encontrado resultados que no difieren apreciablemente de los obtenidos a partir de la forma (3.2).

$$[\psi]_{j+\frac{1}{2}} = \frac{[\psi]_j + [\psi]_{j+1}}{2},$$

siendo  $[\psi]_j$  el valor de la cantidad  $\psi$  en el punto  $j$ . Las condiciones de borde externas están dadas por <sup>3</sup> (Unno, et al. 1989):

$$\begin{aligned} [y_1]_1 - [y_2]_1 + [y_3]_1 &= 0, \\ (\ell + 1) [y_3]_1 + [y_4]_1 &= 0, \\ [y_1]_1 &= 1. \end{aligned} \quad (3.3)$$

La última ecuación es la condición de normalización, usualmente empleada en estudios previos. Las condiciones de borde centrales están dadas por (Unno, et al. 1989)

$$\begin{aligned} [y_1]_N \frac{[C_1]_N \lambda}{\ell} - [y_2]_N &= 0, \\ \ell [y_3]_N - [y_4]_N &= 0. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Con el objeto de resolver este sistema de ecuaciones en diferencias usaremos el método Newton-Raphson generalizado siguiendo la formulación presentada en Kippenhahn, Weigert & Hofmeister (1967) para el caso de evolución estelar. Aquí supondremos que disponemos de una solución aproximada para el sistema y deseamos mejorarla iterativamente. En caso de que esta solución inicial no está lejos de la solución exacta del sistema, podemos desarrollar las ecuaciones hasta el primer orden en las correcciones para los valores de las autofunciones para cada punto de la grilla y también para el autovalor  $\omega^2$  (el cuadrado de la autofrecuencia). En esta forma obtenemos un sistema lineal de ecuaciones cuyas incógnitas son las correcciones, el cual debe ser resuelto.

En forma compacta, el sistema algebraico de ecuaciones para las correcciones a primer orden puede expresarse como:

$$\frac{\partial B_k}{\partial [y_1]_1} \delta [y_1]_1 + \cdots + \frac{\partial B_k}{\partial [y_4]_1} \delta [y_4]_1 + \frac{\partial B_k}{\partial \lambda} \delta \lambda = -B_k; \quad k = 1, 2, 3, \quad (3.5)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial G_i^j}{\partial [y_1]_j} \delta [y_1]_j + \cdots + \frac{\partial G_i^j}{\partial [y_4]_j} \delta [y_4]_j + \frac{\partial G_i^j}{\partial [y_1]_{j+1}} \delta [y_1]_{j+1} + \cdots + \frac{\partial G_i^j}{\partial [y_4]_{j+1}} \delta [y_4]_{j+1} + \\ \frac{\partial G_i^j}{\partial \lambda} \delta \lambda = -G_i^j; \quad i = 1, 2, 3, 4; \quad j = 1, 2, \dots, N-1, \end{aligned} \quad (3.6)$$

$$\frac{\partial C_m}{\partial [y_1]_N} \delta [y_1]_N + \cdots + \frac{\partial C_m}{\partial [y_4]_N} \delta [y_4]_N + \frac{\partial C_m}{\partial \lambda} \delta \lambda = -C_m; \quad m = 1, 2, \quad (3.7)$$

donde  $\delta [y_i]_j$  son pequeñas correcciones a las autofunciones  $y_i$  en el punto  $j$  de la grilla, y  $\delta \lambda$  es la corrección al autovalor  $\lambda$ .  $B_k$ ,  $G_i^j$ , y  $C_m$  son los valores de las ecuaciones en diferencias evaluadas en la solución a ser mejorada iterativamente. Obviamente, todas ellas deben ser cero cuando son evaluadas con la solución exacta.

<sup>3</sup>Las primeras dos de estas ecuaciones son las llamadas “condiciones de borde cero”, las cuales emplearemos en el tratamiento de pulsaciones en polítopos. En el caso de modelos realistas de enanas simplemente reemplazamos la primer ecuación por la expresión (Unno et al. 1989)

$$y_1 \left[ 1 + \left( \frac{\ell(\ell+1)}{\omega^2} - 4 - \omega^2 \right) \frac{1}{V} \right] - y_2 + y_3 \left[ 1 + \left( \frac{\ell(\ell+1)}{\omega^2} - \ell - 1 \right) \frac{1}{V} \right] = 0.$$

evaluada en  $j = 1$ .

Ahora tenemos que invertir una gran matriz la cual tiene elementos no nulos sólo en bloques localizados sobre la diagonal y en la última columna (correspondiente a las derivadas con respecto al autovalor). Nótese que esta es una importante diferencia en comparación con el caso de evolución estelar. Por lo tanto necesitamos un algoritmo específico para invertir la matriz y obtener las correcciones.

Evaluando la Ecuación (3.5) para  $k = 1, 2, 3$  y la Ecuación (3.6) para  $i = 1, 2, 3, 4$  y  $j = 1$ , podemos escribir el primer bloque de la matriz como

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial B_1}{\partial [y_1]_1} & \cdots & \cdots & \frac{\partial B_1}{\partial [y_4]_1} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial B_2}{\partial [y_1]_1} & \cdots & \cdots & \frac{\partial B_2}{\partial [y_4]_1} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial B_3}{\partial [y_1]_1} & \cdots & \cdots & \frac{\partial B_3}{\partial [y_4]_1} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial G_1^1}{\partial [y_1]_1} & \cdots & \cdots & \frac{\partial G_1^1}{\partial [y_4]_1} & \frac{\partial G_1^1}{\partial [y_1]_2} & \frac{\partial G_1^1}{\partial [y_2]_2} & \frac{\partial G_1^1}{\partial [y_3]_2} \\ \vdots & \ddots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial G_4^1}{\partial [y_1]_1} & \cdots & \cdots & \frac{\partial G_4^1}{\partial [y_4]_1} & \frac{\partial G_4^1}{\partial [y_1]_2} & \frac{\partial G_4^1}{\partial [y_2]_2} & \frac{\partial G_4^1}{\partial [y_3]_2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \delta [y_1]_1 \\ \delta [y_2]_1 \\ \delta [y_3]_1 \\ \delta [y_4]_1 \\ \delta [y_1]_2 \\ \delta [y_2]_2 \\ \delta [y_3]_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\partial B_1}{\partial \lambda} & -B_1 \\ 0 & -\frac{\partial B_2}{\partial \lambda} & -B_2 \\ 0 & -\frac{\partial B_3}{\partial \lambda} & -B_3 \\ -\frac{\partial G_1^1}{\partial [y_4]_2} & -\frac{\partial G_1^1}{\partial \lambda} & -G_1^1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ -\frac{\partial G_4^1}{\partial [y_4]_2} & -\frac{\partial G_4^1}{\partial \lambda} & -G_4^1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \delta [y_4]_2 \\ \delta \lambda \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (3.8)$$

Ahora definimos vectores  $U_s, V_s, W_s$ , ( $s = 1, \dots, 4N - 5$ ) de tal forma que podemos escribir

$$\begin{bmatrix} \delta [y_1]_1 \\ \delta [y_2]_1 \\ \delta [y_3]_1 \\ \delta [y_4]_1 \\ \delta [y_1]_2 \\ \delta [y_2]_2 \\ \delta [y_3]_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_1 & V_1 & W_1 \\ U_2 & V_2 & W_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ U_7 & V_7 & W_7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \delta [y_4]_2 \\ \delta \lambda \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

para este bloque. Los coeficientes de estos vectores pueden ser calculados fácilmente resolviendo

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial B_1}{\partial [y_1]_1} & \cdots & \cdots & \frac{\partial B_1}{\partial [y_4]_1} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial B_2}{\partial [y_1]_1} & \cdots & \cdots & \frac{\partial B_2}{\partial [y_4]_1} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial B_3}{\partial [y_1]_1} & \cdots & \cdots & \frac{\partial B_3}{\partial [y_4]_1} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial G_1^1}{\partial [y_1]_1} & \cdots & \cdots & \frac{\partial G_1^1}{\partial [y_4]_1} & \frac{\partial G_1^1}{\partial [y_1]_2} & \frac{\partial G_1^1}{\partial [y_2]_2} & \frac{\partial G_1^1}{\partial [y_3]_2} \\ \vdots & \ddots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial G_4^1}{\partial [y_1]_1} & \cdots & \cdots & \frac{\partial G_4^1}{\partial [y_4]_1} & \frac{\partial G_4^1}{\partial [y_1]_2} & \frac{\partial G_4^1}{\partial [y_2]_2} & \frac{\partial G_4^1}{\partial [y_3]_2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_1 & V_1 & W_1 \\ U_2 & V_2 & W_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ U_7 & V_7 & W_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\partial B_1}{\partial \lambda} & -B_1 \\ 0 & -\frac{\partial B_2}{\partial \lambda} & -B_2 \\ 0 & -\frac{\partial B_3}{\partial \lambda} & -B_3 \\ -\frac{\partial G_1^1}{\partial [y_4]_2} & -\frac{\partial G_1^1}{\partial \lambda} & -G_1^1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ -\frac{\partial G_4^1}{\partial [y_4]_2} & -\frac{\partial G_4^1}{\partial \lambda} & -G_4^1 \end{bmatrix}. \quad (3.10)$$

A partir de la Ecuación (3.6), y después de una breve manipulación algebraica, podemos escribir un bloque arbitrario de la gran matriz (excepto el central) en la forma:

$$\begin{bmatrix} \delta [y_4]_j \\ \delta [y_1]_{j+1} \\ \delta [y_2]_{j+1} \\ \delta [y_3]_{j+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_{4j} & V_{4j} & W_{4j} \\ U_{4j+1} & V_{4j+1} & W_{4j+1} \\ U_{4j+2} & V_{4j+2} & W_{4j+2} \\ U_{4j+3} & V_{4j+3} & W_{4j+3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \delta [y_4]_{j+1} \\ \delta \lambda \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (3.11)$$



donde  $j = 2, \dots, N-2$ . Ahora, los coeficientes de los vectores  $U_s, V_s, W_s$  pueden ser evaluados resolviendo el sistema

$$\begin{bmatrix} \alpha_1^j & \frac{\partial G_1^j}{\partial [y_1]_{j+1}} & \frac{\partial G_1^j}{\partial [y_2]_{j+1}} & \frac{\partial G_1^j}{\partial [y_3]_{j+1}} \\ \alpha_2^j & \frac{\partial G_2^j}{\partial [y_1]_{j+1}} & \frac{\partial G_2^j}{\partial [y_2]_{j+1}} & \frac{\partial G_2^j}{\partial [y_3]_{j+1}} \\ \alpha_3^j & \frac{\partial G_3^j}{\partial [y_1]_{j+1}} & \frac{\partial G_3^j}{\partial [y_2]_{j+1}} & \frac{\partial G_3^j}{\partial [y_3]_{j+1}} \\ \alpha_4^j & \frac{\partial G_4^j}{\partial [y_1]_{j+1}} & \frac{\partial G_4^j}{\partial [y_2]_{j+1}} & \frac{\partial G_4^j}{\partial [y_3]_{j+1}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_{4j} & V_{4j} & W_{4j} \\ U_{4j+1} & V_{4j+1} & W_{4j+1} \\ U_{4j+2} & V_{4j+2} & W_{4j+2} \\ U_{4j+3} & V_{4j+3} & W_{4j+3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\partial G_1^j}{\partial [y_4]_{j+1}} & -\beta_1^j & -\gamma_1^j \\ -\frac{\partial G_2^j}{\partial [y_4]_{j+1}} & -\beta_2^j & -\gamma_2^j \\ -\frac{\partial G_3^j}{\partial [y_4]_{j+1}} & -\beta_3^j & -\gamma_3^j \\ -\frac{\partial G_4^j}{\partial [y_4]_{j+1}} & -\beta_4^j & -\gamma_4^j \end{bmatrix}, \quad (3.12)$$

donde las cantidades  $\alpha_i^j, \beta_i^j, \gamma_i^j$  estan definidas como

$$\begin{aligned} \alpha_i^j &= \frac{\partial G_i^j}{\partial [y_4]_j} + U_{4j-3} \frac{\partial G_i^j}{\partial [y_1]_j} + U_{4j-2} \frac{\partial G_i^j}{\partial [y_2]_j} + U_{4j-1} \frac{\partial G_i^j}{\partial [y_3]_j}, \\ \beta_i^j &= \frac{\partial G_i^j}{\partial \lambda} + V_{4j-3} \frac{\partial G_i^j}{\partial [y_1]_j} + V_{4j-2} \frac{\partial G_i^j}{\partial [y_2]_j} + V_{4j-1} \frac{\partial G_i^j}{\partial [y_3]_j}, \\ \gamma_i^j &= G_i^j + W_{4j-3} \frac{\partial G_i^j}{\partial [y_1]_j} + W_{4j-2} \frac{\partial G_i^j}{\partial [y_2]_j} + W_{4j-1} \frac{\partial G_i^j}{\partial [y_3]_j}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

con  $i = 1, 2, 3, 4$ .

Finalmente, en el punto central del modelo, tenemos  $j = N-1$  en la Ecuación Eq. (3.6) y  $m = 1, 2$  en (3.7). Es fácil mostrar que el último bloque de la gran matriz puede ser escrito como

$$\begin{bmatrix} \alpha_1^{N-1} & \frac{\partial G_1^{N-1}}{\partial [y_1]_N} & \frac{\partial G_1^{N-1}}{\partial [y_2]_N} & \frac{\partial G_1^{N-1}}{\partial [y_3]_N} & \frac{\partial G_1^{N-1}}{\partial [y_4]_N} & \beta_1^{N-1} \\ \alpha_2^{N-1} & \frac{\partial G_2^{N-1}}{\partial [y_1]_{N-1}} & \frac{\partial G_2^{N-1}}{\partial [y_2]_{N-1}} & \frac{\partial G_2^{N-1}}{\partial [y_3]_{N-1}} & \frac{\partial G_2^{N-1}}{\partial [y_4]_{N-1}} & \beta_2^{N-1} \\ \alpha_3^{N-1} & \frac{\partial G_3^{N-1}}{\partial [y_1]_{N-1}} & \frac{\partial G_3^{N-1}}{\partial [y_2]_{N-1}} & \frac{\partial G_3^{N-1}}{\partial [y_3]_{N-1}} & \frac{\partial G_3^{N-1}}{\partial [y_4]_{N-1}} & \beta_3^{N-1} \\ \alpha_4^{N-1} & \frac{\partial G_4^{N-1}}{\partial [y_1]_{N-1}} & \frac{\partial G_4^{N-1}}{\partial [y_2]_{N-1}} & \frac{\partial G_4^{N-1}}{\partial [y_3]_{N-1}} & \frac{\partial G_4^{N-1}}{\partial [y_4]_{N-1}} & \beta_4^{N-1} \\ 0 & \frac{\partial C_1}{\partial [y_1]_N} & \frac{\partial C_1}{\partial [y_2]_N} & \frac{\partial C_1}{\partial [y_3]_N} & \frac{\partial C_1}{\partial [y_4]_N} & \frac{\partial C_1}{\partial \lambda} \\ 0 & \frac{\partial C_2}{\partial [y_1]_N} & \frac{\partial C_2}{\partial [y_2]_N} & \frac{\partial C_2}{\partial [y_3]_N} & \frac{\partial C_2}{\partial [y_4]_N} & \frac{\partial C_2}{\partial \lambda} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \delta [y_4]_{N-1} \\ \delta [y_1]_N \\ \delta [y_2]_N \\ \delta [y_3]_N \\ \delta [y_4]_N \\ \delta \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\gamma_1^{N-1} \\ -\gamma_2^{N-1} \\ -\gamma_3^{N-1} \\ -\gamma_4^{N-1} \\ -C_1 \\ -C_2 \end{bmatrix}. \quad (3.14)$$

En este caso las cantidades  $\alpha_i^{N-1}, \beta_i^{N-1}, \gamma_i^{N-1}$  son evaluadas a partir de las Ecuaciones (3.13) en  $j = N-1$ .

Notemos que la Ecuación (3.14) puede ser resuelta con el objeto de obtener las correcciones para las autofunciones  $y_1, y_2, y_3$  y  $y_4$  en el punto central de la grilla, y para el autovalor  $\lambda$ . También, nótese que la corrección en la autofunción  $y_4$  correspondiente al punto inmediatamente externo de la malla es obtenido. Esta corrección, digamos  $\delta [y_4]_{N-1}$ , sirve como “acoplamiento” entre los puntos  $N$  y  $N-1$ . En efecto, podemos usar la Ecuación (3.11) con  $j = N-2$  para obtener el resto de las correcciones correspondientes a las autofunciones en el punto  $N-1$  de la grilla. A continuación, el empleo de este procedimiento para sucesivos valores decrecientes de  $j$  (en Ecuación 3.11) usando  $\delta [y_4]_{j+1}$  como acoplamiento entre las cantidades correspondientes a puntos consecutivos, así como también la Ecuación (3.9), conduce a encontrar las correcciones para el autovalor y las autofunciones para el modelo completo. Estas correcciones son aplicadas a la solución inicial y el algoritmo es empleado iterativamente hasta el estado en el cual todas las correcciones (el valor absoluto de ellas) son menores que algún valor previamente adoptado. En este punto,

el set completo de ecuaciones en diferencia representando las ecuaciones diferenciales (A.52-A.55) ha sido resuelto.

Con el objeto de encontrar una primer aproximación a las autofunciones y el autovalor de un modo, hemos aplicado el método del discriminante presentado en Unno et al. (1989). Específicamente, la expresión adoptada como discriminante es  $D(\omega^2) = (\ell + 1) [y_3]_1 + [y_4]_1$ . Nótese que  $D(\omega^2) = 0$  corresponde exactamente a la segunda de las condiciones de borde externas (3.3). Referimos al lector al libro de Unno et al. (1989) para más detalles.

Obviamente, para aplicar esta técnica necesitamos definir una grilla con una distribución apropiada de puntos, y para esto hemos empleado un procedimiento simple. Como una primer aproximación a la solución de las ecuaciones de pulsación, calculamos las autofunciones y el autovalor tomando la grilla de puntos en la cual está definido el modelo en equilibrio. Después de la convergencia, redistribuimos los puntos de la grilla utilizando el mismo criterio usualmente empleado en evolución estelar (Kippenhahn, Weigert & Hofmeister 1967): la variación relativa de cada autofunción dentro de una zona debe ser menor que algún límite de tolerancia preestablecido. Si es necesario, nuestro programa agrega o elimina puntos de la grilla, usando interpolación spline sobre las cantidades del modelo en equilibrio, e interpolación lineal en las autofunciones, ya que éstas son mejoradas posteriormente en la etapa iterativa.

Los esquemas descriptos han sido programados en lenguaje FORTRAN 77.

## 3.2 Código de evolución-pulsación

Una posible forma de calcular modos de oscilación en modelos evolutivos es primero calcular tales estructuras con un código evolutivo y luego elegir un subconjunto de tales modelos (usualmente correspondientes a un intervalo en  $T_{\text{eff}}$  predeterminado) para analizarlos pulsacionalmente. Este procedimiento ha sido empleado en la mayoría de los estudios de pulsaciones adiabáticas en enanas blancas (ver, por ejemplo, Tassoul, Fontaine & Winget 1990, Bradley 1996, Brassard et al. 1992a, 1992b) hasta el presente.

Aquí presentamos una manera alternativa para calcular modos no-radiales en secuencias evolutivas. La idea básica es muy simple: si el paso de tiempo en la secuencia evolutiva es suficientemente pequeño, los autovalores y autofunciones correspondientes a un dado modelo deberían ser muy similares a aquellos correspondientes al modelo previo. Entonces, si acoplamos el código de pulsaciones al código evolutivo, es posible evitar el barrido en  $\omega^2$  para cada modelo: la búsqueda de modos es realizada *una sola vez*, para el primer modelo dentro del intervalo relevante en  $T_{\text{eff}}$ . Los modos son calculados y almacenados y sirven como solución inicial aproximada para el siguiente modelo. De esta forma es posible economizar tiempo de CPU, y (mas importante aún) es posible seguir los cambios en el espectro de pulsaciones debido a la evolución de la estructura estelar en forma continua.

### 3.2.1 Funcionamiento del código de evolución-pulsación

A continuación describimos cómo nuestro código de pulsación y evolución funcionan juntos. En primer lugar, un intervalo en  $T_{\text{eff}}$  es elegido, así como también la ventana en frecuencias a ser barrida. El código evolutivo calcula los modelos hasta

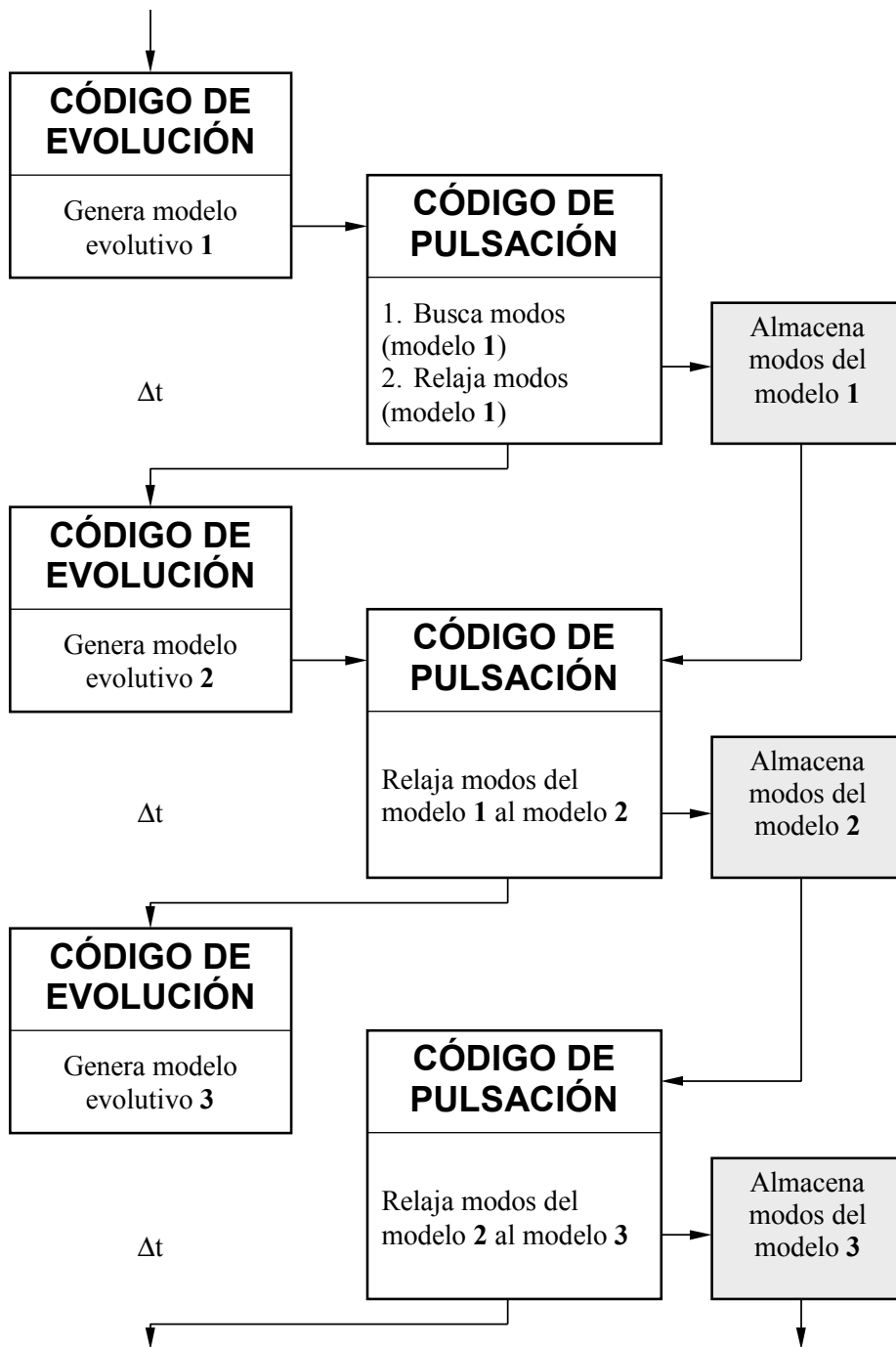


Figura 3.1: Diagrama esquemático ilustrando el funcionamiento conjunto de los códigos de evolución y pulsación. Nótese que la búsqueda de modos es llevada a cabo sólo en el primer modelo del intervalo de interés en  $T_{\text{eff}}$  ("modelo evolutivo 1"). A partir de ahí los modos encontrados van siendo gradualmente recalculados para los modelos posteriores de la secuencia, empleando en cada oportunidad los modos del modelo anterior como solución inicial a los del modelo actual. La única condición requerida es que el paso de tiempo evolutivo adoptado ( $\Delta t$ ) sea lo suficientemente pequeño de forma tal que la solución correspondiente a modelos consecutivos no difiera notablemente.

el momento en que el borde caliente del intervalo en  $T_{\text{eff}}$  es alcanzado. Entonces el programa llama a la rutina que busca los modos y comienza a barrer el intervalo en frecuencias, en la forma descrita en la Sección anterior (método del discriminante). Cuando un modo es encontrado, el programa genera una solución aproximada para  $y_i$ ;  $i = 1, \dots, 4$  y  $\omega^2$ , la cual es entonces mejorada iterativamente. La calidad de esta solución es evaluada, y si es necesario, los puntos de la malla son redistribuidos como fue descrito en la Sección anterior, y luego iterada hasta la convergencia. Antes de mejorar la solución, los modos han sido almacenados sobre la malla original en un bloque `common`, con el objeto de ser empleados como una solución aproximada para el siguiente modelo estelar de la secuencia. Una vez que el cálculo del modo es terminado, el programa comienza a buscar modos nuevamente, y el procedimiento es repetido hasta que la ventana de frecuencias esté completamente barrida. De esta forma el programa ha terminado de calcular todos los modos correspondientes al intervalo de frecuencias para el primer modelo correspondiente al intervalo en  $T_{\text{eff}}$  y cada uno de los modos está ahora almacenado en la memoria de la computadora. A continuación el código evolutivo genera el siguiente modelo estelar y el programa llama a la rutina de pulsaciones, pero esta vez la búsqueda de modos no es realizada. En vez de esto, los modos almacenados (autovalores y autofunciones de cada modo) son tomados como entrada al esquema Newton-Rhapson para aproximar los modos del presente modelo estelar. Luego la solución es mejorada con el procedimiento descrito. El proceso completo es repetido automáticamente para todos los modelos evolutivos dentro del intervalo en  $T_{\text{eff}}$ . Cuando el modelo estelar se torna más frío que el mínimo del intervalo en  $T_{\text{eff}}$ , el cálculo es terminado.

En términos de CPU, una gran fracción del tiempo de cálculo es invertido en la búsqueda de los modos, pero este paso es ejecutado una sola vez. El proceso de relajación y mejoramiento de los modos es mucho más rápido, y el cálculo de cada modelo estelar es casi instantáneo.

En la figura 3.1 proporcionamos un diagrama esquemático ilustrando la forma en que opera nuestro código de evolución-pulsación.

## 3.3 Tests

### 3.3.1 Oscilaciones no-radiales en Polítropas

Como un primer test, hemos aplicado nuestro código de pulsaciones al caso bien documentado de las pulsaciones no-radiales en esferas politrópicas. Esta elección es adecuada para nuestros propósitos, debido a que la estructura politrópica puede calcularse con mucha precisión. De esta forma, podemos aislar las inexactitudes propias del cálculo de pulsaciones, que son las que nos interesa evaluar. En particular hemos calculado modos  $p$ ,  $g$  y  $f$  de polítropas con índices  $n = 1.5, 2, 2.5, 3, 3.5$  y  $4$  para los casos  $\ell = 2, 3$  y  $4$ .

En el caso de las polítropas, los coeficientes de las ecuaciones diferenciales que dependen del modelo en equilibrio (Ecuaciones A.56-A.59 del Apéndice A) adoptan

una forma muy simple:

$$\begin{aligned}
 U &= -\frac{r\phi^n}{\phi'}, \\
 V &= -\frac{n+1}{\Gamma_1} \frac{r\phi'}{\phi}, \\
 C_1 &= \frac{r\phi'_1}{\phi}, \\
 A^* &= \left(\frac{n+1}{\Gamma_1} - n\right) \frac{r\phi'}{\phi}.
 \end{aligned}
 \tag{3.15}$$

En nuestros cálculos consideramos  $\Gamma_1 = 5/3$ . La función  $\phi$  satisface la ecuación de Lane-Emden (ver, por ejemplo, Chandrasekhar 1939), y satisface las siguientes condiciones de borde en el centro:

$$\phi = 1; \quad \phi' = 0, \tag{3.16}$$

y en la superficie:

$$\phi = 0. \tag{3.17}$$

La estructura politrópica ha sido integrada por medio de una técnica Runge-Kutta (Press et al. 1992).

Para buscar los modos hemos calculado el discriminante  $D(\omega^2)$  en la forma descrita antes. En el caso de  $D(\omega^2) = 0$  estamos ante la presencia de un modo. En la práctica, cuando para dos valores consecutivos de  $\omega^2$  el discriminante  $D(\omega^2)$  cambia su signo, por medio de una interpolación lineal obtenemos una excelente aproximación inicial para la autofrecuencia exacta.

Para comparar nuestros autovalores con aquellos disponibles en la literatura hemos empleado el trabajo de Christensen-Dalsgaard & Mullan (1994) en el cual se presentan tablas de autovalores muy precisos para una variedad de esferas politrópicas. Para tal fin hemos graficado en la Figura 3.2 la diferencia relativa  $(\omega^2 - \omega_{Ch-D}^2) / \omega_{Ch-D}^2$  para los casos de modos  $p$  para  $n = 1.5, 3$  y  $\ell = 2, 3$ , modos  $g$  para  $n = 3$  y  $\ell = 2, 3, 4$ , y también para modos  $p$  para  $n = 4$  y  $\ell = 2, 3$ .

La comparación indica que cuanto mayor es el orden radial del modo mayor es la diferencia relativa con respecto a los resultados de Christensen-Dalsgaard & Mullan (1994), sin dependencia apreciable con el valor de  $\ell$ . Las diferencias relativas encontradas en los autovalores son  $\lesssim 4 \times 10^{-4}$ , excepto en el caso de  $n = 3$  para los modos  $g$ , en el cual las diferencias son  $\lesssim 2 \times 10^{-3}$ . Dado que los cálculos de Christensen-Dalsgaard & Mullan (1994) tienen una precisión de  $\sim 10^{-8}$ , concluimos que nuestro programa es capaz de calcular los autovalores de polítropas con una precisión de  $\sim 10^{-3}$ .

En las Tablas D.1 a D.6 del Apéndice D presentamos autovalores de polítropas con  $n = 1.5, 2, 2.5, 3, 3.5$  y  $4$  para modos  $p, g$  y  $f$  en los casos  $\ell = 2, 3$  y  $4$ .

### 3.3.2 Oscilaciones no-radiales en enanas blancas de helio - Comportamiento asintótico

Con el objeto de investigar el comportamiento del código de pulsaciones cuando éste es aplicado a modelos estelares realistas, en esta sección consideraremos el cálculos de modos  $g$  en modelos evolutivos de enanas blancas de helio de baja masa. El principal motivo para evaluar el funcionamiento del código en estos modelos es que son estructuras *químicamente homogéneas*, y como tales, los períodos de oscilación de

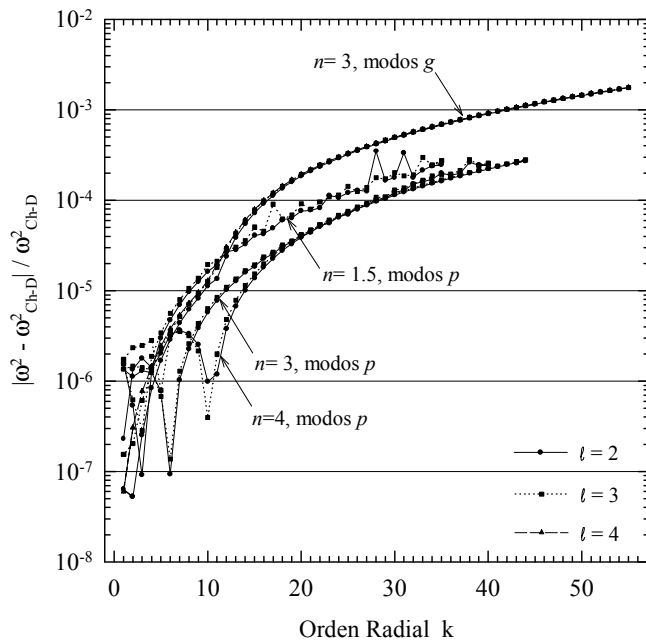


Figura 3.2: Diferencias relativas (en valor absoluto) del cuadrado de la autofrecuencia entre nuestros resultados y los cálculos de Christensen-Dalsgaard & Mullan (1994). Los casos mostrados son para polítopos con  $n = 1.5, 3$  y  $4$ , con  $\ell = 2$  (círculos),  $\ell = 3$  (cuadrados) y  $\ell = 4$  (triángulos). Con propósitos de claridad, los puntos correspondientes a modos del mismo grado  $\ell$  están conectados con líneas. Nótese que las diferencias relativas entre ambos conjuntos de cálculos son mayores cuanto mayor es el orden  $k$  del modo (esto es, cuando las autofunciones son más fuertemente oscilantes).

los modos  $g$  deben estar igualmente espaciados en el límite de alto orden  $k$ , como es predicho por la teoría asintótica (ver Sección 1.2.3 y Sección 1.4.4 de la Introducción). Así, los cálculos de modos  $g$  en este tipo de modelos nos proporciona la posibilidad de comprobar esta predicción. Por otra parte, dado que hasta el momento no hay ningún estudio disponible en la literatura sobre las propiedades de pulsación de enanas blancas compuestas puramente de helio, la única manera que tenemos de evaluar nuestros resultados es a través de la teoría asintótica.

Específicamente, hemos llevado a cabo nuestros cálculos de pulsación en modelos con masa  $M_* = 0.3M_\odot$ , en el rango  $5000 \leq T_{\text{eff}} \leq 25000$  K. La secuencia completa comprende 216 modelos analizados. La convección, presente en las capas externas de nuestros modelos, es tratada empleando la versión ML3 de la MLT (ver Tassoul, Fontaine & Winget 1990). Para los cálculos hemos empleado el código de evolución acoplado al de pulsación, como fue descrito en la Sección 3.2. Ya que nuestro interés aquí es evaluar el funcionamiento del código de pulsación a través del comportamiento asintótico de los períodos, hemos calculado para cada modelo modos  $g$  para  $\ell = 1, 2$  y  $3$  con orden radial alcanzando valores suficientemente altos ( $k = 1$  hasta  $k = 50$ ) como para poder comparar con la predicción teórica de Tassoul (1980).

Para cada modo calculado, las cantidades de interés son el período  $P_k$ , las autofunciones  $y_i; i = 1, \dots, 4$  (ver Apéndice A para su definición) y la energía cinética de oscilación,  $(E_{\text{kin}})_k$ , dada por

$$(E_{\text{kin}})_k = \frac{1}{2}(GM_*R_*^2)\omega_k^2 \int_0^1 x^2 \rho \left[ x^2 y_1^2 + x^2 \frac{\ell(\ell+1)}{(C_1 \omega_k^2)^2} y_2^2 \right] dx, \quad (3.18)$$

También calculamos para cada modo la función de peso,  $wf$ , dada por

$$wf = (4\pi GR_*^2) \frac{x^2 \rho^2}{U} \left[ A^* y_1^2 + V_g (y_2 - y_3)^2 - \frac{1}{U} \{ \ell(\ell+1) y_3 + y_4 \}^2 \right] \quad (3.19)$$

y el período variacional,  $P_k^v$ , definido como (ver Kawaler, Hansen & Winget 1985 para detalles acerca de la importancia de esta cantidad)

$$P_k^v = \sqrt{\frac{8\pi^2}{GM_*}} \frac{(E_{\text{kin}})_k^{1/2}}{\omega_k} \left[ \int_0^1 wf x^2 dx \right]^{-1/2} \quad (3.20)$$

Las cantidades  $V_g$ ,  $U$ ,  $C_1$  y  $A^*$  son adimensionales, y están definidas por las Ecuaciones (A.56) a (A.59) del Apéndice A. La función de peso proporciona la localización de las zonas del modelo que mayormente contribuyen a la formación del período de un dado modo de pulsación, y ha sido empleada por numerosos autores en estudios de estrellas pulsantes en general (Epstein 1950, Goossens & Smeyers 1974, Schwank 1976), y en el contexto de enanas blancas pulsantes en particular (Kawaler, Hansen & Winget 1985, Brassard et al. 1992ab). En nuestro caso empleamos la función de peso normalizada, esto es  $wf/(wf)_{\text{max}}$ , con lo cual esta función adopta valores entre 0 y 1. Finalmente, para cada modelo obtenemos el espaciamiento asintótico de períodos,  $\Delta P_\ell^A$ , definido por las Ecuaciones (1.8) y (1.9). De la misma manera que en Tassoul, Fontaine & Winget (1990), para calcular  $P_0$  (Ecuación 1.9) hemos ignorado la presencia de una zona convectiva externa, integrando desde el centro hasta la superficie del modelo pero fijando  $N = 0$  en la zona convectiva donde  $N^2 < 0$ . Con esta aproximación estamos sobreestimando el valor de  $\Delta P_\ell^A$ , pero debido a que el espesor (en la coordenada  $r$ ) de la zona convectiva externa es muy pequeño, esta es una muy buena aproximación.

Los resultados obtenidos para  $\ell = 1, 2, 3$  son cualitativamente muy similares. Aunque no han sido observadas pulsaciones en enanas blancas de helio, en otras clases de enanas blancas pulsantes (DAVs, DBVs y pre-enanas blancas variables) los modos con  $\ell = 1$  son los que mayormente se observan, por lo cual aquí nos concentraremos en los resultados para  $\ell = 1$ . En la Figura 3.3 hemos graficado la autofunción  $y_1$  para los modos  $g_1, \dots, g_5$  con  $\ell = 1, 2$ , para un modelo con  $T_{\text{eff}} = 11900$  K. En esta figura hemos empleado la coordenada radial  $x = r/R_*$  con el propósito de mostrar claramente las autofunciones en el centro del modelo. A partir de la figura es evidente que  $y_1$  tiene grandes amplitudes en toda la estrella, pero especialmente en el núcleo. Este rasgo es mas pronunciado a medida que examinamos modos con  $k$  cada vez mayor. Esto constituye una gran diferencia en el comportamiento de  $y_1$  en comparación con el caso de las DAVs y las DBVs. En modelos de ese tipo de enanas blancas pulsantes  $y_1$  tiene amplitudes centrales bajas (ver, por ejemplo, las Figuras 14a y 16a of Brassard et al. 1992b, en el caso de un modelo de enana blanca DA de  $0.6M_\odot$ ).

En la Figura 3.4 mostramos la función de peso normalizada ( $wf$ ) para los modos  $g_1, \dots, g_5$  ( $\ell = 1$ ) del mismo modelo que en Figura 3.3. El gráfico indica que la regiones de formación de períodos están localizadas principalmente en las regiones externas de la estrella, donde  $wf$  es grande. Sin embargo, hay importantes contribuciones de las regiones centrales entre  $0.1 \lesssim x \lesssim 0.7$ , y este comportamiento es algo diferente al de las funciones de peso de correspondientes al caso de las DAVs y DBVs, en las cuales  $wf$  sólo muestra valores apreciables en la envoltura estelar (ver Figuras 15 y 17 of Brassard et al. 1992b).

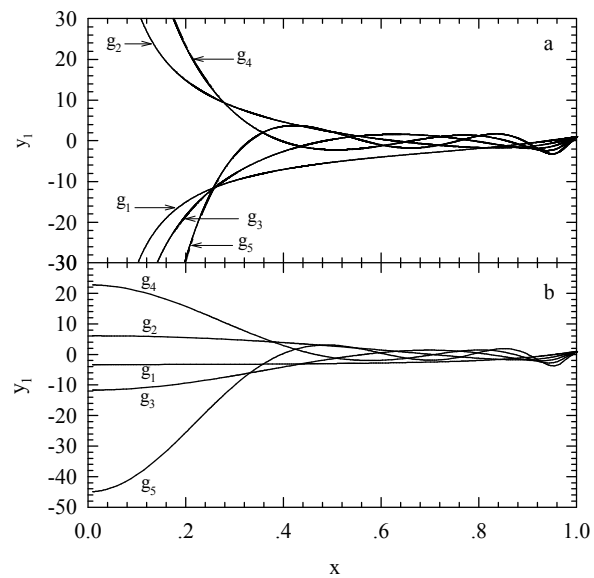


Figura 3.3: **a.** La autofunción  $y_1$  para los modos  $g_1, \dots, g_5$  con  $\ell = 1$ , correspondientes a un modelo de enana blanca de  $0.3 M_{\odot}$  de helio puro con  $T_{\text{eff}} = 11900$  K. Nótese las grandes amplitudes de tales modos en el núcleo estelar. **b.** Igual que para el panel **a.**, pero para el caso  $\ell = 2$ .

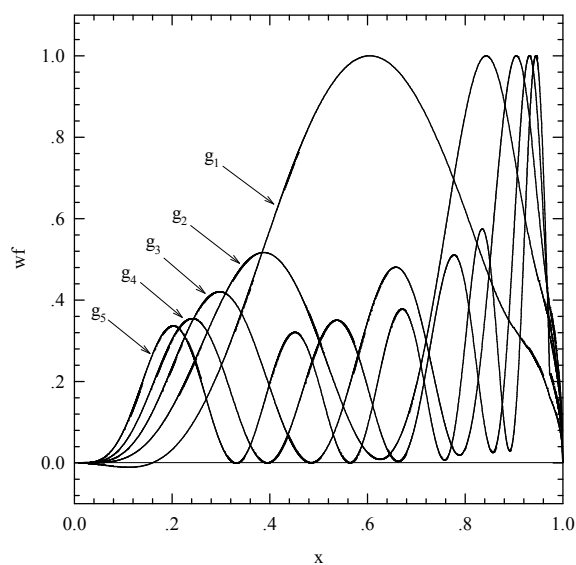


Figura 3.4: La función de peso normalizada ( $wf$ ) correspondiente a los mismos modos incluídos en Figura 3.3a.



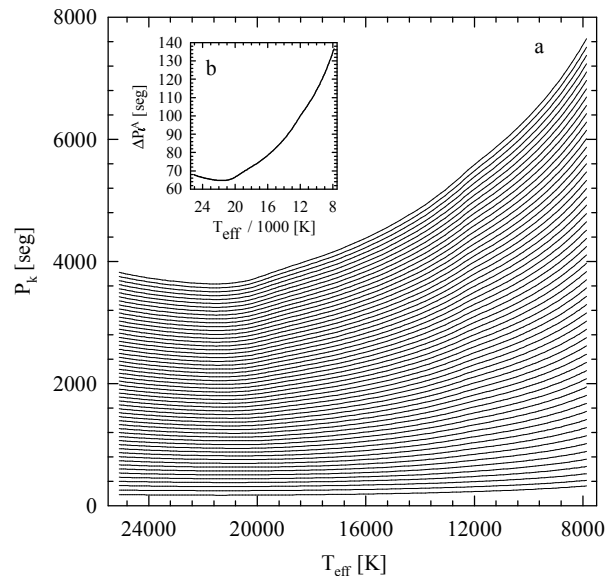


Figura 3.5: **a.** Períodos de modos dipolares ( $\ell = 1$ ) con orden radial desde  $k = 1$  hasta  $k = 56$  y **b.** el espaciado asintótico de períodos  $\Delta P_\ell^A$  predicho por la teoría de Tassoul (1980) en función de la temperatura efectiva. Nótese que los períodos de los modos de alto orden tienen un comportamiento muy similar comparados con  $\Delta P_\ell^A$  durante el enfriamiento de la enana blanca.

A continuación discutiremos los resultados concernientes a períodos y energías cinéticas. Los períodos calculados muestran el comportamiento esperado en los modos  $g$ , con valores crecientes con el orden radial  $k$ . Dado que nuestros cálculos cubren un amplio rango en  $T_{\text{eff}}$ , es posible inferir la dependencia de los períodos con la temperatura efectiva durante el enfriamiento de la enana blanca. Es importante mencionar que hemos calculado la frecuencia de Brunt-Väisälä como en Tassoul, Fontaine & Winget (1990), en vez de usar su definición (Ecuación A.43 del Apéndice A). Hemos encontrado que la frecuencia de Brunt-Väisälä decrece a medida que el modelo se enfría, un rasgo que es muy pronunciado en el núcleo. Esto es debido al aumento de la degeneración en esa región, lo cual provoca un mayor desacoplamiento entre la presión y la temperatura. Como consecuencia del decrecimiento en  $N$  los períodos se incrementan monótonamente, cosa que es muy clara a partir de la Figura 3.5.

Consideremos ahora que sucede con la energía cinética de oscilación  $(E_{\text{kin}})_k$  de los modos. Hemos encontrado que, como es esperable en una estrella químicamente homogénea,  $(E_{\text{kin}})_k$  es una función suave de  $k$ , y así del período. En la Figura 3.6 mostramos  $\log(E_{\text{kin}})_k$  en función de  $T_{\text{eff}}$  para los modelos incluidos en Figura 3.5. Para los modelos más calientes es claro que los modos más energéticos son los de bajo orden, debido a que ellos penetran hasta regiones muy profundas de la estrella, donde la densidad es alta. Sin embargo, cuando  $T_{\text{eff}}$  cae por debajo de  $\sim 20000$  K la energía de los modos de alto orden (los cuales están concentrados principalmente en la envoltura externa de la estrella) se incrementa fuertemente. La explicación a este efecto (ver Brassard et al. 1992b en el contexto de una enana blanca DA) reside en el hecho de que a tal valor de  $T_{\text{eff}}$  la zona convectiva externa de la estrella súbitamente

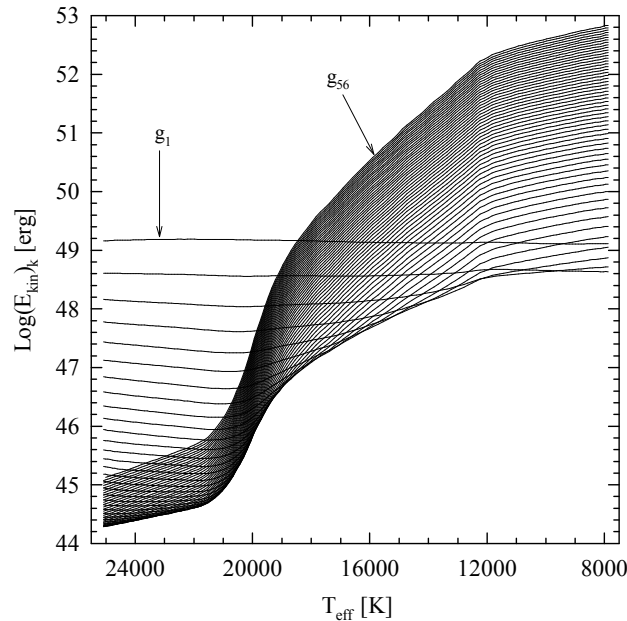


Figura 3.6: La energía cinética en función de la temperatura efectiva para los mismos modos con  $\ell = 1$  incluidos en la Figura 3.5. La unidad de  $(E_{\text{kin}})_k$  es ergios. La condición de normalización adoptada es  $y_1 = 1$  en la superficie del modelo.

se ensancha. Los modos de alto orden que oscilan en la envoltura son afectados gradualmente por la presencia de la convección a medida que la estrella se enfría. Dado que en regiones convectivas los modos  $g$  se tornan evanescentes, tales modos son forzados a tener mayores amplitudes en las regiones inmediatamente por debajo de la zona convectiva, donde la densidad es mayor. Dado que la energía cinética es proporcional a la integral del cuadrado del desplazamiento, pesada por  $\rho$  (Ecuación 3.18), estos modos oscilan con mayores energías. En contraste con los modos de alto orden, los modos de bajo orden son prácticamente insensibles al ensanchamiento de la zona convectiva externa.

Ahora discutiremos el espaciado de períodos de orden radial consecutivo. Hasta el momento no existe en la literatura ningún estudio dedicado a pulsaciones no-radiales en enanas blancas de helio. Por este motivo no podemos hacer ninguna evaluación directa de nuestros resultados. Sin embargo podemos tener una buena idea del funcionamiento de nuestro código examinando el espaciado de períodos consecutivos y corroborando que exhiben el comportamiento predicho por la teoría asintótica (Ecuación 1.5 y también Ecuaciones 1.8 y 1.9). En la Figura 3.7 mostramos el espaciado de períodos hacia adelante,  $\Delta P_k = P_{k+1} - P_k$  vs. el orden radial  $k$  para modelos con  $T_{\text{eff}} = 13225, 11829$  y  $9412$  K. Como referencia también incluimos en la figura el correspondiente espaciado asintótico predicho por la teoría de Tassoul (1980). A partir de la Figura 3.7 es claro que el comportamiento de la solución numérica es el correcto.

Con el fin de obtener una estimación de la exactitud de nuestros resultados, hemos calculado los períodos variacionales para cada modo según Ecuación (3.20).

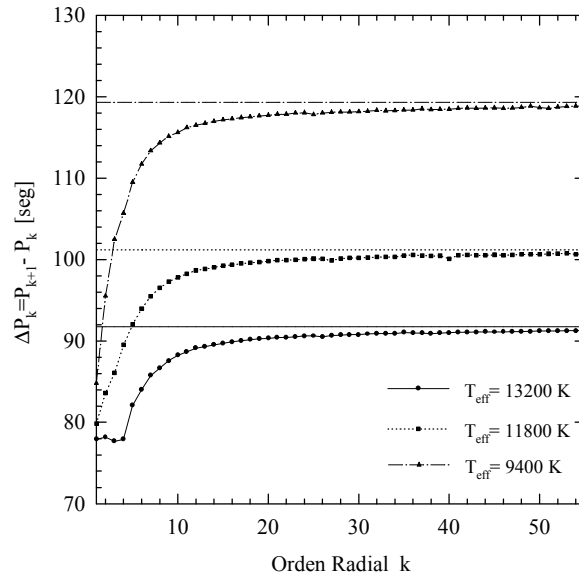


Figura 3.7: Espaciamento de períodos hacia adelante ( $\Delta P_k$ ) vs. orden radial, para modos con  $\ell = 2$  para tres modelos con diferentes valores de  $T_{\text{eff}}$ . Los símbolos correspondientes a modos de la misma  $T_{\text{eff}}$  están conectados por claridad. Líneas horizontales corresponden al valor del espaciamento asintótico de períodos en cada temperatura efectiva de acuerdo a Tassoul (1980).

La comparación de los períodos numéricos y variacionales para los valores de  $\ell$  considerados aquí dá una diferencia menor que  $\approx 1\%$  en modos de bajo  $k$ , mientras que para  $k$  más altos la diferencia es significativamente mas pequeña.

### 3.3.3 Oscilaciones no-radiales en enanas blancas DA (WDEC)

Finalmente, comentaremos brevemente aquí que hemos evaluado el funcionamiento de nuestro código corriendo este sobre modelos para los cuales los modos de oscilación fueron previamente calculados con otro código de pulsación (Bradley 2000, comunicación privada). Específicamente, hemos empleado para tal test dos modelos de enanas blancas DA (núcleo de carbono-oxígeno y atmósfera de hidrógeno) de  $0.5 M_{\odot}$  y  $0.85 M_{\odot}$  calculados con el White Dwarf Evolutionary Code (WDEC; Bradley 1996) para los cuales sus propiedades pulsacionales fueron previamente analizadas (Bradley 1996). Para estos modelos,  $M_{\text{H}}/M_{*} = 10^{-4}$  y  $M_{\text{He}}/M_{*} = 10^{-2}$  y la temperatura efectiva es de  $T_{\text{eff}} \approx 12500$  K. Este test resulta muy valioso dado que las posibles diferencias en los períodos de oscilación son debidas exclusivamente al empleo de diferentes códigos de pulsación. Considerando una gran cantidad de modos con períodos entre 100 y 1200 seg, hemos encontrado los resultados que figuran en la Tabla 3.1. Así, juzgamos que nuestro código produce resultados suficientemente exactos para nuestros propósitos aún en modelos realistas de enanas blancas estratificadas.

Tabla 3.1: Diferencias promedio  $\langle |P_k - P_k^B|/P_k^B \rangle$  (%)

	$\ell = 1$	$\ell = 2$	$\ell = 3$
$M_* = 0.5M_\odot$	0.011	0.021	0.047
$M_* = 0.85M_\odot$	0.013	0.020	0.029

### 3.4 Aplicación: la DAV G117-B15A y la masa de los axiones

En recientes años, argumentos astrofísicos y cosmológicos junto con observaciones se han convertido en herramientas valiosas para obtener información empírica acerca de partículas elementales existentes (o aún hipotéticas) (Raffelt 2000). Esto se debe a que el medio denso de los interiores estelares constituye una potente fuente de partículas débilmente interactuantes de baja masa. Ya que estas partículas subsecuentemente escapan del interior de la estrella, esto constituye un mecanismo extra de pérdida de energía, modificando la evolución estelar, y así permitiendo una comparación con las observaciones. Esto es útil debido a que diferentes teorías físicas no-estándar dejan abierta la posibilidad de que varias partículas “exóticas” puedan existir. Además, para varias de estas partículas no existen aún experimentos de laboratorio capaces de imponer restricciones sobre su existencia. Entre otras partículas débilmente interactuantes, los *axiones* son los candidatos más promisorios como materia oscura no-bariónica (ver el artículo de revisión de Raffelt 2000). Los axiones fueron propuestos hace más de 20 años por Peccei & Quinn (1977), y tienen una pequeña masa de  $m_{\text{ax}} = 0.60 \text{ eV } 10^7 (\text{GeV}/f_a)$ , donde  $f_a$  es la denominada escala de Peccei-Quinn. La fenomenología de los axiones está determinada sólo por este número. Hay dos tipos de modelos de axiones: KVSZ (Kim 1979) y DFSZ (Dine et al. 1981).

Ninguna de las teorías acerca de los axiones proporciona el valor de la cantidad  $f_a$ , y así, los límites a la masa de los axiones deberían ser obtenidos experimentalmente. Sin embargo los experimentos con aceleradores de partículas han fallado, y algunos tipos de estrellas y en particular el sol han comenzado a ser utilizados para fijar la masa de estas partículas. Los límites a la masa de los axiones provienen de argumentos astrofísicos y el valor resulta estar entre  $10^{-2}$  y  $10^{-5}$  eV. La mayoría de los límites astrofísicos provienen de la interacción de los axiones con fotones (a través de la conversión Primakov:  $\gamma \leftrightarrow a$  en el campo eléctrico de electrones y núcleos), con electrones (a través de procesos Compton:  $\gamma + e^- \rightarrow e^- + a$  y procesos Bremsstrahlung:  $e^- + (A, Z) \rightarrow e^- + (A, Z) + a$ ) o con nucleones. En el modelo DFSZ el acoplamiento de los axiones con los electrones es definida usando una constante de acoplamiento adimensional  $g_{ae} = 2.83 \times 10^{-11} m_{\text{ax}} / \cos^2 \beta$ , donde  $\cos \beta$  es un parámetro que usualmente es fijado en la unidad.

Recientemente, Domínguez, Straniero & Isern (1999) han estudiado estrellas de la AGB y han concluido que las características de los pulsos térmicos después del agotamiento del He en el núcleo son modificadas por la inclusión de emisión de axiones, y que la masa del núcleo degenerado de carbono-oxígeno es mucho más baja cuando la emisión de axiones es tomada en cuenta. Las estrellas de la AGB son los progenitores de las enanas blancas, por lo cual las enanas blancas son excelentes candidatos para verificar la existencia de los axiones (Raffelt 1996). Otra razón

importante para esto es la relativa simplicidad de la física que gobierna la evolución de las enanas blancas, lo cual permite obtener modelos muy detallados que pueden satisfactoriamente ser comparados con sus propiedades observadas. Como hemos visto en la Introducción, existe una clase específica de enanas blancas denominadas estrellas ZZ Ceti o DAVs, con envolturas ricas en hidrógeno, las cuales muestran variaciones multiperiodicas en sus curvas de luz. El objeto G117-B15A pertenece a esta clase de estrellas, con períodos observados de 215.2, 271 y 304.4 seg junto con armónicos y combinaciones lineales de estos períodos, siendo el modo dominante el correspondiente al período de 215.2 seg. Como hemos mencionado antes, las variaciones en luminosidad son debidas a pulsaciones no-radiales en modos  $g$ . Para G117-B15A se ha podido medir el rate de cambio del período dominante, con un valor de  $\dot{P} = (2.3 \pm 1.4) \times 10^{-15} \text{s s}^{-1}$  (Kepler et al. 2000). El rate de cambio del períodos está íntimamente relacionado con la escala de tiempo de enfriamiento, la cual puede ser calculada con mucha exactitud: esto ofrece una oportunidad única de detectar cualquier pérdida adicional de energía. Con este razonamiento, Isern, Hernanz & García-Berro (1992) derivaron un límite superior para la masa de los axiones de  $8.7 \text{ meV}^4$  usando un modelo simplificado y comparando el rate de cambio observado y calculado del modo con período 215.2 seg.

En este Capítulo usaremos las características observacionales de la enana blanca pulsante G117-B15A para obtener un límite superior para la masa de los axiones.

### 3.4.1 Método de cálculo

Con el objeto de calcular los modos  $g$  de los modelos de enanas blancas hemos empleado el código de evolución-pulsación descrito en la Sección 3.2 de este Capítulo. Para una descripción de los ingredientes físicos incluidos en el código evolutivo referimos al lector al Capítulo 2 y a Benvenuto & Althaus (1998).

Como mencionamos antes, una importante cantidad involucrada en el cálculo del espectro pulsacional de modos  $g$ , es la llamada frecuencia de Brunt-Väisälä. En vez de calcular esta frecuencia a partir de su definición (Ecuación A.43 del Apéndice A), aquí usaremos la expresión dada en Brassard et al. (1991) con el fin de evitar ruidos numéricos:

$$N^2 = \frac{g^2}{p} \frac{\rho}{\chi_\rho} (\nabla_{\text{ad}} - \nabla + B). \quad (3.21)$$

donde  $\chi$  denota la derivada parcial logarítmica de la presión con respecto a  $T$  o  $\rho$ , respectivamente, y  $B$  es el denominado “término de Ledoux”, y está dado por

$$B = -\frac{1}{\chi_T} \sum_{i=1}^{n-1} \chi_{X_i} \frac{d \ln X_i}{d \ln p} \quad (3.22)$$

donde  $X_i$  es la fracción de masa de átomos de la especie  $i$ ,  $n$  es el número total de especies consideradas, y

$$\chi_{X_i} = \left( \frac{\partial \ln p}{\partial \ln X_i} \right)_{\rho, T, \{X_j \neq i\}}. \quad (3.23)$$

---

<sup>4</sup>mili electrón volt.

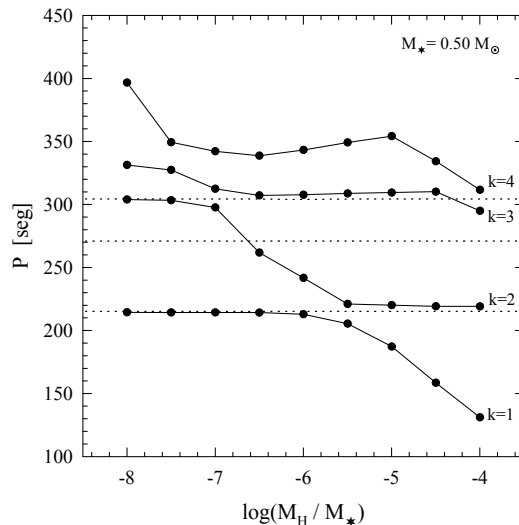


Figura 3.8: Los períodos de los modos dipolares ( $\ell = 1$ )  $k = 1, 2, 3$ , y  $4$  para un modelo de  $0.50 M_{\odot}$  a  $T_{\text{eff}} = 11620$  K como una función de la fracción de masa de hidrógeno. El resto de los perfiles químicos corresponden al mejor ajuste obtenido (ver el texto para detalles). Los puntos corresponden a los modelos calculados, mientras que las líneas de trazos representan los períodos de oscilación observados en G117-B15A. En este caso, con una masa estelar considerablemente baja, el mejor ajuste corresponde a los modos  $k = 1, 2$ , y  $3$  con  $\log M_{\text{H}}/M_{*} = -6.6$ .

Con el objeto de calcular los efectos de la emisión de axiones, hemos incorporado en el código evolutivo los rates de emisión de axiones de Nakagawa, Kohyama & Itoh (1988). La emisión de axiones produce una pérdida de energía suplementaria a la que normalmente es considerada en la teoría estandar de evolución de enanas blancas. En consecuencia, la emisión de axiones acelera el enfriamiento de la enana blanca. Tal aceleración de la evolución tiene una consecuencia directa sobre las propiedades pulsacionales del objeto, produciendo un valor realzado del rate de cambio de períodos,  $\dot{P}$  (Isern et al. 1992). Por supuesto, debido a este mecanismo extra de enfriamiento, la estructura misma de la enana blanca es también afectada, pero en una manera tal que, como veremos más adelante, a una dado valor de  $T_{\text{eff}}$  corresponde un período  $P$  que es independiente del valor exacto de las pérdidas de energía por axiones. Este hecho afortunado nos permitirá identificar una única estructura representativa para G117-B15A independiente de los rates de emisión de axiones, y esto simplificará mucho el análisis.

### 3.4.2 Características observacionales de G117-B15A

G117-B15A es una estrella enana blanca DA típica; su carácter variable fue descubierto por McGraw & Robinson (1976) y desde entonces esta estrella variable ha sido monitoreada en forma continua. La masa y temperatura efectiva de G117-B15A han sido determinadas espectroscópicamente:  $M_{*} = 0.59 M_{\odot}$  y  $T_{\text{eff}} = 11620$  K (Bergeron et al. 1995). En un estudio más reciente, Koester & Allard (2000) han sugerido

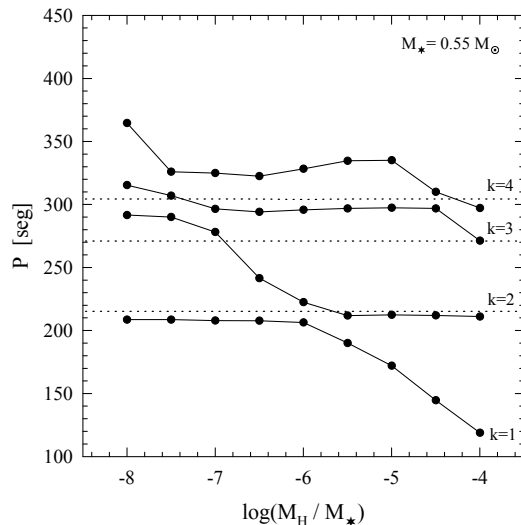


Figura 3.9: Igual que en la Figura 3.8, pero para el caso de un modelo de  $0.55 M_{\odot}$ . En este caso, el mejor ajuste a las observaciones se encuentra para  $k = 2, 3, 4$  y  $\log M_{\text{H}}/M_{*} = -4.0$ . Como este es el mejor ajuste que hemos encontrado con las observaciones, nos referiremos a este como el modelo fiducial. Otro ajuste aceptable es obtenido con  $k = 1, 2, 3$  y  $\log M_{\text{H}}/M_{*} = -7.0$  pero las diferencias entre los valores observados y calculados son mayores que en el caso previamente mencionado.

un valor algo menor para la masa, de  $0.53 M_{\odot}$ . Los períodos independientes observados son de 215.2, 271 y 304.4 seg (Kepler et al. 1982). Para el modo de 215.2 seg, Kepler et al. (2000) han medido el valor del rate de cambio del período, siendo  $\dot{P} = (2.3 \pm 1.4) \times 10^{-15} \text{s s}^{-1}$ .

Un importante aspecto es la identificación de modos, es decir, la asignación de los valores de  $\ell$  y  $k$  para los períodos observados. Robinson et al. (1995) encuentran que el período de 215.2 seg corresponde a un modo con  $\ell = 1$ . Siguiendo el trabajo de Bradley (1998b) nosotros consideraremos que los otros dos períodos de G117-B15A también corresponden a  $\ell = 1$  (Brassard et al. 1993; Fontaine & Brassard 1994), y también que los otros períodos presentes en la curva de luz de la estrella no son modos reales sino debidos a efectos no-lineales en la envoltura (Brassard et al. 1993). Con respecto al orden radial de los modos, hay dos posibles identificaciones: los períodos observados son dipolares ( $\ell = 1$ ) con  $k = 2$  (215.2 seg),  $k = 3$  (271 seg) y  $k = 4$  (304.4 seg) (Clemens 1993), o bien con  $k = 1$  (215.2 seg),  $k = 2$  (271 seg) y  $k = 3$  (304.4 seg) (Fontaine, Brassard & Wesemael 1994). Como veremos en la siguiente Sección, nuestro mejor ajuste a las observaciones está en acuerdo con la identificación de Clemens (1993).

### 3.4.3 Estructura de G117-B15A y la identificación de modos

Para nuestros cálculos adoptaremos los perfiles químicos internos de carbono-oxígeno de Salaris et al. (1997). Estos perfiles permanecerán fijos (a menos que se indique lo contrario). Sin embargo, con el objeto de ajustar las propiedades pulsacionales de

nuestros modelos al comportamiento observado en G117-B15A, consideraremos el espesor de la envolturas de hidrógeno y helio como parámetros libres. Esto responde al hecho de que el espesor de la capa de hidrógeno depende del momento exacto en el cual el progenitor de la enana blanca se aparta de la fase de pulsos térmicos en la AGB a través de la acción de pérdida de masa (ver, por ejemplo, Iben 1984). Otro importante factor es la pendiente de los perfiles químicos de las capas externas, en particular en las interfases de helio-hidrógeno y carbono-helio. La forma de estas transiciones de composición química tienen una importante influencia sobre las propiedades pulsacionales de las enanas blancas DA, a través del término  $B$  de Ledoux de la frecuencia de Brunt-Väisälä, y esto puede conducir consecuentemente al efecto de *mode trapping* (ver Brassard et al. 1992ab y el Capítulo 6 de esta Tesis). Aquí adoptaremos formas Gaussianas para las interfases químicas con el objeto de simplificar los cálculos.

Para nuestros propósitos aquí, hemos buscado un modelo de enana blanca con la temperatura efectiva y masa observadas en G117-B15A que ajuste *simultáneamente* los tres períodos observados lo mas cercanamente posible. En la búsqueda de ese modelo hemos considerado los siguientes rangos de masa estelar (dadas las incertezas de su determinación observacional), la masa de helio y la masa de hidrógeno:

$$0.50 \leq M_*/M_\odot \leq 0.65$$

$$-3 \leq \log M_{\text{He}}/M_* \leq -2$$

$$-8 \leq \log M_{\text{H}}/M_* \leq -4$$

También hemos considerado diferentes espesores para las interfases helio-hidrógeno y carbono-helio. Definiendo la coordenada masa como  $q = \log(1 - M_r/M_*)$ , y  $\Delta q$  como el espesor de la interfase, hemos adoptado los siguientes valores razonables:

$$-0.8 \leq \Delta q_{\text{H-He}} \leq -0.4$$

$$-0.8 \leq \Delta q_{\text{He-C}} \leq -0.2$$

En las Figuras 3.8-3.10 comparamos los períodos teóricos de los modos dipolares ( $\ell = 1$ ) con  $k = 1, 2, 3$ , y  $4$  con aquellos observados en G117-B15A. Para construir estas figuras hemos considerado modelos con  $T_{\text{eff}} = 11620$  K, y previamente ajustado el resto de las características a nuestros valores fiduciales ( $\log M_{\text{He}}/M_* = -2$ ,  $\Delta q_{\text{H-He}} = -0.8$ , y  $\Delta q_{\text{He-C}} = -0.4$ ) excepto el rasgo más crítico, esto es, la masa de la envoltura de hidrógeno. Al calcular estos ajustes no hemos considerado la emisión de axiones. En el caso de modelos de  $0.50 M_\odot$  existe un buen ajuste correspondiente a modos con  $k = 1, 2$ , y  $3$  con  $\log M_{\text{H}}/M_* = -6.6$ . En el caso de un modelo de  $0.55 M_\odot$  encontramos que el mejor ajuste corresponde a modos con  $k = 2, 3$ , y  $4$  y  $\log M_{\text{H}}/M_* = -4.0$ . Aún hay otro ajuste aceptable para  $k = 1, 2$ , y  $3$  y  $\log M_{\text{H}}/M_* = -7.0$ , aunque el ajuste previamente mencionado puede ser considerado sin duda mucho mejor. En el caso de modelos de  $0.60 M_\odot$  no hemos encontrado ningún ajuste satisfactorio para ninguna de las fracciones de hidrógeno consideradas. En este punto debemos mencionar que hemos considerado también el caso de modelos de  $0.65 M_\odot$  (no graficados). Para este elevado valor de la masa estelar no hemos encontrado ningún ajuste satisfactorio.



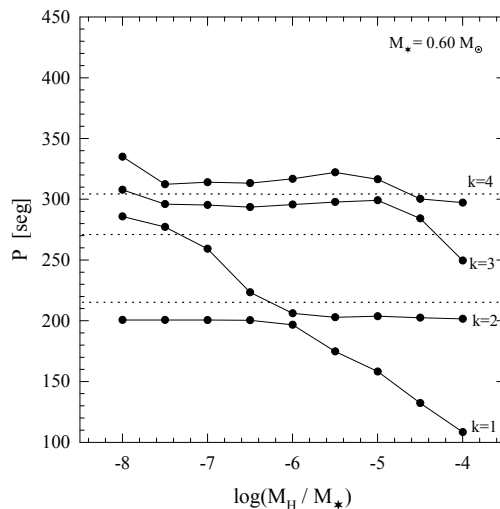


Figura 3.10: Igual que en la Figura 3.8, pero para el caso de un modelo de  $0.60 M_{\odot}$ . En este caso encontramos que las observaciones no son bien ajustadas por ninguna de las fracciones de hidrógeno consideradas. Esto sugiere, de acuerdo con lo encontrado por otros autores (ver texto), que la masa de esta estrella es más baja que el valor considerado en esta figura.

Como hemos explicado antes, otro parámetro libre es el espesor de la envoltura de helio. Aquí hemos explorado la posibilidad de envolturas más finas de helio ( $\log M_{\text{He}}/M_{*} < -3.0$ ) para todas las masas consideradas antes. Envolturas de helio más gruesas son poco probables, de acuerdo a recientes estudios de estrellas de AGB (Domínguez et al. 1999). En todos los casos los ajustes a las observaciones resultaron ser inaceptables, y los hemos descartado.

Estos resultados claramente indican que la masa de G117-B15A debería ser próxima a  $0.55 M_{\odot}$  y que la fracción de masa de hidrógeno presente en la estrella debería ser cercana a  $M_{\text{H}}/M_{*} = 10^{-4}$ . En efecto, nuestro valor derivado para la masa está comprendido entre las determinaciones espectroscópicas de Bergeron et al. (1995) ( $0.59 M_{\odot}$ ) y las de Koester & Allard (2000) ( $0.53 M_{\odot}$ ). También es notable que nuestro mejor ajuste es muy similar a uno de los presentados por Bradley (1998b) considerando un modo con  $\ell = 1$  y  $k = 2$  para el período de 215.2 seg, aunque este autor encuentra una masa estelar de  $\sim 0.60 M_{\odot}$ . También, es notable que la masa de hidrógeno que hemos encontrado en G117-B15A está de acuerdo con las predicciones de la teoría de evolución estelar.

En resumen, el modelo que provee el mejor ajuste a las observaciones ( $M_{*} = 0.55 M_{\odot}$ ;  $k = 2, 3, 4$ ;  $\log M_{\text{H}}/M_{*} = -4.0$ ;  $\log M_{\text{He}}/M_{*} = -2$ ,  $\Delta q_{\text{H-He}} = -0.8$ , y  $\Delta q_{\text{He-C}} = -0.4$ ) será referido como nuestro *modelo fiducial*. En la Figura 3.11 mostramos los perfiles de composición química del modelo fiducial.

Otro aspecto relevante es estimar cuán cercanos están nuestros períodos teóricos y los períodos observados en G117-B15A. Las diferencias entre los períodos teóricos y los observados son 4.63 seg (para  $k = 2$ ), 0.58 seg (para  $k = 3$ ) y 7.26 seg (para  $k = 4$ ), dando así una diferencia promedio de  $\sim 4$  seg, lo cual está en buen acuerdo con los resultados de Bradley (1998b). Este es un valor razonable ya que muchos de los detalles de los cálculos de pulsación pueden influenciar los períodos calculados a

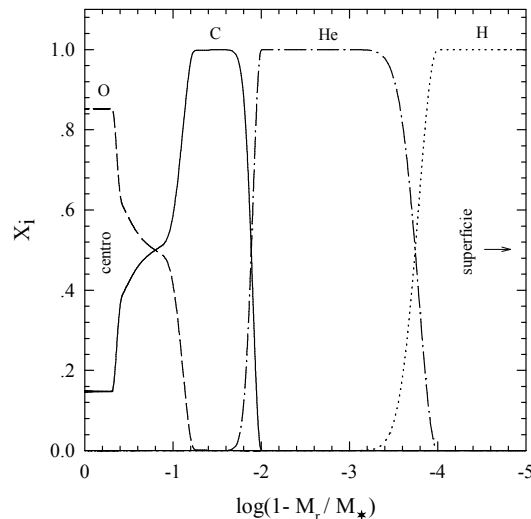


Figura 3.11: La composición química interna de nuestro modelo fiducial.

un nivel de varios segundos.

A continuación exploraremos los efectos resultantes de variar las características del modelo manteniendo fijo el perfil fiducial. Restringiremos el análisis al modo  $\ell = 1$ ,  $k = 2$ , ya que éste va a ser el modo empleado para obtener la masa de los axiones. En la Figura 3.12 mostramos el período del modo  $\ell = 1$ ,  $k = 2$  que mejor representa al período observado de 215.2 seg (panel superior) y la derivada temporal del mismo modo (panel inferior) en términos de la  $T_{\text{eff}}$ . Notemos el incremento monótono del período de este modo como consecuencia del enfriamiento de la estrella. Notemos también que dado que en estos cálculos no se ha incluido la emisión de axiones, el valor teórico de  $\dot{P}$  es un límite inferior. A partir de la Figura 3.12 concluimos que los errores en la determinación de  $T_{\text{eff}}$  no inducen grandes errores ni en la identificación del modo ni en el valor calculado de  $\dot{P}$ .

Ahora consideremos modelos con el perfil químico fiducial y la misma  $T_{\text{eff}}$  pero para diferentes masas estelares. En la Figura 3.13 ilustramos  $P$  y  $\dot{P}$  como función de la masa. Cuando consideramos valores mayores para la masa, y así mayores gravedades, la frecuencia de Brunt-Väisälä se incrementa (ver Ecuación 3.21). Como consecuencia todo el espectro de frecuencias se incrementa, y en consecuencia el período del modo considerado decrece. Al mismo tiempo, cuanto mayor es la masa estelar menor es la superficie radiante, con lo cual la capacidad calorífica es mayor. Como estamos a una  $T_{\text{eff}}$  fija, modelos con mayor masa tienen menores luminosidades y se enfrían más lentamente con menores valores de  $\dot{P}$ .

Otra posible fuente de incertezas es el rate de la reacción  $^{12}\text{C}(\alpha, \gamma)^{16}\text{O}$ , que determina la estratificación dentro del núcleo de carbono-oxígeno de la enana blanca. Es interesante tener una idea cuantitativa de cómo la incerteza en este rate afectaría nuestros resultados. Para tal propósito, hemos considerado diferentes estratificaciones internas de carbono-oxígeno manteniendo la misma forma de los perfiles fiduciales pero con diferentes abundancias centrales de carbono,  $X_C$ , desde  $X_C = 0.0$  hasta  $X_C = 1.0$ . Tales perfiles son mostrados con líneas de puntos en la Figura 3.14 junto con el perfil fiducial, el cual es mostrado con línea sólida.

En la Figura 3.15 mostramos el período del modo  $\ell = 1$ ,  $k = 2$  y su  $\dot{P}$  para un modelo de enana blanca de  $0.55 M_{\odot}$  y una  $T_{\text{eff}}$  de 11620 K como función de su abundancia central de carbono. Notese que cambiando el perfil de carbono en el núcleo

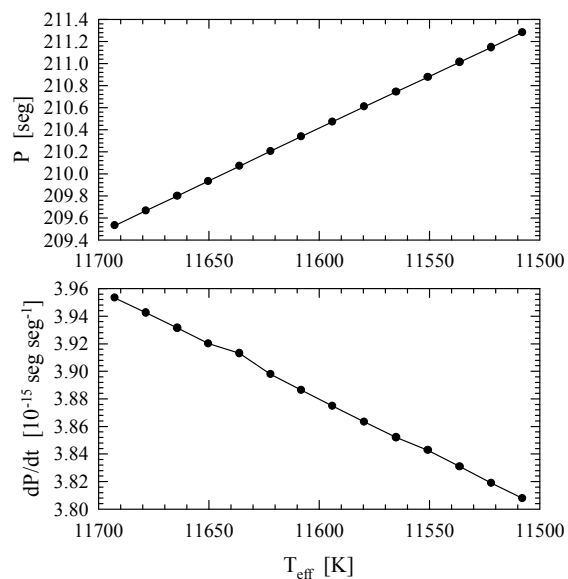


Figura 3.12: Panel superior: El período del modo  $\ell = 1$ ,  $k = 2$  del modelo fiducial en función de  $T_{\text{eff}}$ . El intervalo en  $T_{\text{eff}}$  ha sido elegido correspondiendo a la temperatura efectiva de G117-B15A  $\pm 200$  K. Los puntos corresponden a los modelos calculados. Panel inferior: igual que en el panel superior, pero para la derivada temporal del período.

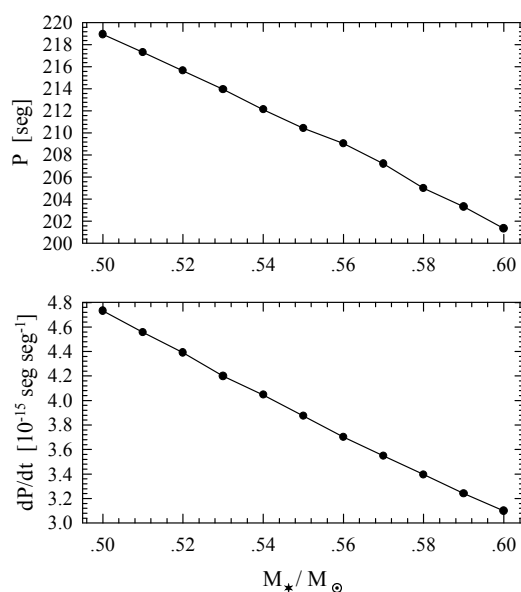


Figura 3.13: Panel superior: El período del modo  $\ell = 1$ ,  $k = 2$  para modelos de enanas blancas con el perfil fiducial y  $T_{\text{eff}} = 11620$  K en función de la masa estelar. Los modelos calculados son mostrados con puntos. Panel inferior: Igual que en el panel superior pero para la derivada temporal del período.

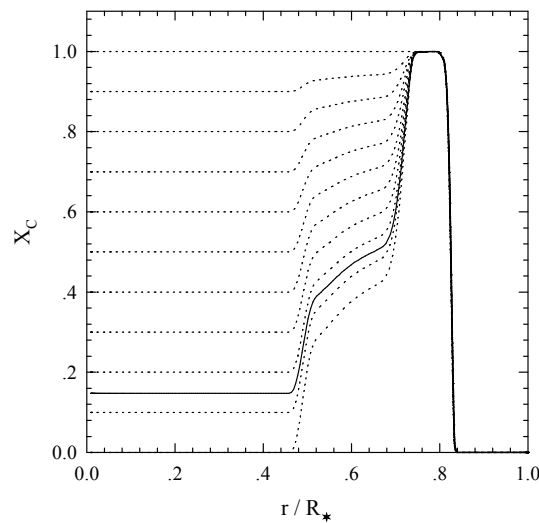


Figura 3.14: Perfil de la abundancia de carbono en función del radio estelar para modelos con abundancias centrales de carbono de  $X_C = 0.0, 0.1, \dots, 1.0$ . Las líneas de trazos corresponden a los perfiles escaleados mientras que la línea sólida corresponde al perfil fiducial de carbono.

estelar induce un muy leve cambio de  $\approx 4\%$  en el período del modelo fiducial. El cambio en el período es debido principalmente a la siguiente razón: menores (mayores) abundancias centrales de carbono producen abruptas (suaves) pendientes en el borde externo del núcleo degenerado en la base de la zona de transición, provocando diferentes configuraciones de las autofunciones. Esto es importante porque en nuestros modelos el modo con  $P = 215.2$  seg tiene grandes amplitudes en tal interfase. Como consecuencia, cualquier cambio en la estructura de esta interfase afectará la estructura del modo y así su período. Con respecto al  $\dot{P}$ , como es esperable, la mayor abundancia central de carbono conduce a un menor valor de  $\dot{P}$ . Esto se debe a que la capacidad calorífica por unidad de masa es inversamente proporcional al número atómico promedio: cuanto más abundante el carbono central respecto del oxígeno mayor será la capacidad calorífica, y más lento el enfriamiento de la estrella. Esto se traduce en menores valores de  $\dot{P}$ , tal como se aprecia en el panel inferior de la Figura 3.15. Notemos sin embargo que, aún considerando casos extremos, la variación en  $\dot{P}$  es muy modesta:  $\approx 7\%$ . Así, nuestros resultados no son severamente afectados por nuestra elección del rate de la reacción  $^{12}\text{C}(\alpha, \gamma)^{16}\text{O}$ .

Luego de examinar todas las posibles incertezas debemos justificar la discrepancia entre el valor medido del rate de cambio del período de 215.2 seg,  $\dot{P} = (2.3 \pm 1.4) \times 10^{-15} \text{ss}^{-1}$ , y su valor calculado para nuestro modelo fiducial,  $\dot{P} = 3.9 \times 10^{-15} \text{ss}^{-1}$ . De hecho nuestro valor calculado (el cual por otro lado está en buen acuerdo con el resultado obtenido por Bradley 1998b) es levemente mayor que la barra de error  $1\sigma$ . La diferencia entre nuestro valor teórico y el valor observado puede deberse al procedimiento de identificación de modos y a las determinaciones observacionales (como la  $T_{\text{eff}}$  y la masa) de G117-B15A. Otra fuente de incerteza que puede contribuir a la discrepancia del  $\dot{P}$  es el movimiento propio, el cual puede contribuir al  $\dot{P}$  observado en  $\dot{P}_{\text{pm}} = (9.2 \pm 0.5) \times 10^{-16} \text{ss}^{-1}$  (Kepler et al. 2000).

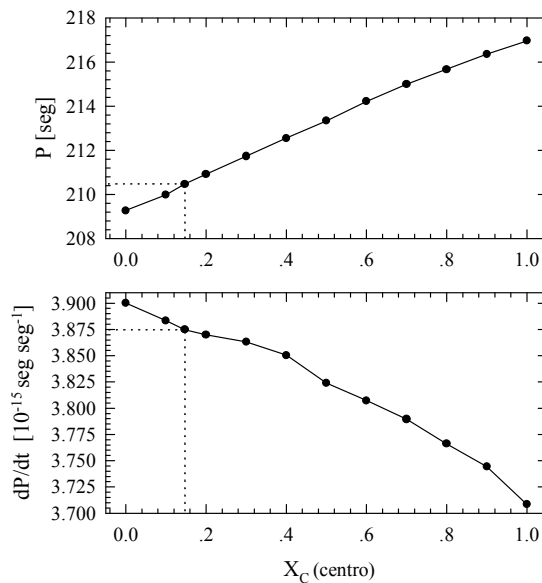


Figura 3.15: Panel superior: El período del modo  $\ell = 1$ ,  $k = 2$  para modelos de enanas blancas de  $0.55 M_{\odot}$  y una  $T_{\text{eff}}$  of 11620 K en función de la abundancia central de carbono. Las líneas de trazos señalan la abundancia y el período correspondientes al modelo fiducial. Panel inferior: Igual que en el panel superior, pero para la derivada temporal del período.

### 3.4.4 El efecto de la emisión de axiones

En esta sección vamos a calcular el efecto de la emisión de axiones sobre la escala de tiempo evolutiva de G117-B15A y sus consecuencias sobre el valor de  $\dot{P}$  para el modo  $\ell = 1$ ,  $k = 2$ . Para este propósito hemos calculado un conjunto de secuencias evolutivas adicionales con diferentes masas de los axiones (cabe aclarar que el rate de emisión de acciones es proporcional a la masa de los axiones) y considerado las características pulsacionales en el rango relevante de  $T_{\text{eff}}$ . Es importante aclarar que en todos los cálculos evolutivos incluyendo la emisión de axiones, los efectos transitorios debidos a la emisión de estas partículas ocurrían mucho antes de que los modelos alcanzaran temperaturas efectivas cercanas a la de G117-B15A. Considerando un amplio rango en la masa de los axiones, hemos encontrado que los períodos de los modos  $\ell = 1$ ,  $k = 2, 3$ , y 4 muestran muy pequeñas variaciones. Esto se aprecia en el panel superior de la Figura 3.16, donde graficamos los períodos de estos modos en función de la masa considerada para los axiones. Esta es una situación afortunada que nos permite primero identificar la estructura del modelo fiducial sin axiones y luego incorporar la emisividad de axiones. Si este no fuese el caso, deberíamos encontrar una estructura representativa de G117-B15A por cada valor de la masa de los axiones, complicando extremadamente el análisis. En contraste con lo que sucede con los períodos, el valor de  $\dot{P}$  para los tres modos identificados es extremadamente sensible a la masa de los axiones, como puede apreciarse en el panel inferior de la Figura 3.16. Por ejemplo, para el modo de 215.2 seg y para el rango de masa de los axiones considerado aquí ( $0 \leq m_{\text{ax}}/\cos^2 \beta \leq 32$  meV),  $\dot{P}$  crece por un factor de aproximadamente 18. El  $\dot{P}$  correspondiente al modo con  $k = 3$  es el menor de los tres modos, lo cual es debido a que este modo está atrapado en la envoltura externa de hidrógeno (ver Bradley, Winget & Wood (1992) para una justificación física).

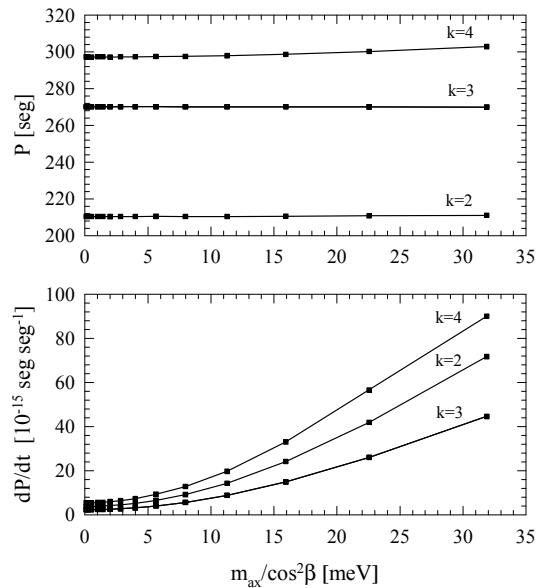


Figura 3.16: Panel superior: Los períodos de los modos  $\ell = 1$ ,  $k = 2, 3$ , y  $4$  correspondientes al modelo fiducial a una  $T_{\text{eff}}$  de 11620 K en función de la masa de los axiones. Nótese que, a pesar de la aceleración del proceso de enfriamiento inducido por la emisión de axiones, el período de los modos no cambia significativamente. Panel inferior: Igual que en el panel superior, pero para el  $\dot{P}$ . Notemos que para altos valores de la masa de los axiones, dado que el enfriamiento es fuertemente acelerado, el valor de  $\dot{P}$  muestra un crecimiento muy pronunciado.

### 3.4.5 La masa de los axiones

Finalmente, en la Figura 3.17 mostramos el valor de  $\dot{P}$  del modo  $\ell = 1$ ,  $k = 2$  del modelos fiducial a  $T_{\text{eff}} = 11620$  K en función de la masa de los axiones. El valor observacional de Kepler et al. (2000) es también mostrado con una línea de trazos. También con líneas de trazos son mostrados los errores observacionales a  $1\sigma$  y  $2\sigma$  y el valor de la determinación previa de  $\dot{P}$  (Kepler et al. 1991). Ahora podemos encontrar un límite superior a la masa de los axiones imponiendo la condición de que el valor de  $\dot{P}$  debería ser más bajo que el observado más dos veces la desviación estandard, o sea, más bajo que  $5.1 \times 10^{-15} \text{s}^{-1}$ . Este procedimiento fija un límite superior sobre la masa de los axiones a un nivel de 95% de confianza. De la Figura 3.17 es claro que para que esto suceda la masa de los axiones debe ser menor que  $3.97 \cos^2 \beta$  meV (Nótese que si consideramos el valor previo de  $\dot{P}$  de Kepler et al. 1991, el límite superior debería ser  $\approx 10 \cos^2 \beta$  meV en buen acuerdo con los resultados de Isern et al. 1992).

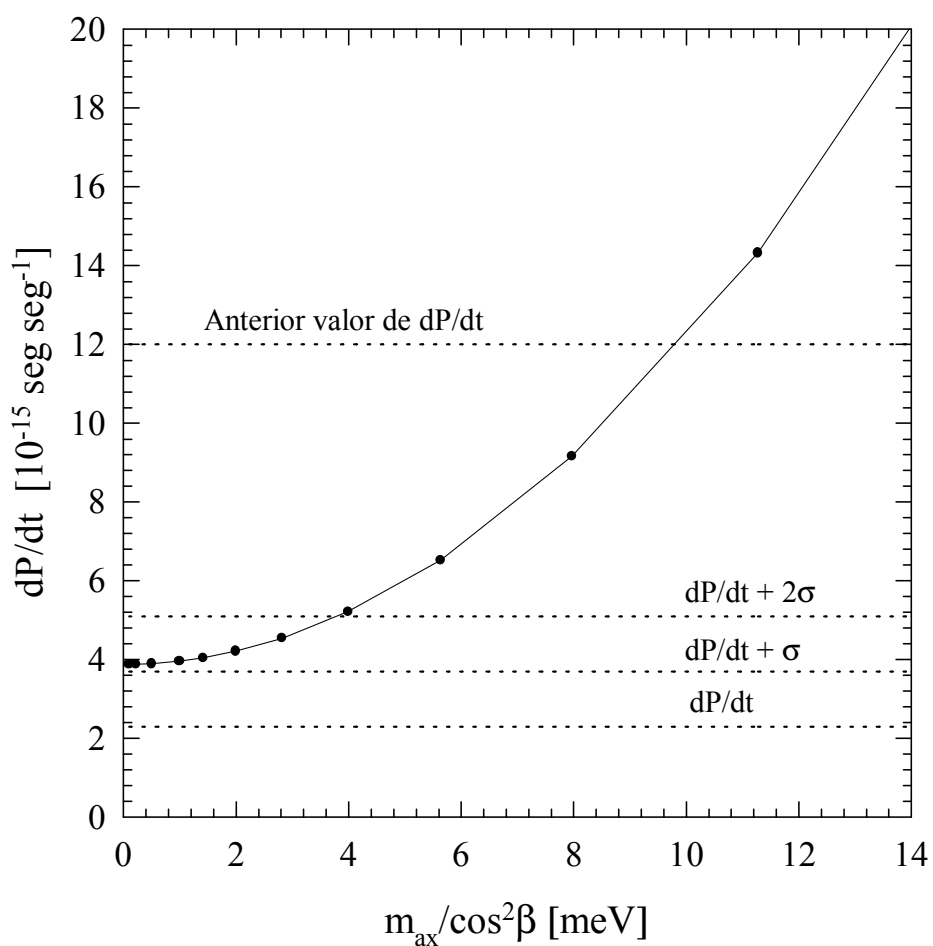


Figura 3.17: La derivada temporal del período del modo  $\ell = 1$ ,  $k = 2$  del modelo fiducial a  $T_{\text{eff}} = 11620 \text{ K}$ . Las líneas horizontales a trazos indican el valor observado de  $\dot{P}$ ,  $\dot{P} + \sigma$ , y  $\dot{P} + 2\sigma$  de Kepler et al. (2000). También mostramos el valor previo de  $\dot{P}$  derivado por Kepler et al. (1991). Si consideramos dos desviaciones estandar a partir del valor observacional, concluimos que las observaciones son compatibles con una masa de los axiones menor a  $3.97 \cos^2 \beta \text{ meV}$ .

# Capítulo 4

## La difusión y astrosismología de G117-B15A

Resultados publicados en el siguiente artículo:

- Time dependent diffusion in pulsating white dwarf stars: asteroseismology of G117B-15A, Benvenuto, Córscico, Althaus & Serenelli, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 332, 399, (2002)

La mayor parte de los estudios de pulsaciones de enanas blancas variables están basados en algunas simplificaciones. Una de tales simplificaciones está relacionada con el modelado del perfil en las transiciones de composición química. En tales regiones el equilibrio difusivo en la aproximación de *trace element* ha sido ampliamente empleado para inferir el perfil de la distribución química (ver Tassoul, Fontaine & Winget 1990), en la forma que ha sido detallada en el Capítulo 2.

Existen en la literatura varios estudios astrosismológicos de enanas blancas, en los cuales la estructura de períodos observados de un objeto particular es empleada para inferir la estructura interna de tal objeto. Ejemplos de tales estudios son aquellos de Winget et al. 1991; Fontaine et al. 1992; Pfeiffer et al. 1996; Bradley & Kleinman 1997; Bradley 1998b, 2001. El objetivo del presente Capítulo es llevar a cabo un estudio estructural de la variable DAV G117-B15A, cuyas características observables y sus rasgos pulsacionales han sido descritas en el Capítulo anterior. Para tal fin utilizaremos la estructura de períodos observados para encontrar un modelo de enana blanca que represente dicha estrella, en una manera similar a la realizada en el Capítulo anterior. Sin embargo, la intención aquí es llevar a cabo un ajuste de los períodos observados calculando modos  $g$  no-radiales sobre modelos evolutivos de enanas blancas en los que la *difusión de elementos dependiente del tiempo* es tenida en cuenta en el modelado de las interfases químicas (ver Capítulo 2). El valor de  $\log(M_{\text{H}}/M_*)$  será considerado como un parámetro libre, y consideraremos  $\log(M_{\text{He}}/M_*) = -2$ .

### 4.1 Detalles de los cálculos

Aquí hemos empleado el mismo código de evolución-pulsación descrito en el Capítulo 3. En particular, para los procesos de difusión hemos considerado sedimentación



Tabla 4.1: Valores de  $\log(M_{\text{H}}/M_*)$  para nuestros modelos a  $T_{\text{eff}} = 12500 \text{ K}$

$0.50M_{\odot}$	$0.55M_{\odot}$	$0.60M_{\odot}$	$0.525M_{\odot}$	$0.5375M_{\odot}$
-3.815	-3.862	-3.941	-3.831	-3.843
-4.193	-4.224	-4.249	-4.198	...
-4.679	-4.684	-4.692	...	...
-5.175	-5.177	-5.180	...	...
-5.671	-5.671	-5.672	...	...
-6.160	-6.158	-6.156	-6.159	...
-6.640	-6.633	-6.700	-6.634	...
-7.071	-7.047	-7.028	...	...
-7.423	-7.385	-7.349	...	...

gravitacional, y difusión térmica y química (ver Capítulo 2). La mayor parte de nuestros modelos evolutivos han sido divididos en más de 2000 puntos, mientras que para el cálculo de modos hemos empleado hasta 5000 puntos.

Con el objeto de comenzar los cálculos evolutivos hemos empleado la técnica de calentamiento artificial descrita en Althaus & Benvenuto (2000) (modelos descritos en la primer parte del Capítulo 2). Luego de algunos modelos no físicos, la estrella relaja a la secuencia correcta de enfriamiento de enana blanca. Es importante recalcar que la estrella relaja simultáneamente al perfil químico interno correcto, sin importar los detalles finos de la forma inicial de la interfase helio-hidrógeno de los modelos de partida, debido a los efectos de la difusión dependiente del tiempo. De hecho, la estructura y los perfiles químicos son físicamente plausibles mucho antes de que la estrella alcance el rango de  $T_{\text{eff}}$  correspondiente a G117-B15A.

Específicamente hemos comenzado los cálculos con modelos de  $\log(L/L_{\odot}) \approx 2.05$ ,  $\log T_{\text{eff}} \approx 4.46$  y masas de  $0.50$ ,  $0.55$ , y  $0.60 M_{\odot}$  (junto con dos secuencias suplementarias  $0.525$  y  $0.5375 M_{\odot}$ ). Los valores de  $\log(M_{\text{H}}/M_*)$  presentes en los modelos después de evolucionar a lo largo de la rama de enfriamiento por debajo de los  $T_{\text{eff}} = 12500 \text{ K}$  son aquellos dados en la Tabla 4.1. La composición química considerada para el núcleo de carbono-oxígeno es aquella dada por Salaris et al. (1997). Con el objeto de obtener diferentes valores de  $\log(M_{\text{H}}/M_*)$  hemos comenzado a partir del mayor valor de  $\log(M_{\text{H}}/M_*)$  y simplemente reemplazado  $^1\text{H}$  por  $^4\text{He}$  en la base de la envoltura de hidrógeno. Mencionemos aquí que los modelos se tornan físicamente adecuados para describir una enana blanca a  $\log(L/L_{\odot}) \approx 1.4$ ,  $\log T_{\text{eff}} \approx 4.83$ , mucho antes de las condiciones relevantes en las DAVs.

## 4.2 Perfiles químicos y cantidades pulsacionales

Dado que el perfil químico del hidrógeno en las capas superficiales es uno de los ingredientes claves en la determinación de los modos  $g$  de enanas blancas DAV, en la Figura 4.1 mostramos con líneas la base de las envolturas de hidrógeno para nuestro conjunto de modelos de  $0.55 M_{\odot}$  en la etapa de ZZ Ceti. En la misma figura mostramos también los perfiles predichos por el tratamiento standard de equilibrio difusivo en la aproximación de *trace element* con líneas delgadas.

Ahora examinemos la influencia de nuestros perfiles químicos sobre la frecuencia

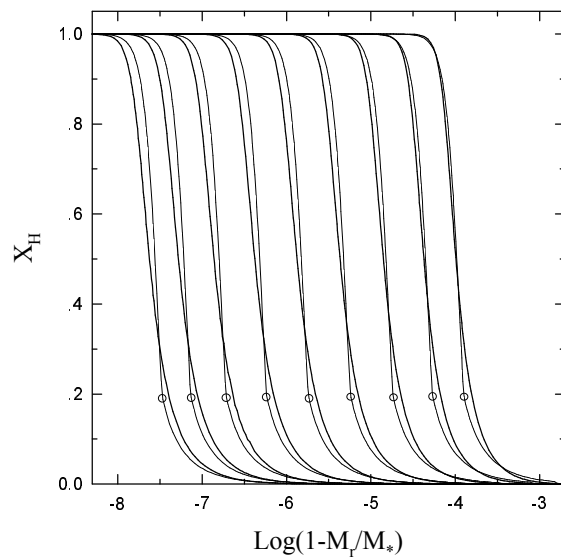


Figura 4.1: El perfil de la base de la envoltura de hidrógeno para nuestro conjunto de modelos de  $0.55 M_{\odot}$  a  $T_{\text{eff}}=12500$  K representados por líneas sólidas. Para los correspondientes valores de  $\log(M_{\text{H}}/M_{*})$ , ver Tabla 4.1. Las líneas finas representan los perfiles correspondientes al tratamiento estandar de equilibrio difusivo en la aproximación de *trace element* para los mismos valores de  $\log(M_{\text{H}}/M_{*})$ . Nótese que, mientras que para envolturas gruesas de hidrógeno los perfiles son bastantes similares, hay grandes diferencias en el caso de envolturas delgadas. Los círculos indican el cambio en la pendiente en los perfiles calculados con equilibrio difusivo en la aproximación de *trace element*.

de Brunt-Väisälä (calculada de acuerdo a la Ecuación 3.21), una cantidad clave de las pulsaciones en enanas blancas. En la Figura 4.2 mostramos el cuadrado de la frecuencia de Brunt-Väisälä y el término de Ledoux B (Ecuación 3.22) para modelos de  $0.55 M_{\odot}$  con  $\log T_{\text{eff}} \approx 4.096$  y todos los valores de  $M_{\text{H}}/M_{*}$  considerados. También mostramos en un panel la frecuencia de Brunt-Väisälä en la interfase helio-hidrógeno para el caso de la envoltura de hidrógeno más gruesa de acuerdo a la difusión dependiente del tiempo y a la suposición de equilibrio difusivo en la aproximación de *trace element* (línea gruesa y fina respectivamente). Con el objeto de mostrar la correspondencia de la estructura de estas funciones con los perfiles químicos internos de la estrella hemos incluido en el panel superior las curvas representando las abundancias de  ${}^4\text{He}$  y  ${}^{12}\text{C}$ .

El término de Ledoux  $B$  tiene una estructura que permanece invariante en el núcleo estelar bajo cambios en  $M_{\text{H}}/M_{*}$ . Desde el centro hacia afuera, los tres picos son debidos a abruptas pendientes en el perfil de carbono. Los primeros dos son debidos a la estructura de la interfase carbono-oxígeno mientras el otro es debido a la interfase helio-carbono. Contrariamente al comportamiento interno del término de Ledoux, el otro pico, debido a la interfase hidrógeno-helio, es notablemente modificada, no sólo en posición sinó también en altura. Nótese que cuanto más bajo es el valor de  $M_{\text{H}}/M_{*}$  más fino es el pico (ver Brassard et al. 1991 y Tassoul et al. 1990 para una comparación de la forma de  $B$  y Bradley 1996 para el perfil de la frecuencia de Brunt-Väisälä).

### 4.3 Resultados astrosismológicos

La identificación de modos que hemos adoptado para esta estrella es la misma que la empleada en el Capítulo anterior. Al calcular los modos  $g$  de nuestros modelos, sólo hemos considerado modos con  $\ell = 1$  y orden radial  $k = 1, \dots, 4$ . Ordenes radiales más altos corresponden, para nuestros valores de la masas, a períodos demasiado largos comparados con aquellos observados y no serán considerados aquí.

Con el objeto de buscar un ajuste a las observaciones consideremos una función  $\psi$  definida como

$$\psi = \log \sum_{i=1}^3 \left[ 1 - \frac{P_i^C}{P_i^O} \right]^2, \quad (4.1)$$

donde  $P_i^O$  y  $P_i^C$  son los períodos  $i$ -ésimos observados y calculados respectivamente. Para el caso de G117-B15A,  $P_i^O = 215.2, 271$  y  $304.4$  s. Como resultado de los cálculos pulsacionales tenemos los valores de los períodos para  $k = 1, \dots, 4$ . Entonces, considerando las dos posibles (razonables) identificaciones de los modos observados (esto es,  $P_i^O$  correspondiendo a  $k = 1, 2, 3$ , de aquí en más caso **A**, y  $P_i^O$  correspondiendo a  $k = 2, 3, 4$ , de aquí en más caso **B**) podemos calcular la función  $\psi$  en términos de la temperatura efectiva de la estrella para cada una de las secuencias consideradas. Obviamente en el caso de un ajuste exacto, tendríamos  $\psi \rightarrow -\infty$ . Así, el criterio que consideraremos para seleccionar el mejor modelo para representar G117B-15A es simplemente buscar el mínimo de la función  $\psi$  considerando el conjunto completo de modelos.

En la Figura 4.3 mostramos  $\psi$  en función de  $T_{\text{eff}}$  para el caso del conjunto de modelos con  $0.50 M_{\odot}$ . En esta figura el panel de la izquierda designado como **A** corresponde a la identificación de los modos observados con  $k = 1, 2, 3$  mientras que el panel de la derecha **B** corresponde a la otra identificación que consideramos: modos  $k = 2, 3, 4$ . Como ha sido encontrado por Bradley (1998b), para los casos **A** y **B** los mejores ajustes a las observaciones son encontrados para modelos con dos valores de  $M_{\text{H}}/M_{\star}$  muy diferentes. Considerando el caso **A**, encontramos el mejor ajuste con una envoltura fina de hidrógeno ( $\log(M_{\text{H}}/M_{\star}) = -6.16$ ) y en el caso **B** el mejor ajuste se encuentra para una envoltura de hidrógeno más gruesa:  $\log(M_{\text{H}}/M_{\star}) = -3.81$ . Es notable que el mínimo encontrado en el caso **A** es muy profundo, correspondiendo a una masa y temperatura efectiva ( $T_{\text{eff}} \approx 11400$  K) algo mas baja que lo correspondiente a las últimas determinaciones de estos parámetros para G117B-15A.

Si incrementamos la masa estelar a  $0.55 M_{\odot}$ , el comportamiento de la función  $\psi$  cambia notablemente (ver Figura 4.4). A pesar de que en el caso **A** el mejor ajuste se dá para  $\log(M_{\text{H}}/M_{\star}) = -6.63$ , éste corresponde sin embargo a una temperatura efectiva demasiado baja (fuera de la banda de inestabilidad de las DAVs). En el caso **B** el mejor ajuste es de nuevo encontrado por el modelo con la envoltura más gruesa de hidrógeno, pero de nuevo ocurre a un valor de  $T_{\text{eff}}$  algo bajo.

Finalmente, en Figura 4.5 mostramos  $\psi$  para modelos con  $0.60 M_{\odot}$ . Aquí es claro que en ambos casos los ajustes son mucho peores que para los casos de masas estelares mas bajas. Así, los resultados mostrados hasta aquí sugieren que la masa astrosismológica de G117-B15A debería estar entre  $0.50 M_{\odot}$  y  $0.55 M_{\odot}$ . Además, la única masa factible para el caso **A** parece ser de  $0.50 M_{\odot}$ , ya que mayores valores dan lugar a ajustes más pobres.

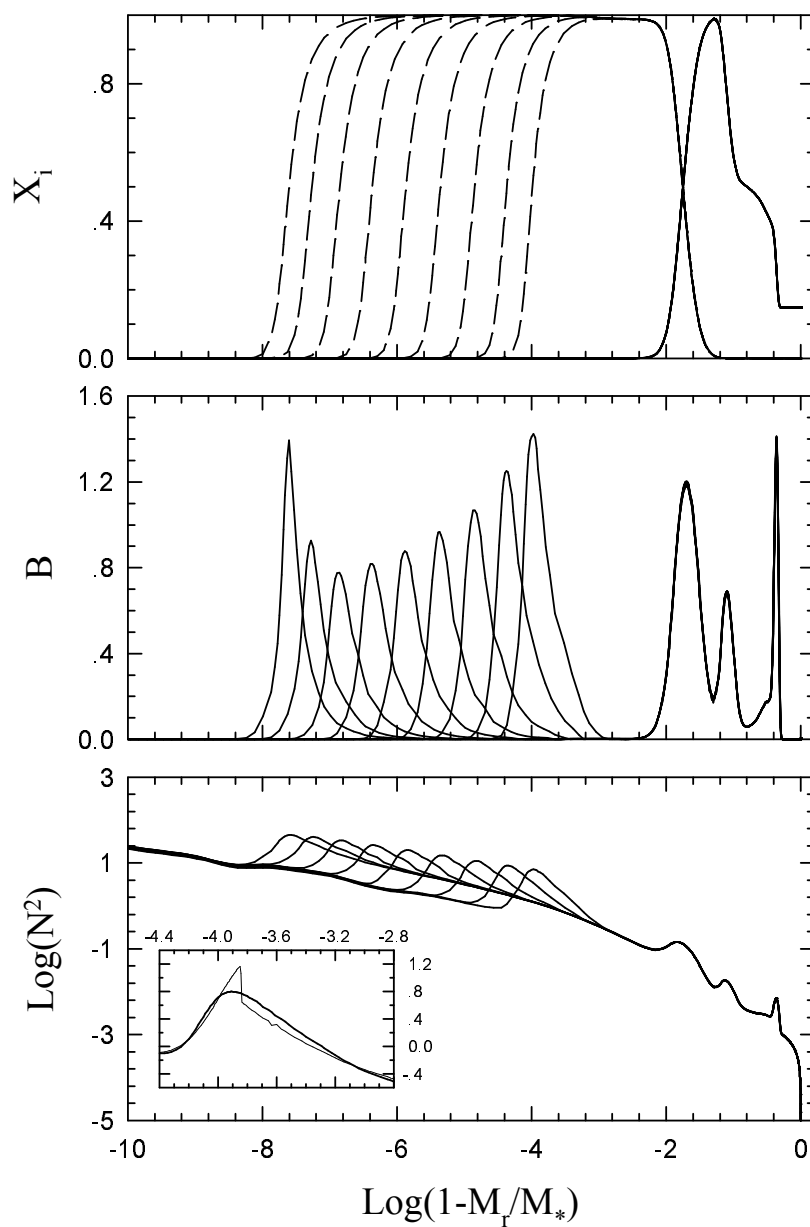


Figura 4.2: Algunas de las principales características de nuestros modelos para el caso de una masa de  $0.55 M_{\odot}$ . Panel superior: perfiles de carbono (líneas sólidas) y helio (líneas de trazos). Panel medio: El término de Ledoux de la frecuencia de Brunt-Väisälä. Panel inferior: El logaritmo del cuadrado de la frecuencia de Brunt-Väisälä.

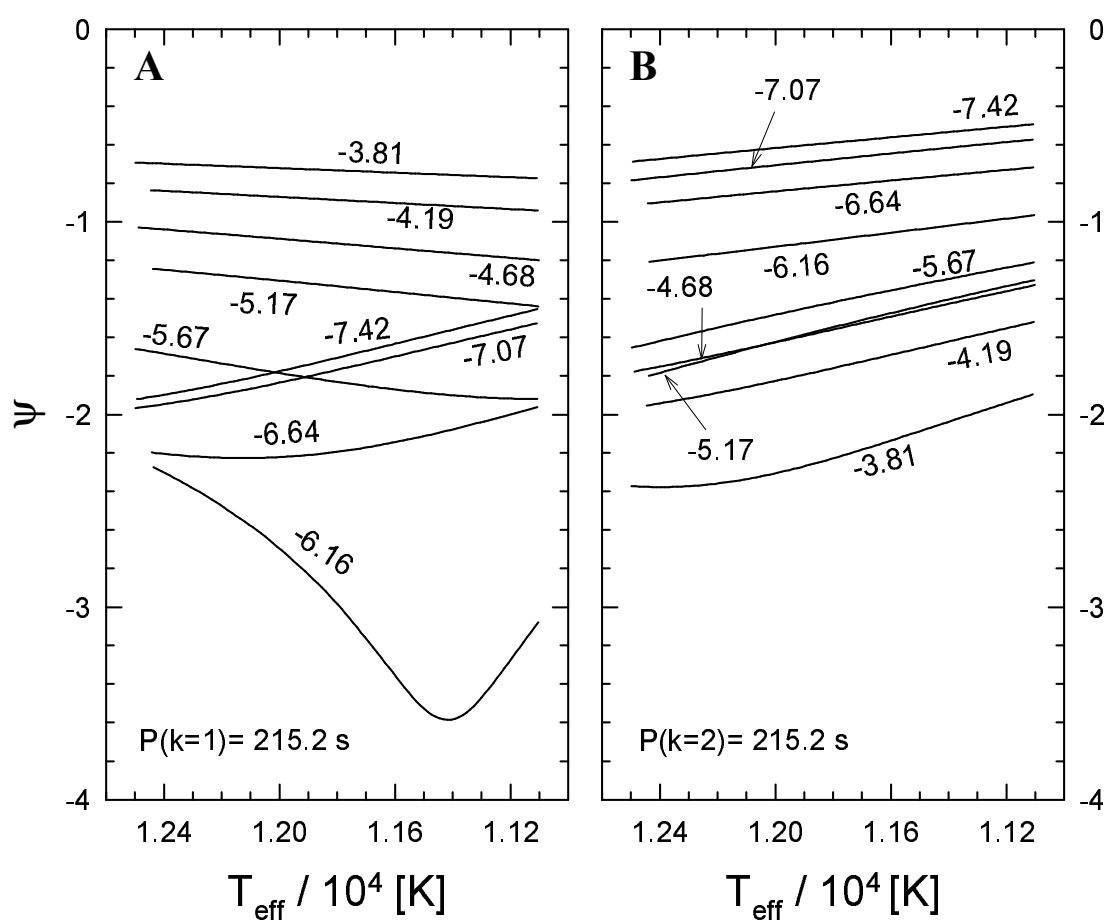


Figura 4.3: El valor de  $\psi$  en función de la temperatura efectiva de la estrella para el caso de un modelo de enana blanca de  $0.50 M_{\odot}$ . Las curvas son etiquetadas con los respectivos valores de  $\log(M_{\text{H}}/M_{*})$ . **A** y **B** significan las identificaciones de los modos observados con  $k = 1, 2, 3$  y  $k = 2, 3, 4$  respectivamente. Nótese el profundo mínimo de  $\psi$  para el caso **A** a  $T_{\text{eff}} = 11400$  K.

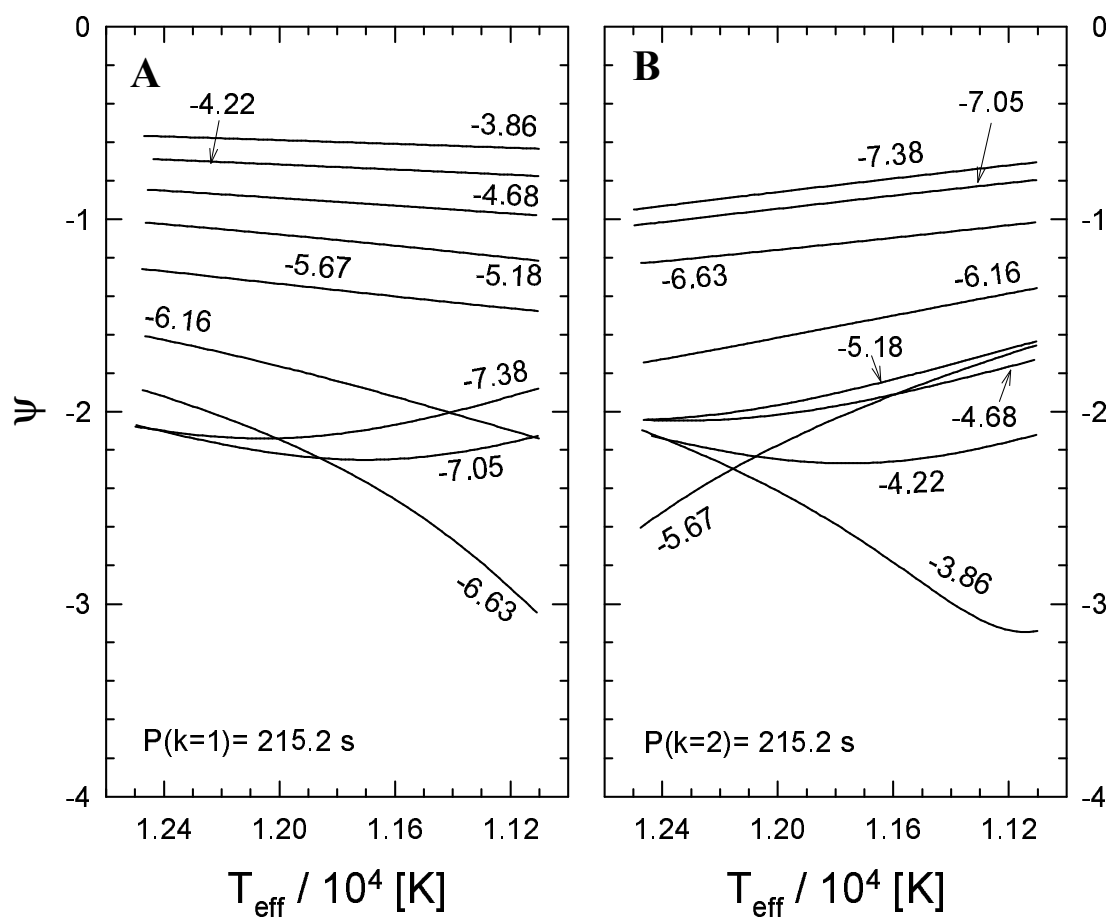


Figura 4.4: Igual que en Figura 4.3 pero para el caso de modelos de enanas blancas de  $0.55 M_{\odot}$ . Para este valor de la masa estelar, los mínimos correspondientes a ambas identificaciones de modos se han desplazado al borde frío del intervalo en  $T_{\text{eff}}$  considerado.

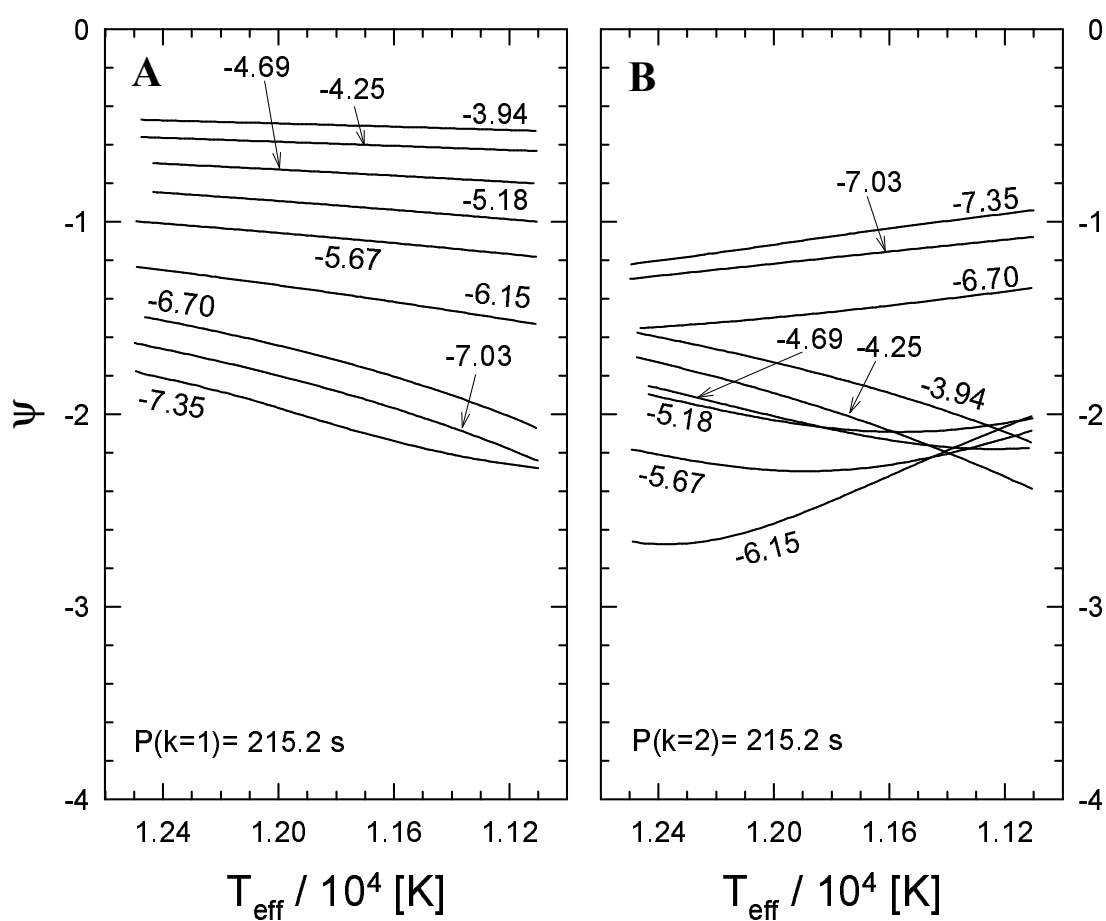


Figura 4.5: Igual que en Figura 4.3 pero para el caso de modelos de enanas blancas de  $0.60 M_{\odot}$ . Para este valor de la masa estelar, los valores de la función  $\psi$  son mayores que en los casos de las otras masas consideradas. Así, la masa de G117-B15A debería ser menor a  $0.60 M_{\odot}$ .

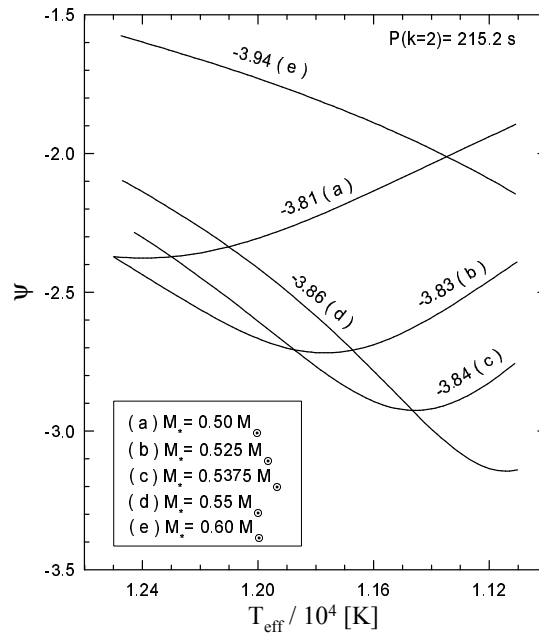


Figura 4.6: El valor de  $\psi$  en función de la temperatura efectiva de la estrella considerando el caso **B** para los valores más grandes de  $\log(M_{\text{H}}/M_*)$ .

Ahora analicemos los resultados correspondientes al caso **B** mas detenidamente, centrando nuestra atención en modelos con las envolturas de hidrógeno más gruesas. A partir de la Figura 4.3b puede notarse que en el caso de un modelo de  $0.50 M_{\odot}$ , el ajuste es mejor para  $T_{\text{eff}}$  crecientes. Sin embargo, notemos que (Figura 4.4b) para el modelo de  $0.55 M_{\odot}$  la situación es justamente la opuesta: el ajuste mejora para  $T_{\text{eff}}$  más bajas. Guiados por este hecho, podemos esperar un mínimo en  $\psi$  para algún valor intermedio de la masa estelar. Para explorar esta posibilidad hemos calculado modelos con  $0.525 M_{\odot}$  restringiéndonos a valores de  $M_{\text{H}}/M_*$  similares a aquellos que proveen buenos ajustes (ver Tabla 4.1). Para este valor de la masa, la identificación de modos en el caso **A** muestra un buen ajuste para  $\log(M_{\text{H}}/M_*) = -6.63$  a  $T_{\text{eff}} \approx 11400$  mientras que el caso **B** presenta un mínimo interesante para valores de la masa estelar y temperatura efectiva muy similares a aquellos determinados por Koester & Allard (2000) para G117-B15A a través de análisis espectroscópicos ( $M_* = 0.53 M_{\odot}$ ;  $T_{\text{eff}} = 11900 \pm 140$  K). Finalmente, con el objeto de hacer un análisis más fino hemos calculado una secuencia de modelos con  $0.5375 M_{\odot}$  y envolturas de hidrógeno gruesas (ver Tabla 4.1). Los resultados para el conjunto completo de masas y espesores de la envoltura de hidrógeno para el caso **B** son mostrados en Figura 4.6. Las etiquetas de cada curva corresponden a los valores de  $\log(M_{\text{H}}/M_*)$  presentados en Tabla 4.1.

Los resultados presentados indican que, si esperamos que la masa y la temperatura astrosismológicas sean similares a los valores determinados espectroscópicamente, el mejor ajuste corresponde al caso **B** de identificación de modos, para un modelo con una masa estelar de  $0.525 M_{\odot}$  y una envoltura de hidrógeno con  $\log(M_{\text{H}}/M_*) = -3.83$ .



Tabla 4.2: Resumen de los resultados del mejor ajuste. Referencias: (a) Koester & Allard (2000), (b) van Alena et al. (1994), (c) Kepler et al. (1982), (d) Kepler et al. (2000)

Cantidad	Modelo ajustado	G117-B15A
$M_*/M_\odot$	0.525	0.53 <sup>(a)</sup>
$\log g$	7.85	$7.86 \pm 0.14$ <sup>(a)</sup>
$T_{\text{eff}}$ [K]	11,790	$11,900 \pm 140$ <sup>(a)</sup>
$\log(M_{\text{H}}/M_*)$	-3.83	...
$\log(M_{\text{He}}/M_*)$	-2.00	...
Paralaje [mas]	15.89	$10.5 \pm 4.2$ <sup>(b)</sup>
$P(k=2)$ [s]	208.80	215.2 <sup>(c)</sup>
$P(k=3)$	278.85	271.0 <sup>(c)</sup>
$P(k=4)$	308.57	304.4 <sup>(c)</sup>
$\dot{P}(k=2)$ [ $10^{-15}\text{s s}^{-1}$ ]	4.43	$2.3 \pm 1.4$ <sup>(d)</sup>
$\dot{P}(k=3)$	3.22	...
$\dot{P}(k=4)$	5.76	...

## 4.4 Conclusiones y resultados

Hemos visto en la Sección anterior que el ajuste entre observación y teoría para obtener los valores de la masa y el espesor de la envoltura de hidrógeno es muy sensible a la identificación del orden radial de los modos observados en G117-B15A. Sólo si tenemos en cuenta las determinaciones espectroscópicas para la masa y la temperatura efectiva de Koester & Allard (2000) podemos discriminar entre las dos posibles identificaciones de modos y así entre las dos posibles estructuras para este objeto. Un hecho notable es que la envoltura de hidrógeno que mejor ajusta es una envoltura muy gruesa (el límite superior que hemos considerado). Tal vez para mejorar nuestro ajuste hubiésemos podido considerar envolturas aún mas gruesas. Sin embargo la única forma de estar seguros de que envolturas más gruesas que la obtenida son posibles sería calcular la estructura de objetos de la masa de G117-B15A comenzando desde la quema de hidrógeno de la secuencia principal pasando a través de todas las etapas previas a la etapa de enana blanca.

Para finalizar, podemos obtener una determinación de la paralaje de G117-B15A, como en Bradley (1998b). Dado que la temperatura efectiva es mas alta (11790 K vs. 11600 K) y la masa estelar más baja ( $0.525 M_\odot$  vs.  $0.60 M_\odot$ ), y así un mayor radio), la luminosidad ( $L/L_\odot = -2.44$  vs.  $L/L_\odot = -2.52$ ) es mas alta que la predicha por Bradley (1998b), y para la misma magnitud visual aparente  $m_V = 11.50$  y corrección bolométrica de  $-0.611$  mag (Bergeron, Wesemael & Beauchamp 1995), encontramos que G117B-15A debería tener una paralaje de 15.89 mas, en tanto que el valor obtenido por Bradley es de 16.5. Nuestro valor es aún muy alto como para ser compatible (a  $1\sigma$ ) con la determinación de  $10.5 \pm 4.2$  <sup>mas</sup> dada por van Alena, Lee & Hoffleit (1994). Los resultados obtenidos en este Capítulo son sumarizados en Tabla 4.2.

# Capítulo 5

## Efectos de la difusión sobre $P$ y $\dot{P}$

Resultados publicados en el siguiente artículo:

- The effects of element diffusion on the pulsational properties of variable DA white dwarfs, Córscico, Benvenuto, Althaus & Serenelli, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society , 332, 392, (2002)

En el capítulo anterior llevamos a cabo un estudio astrosismológico detallado de la estrella G117-B15A empleando perfiles químicos con interfases tratadas según las predicciones de la difusión dependiente del tiempo. Al comparar nuestro modelo astrosismológico con los resultados obtenidos por Bradley (1998b) empleando la suposición de equilibrio difusivo en la aproximación de *trace element*, hemos encontrado resultados similares. En este Capítulo nuestro objetivo es explorar el efecto de la difusión en no-equilibrio sobre períodos y derivadas temporales de los períodos en enanas blancas DA, y comparar los resultados con las predicciones de la aproximación de equilibrio difusivo en la aproximación de *trace element*. Para tal fin calcularemos dos secuencias evolutivas, una considerando difusión dependiente del tiempo y la otra suponiendo equilibrio difusivo en la aproximación de *trace element*. No hemos tenido en cuenta la evolución pre-enana blanca.

### 5.1 Cálculos

Aquí hemos calculado la evolución de un modelo de enana blanca DA de  $0.55 M_{\odot}$  con un perfil químico interno correspondiente al calculado por Salaris et al. (1997). Tal modelo tiene fracciones de masa de hidrógeno y helio de  $M_{\text{H}}/M_{*} = 10^{-4}$  y  $M_{\text{He}}/M_{*} = 10^{-2}$ , respectivamente. Tales valores están en buen acuerdo con las predicciones de la teoría de evolución estelar y también son similares a aquellos encontrados por Bradley (1998b) y nosotros mismos en el Capítulo anterior para la estrella G117-B15A. El perfil químico interno de nuestro modelo es mostrado en Figura 5.1.

Es importante mencionar que en la base de la envoltura de hidrógeno de nuestros modelos, el hidrógeno y el helio están completamente ionizados y esto es así a través todas las etapas evolutivas consideradas. De esta manera los perfiles de abundancia química predichos por la aproximación de *trace element* permanecen fijos durante la evolución. En el cálculo de las opacidades radiativas hemos considerado  $Z =$

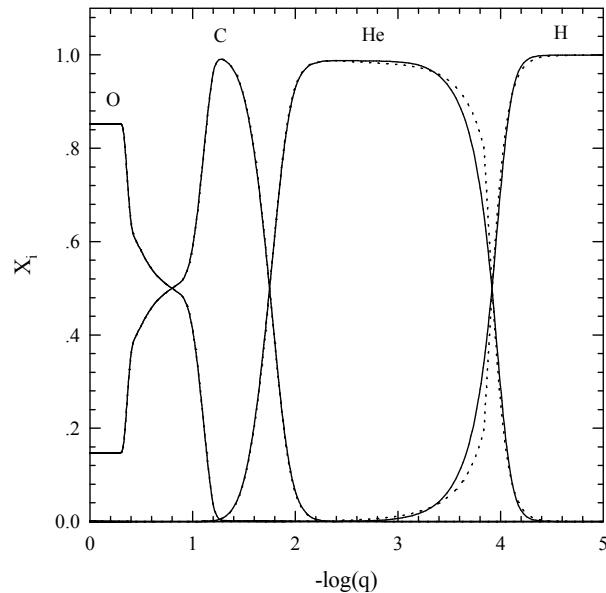


Figura 5.1: Los perfiles químicos internos del modelo de enana blanca de carbono-oxígeno de  $0.55 M_{\odot}$  para el hidrógeno, helio, carbono y oxígeno a una temperatura efectiva de 14000 K. En el caso del equilibrio difusivo en la aproximación de *trace element*, los perfiles fijos son representados por líneas de puntos. Los perfiles para los cuales la difusión dependiente del tiempo ha sido considerada son representados por líneas sólidas.  $q$  es la fracción de masa externa, definida como  $q = 1 - M_r/M_*$ .

0. El transporte convectivo ha sido tratado en el marco de la versión ML3 de la *mixing length theory* (MLT). La prescripción ML3, caracterizada por una eficiencia convectiva elevada, considera que la longitud de mezcla es dos veces la escala de altura de presión (ver Tassoul et al. 1990).

Un modelo realista de partida para nuestras secuencias evolutivas fue obtenido a través del procedimiento artificial descrito en Benvenuto & Althaus (1998). Como hemos mencionado antes, tal procedimiento produce una secuencia inicial de modelos físicamente inconsistentes, pero luego relaja a la secuencia correcta de enfriamiento (ver Althaus & Benvenuto 2000 para una discusión detallada) mucho antes de alcanzar la banda de inestabilidad de las DAVs. A partir de ese punto la difusión de elementos fue incorporada. Cuando el modelo alcanzó una  $T_{\text{eff}} = 14000$  K comenzamos los cálculos pulsacionales. Específicamente hemos calculado modos dipolares ( $\ell = 1$ ) (los cuales son los usualmente encontrados en las curvas de luz de las ZZ Ceti) con orden radial  $k = 1, \dots, 21$  cubriendo un intervalo de períodos de  $100 \text{ s} \lesssim P \lesssim 1000 \text{ s}$ . Los cálculos fueron terminados a  $T_{\text{eff}} = 10000$  K; de esta manera el intervalo explorado en temperatura efectiva cubre ampliamente la banda de inestabilidad observada de las DAVs. Para los modos calculados hemos obtenido los períodos y autofunciones. En el cálculo de la frecuencia de Brunt-Väisälä hemos empleado la descripción de Brassard et al. (1991) (Ecuación 3.21, Capítulo 3 de esta Tesis). Luego de obtener los períodos hemos calculado  $\dot{P}$  a través de diferenciación

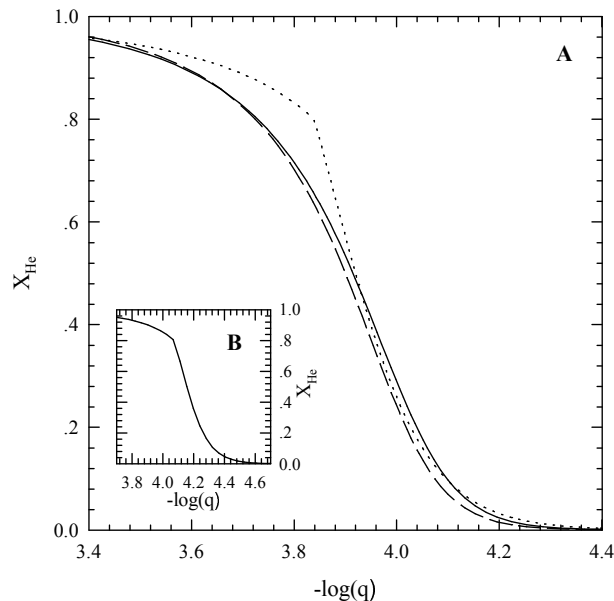


Figura 5.2: Panel A: El perfil interno del helio en función de  $q$  en la interfase hidrógeno-helio. La línea sólida corresponde a un modelo con  $T_{\text{eff}} = 14000$  K en el cual la difusión dependiente del tiempo ha sido considerada. La línea de trazos indica el mismo tratamiento pero para un modelo a 10000 K. Finalmente la línea de puntos corresponde a la predicción del equilibrio difusivo en la aproximación de *trace element*. Panel B: El perfil químico para el helio de acuerdo a la predicción del equilibrio difusivo en la aproximación de *trace element* para un modelo de  $0.50 M_{\odot}$  calculado por Bradley (comunicación privada). Notemos que la forma de los perfiles en ambos modelos con equilibrio difusivo es la misma.

numérica.

## 5.2 Resultados

Comencemos examinando la Figura 5.2, en la cual mostramos la evolución del perfil químico para el helio resultante de la difusión dependiente del tiempo junto con el perfil químico predicho por el equilibrio difusivo en la aproximación de *trace element*. Notemos que en este último caso, los perfiles permanecen sin cambios ya que, como mencionamos, la ionización es completa en tales capas<sup>1</sup>. En contraste, en el caso de la difusión dependiente del tiempo la distribución de abundancias químicas evoluciona apreciablemente durante la etapa de ZZ Ceti. Es notable que la forma del perfil en ambos tratamientos se torna marcadamente diferente en particular en el centro de la transición. Como veremos, esto tendrá una apreciable influencia en los valores de  $P$  y  $\dot{P}$  para algunos de los modos calculados.

En Figura 5.3 mostramos (panel A) el término de Ledoux y (panel B) el cuadrado

<sup>1</sup>El equilibrio difusivo en la aproximación de *trace element* ha sido aplicada sólo a la interfase hidrógeno-helio, la cual es la más relevante en el contexto de las pulsaciones de las enanas blancas DAs.

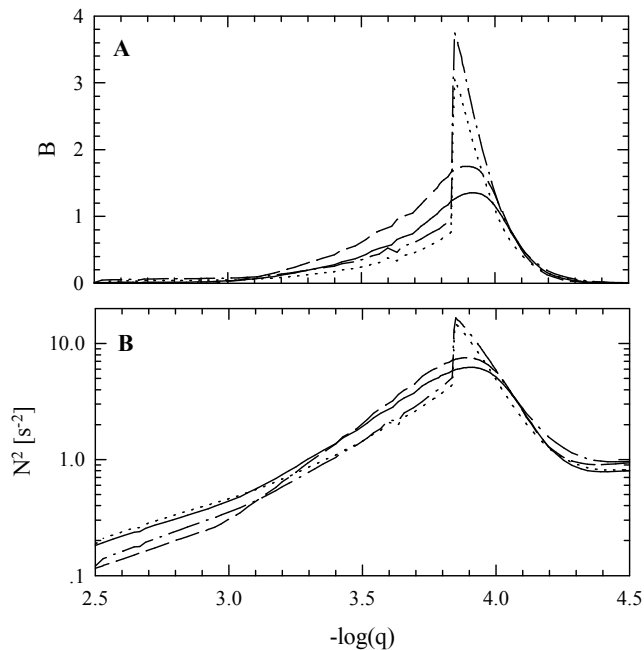


Figura 5.3: Panel superior: el término de Ledoux  $B$  en la interfase hidrógeno-helio en el caso de difusión dependiente del tiempo para valores de  $T_{\text{eff}}$  de 14000 K y 10000 K con líneas sólidas y líneas de trazos, respectivamente. Líneas punteadas y líneas de puntos y trazos corresponden a los mismos valores de  $T_{\text{eff}}$  pero para el equilibrio difusivo en la aproximación de *trace element*. Panel inferior: el cuadrado de la frecuencia de Brunt-Väisälä para los mismos casos analizados en el panel A.

de la frecuencia de Brunt-Väisälä, para dos valores seleccionados de  $T_{\text{eff}}$ , en la zona de transición hidrógeno-helio. Recordemos que el término  $B$  depende no sólo de la forma del perfil químico sino también de la estructura térmica y mecánica de la estrella (Ecuación 3.22). Así, aún suponiendo equilibrio difusivo en la aproximación de *trace element* el término  $B$  cambia con el enfriamiento. Debido al hecho de que en el término de Ledoux aparece la derivada del perfil químico (ver Ecuación 3.22), un leve cambio en la pendiente de la interfase hidrógeno-helio se traduce en un cambio notable en  $B$ . Entonces no es sorprendente que el término  $B$  exhiba un pico muy agudo en el caso del tratamiento *trace element*, en contraste con el tratamiento físicamente más consistente de la difusión en no-equilibrio. A su vez, este rasgo es reflejado en la frecuencia de Brunt-Väisälä.

Ahora centremos nuestra atención en los modos calculados. En Figuras 5.4 y 5.5 mostramos  $P$  y  $\dot{P}$  correspondientes a modos con  $\ell = 1, k = 1, \dots, 6$  para modelos con difusión dependiente del tiempo y con la aproximación de equilibrio difusivo en la aproximación de *trace element* en la interfase hidrógeno-helio como función de  $T_{\text{eff}}$ . A partir de las figuras puede notarse que los efectos de la difusión dependiente del tiempo son no-despreciables en  $P$  y  $\dot{P}$ , aunque para algunos modos los resultados son casi independientes del tratamiento de la difusión. El mismo comportamiento ha sido encontrado en modos de más alto orden radial (no mostrados

por brevedad). Notemos que para los modos mostrados en las figuras las mayores diferencias relativas encontradas son  $\approx 20\%$  para  $\dot{P}$  y  $\approx 5\%$  para  $P$ .

Las diferencias citadas aparecen principalmente por la muy diferente forma de los perfiles en la interfase resultante de ambos tratamientos de la difusión examinados aquí. En particular, las diferencias en el perfil de helio para  $X_{\text{He}} \gtrsim 0.5$  (ver Figura 5.2) en estos tratamientos son la principal razón según la cual  $P$  y  $\dot{P}$  se tornan diferentes. En adición, hay una pequeña contribución a las diferencias debido a la evolución de los perfiles de cada interfase en respuesta a la difusión en no-equilibrio.

### 5.3 El equilibrio difusivo y la ocurrencia de un flash de hidrógeno

Con el objeto de decir si las diferencias en  $P$  y  $\dot{P}$  encontradas son debidas a la relajación de la suposición de equilibrio difusivo o a la aproximación de *trace element*, repetimos los cálculos simulando el equilibrio difusivo pero *sin* invocar la aproximación de *trace element*, y para esto decidimos llevar a cabo un experimento simple: simular la condición de equilibrio difusivo empleando nuestras rutinas de la difusión dependiente del tiempo. El equilibrio difusivo debería ser una buena aproximación si la escala de tiempo de la difusión fuera mucho más corta que la escala de tiempo evolutiva. Entonces, con el objeto de simular esta situación, simplemente hemos considerado que el paso del tiempo de la difusión es varias veces la escala de tiempo evolutivo <sup>2</sup>. Esto es equivalente a suponer que el proceso difusivo completo ocurre varias veces más rápido. Bajo esta hipótesis hemos calculado la evolución de nuestro modelo de enana blanca. El resultado fue que la enana blanca no evolucionó a lo largo de la rama de enfriamiento sino que experimentó un flash termonuclear de hidrógeno. La razón física para este comportamiento es que, si la difusión tuviera suficiente tiempo para actuar, entonces los perfiles evolucionarían de tal manera que la cola de hidrógeno debería ser capaz de alcanzar capas suficientemente calientes como para ser encendidas en forma de flash.

Este resultado pone de manifiesto cierta inconsistencia física de la suposición de equilibrio difusivo en la zona de la interfase hidrógeno-helio, al menos en envolturas masivas de hidrógeno, y demuestra que la única manera de modelar tales transiciones en composición es tener en cuenta en forma autoconsistente los procesos difusivos dependientes del tiempo, los procesos de quema nuclear y la evolución estelar.

Son oportunas aquí algunas palabras con respecto al tratamiento standard de la difusión en equilibrio, el cual está basado en el trabajo de Arcoragi & Fontaine (1980). Recientes estudios astrosismológicos de enanas blancas DAVs (Clemens 1993, Bradley 1998b, 2001) parecen favorecer grandes valores para el espesor de la envoltura de hidrógeno ( $M_{\text{H}}/M_* \approx 10^{-4}$ ). Para las condiciones termodinámicas relevantes en los modelos de enanas blancas variables DAVs, encontramos que la mayor parte de la interfase hidrógeno-helio ocurre en condiciones degeneradas. Dado que las ecuaciones de Arcoragi & Fontaine (1980) (ver Apéndice C.3) son válidas en condiciones *no-degeneradas*, deberíamos remarcar que este tratamiento no puede ser aplicado a las interfases de hidrógeno-helio en enanas blancas DA con envolturas masivas de hidrógeno.

---

<sup>2</sup>Aquí hemos considerado un paso de tiempo de la difusión unas cien veces el paso de tiempo evolutivo.

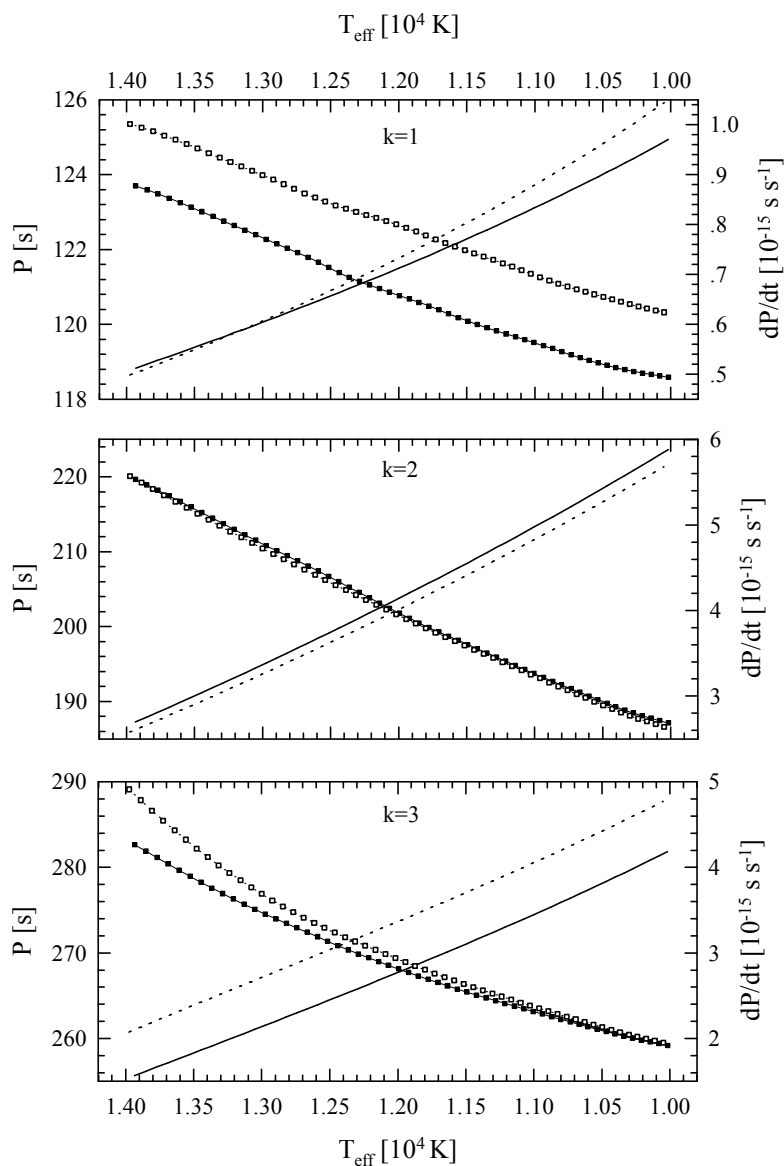


Figura 5.4: Períodos y derivadas de períodos para modos con  $\ell = 1$ ,  $k = 1, 2, 3$  modos para un modelo de enana blanca de carbono-oxígeno de  $0.55 M_{\odot}$  en un intervalo de  $T_{\text{eff}}$  conteniendo la banda de inestabilidad de las DAVs. Líneas sólidas (cuadrados llenos) corresponden a períodos (derivadas de períodos) calculadas considerando difusión en no-equilibrio, mientras líneas de puntos (cuadrados vacíos) muestran períodos (derivadas de períodos) calculados de acuerdo al equilibrio difusivo en la aproximación de *trace element* en la interfase hidrógeno-helio.

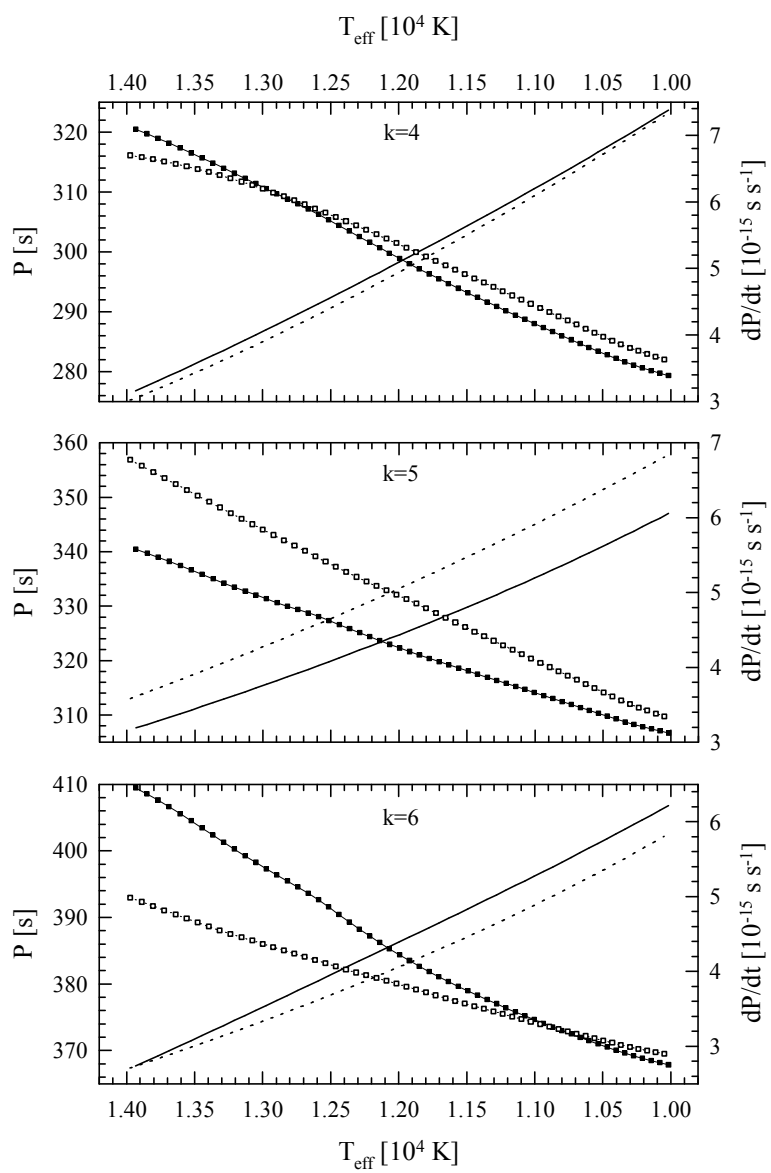


Figura 5.5: Igual que en la Figura 5.4 pero para modos con  $\ell = 1, k = 4, 5, 6$ .



Finalmente, remarquemos que, en el caso de la aproximación de *trace element*, hemos encontrado que el objeto no experimenta ningún flash termonuclear. Esta es una consecuencia propia de la aproximación, debido al truncamiento *ad hoc* del perfil para algún valor bajo de la densidad. En particular, en nuestros cálculos hemos encontrado que los modelos estelares evolucionan a lo largo del track de enfriamiento de enana blanca si truncamos el perfil de hidrógeno para  $X_{\text{H}} = 10^{-3}$ . Sin embargo, si permitimos que el perfil de equilibrio de hidrógeno se extienda a abundancias levemente menores (digamos  $X_{\text{H}} = 10^{-4}$ ) el modelo experimenta un flash termonuclear.

# Capítulo 6

## La difusión y el *mode trapping*

Resultados publicados en los siguientes artículos:

- New DA white dwarf evolutionary models and their pulsational properties, Córscico, Althaus, Benvenuto & Serenelli, *Astronomy and Astrophysics (Letters)*, 380, L17, (2001)
- The mode trapping properties of full DA white dwarf evolutionary models, Córscico, Althaus, Benvenuto & Serenelli, *Astronomy and Astrophysics*, 387, 531 (2002)
- On mode trapping in pulsating DA white dwarf stars, Benvenuto, Córscico, Althaus & Serenelli, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 335, 480 (2002)

Un problema que ha prevalecido a lo largo del tiempo en el estudio de enanas blancas pulsantes ZZ Ceti es encontrar la razón de porqué solo un muy reducido número de modos son observados en comparación con la riqueza y densidad de modos excitados predichos por los estudios teóricos. En efecto, se ha sospechado durante largo tiempo que algún mecanismo de filtro de modos debe estar actuando muy eficientemente. Una explicación comúnmente propuesta es que el mecanismo en cuestión es el *mode trapping* (Winget, van Horn & Hansen 1981; Brassard et al. 1992a; Bradley 1996). Como hemos explicado en la Introducción, de acuerdo a este mecanismo, aquellos modos (los atrapados) que tienen una longitud de onda local similar al espesor de la envoltura de hidrógeno (o de helio) requieren menos energía cinética para oscilar. En consecuencia, estos modos tienen mayor probabilidad de alcanzar amplitudes observables. Entonces, de acuerdo a este escenario, la mayoría de los modos observados en enanas blancas pulsantes deberían ser modos atrapados en la envoltura. Sin embargo, en recientes estudios astrosismológicos de la ZZ Ceti G117-B15A (ver Bradley 1998b y el Capítulo 4 de esta Tesis) el período observado de 215 seg, el cual tiene la mayor amplitud en el espectro de Fourier, no corresponde a un modo atrapado según lo predicho por el modelo astrosismológico que mejor ajusta.

La exploración de este tópico tan importante requiere un tratamiento detallado de la forma de las transiciones en composición química, en particular en la interfase hidrógeno-helio, la mas relevante en el caso de las pulsaciones de estrellas ZZ Ceti. En este Capítulo nos proponemos explorar el efecto de la difusión dependiente del tiempo sobre el fenómeno de *mode trapping* en sí, y realizar una comparación con las predicciones del equilibrio difusivo en la aproximación de *trace element*.

En la primer parte del capítulo exploraremos este t3pico sobre modelos detallados de enanas blancas DA construidos teniendo en cuenta la difusi3n de elementos dependiente del tiempo, la combusti3n nuclear y la historia del progenitor de enana blanca en un manera autoconsistente (para m3s detalles ver Cap3tulo 2). Estos modelos poseen envolturas gruesas de hidr3geno. En la segunda parte del Cap3tulo emplearemos modelos que no tienen en cuenta la evoluci3n de pre-enana blanca, y exploraremos lo que sucede cuando envolturas m3s finas de hidr3geno son consideradas, ya que hay alguna evidencia de la existencia de enanas blancas DAs con contenidos de hidr3geno  $M_{\text{H}}/M_{*} \lesssim 10^{-4}$  (ver el final del Cap3tulo 1).

## 6.1 Modelos con envolturas masivas de hidr3geno

La presente secci3n estar3 dedicada a explorar las propiedades de pulsaci3n de los modelos evolutivos descritos en el Cap3tulo 2 y comparar nuestras predicciones con las de otros investigadores. Espec3ficamente analizaremos pulsacionalmente un modelo perteneciente a la banda de inestabilidad de las ZZ Ceti. El 3nfasis ser3 puesto en mostrar el papel desempe3ado por la estratificaci3n interna de nuestros modelos en el comportamiento de los modos y el espectro de per3odos. Espec3ficamente exploraremos los efectos de las interfases qu3micas sobre la distribuci3n de energ3a cin3tica de los modos y su capacidad para modificar las propiedades de propagaci3n a trav3s del interior de la estrella. Mencionemos que debido a la alta demanda computacional en la cual el enfriamiento de la enana blanca es tratado en una manera autoconsistente con la difusi3n de elementos y la historia de la pre-enana blanca, nos vemos forzados a restringir el estudio a un 3nico valor de la masa estelar (Cap3tulo 2).

### 6.1.1 Detalles de los c3lculos

Los detalles acerca del c3lculo de nuestro modelo de ZZ Ceti seleccionado pueden encontrarse en el Cap3tulo 2. Espec3ficamente, hemos elegido un modelo de  $0.563 M_{\odot}$  a  $T_{\text{eff}} \approx 12000$  K. En la Tabla 6.1 mostramos las principales caracter3sticas de nuestro modelo seleccionado. Con el objeto de hacer una comparaci3n cuantitativa de las caracter3sticas estructurales de nuestro modelo con aquellas de modelos generados independientemente por otros autores, las mismas cantidades correspondientes a un modelo similar de Paul Bradley (2001, comunicaci3n privada) son mostradas en la tercer columna de la Tabla 6.1.

El perfil qu3mico a trav3s del interior de nuestro modelo es mostrado en el panel superior de la Figura 6.1 en funci3n de la fracci3n de masa externa. Solo los is3topos m3s abundantes son mostrados. La frecuencia de Brunt-V3is3l3 y el t3rmino de Ledoux ( $B$ ) correspondientes son mostrados en el panel del medio y en el panel inferior.

Notemos en particular la forma de  $B$ , la cual es una consecuencia directa del perfil qu3mico. A su vez los rasgos de  $B$  son reflejados en la frecuencia de Brunt-V3is3l3. Como resultado de la difusi3n de elementos, los perfiles qu3micos de nuestro modelo evolutivo son muy suaves en las interfases (ver panel superior de la Figura 6.1), y esto explica la presencia de colas extendidas en la forma de  $B$ . Tambi3n, notemos que nuestro modelo est3 caracterizado por una interfase qu3mica en la cual tres especies i3nicas con abundancias apreciables coexisten: helio, carbono y ox3geno. Esta

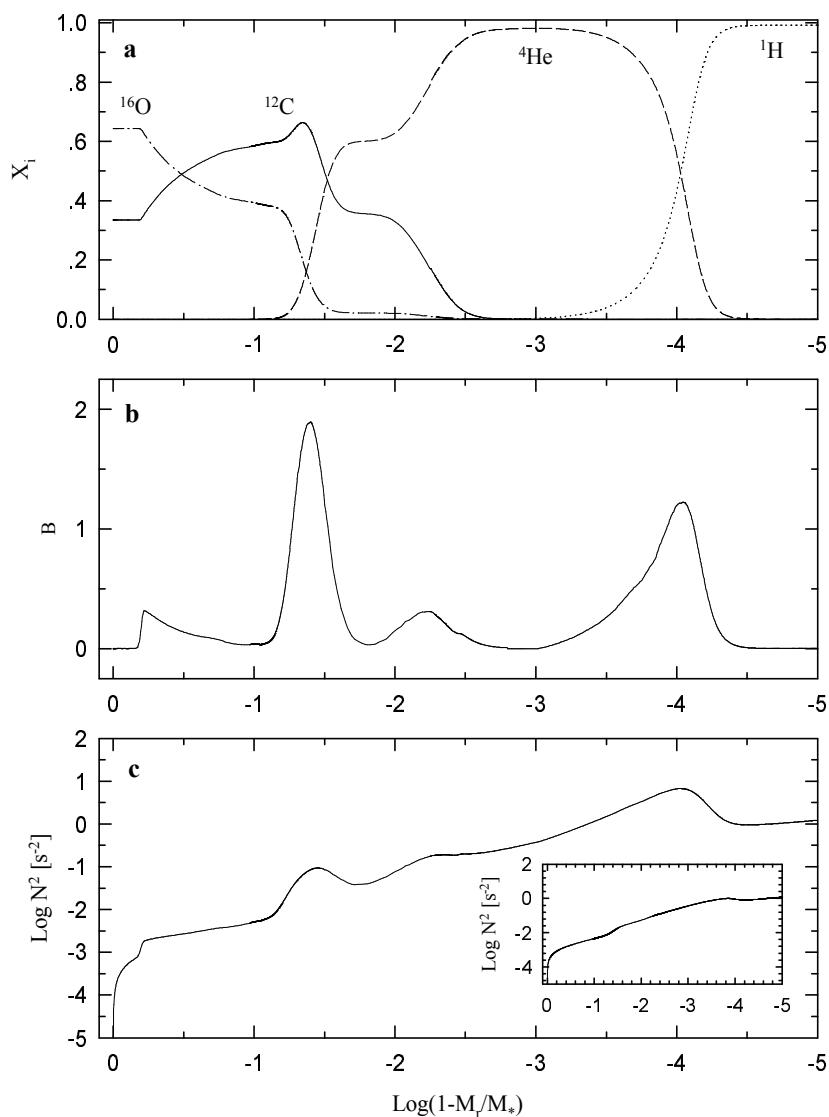


Figura 6.1: Panel **a**: La distribución de abundancias químicas de nuestro modelo. Panel **b**: el término de Ledoux,  $B$ . Panel **c**: el logaritmo del cuadrado de la frecuencia de Brunt-Väisälä ( $N^2$ ). En el subpanel se muestra esta misma cantidad pero calculada despreciando el término  $B$ . Notemos que la presencia de las zonas de transición química en la forma funcional  $N^2$  no es completamente eliminada, en particular en las interfases helio-carbono-oxígeno e hidrógeno-helio. La masa estelar del modelo de enana blanca es  $0.563 M_{\odot}$  y la temperatura efectiva es  $\approx 12000$  K.

Tabla 6.1: Características del modelo seleccionado

	Nuestro modelo	Modelo de Bradley
$M_*/M_\odot$	0.563	0.560
$T_{\text{eff}}$ [K]	11996	12050
$\log(L_*/L_\odot)$	-2.458	-2.462
$\log(R_*/R_\odot)$	-1.864	-1.866
$\log(M_{\text{H}}/M_*)$	-3.905	-3.824
$\log(M_{\text{He}}/M_*)$	-1.604	-1.824
$\log(\rho_c)$ [g cm <sup>-3</sup> ]	6.469	6.466
$\log(T_c)$ [10 <sup>6</sup> K]	7.086	7.087

región de transición dá lugar a dos contribuciones a  $B$ , una de ellas de relativamente gran magnitud, ubicada a  $\log q \sim -1.4$ , y la otra, más externa y de muy baja altura, a  $\log q \sim -2.2$ . Finalmente, la contribución de la interfase hidrógeno-helio a  $B$  es menor que la correspondiente a la de la transición helio-carbono-oxígeno. Notemos que las contribuciones del término de Ledoux son traducidas en suaves máximos locales en  $N^2$ . Las características de  $B$  y  $N^2$  predichas por nuestro modelo son marcadamente diferentes de aquellas encontradas en estudios previos en los cuales la evolución de las enanas blancas es tratada en una manera simplificada, particularmente en lo referente a la distribución de abundancias en las capas externas (ver, por ejemplo, Tassoul et al. 1990; Brassard et al. 1991, 1992ab; Bradley 1996).

Por cada modo calculado obtenemos el período  $P_k$  ( $P_k = 2\pi/\sigma_k$ , siendo  $\sigma_k$  la autofrecuencia) y las autofunciones adimensionales  $y_1, \dots, y_4$  (ver Apéndice A para su definición). Con estas autofunciones y el autovalor adimensional  $\omega_k^2 = \sigma_k^2(GM_*/R_*^3)^{-1}$  calculamos para cada modo considerado la energía cinética de oscilación,  $(E_{\text{kin}})_k$  (según Ecuación 3.18), y los coeficientes de splitting por rotación a primer orden,  $C_{\ell,k}$ , dados por

$$C_{\ell,k} = \frac{(GM_*R_*^2)}{2(E_{\text{kin}})_k} \int_0^1 \frac{x^2 \rho}{C_1} \left[ 2x^2 y_1 y_2 + \frac{x^2}{C_1 \omega_k^2} y_2^2 \right] dx, \quad (6.1)$$

donde  $M_*$  y  $R_*$  son la masa y el radio estelar, respectivamente,  $G$  es la constante de gravitación,  $C_1 = (r/R_*)^3(M_*/M_r)$  y  $x = r/R_*$ . También calculamos las funciones de peso,  $wf$ , y el período variacional,  $P_k^V$  (Ecuaciones 3.19 y 3.20). Finalmente, por cada modelo calculado derivamos el espaciado asintótico de períodos,  $\Delta P_A$ . Como antes, la frecuencia de Brunt-Väisälä ( $N$ ), es calculada empleando el “tratamiento de Ledoux modificado” (Brassard et al. 1991). Mencionemos aquí que también hemos empleado un esquema de diferenciación numérica para calcular  $N^2$  directamente de su definición (Ecuación A.43 del Apéndice A), y hemos encontrado que este esquema dá los mismos resultados que el tratamiento de Ledoux modificado.

## 6.1.2 Resultados

Para nuestro modelo elegido hemos calculado modos  $g$  con  $\ell = 1, 2$  y  $3$  (los efectos de cancelación geométrica crecen progresivamente para mayores valores de  $\ell$  en oscilaciones no-radiales; ver Dziembowski 1977a), con períodos en el rango de 50 s  $\lesssim P_k \lesssim 1300$  s. Para el cálculo de modos hemos empleado hasta 5000 puntos. Para

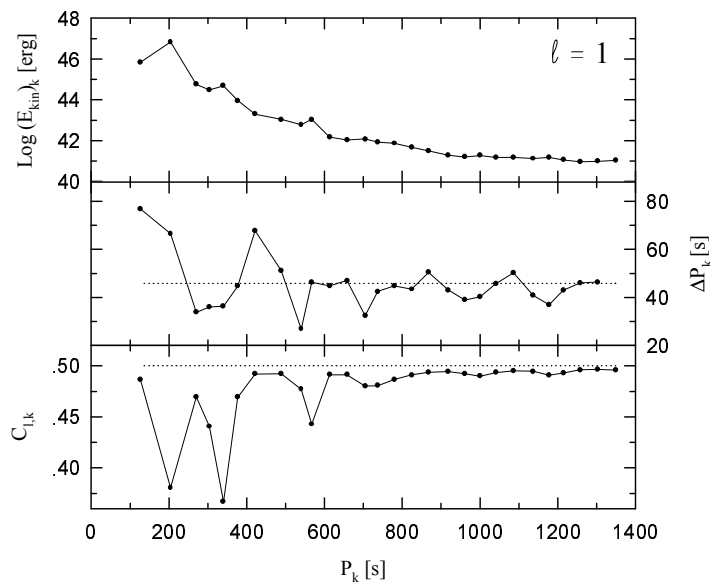


Figura 6.2: El logaritmo de la energía cinética de oscilación, espaciamento de períodos y coeficientes de splitting rotacional a primer orden (panel superior, medio e inferior, respectivamente) para modos con  $\ell = 1$  en función de los períodos calculados. Las líneas de puntos muestran el comportamiento asintótico para  $\Delta P_k$  y  $C_{\ell,k}$ . Los valores de  $(E_{\text{kin}})_k$  corresponden a la normalización  $y_1 = 1$  en  $r = R_*$ .

todos nuestros cálculos de pulsación, la diferencia relativa entre  $P_k$  y  $P_k^V$  es siempre menor que  $10^{-3}$ . Esto nos da una indicación de la exactitud de nuestros cálculos.

Comencemos examinando las Figuras 6.2 a 6.4, cuyos paneles superiores muestran el logaritmo de la energía cinética de oscilación de los modos con  $\ell = 1, 2$  y  $3$  en términos de los períodos calculados. Los paneles del medio muestran los valores para el espaciamento de períodos hacia adelante  $\Delta P_k$  ( $\equiv P_{k+1} - P_k$ ) junto con los valores asintóticos  $\Delta P_A$  dados por líneas de puntos. Finalmente, en los paneles inferiores de estas figuras mostramos los valores de  $C_{\ell,k}$  así como también los valores asintóticos (líneas de puntos) que estos coeficientes adoptan para altos órdenes radiales, esto es  $C_{\ell,k} \approx 1/\ell(\ell + 1)$  (Brickhill 1975). Una inspección de los gráficos revela algunas características interesantes. En particular, las cantidades graficadas exhiben dos tendencias muy claras. Para  $P_k \gtrsim 500 - 600$  s e independientemente del valor de  $\ell$ , la distribución de energía cinética de oscilación es muy suave. Notemos que los valores  $\log(E_{\text{kin}})_k$  de los modos adyacentes son muy similares, lo cual está en contraste con la situación encontrada para períodos cortos. Por otro lado, los diagramas de espaciamento de períodos muestran apreciables apartamientos de  $\Delta P_k$  con respecto a la predicción asintótica para  $P_k \lesssim 500 - 600$  s. Como es bien conocido, esto es debido mayormente a la presencia de transiciones de abundancias químicas en enanas blancas DA. En contraste, para períodos más largos el  $\Delta P_k$  de los modos tiende a  $\Delta P_A$ . También, notemos que los valores de  $C_{\ell,k}$  tienden al valor asintótico para  $P_k \gtrsim 500 - 600$  s.

Debido a que nuestra intención aquí es analizar las propiedades de *mode trapping*

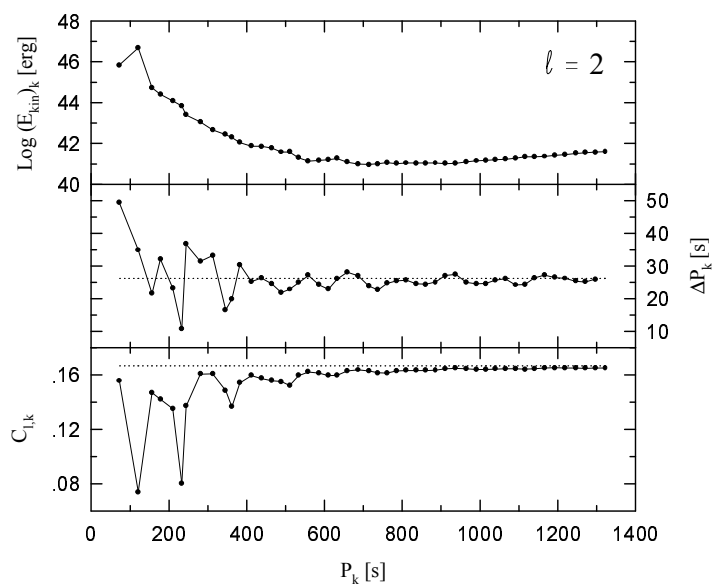


Figura 6.3: Igual que en la Figura 6.2, pero para  $l = 2$ .

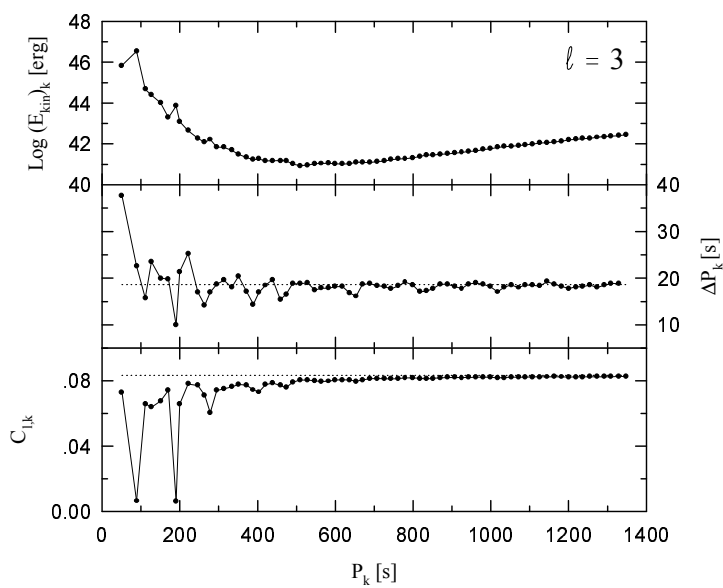


Figura 6.4: Igual que en la Figura 6.2, pero para  $l = 3$ .

de nuestros modelos, emplearemos para tal fin las funciones de peso  $wf$  (Ecuación 3.19). Elegimos esta función dado que, como mencionamos antes, proporciona la contribución relativa de las diferentes regiones de la estrella a la formación de los períodos de los modos (Kawaler, Hansen & Winget 1985; Brassard et al. 1992ab). En las Figuras 6.5 a 6.7 mostramos la  $wf$  para todos los modos calculados correspondientes a  $\ell = 1$ <sup>1</sup>. También incluimos en cada gráfico el término de Ledoux  $B$  con líneas de puntos con el objeto de clarificar visualmente la localización de las diferentes zonas de transición química dentro del modelo. Para una mejor interpretación de estas figuras es útil ver simultáneamente la Figura 6.2. Para períodos cortos encontramos una variedad de comportamientos. Por ejemplo, el modo  $g_1$  está caracterizado por una  $wf$  correspondiente al bien conocido fenómeno de *mode trapping*, esto es, el período de  $g_1$  está formado en las capas más externas del modelo, independientemente de los detalles del perfil químico interno, como lo reportado en estudios previos (ver Brassard et al. 1992ab). En contraste, es la transición helio-carbono-oxígeno la que mayormente contribuye a la formación del período del modo  $g_2$ , mientras que la transición de hidrógeno-helio juega un papel menor. Este modo sería representativo de los modos “confinados” de acuerdo a Brassard et al. (1992ab). La  $wf$  para los modos  $g_3$  y  $g_4$  es cualitativamente similar a la de  $g_1$ , excepto que sus períodos no son exclusivamente formados en la envoltura de hidrógeno, sino también en la interfase helio-carbono-oxígeno. Por otro lado, la zona de alta densidad por debajo de la transición helio-carbono-oxígeno juega un papel importante en la formación del período del modo  $g_5$ . A partir de la ecuación que define  $(E_{\text{kin}})_k$  (Ecuación 3.18) puede notarse que los valores de la energía cinética de oscilación son proporcionales a la integral de las autofunciones al cuadrado pesada por  $\rho$ . Como resultado, el modo  $g_5$  está caracterizado por un valor alto de la energía cinética de oscilación (ver Figura 6.2). Notemos que la región de la transición helio-carbono-oxígeno también contribuye a la formación de los períodos de los modos  $g_6$  y  $g_{10}$ . El modo  $g_{10}$  es particularmente interesante: su período está determinado por una amplia región del interior estelar, y como resultado su energía cinética también es alta. Las  $wfs$  correspondientes al resto de los modos no difieren apreciablemente entre sí. Todas ellas exhiben contribuciones principalmente de las capas externas del modelo, aunque también muestran pequeñas amplitudes en regiones más profundas. Notemos que para todos los modos mostrados en las Figuras 6.5 a 6.7 hay una fuerte contribución a las  $wfs$  proveniente de la región de transición de hidrógeno-helio. Esto indica que, como ha sido encontrado en estudios previos, esta interfase química juega un papel fundamental en la formación de los períodos de los modos.

A continuación haremos una comparación entre nuestros resultados y aquellos obtenidos por otros autores. Como se puede ver en las Figuras 6.2 a 6.4, para períodos excediendo los  $\approx 500 - 600$  s, la distribución de  $(E_{\text{kin}})_k$  es suave, y los valores de  $\Delta P_k$  tienden a su valor asintótico. Esto es muy diferente a lo encontrado en estudios previos. Nuestros cálculos revelan que la capacidad de selección de modos de acuerdo a los valores de la energía cinética de oscilación debido a los efectos de *mode trapping* virtualmente desaparece para períodos largos cuando se tienen en cuenta modelos de enanas blancas con estratificaciones químicas que evolucionan debido a la difusión. Con el objeto de hacer una comparación detallada de las predicciones de nuestros modelos con aquellas encontradas en estudios previos hemos llevado a

---

<sup>1</sup>Para este análisis hemos elegido los modos dipolares ( $\ell = 1$ ) sólo por brevedad; los resultados para  $\ell = 2, 3$  son cualitativamente similares a aquellos encontrados para  $\ell = 1$ .



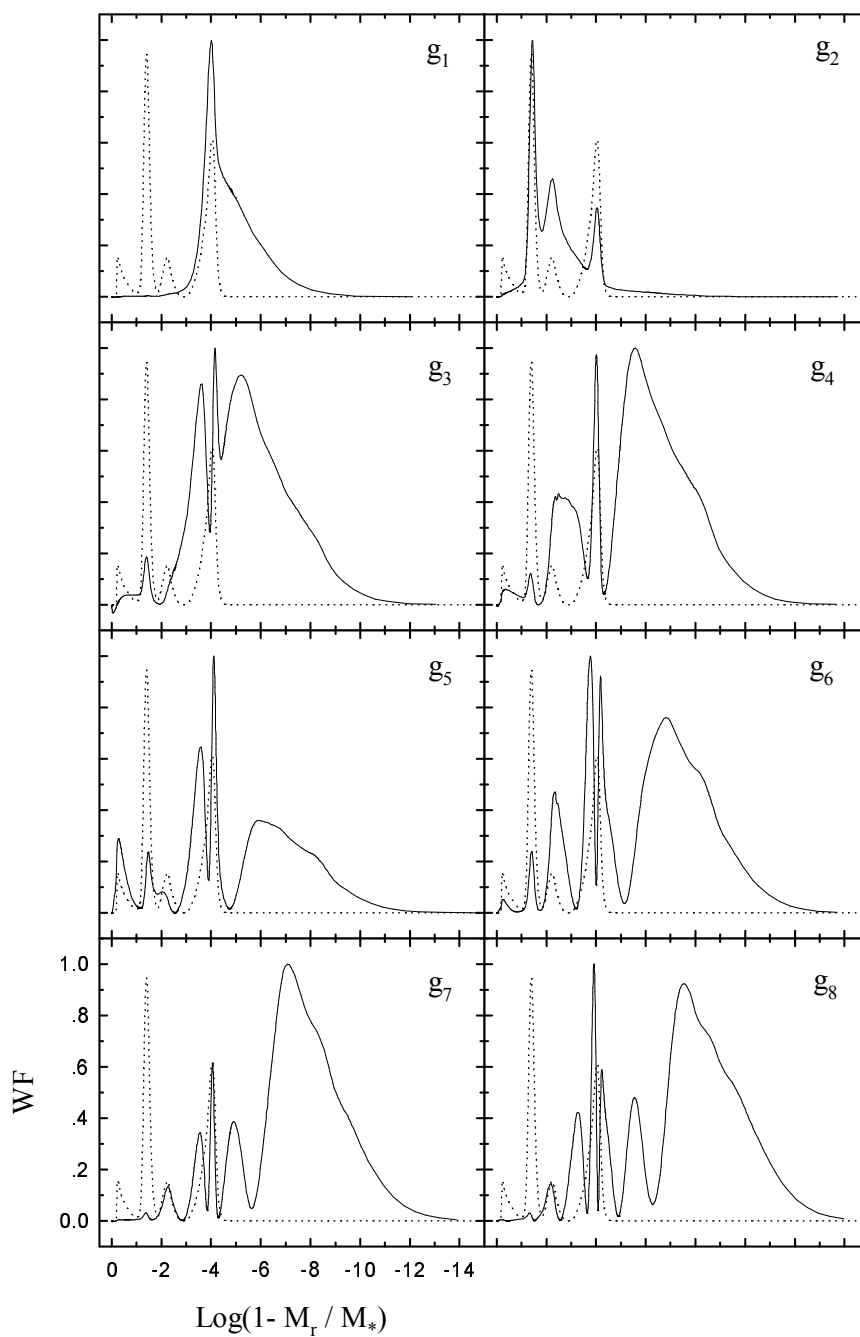


Figura 6.5: La función de peso normalizada (líneas sólidas) en función de la fracción de masa externa, para los modos  $g_1$  a  $g_8$  con  $\ell = 1$ . Con el objeto de comparación, las líneas punteadas muestran el perfil del término de Ledoux (en unidades arbitrarias).

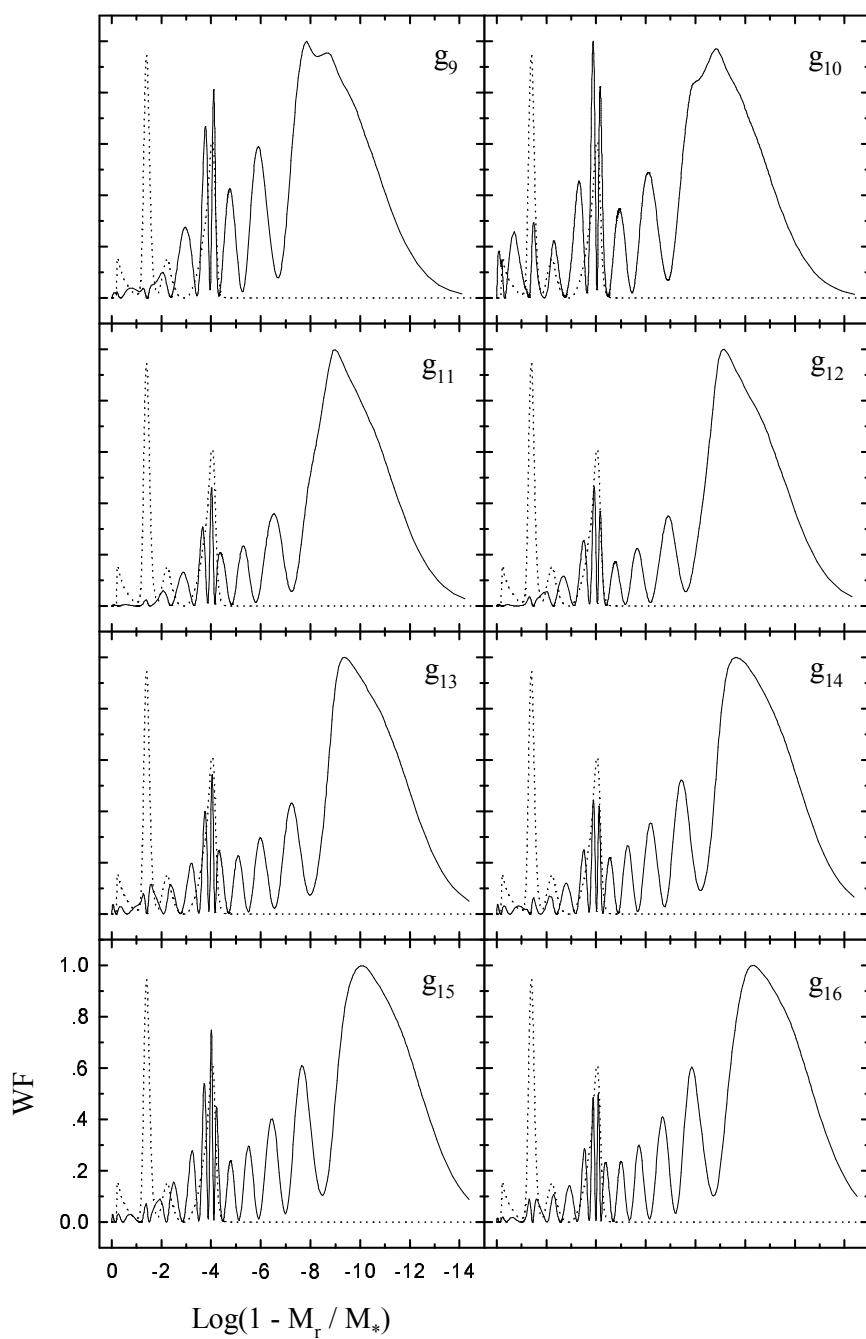


Figura 6.6: Igual que en la Figura 6.5, pero para los modos  $g_9$  a  $g_{16}$ .

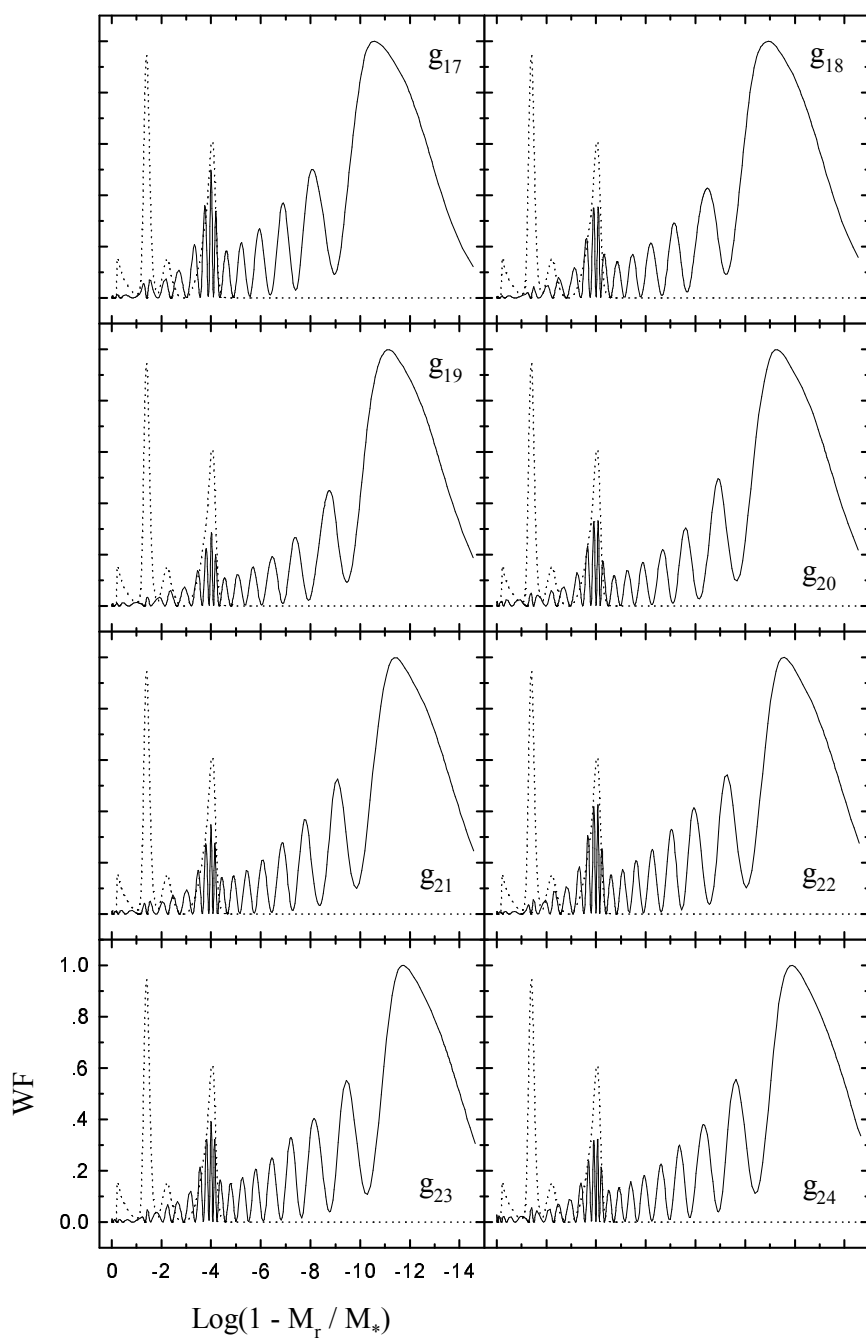


Figura 6.7: Igual que en la Figura 6.5, pero para los modos  $g_{17}$  a  $g_{24}$ .

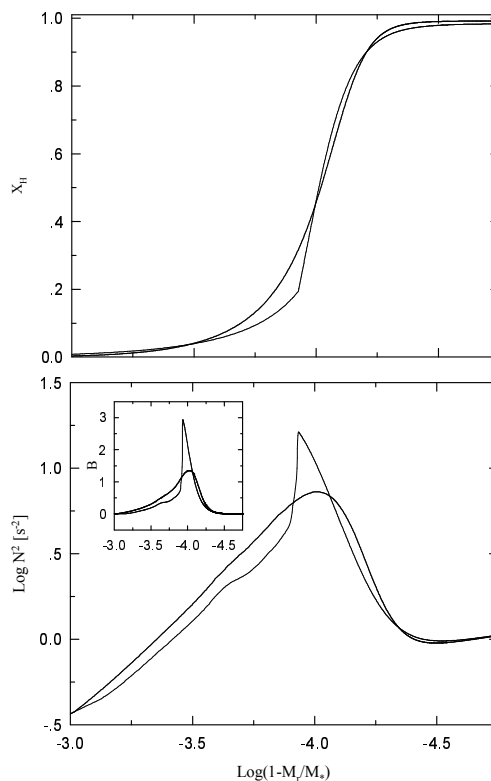


Figura 6.8: Panel superior: distribución de abundancias para el hidrógeno en la interfase hidrógeno-helio según la predicción de la difusión dependiente del tiempo (línea sólida) y el equilibrio difusivo en la aproximación de *trace element* (línea fina). Panel inferior: el logaritmo del cuadrado de la frecuencia de Brunt-Väisälä para ambos tratamientos de la difusión. El panel pequeño muestra la forma del término de Ledoux.

cabo cálculos adicionales de pulsación, esta vez suponiendo equilibrio difusivo en la aproximación de *trace element* en la interfase hidrógeno-helio (ver Apéndice C.3 y Tassoul et al. 1990). Este tratamiento ha sido comúnmente invocado en la mayoría de los estudios de pulsación para modelar las regiones de transición en composición. El perfil químico de hidrógeno resultante, el correspondiente término de Ledoux y el logaritmo del cuadrado de la frecuencia de Brunt-Väisälä  $N$  son mostrados en la Figura 6.8, junto con las predicciones de la difusión de elementos dependiente del tiempo. La suposición de *trace element* conduce a un abrupto cambio en la pendiente del perfil químico el cual es responsable del pico pronunciado en la frecuencia de Brunt-Väisälä en  $\log(1 - M_r/M_*) \approx -4$ . Como puede verse claramente en la Figura 6.9 para  $\ell = 1$  a 3, el equilibrio difusivo en la aproximación de *trace element* dá lugar a un espectro de energía cinética de oscilación y una distribución de espaciamientos de períodos que son sustancialmente diferentes respecto de aquellos dados por el tratamiento de la difusión dependiente del tiempo (ver Figuras 6.2 a 6.4), particularmente para largos períodos. El rasgo mas sobresaliente que puede apreciarse en la Figura 6.9 son los efectos de trapping exhibidos por ciertos modos en los valores de  $\log(E_{\text{kin}})_k$  y  $\Delta P_k$ . Esto está en buen acuerdo con otros resultados previos (ver Brassard et al. 1992b, particularmente sus figuras 20a y 21a para el

caso de  $M_{\text{H}} = 10^{-4} M_{*})^2$ . Como es bien conocido, los modos atrapados corresponden a aquellos modos caracterizados por mínimos en sus valores de energía cinética de oscilación y mínimos locales en el espaciado de períodos con igual valor de  $k$  o difiriendo en 1. Con el propósito de ilustración, en las Figuras 6.10 y 6.11 mostramos las predicciones del equilibrio difusivo en la aproximación de *trace element* y la difusión dependiente del tiempo, respectivamente, para la  $wf$  correspondiente a los modos  $g_{38}$  y  $g_{39}$  con  $\ell = 2$ . Claramente, en el caso de equilibrio difusivo en la aproximación de *trace element*, el modo  $g_{39}$  corresponde a un modo atrapado caracterizado por pequeños valores de la función de peso debajo de la transición hidrógeno-helio, en comparación con el modo no-atrapado adyacente,  $g_{38}$ . En contraste, tales modos muestran amplitudes similares de su  $wf$  cuando la difusión dependiente del tiempo es tomada en cuenta para modelar las regiones de transición en composición (ver Fig. 6.11).

Sobre la base de nuestros resultados, es claro que el tratamiento del perfil químico en las transiciones químicas es un ingrediente clave en el cálculo del espectro de modos  $g$  en enanas blancas. Esto es particularmente cierto considerando las propiedades de *mode trapping*, las cuales son considerablemente alteradas cuando un tratamiento físicamente autoconsistente de la evolución química es incorporado en tales cálculos. Esta conclusión es válida al menos para envolturas masivas de hidrógeno como aquellas predichas por cálculos evolutivos completos<sup>3</sup>.

Para estudiar más profundamente estos aspectos, examinaremos la distribución de nodos de las autofunciones para el caso  $\ell = 2$  (Figuras 6.12 y 6.13). De acuerdo a Brassard et al. (1992a), este es un diagnóstico útil de *mode trapping*. Específicamente, un modo es atrapado por encima de la interfase de hidrógeno-helio cuando su autofunción  $y_1$  tiene un nodo justo encima de tal interfase, y el correspondiente nodo en  $y_2$  está localizado justo debajo de aquella interfase. Notemos que esto se cumple claramente en nuestro modelo con equilibrio difusivo en la aproximación de *trace element*, como se puede ver en la Figura 6.12. En esta figura, la línea punteada vertical en  $r = 0.927 R_{*}$  indica la localización del pico pronunciado en la frecuencia de Brunt-Väisälä (ver Figura 6.8). Sin embargo, la distribución de nodos se torna marcadamente diferente en el modelo sin equilibrio difusivo y no es posible encontrar una interfase bien definida en este caso (ver Figura 6.13). Así, no es claro que la mencionada regla de *mode trapping* pueda ser aplicada directamente a este caso. En efecto, debido a que la interfase de hidrógeno-helio se torna muy suave en nuestros modelos, el pico en la frecuencia de Brunt-Väisälä es poco apreciable. De acuerdo a esto, la capacidad de resonancia mecánica de nuestro modelo se torna mas débil. Esto provoca que la distribución de nodos de las autofunciones sea diferente comparada con la correspondiente a la aproximación de equilibrio difusivo en la aproximación de *trace element*.

---

<sup>2</sup>Notemos que, como encontrado por Brassard et al. (1992a), el contraste entre los valores de energía cinética de los modos atrapados y aquellos de los no-atrapados no es muy grande para envolturas masivas de hidrógeno (como es el caso presentado aquí), debido al hecho de que la interfase hidrógeno-helio está localizada en una región profunda, de alta densidad, donde las amplitudes de las autofunciones son muy pequeñas.

<sup>3</sup>Sin embargo, ver la Sección siguiente.

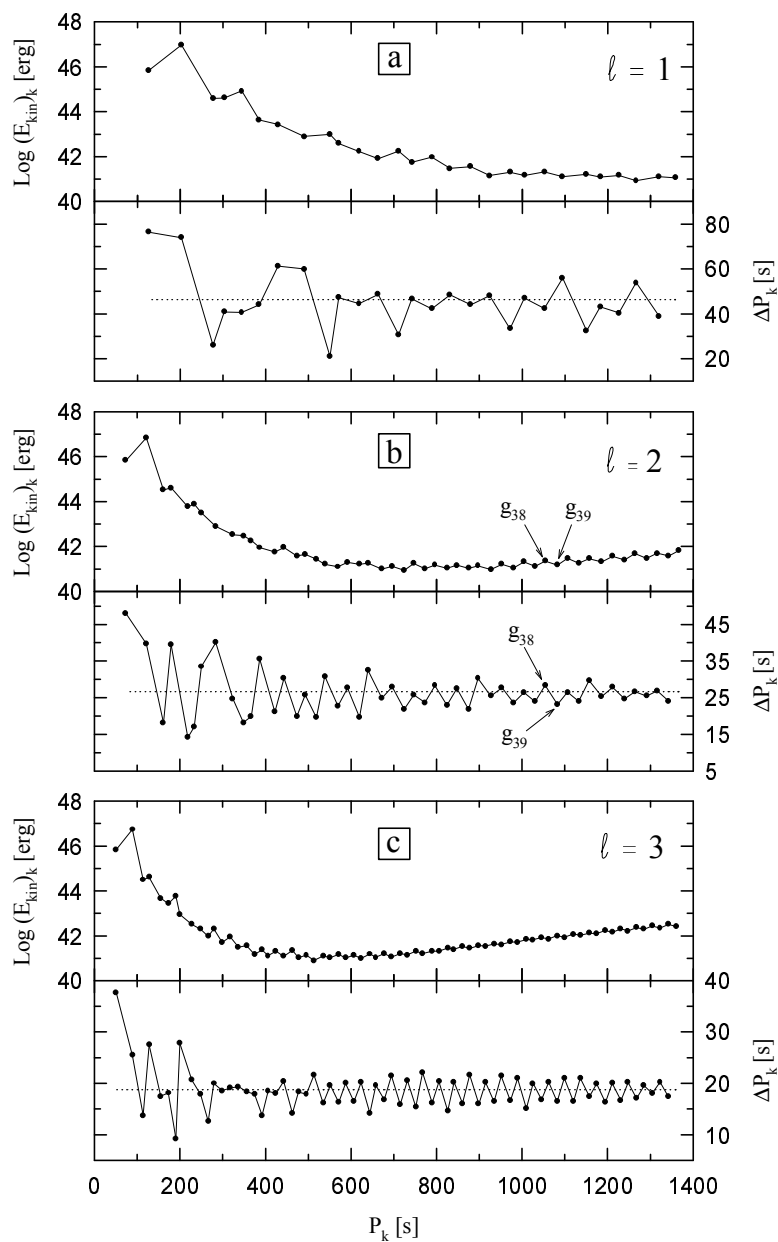


Figura 6.9: El logaritmo de la energía cinética de oscilación (panel superior) y el espaciamiento de períodos (panel inferior) para  $\ell = 1$  (Figura a),  $\ell = 2$  (Figura b) y  $\ell = 3$  (Figura c) en términos de los períodos calculados, para el caso del equilibrio difusivo en la aproximación de *trace element*. Comparar con Figuras 6.2 a 6.4.

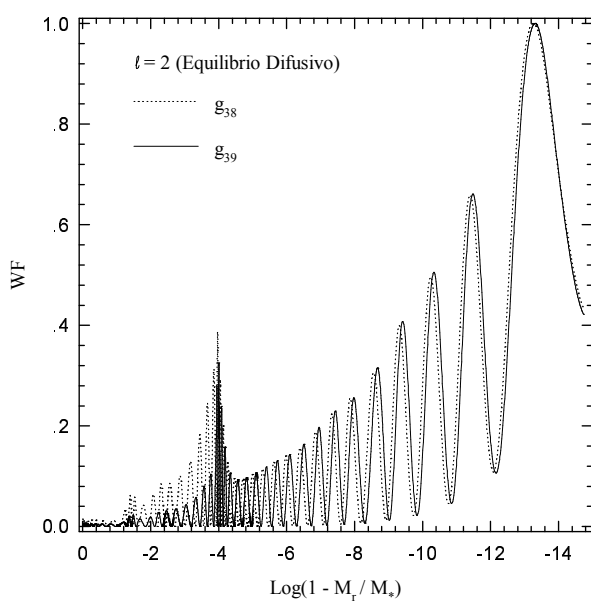


Figura 6.10: La función de peso normalizada para los modos  $g_{38}$  y  $g_{39}$  con  $\ell = 2$  correspondientes al modelo estelar en el que la transición química de hidrógeno-helio ha sido tratada según el equilibrio difusivo en la aproximación de *trace element*. Notemos la baja amplitud de  $wf$  debajo de la transición de hidrógeno-helio para el modo con  $k=39$ , el cual corresponde a un modo atrapado en la envoltura de hidrógeno.

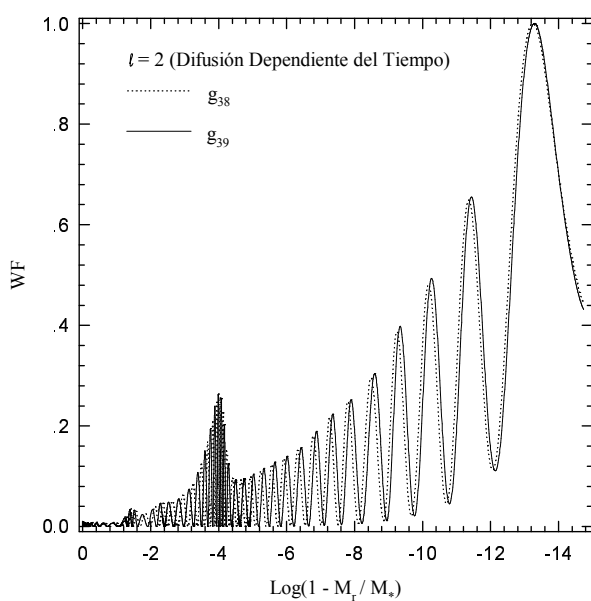


Figura 6.11: Igual que en la Figura 6.10, pero para el caso en el cual la transición química hidrógeno-helio ha sido calculada suponiendo difusión dependiente del tiempo.

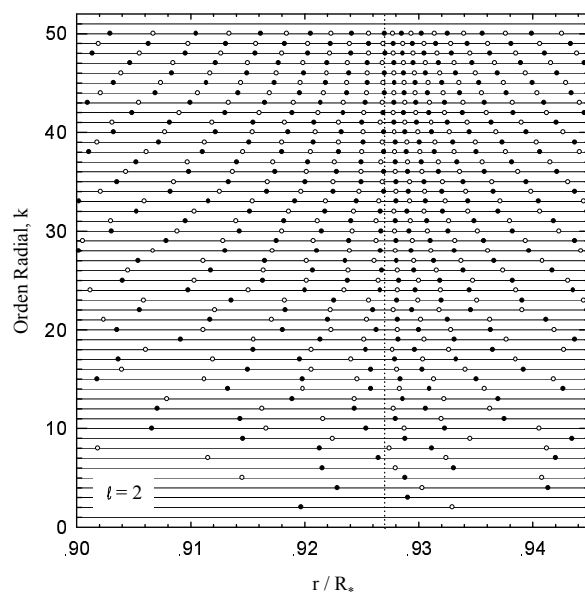


Figura 6.12: La distribución de nodos de las autofunciones  $y_1$  (puntos llenos) e  $y_2$  (puntos vacíos) en la región de la transición química de hidrógeno-helio para modos con  $\ell = 2$ , de acuerdo al equilibrio difusivo en la aproximación de *trace element*.

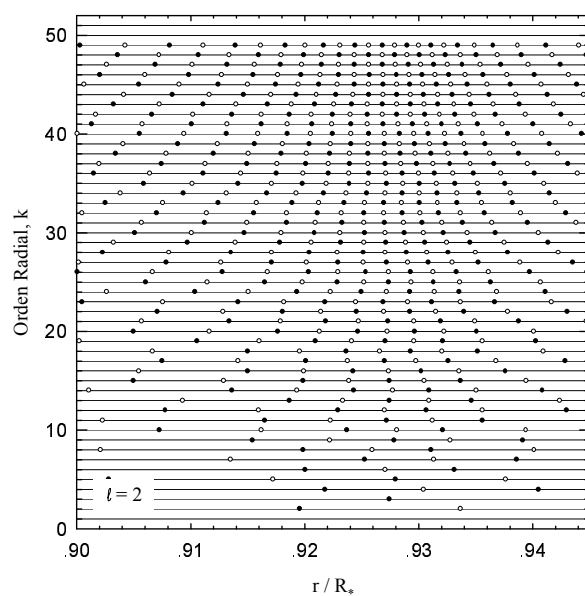


Figura 6.13: Igual que en la Figura 6.12, pero para el caso en que el perfil químico ha sido calculado de acuerdo a la difusión dependiente del tiempo.



## 6.2 Modelos con un rango de envolturas de hidrógeno

En esta Sección exploraremos los efectos de la difusión dependiente del tiempo sobre el fenómeno de *mode trapping* empleando modelos de enanas blancas con diversas masas para las envolturas de hidrógeno. También llevaremos a cabo una comparación con las predicciones del equilibrio difusivo en la aproximación de *trace element* en el modelado de la interfase química de hidrógeno-helio. A diferencia de lo hecho en la Sección anterior, aquí no emplearemos un tratamiento detallado de la evolución de pre-enana blanca. En vez de esto, obtendremos nuestros modelos iniciales en base al procedimiento artificial descrito en el Capítulo 4, Sección 4.1 (ver Althaus & Benvenuto 2000).

### 6.2.1 Resultados pulsacionales

Como hemos mencionado antes, nuestro objetivo aquí es explorar la importancia de la difusión de elementos sobre las propiedades de *trapping* de modos en modelos de enanas blancas DA con diferentes envolturas de hidrógeno. Con respecto a la masa de la envoltura de hidrógeno, hemos elegido los siguientes valores:  $\log(M_{\text{H}}/M_*) = -3.941, -4.692, -5.672, -6.700$  y  $-7.349$ . Finalmente, el perfil de composición interno de nuestros modelos es el de Salaris et al. (1997).

Aquí hemos calculado modos  $g$  con  $\ell = 1, 2, 3$ , para períodos en el rango de 100 a 1000 s, junto con los correspondientes valores para el espaciamiento de períodos  $\Delta P_k = P_{k+1} - P_k$  y la energía cinética de oscilación  $E_{\text{kin}}$  para cada modo. Los cálculos pulsacionales han sido llevados a cabo sobre modelos de enanas blancas de  $0.6 M_{\odot}$  en un rango de  $T_{\text{eff}}$  que cubre la banda de inestabilidad observada para las estrellas ZZ Ceti. Como antes, la frecuencia de Brunt-Väisälä ( $N$ ) ha sido obtenida empleando el tratamiento de Ledoux modificado (Ecuación 3.21 de esta Tesis; Brassard et al. 1991). La forma del término de Ledoux y la frecuencia de Brunt-Väisälä pueden apreciarse en la Figura 6.14, donde las líneas sólidas corresponden al tratamiento de la difusión dependiente del tiempo y las líneas de puntos al tratamiento del equilibrio difusivo en la aproximación de *trace element* aplicado a la interfase hidrógeno-helio. Notemos que el término  $B$  exhibe un pico muy pronunciado en las capas más profundas, como resultado del abrupto crecimiento de la abundancia del carbono desde un valor constante de  $X_{12\text{C}} \approx 0.15$  hasta  $X_{12\text{C}} \approx 0.4$  en  $\log(1 - M_r/M_*) \approx -0.45$  (ver panel superior de la Figura 4.2). La Figura 6.14 muestra claramente que este pico está presente en el perfil de la frecuencia de Brunt-Väisälä. Como veremos, la presencia de este pronunciado pico en  $N^2$  en regiones de alta densidad tiene consecuencias apreciables para la energía cinética de oscilación de ciertos modos.

A continuación describiremos los resultados de nuestros cálculos de pulsación. Para tal fin utilizaremos diagramas  $\log(E_{\text{kin}}) - P_k$  y  $\Delta P_k - P_k$ . Las Figuras 6.15 a 6.19 muestran los diagramas  $\log(E_{\text{kin}}) - P_k$  y  $\Delta P_k - P_k$  correspondientes a todos los valores de  $M_{\text{H}}/M_*$  considerados para modos con  $\ell = 1, 2, 3$  para modelos de enanas blancas con  $T_{\text{eff}} \approx 11800$  K. Las predicciones de la difusión dependiente del tiempo son mostradas con círculos llenos, y los resultados a partir de la aproximación de equilibrio difusivo en la aproximación de *trace element* son indicadas con círculos vacíos. Con la intención de clarificar las figuras, la escala para la energía cinética en el caso del equilibrio difusivo está desplazada hacia arriba. Para períodos cortos, las distribuciones de energía cinética de oscilación y espaciamiento de períodos son cualitativamente similares para ambos tratamientos de la difusión. Esto es particu-

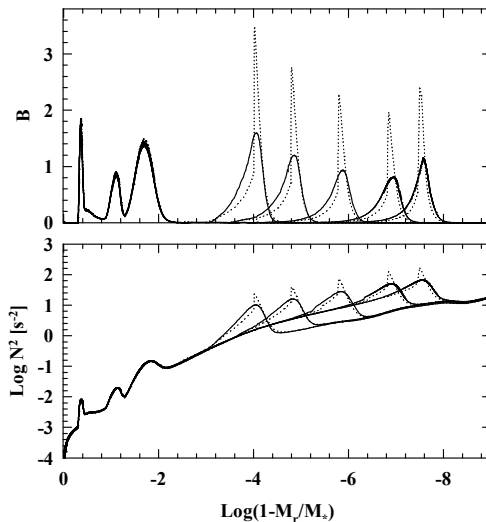


Figura 6.14: Panel superior: El término de Ledoux  $B$  para modelos de  $0.6 M_{\odot}$  y temperatura efectiva  $\approx 11800$  K, para los cinco valores de la masa de la envoltura de hidrógeno consideradas. Las líneas sólidas corresponden a nuestros modelos con difusión dependiente del tiempo, y las líneas de puntos muestran los resultados correspondientes al uso de la aproximación de *trace element*. Notemos que en el último caso  $B$  muestra picos muy agudos y de gran magnitud en la interfase hidrógeno-helio, en comparación con los resultados de la difusión dependiente del tiempo. Panel inferior: el logaritmo del cuadrado de la frecuencia de Brunt-Väisälä.

larmente notorio en el caso de los valores bajos de  $M_{\text{H}}/M_{*}$ . El rasgo sobresaliente ilustrado por estas figuras es el hecho de que a partir de un orden radial suficientemente alto, digamos  $k'$ , y dependiendo del valor de  $\ell$ , la distribución de energía cinética es notablemente suave cuando se trata de modelos con difusión dependiente del tiempo. Esto es válido aún para las envolturas más finas analizadas. Notemos que, particularmente para envolturas delgadas de hidrógeno, el valor  $k'$  se torna más pequeño en la medida en que el valor  $\ell$  se incrementa. Como una última observación, diremos que para la envoltura de hidrógeno más gruesa (ver Figura 6.15), la uniformidad de la distribución de energía cinética (esto es, la ausencia de señales apreciables de *mode trapping*) tiene lugar para períodos más largos que  $\approx 400 - 500$  s independientemente del valor de  $\ell$ <sup>4</sup>.

El comportamiento descrito en el párrafo precedente está en contraste con la situación encontrada para los modelos con equilibrio difusivo. En efecto, encontramos que, como resultado del empleo de la aproximación de *trace element*, la presencia de *mode trapping* se manifiesta para todo el rango de envolturas de hidrógeno y todo el intervalo de períodos considerado. Como mencionamos, este es un resultado encontrado por otros autores (Brassard et al. 1992ab; Bradley 1996). Los modos atrapados corresponden a mínimos locales en energía cinética. Notemos que, a medida que  $M_{\text{H}}/M_{*}$  decrece, el número de modos atrapados se torna marcadamente menor, y también el contraste en energía cinética entre modos atrapados y los no-atrapados se incrementa, como han encontrado Brassard et al. (1992b) (ver sus figuras 20a y 20b). Como ha sido detallado por estos autores, para modelos con

<sup>4</sup>Un resultado similar fue encontrado en la Sección anterior en el marco de cálculos evolutivos completos que toman en cuenta la historia del progenitor de la enana blanca.

envolturas gruesas de hidrógeno, la transición de hidrógeno-helio está localizada a profundidades relativamente grandes, de manera tal que las autofunciones radiales de los modos adoptan muy bajas amplitudes. Como consecuencia, la reducción en la amplitud de las autofunciones causada por la presencia de la interfase química no es muy apreciable para los modos atrapados, y entonces sus valores de  $E_{\text{kin}}$  no disminuyen mucho (see Figs. 6.15, 6.16 y 6.17). En contraste, para envolturas finas de hidrógeno, los mínimos en  $E_{\text{kin}}$  para modos atrapados es más notable, debido a que la interfase hidrógeno-helio está localizada en una región en la cual las autofunciones tienen mayores amplitudes.

La situación es muy diferente cuando la difusión dependiente del tiempo es adoptada para modelar las interfases químicas. Como resultado de la suavidad causada por la difusión de elementos, las autofunciones no son sustancialmente perturbadas por los cambios en densidad en las interfases. Entonces los modos tienen valores  $E_{\text{kin}}$  similares, al menos a partir de un dado valor  $k'$ . Así, concluimos que para todos los valores de  $M_{\text{H}}/M_*$ , la presencia de *mode trapping* se torna entonces considerablemente mas débil cuando la forma de la composición química en la interfase hidrógeno-helio es evaluada en el marco de la difusión en no-equilibrio. Sin embargo, notemos que las diferencias obtenidas entre ambos tratamientos de la difusión no son muy importantes en lo referente a la distribución de  $\Delta P_k$ . Una inspección cercana del comportamiento de esta cantidad revela la influencia de las otras interfases químicas, tales como la transición helio-carbono. Las señales de *mode trapping* causadas por esta interfase consisten en mínimos secundarios en  $\Delta P_k$ .

Otro interesante rasgo mostrados por estos diagramas es la presencia de ciertos modos caracterizados por valores realzados de sus energías cinéticas. La existencia de estos modos está relacionada con el pico más interno en el término de Ledoux. Estos modos están caracterizados por amplitudes relativamente grandes en la región central de alta densidad de la estrella. Esto puede claramente ser apreciado en la Figura 6.20, en la cual mostramos la densidad de energía cinética de oscilación ( $dE_{\text{kin}}/dr$ ) en función del radio estelar, correspondiente a los modos con  $k = 23, 24$  y  $25$  y  $\ell = 2$  en un modelo con  $\log(M_{\text{H}}/M_*) = -3.941$  (ver Figura 6.2). Esta función es proporcional al integrando de la Ecuación (3.18), y ha sido empleada, por ejemplo, por Gautschy, Ludwig & Freytag (1996). Dicha función proporciona información similar a la que dá la función de peso ( $wf$ ). Notemos la gran amplitud de  $dE_{\text{kin}}/dr$  correspondiente al modo centralmente realzado ( $k= 24$ ), comparado con los modos adyacentes ( $k= 23$  y  $25$ ). La presencia de modos centralmente realzados se traduce en mínimos muy pronunciados en los diagramas  $\Delta P_k - P_k$ . Un hallazgo similar ha sido reportado por Gautschy et al. (1996). Es también importante notar que en el caso de modelos con difusión dependiente del tiempo, la presencia de tales modos centralmente realzados en el espectro de energía es mucho mas clara que en el caso de modelos calculados bajo la suposición de equilibrio difusivo en la aproximación de *trace element*, en el cual el efecto de *mode trapping* en las capas externas es el rasgo dominante.

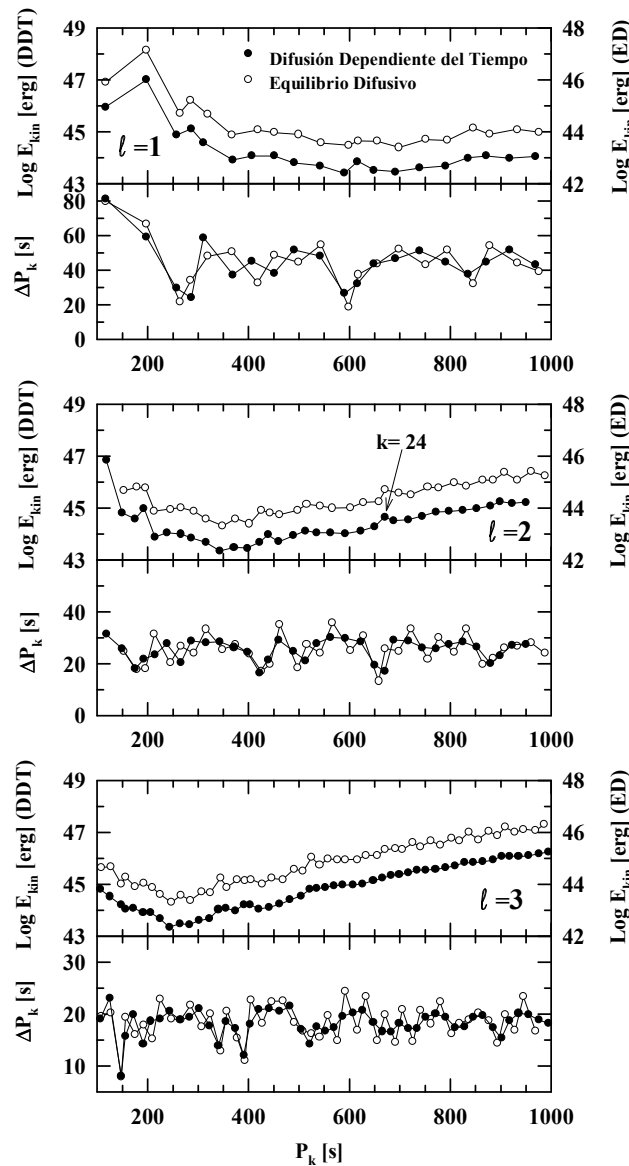


Figura 6.15: El logaritmo de la energía cinética de oscilación y el espaciamiento de períodos para grados armónicos  $\ell=1$  (paneles superiores),  $\ell=2$  (paneles centrales) y  $\ell=3$  (paneles inferiores), para un modelo de enana blanca de  $0.6 M_{\odot}$  a  $T_{\text{eff}} \approx 11800$  K y  $\log(M_{\text{H}}/M_{*}) = -3.941$ . Los valores de  $E_{\text{kin}}$  corresponden a la normalización usual  $y_1 = 1$  en  $r = R_{*}$ . Por claridad, la escala para la energía cinética en el caso de equilibrio difusivo está desplazada hacia arriba por 1 dex. La flecha indica un modo centralmente realzado con  $\ell = 2$ ,  $k = 24$ .

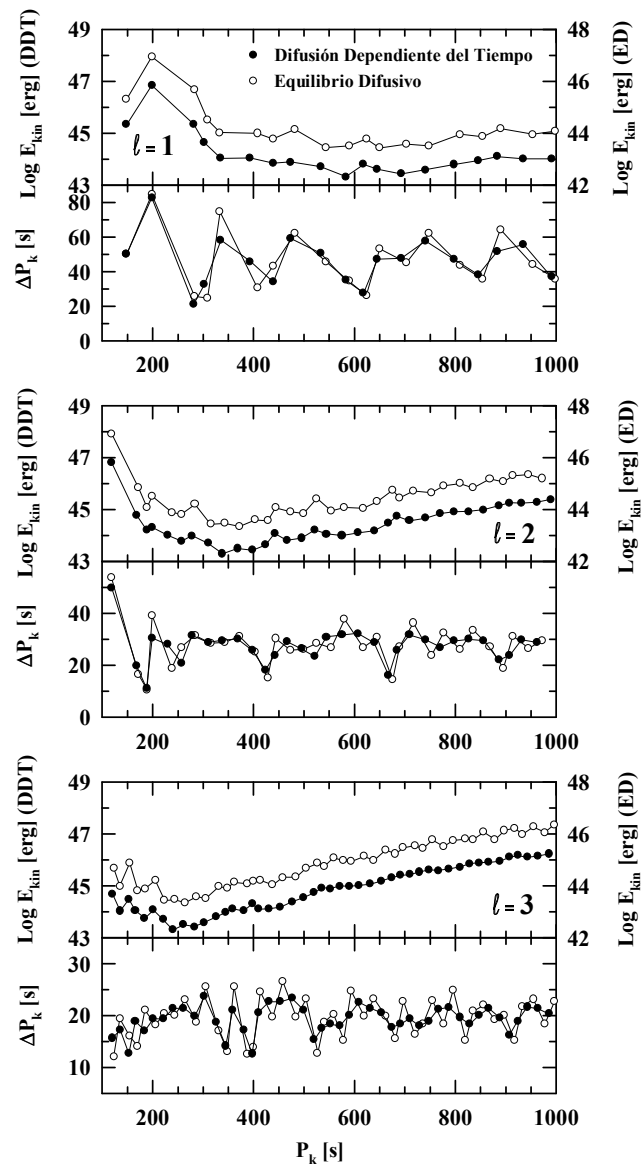


Figura 6.16: Igual que en la Figura 6.15, pero para  $\log(M_{\text{H}}/M_{*}) = -4.692$ .

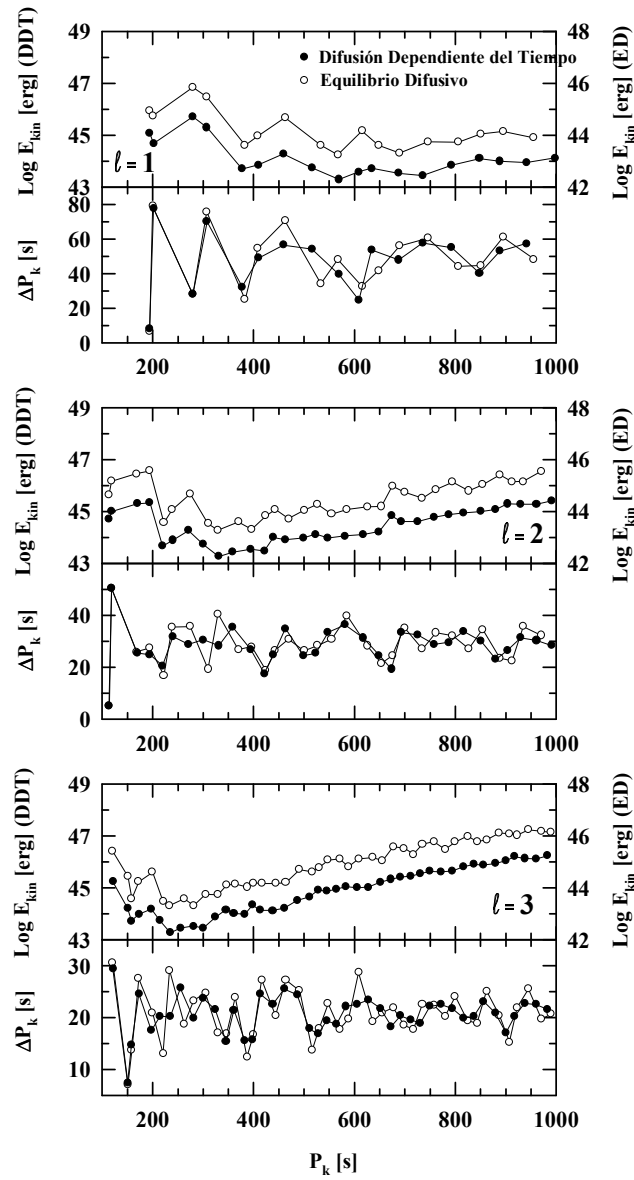


Figura 6.17: Igual que en la Figura 6.15, pero para  $\log(M_{\text{H}}/M_{*}) = -5.672$ .

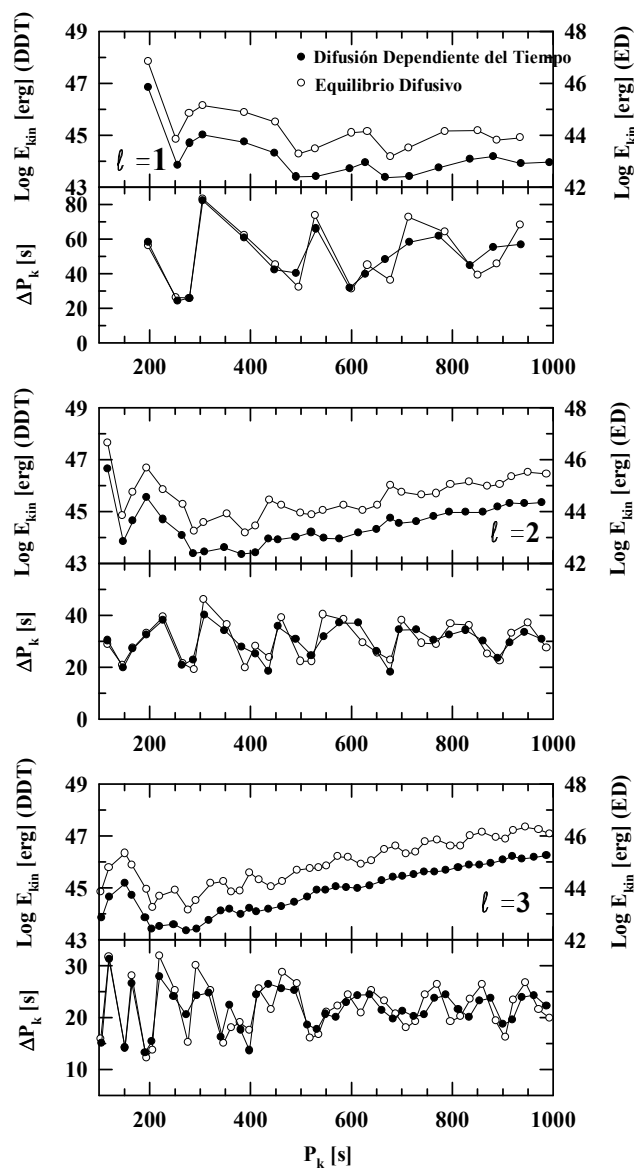


Figura 6.18: Igual que en la Figura 6.15, pero para  $\log(M_{\text{H}}/M_*) = -6.700$ .

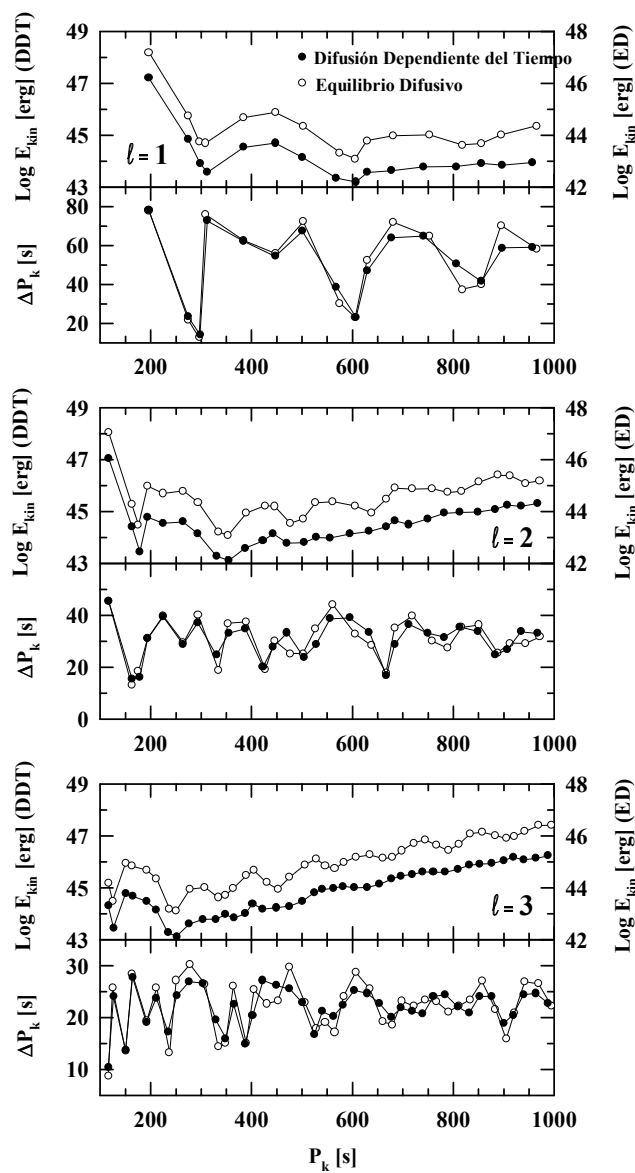


Figura 6.19: Igual que en la Figura 6.15, pero para  $\log(M_{\text{H}}/M_*) = -7.349$ .



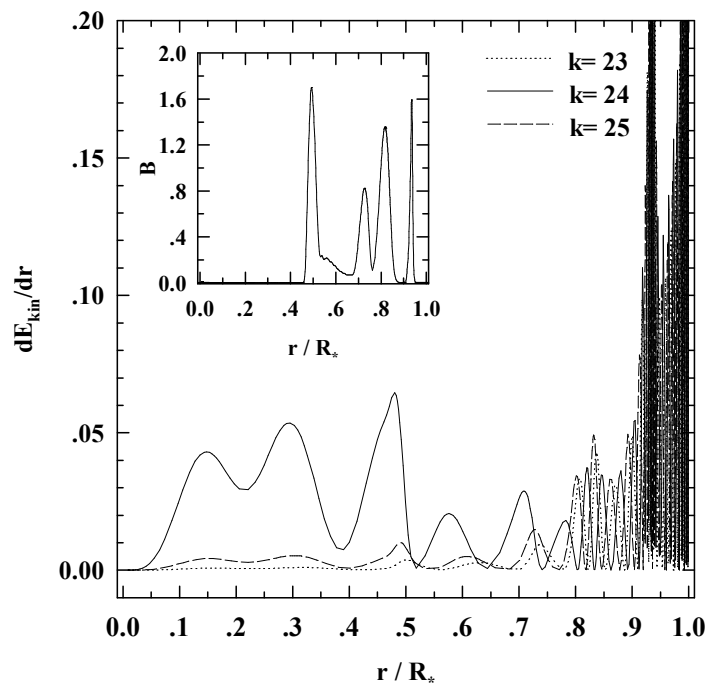


Figura 6.20: La densidad de energía cinética de oscilación ( $dE_{\text{kin}}/dr$ ) en función del radio estelar para modos con orden radial  $k = 23$  (línea de puntos),  $k = 24$  (línea sólida) y  $k = 25$  (línea de trazos) para  $\ell = 2$ . El modelo de enana blanca tiene una temperatura efectiva de  $T_{\text{eff}} \approx 11800$  K y una masa de la envoltura de hidrógeno  $M_{\text{H}}/M_* = -3.941$ . El panel interno muestra el perfil del término de Ledoux  $B$ . Notemos que el modo  $k = 24$  (el cual es un modo centralmente realzado) adopta grandes amplitudes de ( $dE_{\text{kin}}/dr$ ) en comparación con los modos adyacentes. Esto es particularmente cierto para la región limitada por el centro estelar y la localización del primer pico en  $B$ . Como resultado, el modo  $k = 24$  tiene un valor realzado de su energía cinética de oscilación ( $E_{\text{kin}}$ ) (ver Figura 6.15).

# Capítulo 7

## Conclusiones y proyectos futuros

A continuación enumeramos brevemente los principales hallazgos y conclusiones del presente trabajo de Tesis.

- El código de pulsaciones que hemos desarrollado funciona satisfactoriamente, no sólo para modelos estelares simples como las polítropas, sino también para el caso de modelos realistas de estrellas enanas blancas, proporcionando resultados que están en muy buen acuerdo con resultados independientes de otros investigadores.
- La aplicación de un tratamiento autoconsistente para el modelado de las regiones de transición química teniendo en cuenta los procesos de difusión microscópica dependiente del tiempo tiene un fuerte impacto sobre el espectro pulsacional de los modelos de estrellas ZZ Ceti, en particular en lo referente a los períodos de oscilación ( $P$ ) y su variación secular ( $\dot{P}$ ).
- Hemos puesto en evidencia la inconsistencia de la aproximación de *trace element* en el modelado de las transiciones de composición química, dado que, por construcción, dicha aproximación introduce una discontinuidad artificial en la derivada de los perfiles químicos. En efecto, este rasgo luego se traduce en formas abruptas de la frecuencia de Brunt-Väisälä en dichas regiones, que últimamente tienen serias consecuencias en el espectro pulsacional de los modelos estelares. También hemos hallado que la suposición de equilibrio difusivo, aún sin emplear la aproximación de *trace element*, es inadecuada para el modelado de las interfases químicas. De hecho, en nuestras simulaciones hemos encontrado que esta suposición conduce a un flash termonuclear de hidrógeno que aparta inmediatamente al modelo estelar de su track de enfriamiento de enana blanca en el régimen de las ZZ Ceti. Esto es válido al menos en un modelo de enana blanca con interior de carbono-oxígeno,  $M_* = 0.55M_\odot$  y una envoltura gruesa de hidrógeno.
- Nuestro tratamiento de la difusión dependiente del tiempo predice resultados astrosismológicos para el caso de la ZZ Ceti G117-B15A en buen acuerdo con los obtenidos por Bradley (1998b), quien empleó la aproximación de *trace element*. De todas maneras, cabe resaltar que en dicho análisis sólo cuatro períodos de oscilación son analizados (correspondientes a los períodos observados en esa estrella). Es factible encontrar diferencias más notables en un estudio astrosismológico de algún otro miembro de la clase de las ZZ Ceti donde un número mayor de períodos esté presente en su curva de luz.

- El fenómeno de *mode trapping* se debilita marcadamente cuando las interfases de composición química son tratadas mediante un esquema de difusión dependiente del tiempo, en contraposición al usualmente empleado hasta el momento, esto es, el equilibrio difusivo en la aproximación de *trace element*. Este debilitamiento del trapping de modos es particularmente notable en la región de períodos largos en modelos de enanas blancas con distintas masas de la envoltura de hidrógeno. Esta conclusión es válida al menos para modelos de enanas blancas de masa intermedia ( $M_* \approx 0.55 - 0.65 M_\odot$ ), aunque un efecto similar, quizás no tan notable, es esperable en modelos más masivos. El hecho de que el *mode trapping* sea mucho menos “eficiente” en nuestros nuevos resultados pone en duda la comúnmente aceptada creencia de que sólo los modos atrapados en la envoltura de hidrógeno de las ZZ Ceti son capaces de alcanzar amplitudes apreciables y ser observados.

En este punto, creemos que nuestro estudio adiabático de pulsaciones ha dado resultados suficientemente relevantes en el campo de las estrellas ZZ Ceti, y pensamos que sería muy interesante repetir estos cálculos, esta vez analizando las pulsaciones en el caso más general no-adiabático. Desde el punto de vista matemático, el problema es bastante más intrincado, dado que es necesario resolver un sistema de ecuaciones de sexto orden en variable compleja (equivalente a un problema de orden doce en variables reales), en lugar del problema adiabático, más simple, gobernado por un conjunto de cuatro ecuaciones en variable real. Al momento de finalizar la escritura de este manuscrito disponemos de una versión no-adiabática del código de pulsaciones presentado aquí. Entonces, el paso natural siguiente es poner a prueba y refinar esta nueva versión no-adiabática del código de pulsaciones, lo cual nos permitirá luego re-examinar varios puntos abordados en la presente Tesis, tales como el fenómeno de *mode trapping*. También, en este contexto, nos proponemos obtener una estimación de la temperatura efectiva del borde caliente de la banda de inestabilidad, y su dependencia con los diferentes tratamientos del transporte convectivo en la zona superficial de las ZZ Ceti. Planeamos analizar la excitación de modos no sólo a través del mecanismo  $\kappa$ , sino también implementar un nuevo mecanismo hallado muy recientemente, denominado *convective driving* (Goldreich & Wu 1999).

Otro aspecto que deseamos abordar en el futuro es el efecto de la cristalización sobre las pulsaciones en variables ZZ Ceti. Este no sería un mero ejercicio académico, dado que se tiene conocimiento de la existencia de una ZZ Ceti masiva, BPM 37093, de la cual se supone que debe tener gran parte de su interior en fase sólida.

Finalmente, es necesario decir que en todos los estudios futuros pondremos énfasis en el empleo de modelos estelares de enanas blancas lo más detallados posibles, que tengan en cuenta todos los procesos de evolución previa de sus progenitores, partiendo desde la secuencia principal. Este punto es extremadamente importante dado que, como se ha visto a lo largo de la Tesis, el espectro pulsacional de las enanas blancas es fuertemente dependiente de la distribución de abundancias químicas en sus interiores. El empleo de modelos con estas características nos permitirá también abordar el estudio de las otras tres clases de enanas blancas pulsantes: las DBVs, DOVs y las PNNVs.

# Apéndice A

## A.1 Ecuaciones de pulsación

En lo que sigue, vamos a partir de las conocidas ecuaciones de la hidrodinámica para llegar finalmente al conjunto de ecuaciones diferenciales cuya solución proporciona las autofunciones y autovalores (autofrecuencias) de oscilación para el caso de pulsaciones no-radiales adiabáticas y lineales en modelos estelares esféricamente simétricos (esto es, no rotantes y sin campos magnéticos). El tratamiento que seguiremos reproduce en forma abreviada la derivación de Unno et al. (1989).

Las ecuaciones básicas de la hidrodinámica son la ecuación de conservación de la masa

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{u}) = 0, \quad (\text{A.1})$$

la ecuación de conservación del momentum

$$\rho \left( \frac{\partial}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \right) \vec{u} = \rho \vec{f} - \vec{\nabla} p - \rho \vec{\nabla} \Phi + \text{div } \Upsilon, \quad (\text{A.2})$$

y la ecuación de conservación de la energía

$$\rho T \left( \frac{\partial}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \right) S = \rho (\varepsilon_N + \varepsilon_V) - \vec{\nabla} \cdot \vec{F}_R. \quad (\text{A.3})$$

Aquí  $\rho$  es la densidad,  $p$  la presión,  $T$  la temperatura,  $\vec{u}$  la velocidad del fluido,  $S$  la entropía específica,  $\Phi$  el potencial gravitatorio,  $\vec{f}$  las fuerzas externas,  $\Upsilon$  el tensor de tensiones de viscosidad,  $\varepsilon_N$  es el rate de generación de energía nuclear,  $\varepsilon_V$  es la generación de calor por viscosidad,  $\vec{F}_R$  el flujo radiativo de energía, y finalmente,  $\vec{\nabla}$  es el operador gradiente. Las otras ecuaciones a considerar son la de Poisson,

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G \rho, \quad (\text{A.4})$$

y la ecuación de difusión radiativa,

$$\vec{F}_R = -K \vec{\nabla} T, \quad (\text{A.5})$$

donde  $G$  es la constante de gravitación y  $\nabla^2$  el operador Laplaciano.  $K$  es la conductividad radiativa, dada por

$$K = \frac{4ac}{3\kappa\rho} T^3, \quad (\text{A.6})$$

siendo  $a$  la constante de densidad de radiación,  $c$  la velocidad de la luz y  $\kappa$  la opacidad radiativa. Haciendo las siguientes suposiciones:

- $\vec{f} \approx 0$  en ausencia de campo magnético y considerando un fluido autogravitante,
- $\text{div}\Upsilon \approx 0, \varepsilon_V \approx 0$  ya que la viscosidad es pequeña en el interior estelar en ausencia de convección,

y usando la notación  $\vec{v}$  para distinguir la velocidad sin convección de la  $\vec{u}$  (velocidad general que puede incluir campos de velocidad turbulentos), las Ecuaciones (A.1)-(A.5) pueden escribirse como:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = 0, \quad (\text{A.7})$$

$$\rho \left( \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \right) \vec{v} = -\vec{\nabla} p - \rho \vec{\nabla} \Phi, \quad (\text{A.8})$$

$$\rho T \left( \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \right) S = \rho \varepsilon_N - \vec{\nabla} \cdot \vec{F}_R. \quad (\text{A.9})$$

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G \rho, \quad (\text{A.10})$$

$$\vec{F}_R = -\frac{4ac}{3\kappa\rho} T^3 \vec{\nabla} T, \quad (\text{A.11})$$

siendo (A.8) la ecuación de Euler para un fluido no-viscoso.

Si ahora consideramos un estado de equilibrio (designando las correspondientes variables con subíndice 0), para el cual  $\vec{v}_0 = 0$  y  $\frac{\partial}{\partial t} = 0$ , las Ecuaciones (A.7)-(A.11) se transforman en:

$$-\vec{\nabla} p_0 - \rho_0 \vec{\nabla} \Phi_0 = 0, \quad (\text{A.12})$$

$$\rho_0 \varepsilon_{N,0} - \vec{\nabla} \cdot \vec{F}_{R,0} = 0, \quad (\text{A.13})$$

$$\nabla^2 \Phi_0 = 4\pi G \rho_0, \quad (\text{A.14})$$

$$\vec{F}_{R,0} = -K_0 \vec{\nabla} T. \quad (\text{A.15})$$

Nótese que la Ecuación (A.12) es la condición de equilibrio hidrostático.

Con el objeto de obtener las ecuaciones de oscilación, vamos a considerar que a este estado de equilibrio del sistema le aplicamos pequeñas perturbaciones. Ya que estas perturbaciones son pequeñas, el análisis será lineal, de modo que conservaremos términos a primer orden y descartaremos ordenes superiores. Perturbaciones de ciertas cantidades  $f$  pueden matemáticamente ser descritas de dos maneras, esto es, como variaciones Lagrangianas,  $\delta f$ , o Eulerianas,  $f'$ :

$$\begin{aligned} \delta f(\vec{r}, t) &= f(\vec{r}, t) - f_0(\vec{r}) \\ f'(\vec{r}, t) &= f(\vec{r}, t) - f_0(\vec{r}) \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

Definimos  $\vec{\xi} = \delta \vec{r} = \vec{r} - \vec{r}_0$  como la variación Lagrangiana de la posición de un elemento de fluido. La relación (a primer orden) entre los dos tipos de variaciones es (Lynden-Bell & Ostriker 1967):

$$\delta f(\vec{r}, t) = f'(\vec{r}, t) + \vec{\xi} \cdot \vec{\nabla} f_0(\vec{r}). \quad (\text{A.17})$$

La variación (Lagrangiana y Euleriana) en la velocidad, dado que  $\vec{v}_0 = 0$ , será:

$$\vec{v} = \delta\vec{v} = \vec{v}' = \frac{d\vec{\xi}}{dt}. \quad (\text{A.18})$$

A continuación vamos a linealizar las Ecuaciones (A.7)-(A.11), para lo cual escribiremos cada variable en su forma perturbada (empleando variaciones Eulerianas):

$$\rho = \rho_0 + \rho'; \quad p = p_0 + p'; \quad \Phi = \Phi_0 + \Phi'; \quad \dots; \quad \vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{v}' \quad (\text{A.19})$$

Reemplazando la forma (A.19) para las variables perturbadas en las Ecuaciones (A.7)-(A.11), despreciando términos conteniendo potencias  $\geq 2$  de las perturbaciones o productos de las mismas, y recordando que las variables en equilibrio satisfacen las Ecuaciones (A.12)-(A.15), obtenemos:

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho_0 \vec{v}') = 0, \quad (\text{A.20})$$

$$\rho_0 \frac{\partial \vec{v}'}{\partial t} + \vec{\nabla} p' + \rho_0 \vec{\nabla} \Phi' + \rho' \vec{\nabla} \Phi_0 = 0, \quad (\text{A.21})$$

$$\rho_0 T_0 \frac{\partial}{\partial t} (S' + \vec{\xi} \cdot \vec{\nabla} S_0) = (\rho \varepsilon_N)' - \vec{\nabla} \cdot \vec{F}'_R \quad (\text{A.22})$$

$$\nabla^2 \Phi' = 4\pi G \rho' \quad (\text{A.23})$$

$$\vec{F}'_R = -K_0 \vec{\nabla} T' - K' \vec{\nabla} T_0 \quad (\text{A.24})$$

Las Ecuaciones (A.20)-(A.24) constituyen un sistema de ecuaciones diferenciales parciales lineales y homogéneas, cuya solución proporciona las perturbaciones  $\rho'$ ,  $T'$ ,  $\Phi'$ , etc y la variación en la velocidad  $\vec{v} = \vec{v}' = \delta\vec{v}$  o la variación Lagrangiana del desplazamiento,  $\vec{\xi}$ . Los coeficientes son combinaciones de cantidades en equilibrio las cuales sólo dependen de la coordenada  $r$  dado que estamos considerando simetría esférica del modelo no-perturbado:  $\rho_0 = \rho_0(r)$ ,  $T_0 = T_0(r)$ ,  $\Phi_0 = \Phi_0(r)$ , etc. Por simplicidad en la notación, de aquí en más omitiremos los subíndices 0. Las perturbaciones (variaciones Eulerianas) son funciones del tiempo y las coordenadas:

$$\rho' = \rho'(r, \theta, \phi, t); \quad p' = p'(r, \theta, \phi, t); \quad \Phi' = \Phi'(r, \theta, \phi, t); \quad \text{etc}$$

En este punto podemos hacer una separación de variables, suponiendo que todas las perturbaciones tienen dependencia temporal oscilatoria de la forma  $e^{i\sigma t}$ , donde  $\sigma$  es la frecuencia angular de oscilación, la cual se relaciona con la frecuencia cíclica  $\nu$  y el período  $P$  a través de  $\nu = \sigma/2\pi = 1/P$ . De esta forma:

$$\begin{aligned} \rho'(r, \theta, \phi, t) &= \rho'(r, \theta, \phi) e^{i\sigma t} \\ p'(r, \theta, \phi, t) &= p'(r, \theta, \phi) e^{i\sigma t} \\ \Phi'(r, \theta, \phi, t) &= \Phi'(r, \theta, \phi) e^{i\sigma t} \\ \vec{\xi}(r, \theta, \phi, t) &= \vec{\xi}(r, \theta, \phi) e^{i\sigma t} \end{aligned} \quad (\text{A.25})$$

Consideremos la siguiente relación termodinámica (Unno et al. 1989):

$$\frac{\rho'}{\rho} = \frac{1}{\Gamma_1} \frac{p'}{p} - A \xi_r - \nabla_{\text{ad}} \frac{\rho T}{p} \delta S \quad (\text{A.26})$$

donde

$$\Gamma_1 = \left( \frac{\partial \ln p}{\partial \ln \rho} \right)_S; \quad \nabla_{\text{ad}} = \left( \frac{\partial \ln T}{\partial \ln p} \right)_S \quad (\text{A.27})$$

Aquí el subíndice  $S$  denota entropía constante,  $\xi_r$  es la componente radial de  $\vec{\xi}$ , y  $A$  es una conocida cantidad relacionada con la inestabilidad convectiva:

$$A = \frac{d \ln \rho}{dr} - \frac{1}{\Gamma_1} \frac{d \ln \rho}{dr}.$$

Utilizando las formas (A.25), la relación (A.26), y operando con las Ecuaciones (A.20)-(A.24) obtenemos:

$$\frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\rho g}{\Gamma_1 p} \right) p' - (\sigma^2 + gA) \xi_r + \frac{\partial \Phi'}{\partial r} = g \nabla_{\text{ad}} \frac{\rho T}{p} \delta S, \quad (\text{A.28})$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(r^2 \xi_r)}{\partial r} + \frac{1}{\Gamma_1} \frac{d \ln p}{dr} \xi_r + \left( \frac{\rho}{\Gamma_1 p} + \frac{\nabla_{\perp}^2}{\sigma^2} \right) \frac{p'}{\rho} + \frac{1}{\sigma^2} \nabla_{\perp}^2 \Phi' = \nabla_{\text{ad}} \frac{\rho T}{p} \delta S, \quad (\text{A.29})$$

$$\left( \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r} + \nabla_{\perp}^2 \right) \Phi' - 4\pi G \rho \left( \frac{p'}{\Gamma_1 p} - A \xi_r \right) = -4\pi G \nabla_{\text{ad}} \frac{\rho^2 T}{p} \delta S, \quad (\text{A.30})$$

$$i\sigma \rho T \delta S = (\rho \varepsilon_N)' - \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 F_r')}{\partial r} + \nabla_{\perp}^2 (K T'), \quad (\text{A.31})$$

$$F_r' = -K \frac{\partial T'}{\partial r} - K' \frac{dT'}{dr}, \quad (\text{A.32})$$

donde  $\nabla_{\perp}^2$  es el operador diferencial

$$\nabla_{\perp}^2 = \frac{1}{r^2} \frac{1}{\sin^2 \theta} \left[ \sin \theta \frac{\partial}{\partial r} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right], \quad (\text{A.33})$$

$F_r'$  es la componente radial de la variación Euleriana en el flujo,  $\vec{F}_R'$ .

En esta forma hemos eliminado la dependencia temporal. Las Ecuaciones (A.28)-(A.32) poseen coeficientes dependientes solamente de  $r$ , y el único operador diferencial respecto de los ángulos  $\theta$  y  $\phi$  es  $\nabla_{\perp}^2$ . Se puede entonces separar la dependencia angular de la radial en cada perturbación. La parte angular puede ser especificada a través de los armónicos esféricos  $Y_{\ell}^m(\theta, \phi)$ , los cuales son autofunciones del operador  $L^2 = r^2 \nabla_{\perp}^2$  (a veces denominado *Legendriano*) con autovalores  $\ell(\ell + 1)$ . Esto es:

$$L^2 Y_{\ell}^m(\theta, \phi) = \ell(\ell + 1) Y_{\ell}^m(\theta, \phi). \quad (\text{A.34})$$

donde los armónicos esféricos de grado  $\ell$  y orden acimutal  $m$  están dados por:

$$Y_{\ell}^m(\theta, \phi) = (-1)^{(m+|m|)/2} \left[ \frac{2\ell + 1}{2\pi} \frac{(\ell - |m|)!}{(\ell + |m|)!} \right]^{1/2} P_{\ell}^{|m|}(\cos \theta) e^{im\phi}$$

con  $m = -\ell, \dots, -1, 0, 1, \dots, \ell$ .

Con esta separación de variables, las perturbaciones toman la forma:

$$\begin{aligned} p'(r, \theta, \phi) &= p'(r)Y_\ell^m(\theta, \phi) \\ \Phi'(r, \theta, \phi) &= \Phi'(r)Y_\ell^m(\theta, \phi) \\ T'(r, \theta, \phi) &= T'(r)Y_\ell^m(\theta, \phi) \\ &\text{etc} \end{aligned} \tag{A.35}$$

y para la variación Lagrangiana del desplazamiento:

$$\vec{\xi}(r, \theta, \phi) = \left[ \xi_r(r), \xi_t(r) \frac{\partial}{\partial \theta}, \xi_t(r) \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \right] Y_\ell^m(\theta, \phi), \tag{A.36}$$

donde

$$\xi_t(r) = \frac{1}{\sigma^2 r} \left( \frac{p'}{\rho} + \Phi' \right) \tag{A.37}$$

Con las formas (A.35) para las perturbaciones, las Ecuaciones (A.28)-(A.32) toman la forma:

$$\frac{1}{\rho} \frac{dp'}{dr} + \frac{g}{\rho c_s^2} p' + (N^2 - \sigma^2) \xi_r + \frac{d\Phi'}{dr} = g \nabla_{\text{ad}} \frac{\rho T}{p} \delta S, \tag{A.38}$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{d(r^2 \xi_r)}{dr} + \frac{1}{\Gamma_1} \frac{d \ln p}{dr} \xi_r + \left( 1 - \frac{L_\ell^2}{\sigma^2} \right) \frac{p'}{\rho c_s^2} - \frac{\ell(\ell+1)}{\sigma^2 r^2} \Phi' = \nabla_{\text{ad}} \frac{\rho T}{p} \delta S, \tag{A.39}$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{d\Phi'}{dr} \right) - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} \Phi' - 4\pi G \rho \left( \frac{p'}{\rho c_s^2} + \frac{N^2}{g} \xi_r \right) = -4\pi G \nabla_{\text{ad}} \frac{\rho^2 T}{p} \delta S \tag{A.40}$$

$$K \frac{dT'}{dr} = -F'_r - K' \frac{dT}{dr} \tag{A.41}$$

$$i\sigma \rho T \delta S = (\rho \varepsilon_N)' - \frac{1}{r^2} \frac{r^2 F'_r}{dr} - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} K T', \tag{A.42}$$

siendo  $c_s = (\Gamma_1 p / \rho)^{1/2}$  la velocidad local del sonido.

$N$  y  $L_\ell$  son la frecuencias de Brunt-Väisälä y la frecuencia de Lamb, respectivamente, y están dadas por:

$$N^2 = g \left( \frac{1}{\Gamma_1} \frac{d \ln p}{dr} - \frac{d \ln \rho}{dr} \right) = -gA \tag{A.43}$$

$$L_\ell^2 = \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} c_s^2 \tag{A.44}$$

Estas dos frecuencias críticas juegan un papel fundamental en la teoría de oscilaciones estelares no-radiales. En particular, la frecuencia de Brunt-Väisälä define las características globales del espectro de modos  $g$ . En el caso de pulsaciones de enanas blancas el cómputo de esta cantidad requiere de un tratamiento numérico



especial, sobre todo en las regiones centrales (altamente degeneradas) de estas estrellas, donde se cumple que  $\Gamma_1^{-1}(d \ln p/dr) \sim (d \ln \rho/dr)$ . A raíz de esta propiedad, en el caso de las enanas blancas es necesario evaluar  $N$  con una formulación más adecuada desde el punto de vista numérico (Ver Eq. 3.21 del Capítulo 3).

Las Ecuaciones(A.38)-(A.42) proporcionan la parte de las perturbaciones que depende de  $r$ , esto es,  $p'(r)$ ,  $\Phi'(r)$ ,  $T'(r)$ , etc, en el caso de oscilaciones no-radiales, lineales, no-adiabáticas. En la *aproximación adiabática* se supone que no hay intercambio de calor entre las distintas partes del fluido al oscilar<sup>1</sup>. Esta condición es equivalente a decir que la entropía específica se conserva, de tal forma que

$$\delta S = 0. \quad (\text{A.45})$$

Con la condición (A.45), la relación termodinámica (A.26) adquiere la forma simple:

$$\rho' = \frac{p'}{c_s^2} + \frac{\xi_r \rho N^2}{g}, \quad (\text{A.46})$$

la cual proporciona la perturbación en densidad en términos de la perturbación en la presión. Las Ecuaciones (A.38)-(A.40) se reducen ahora a:

$$\frac{1}{r^2} \frac{d(r^2 \xi_r)}{dr} - \frac{g}{c_s^2} \xi_r + \left(1 - \frac{L_\ell^2}{\sigma^2}\right) \frac{p'}{\rho c_s^2} = \frac{\ell(\ell+1)}{\sigma^2 r^2} \Phi', \quad (\text{A.47})$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{dp'}{dr} + \frac{g}{\rho c_s^2} p' + (N^2 - \sigma^2) \xi_r = -\frac{d\Phi'}{dr}, \quad (\text{A.48})$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{d\Phi'}{dr} \right) - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} \Phi' = 4\pi G \rho \left( \frac{p'}{\rho c_s^2} + \frac{N^2}{g} \xi_r \right). \quad (\text{A.49})$$

Las Ecuaciones (A.47)-(A.49) junto con las condiciones de borde apropiadas para el centro ( $r = 0$ ) y la superficie estelar ( $r = R_*$ ), constituyen un problema de autovalores (con autovalor  $\sigma^2$ ) el cual debe resolverse para encontrar los modos normales de oscilación. Notemos aquí que ninguna de las Ecuaciones (A.47)-(A.49) involucra el orden acimutal ( $m$ ) en sus coeficientes, lo cual dá origen a una degeneración en los autovalores: hay  $2\ell + 1$  autovalores degenerados. Dicha degeneración es destruída por la presencia de, por ejemplo, rotación o campos magnéticos.

Las Ecuaciones (A.47)-(A.49) aplicadas a modelos estelares generales no poseen solución analítica<sup>2</sup> por lo cual es necesario resolverlas numéricamente. Para tal fin es adecuado reformularlas en términos de cantidades adimensionales. Consideremos los siguientes cambios de variables:

$$y_1 = \frac{\xi_r}{r}; \quad y_2 = \frac{1}{gr} \left( \frac{p'}{\rho} + \Phi' \right); \quad y_3 = \frac{1}{gr} \Phi'; \quad y_4 = \frac{1}{g} \frac{d\Phi'}{dr}; \quad \omega^2 = \frac{R_*^3}{GM_*} \sigma^2. \quad (\text{A.50})$$

De esta manera las incógnitas pueden expresarse como:

$$\xi_r = r y_1; \quad p' = \rho g r (y_2 - y_3); \quad \Phi' = g r y_3; \quad \frac{d\Phi'}{dr} = g y_4; \quad \sigma^2 = \frac{GM_*}{R_*^3} \omega^2 \quad (\text{A.51})$$

<sup>1</sup>La condición de adiabaticidad se cumple principalmente en las regiones internas de las estrellas, pero no en las regiones próximas a la superficie estelar.

<sup>2</sup>excepto para el caso de una esfera homogénea.

La sustitución de (A.51) en las Ecuaciones (A.47)-(A.49) dá, finalmente, el siguiente sistema de ecuaciones adimensionales:

$$x \frac{dy_1}{dr} = (V_g - 3) y_1 + \left[ \frac{\ell(\ell + 1)}{C_1 \omega^2} - V_g \right] y_2 + V_g y_3, \quad (\text{A.52})$$

$$x \frac{dy_2}{dr} = (C_1 \omega^2 - A^*) y_1 + (A^* - U + 1) y_2 - A^* y_3, \quad (\text{A.53})$$

$$x \frac{dy_3}{dr} = (1 - U) y_3 + y_4, \quad (\text{A.54})$$

$$x \frac{dy_4}{dr} = U A^* y_1 + U V_g y_2 + [\ell(\ell + 1) - U V_g] y_3 - U y_4, \quad (\text{A.55})$$

donde

$$V_g = \frac{V}{\Gamma_1} = -\frac{1}{\Gamma_1} \frac{d \ln p}{d \ln r} = \frac{gr}{c_s^2} = \frac{gr \rho}{\Gamma_1 p}, \quad (\text{A.56})$$

$$U = \frac{d \ln M_r}{d \ln r} = \frac{4\pi \rho r^3}{M_r}, \quad (\text{A.57})$$

$$C_1 = \left( \frac{r}{R_*} \right)^3 \frac{M_*}{M_r}, \quad (\text{A.58})$$

$$A^* = -r A = \frac{r}{g} N^2 = r \left( \frac{1}{\Gamma_1} \frac{d \ln p}{dr} - \frac{d \ln \rho}{dr} \right). \quad (\text{A.59})$$

La variable adimensional  $x$  es la coordenada radial escaleada con el radio estelar ( $x = r/R_*$ ),  $M_r$  es la masa dentro de una esfera de radio  $r$ , y  $M_*$  es la masa total de la estrella.

# Apéndice B

## B.1 La aproximación de Cowling

La aproximación de Cowling (Cowling 1941), consiste en despreciar la perturbación  $\Phi'$  y su derivada en las Ecuaciones (A.47-A.49) del Apéndice A. Esta es una muy buena aproximación en la medida en que uno considera modos de órdenes altos ( $k, \ell \gg 1$ ). De esta forma obtenemos:

$$\frac{1}{r^2} \frac{d(r^2 \xi_r)}{dr} - \frac{g}{c_s^2} \xi_r + \left(1 - \frac{L_\ell^2}{\sigma^2}\right) \frac{p'}{\rho c_s^2} = 0, \quad (\text{B.1})$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{dp'}{dr} + \frac{g}{\rho c_s^2} p' + (N^2 - \sigma^2) \xi_r = 0. \quad (\text{B.2})$$

Con el siguiente cambio de variables (Unno et al. 1989)

$$\tilde{\xi} = r^2 \xi_r \exp\left(-\int_0^r \frac{g}{c_s^2} dr\right), \quad (\text{B.3})$$

$$\tilde{\eta} = \frac{p'}{\rho} \exp\left(-\int_0^r \frac{N^2}{g} dr\right), \quad (\text{B.4})$$

las anteriores ecuaciones se transforman en

$$\frac{d\tilde{\xi}}{dr} = h(r) \frac{r^2}{c_s^2} \left(\frac{L_\ell^2}{\sigma^2} - 1\right) \tilde{\eta}, \quad (\text{B.5})$$

$$\frac{d\tilde{\eta}}{dr} = \frac{1}{r^2 h(r)} (\sigma^2 - N^2) \tilde{\xi}, \quad (\text{B.6})$$

donde

$$h(r) = \exp\left[\int_0^r \left(\frac{N^2}{g} - \frac{g}{c_s^2}\right) dr\right]. \quad (\text{B.7})$$

$N$  y  $L_\ell$  son, respectivamente, las frecuencia de Brunt-Väisälä y la frecuencia de Lamb (ver Apéndice A).

# Apéndice C

## C.1 Ecuaciones de estructura y evolución estelar

En ausencia de campos magnéticos, rotación y fuerzas de marea, las ecuaciones que describen la estructura y evolución de una estrella son:

$$\frac{\partial r}{\partial M_r} = \frac{1}{4\pi r^2 \rho}, \quad (\text{C.1})$$

$$\frac{\partial p}{\partial M_r} = -\frac{GM_r}{4\pi r^4}, \quad (\text{C.2})$$

$$\frac{\partial L_r}{\partial M_r} = \epsilon_n - \epsilon_\nu - C_p \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\delta}{\rho} \frac{\partial p}{\partial t}, \quad (\text{C.3})$$

$$\frac{\partial T}{\partial M_r} = -\frac{GM_r T}{4\pi r^4 p} \nabla. \quad (\text{C.4})$$

Las Ecuaciones (C.2), (C.3) y (C.4) representan el equilibrio hidrostático, la conservación de la energía, y la conservación y transporte de energía a través de la estrella. Aquí  $\delta = -(\partial \ln \rho / \partial \ln T)_p$  y  $\nabla = (d \ln T / d \ln p)$  es el gradiente de temperatura, cuyo valor dependerá de la manera en que el transporte de energía se realiza: en forma radiativa o convectiva. El resto de los símbolos tienen el significado usual.

Estas ecuaciones contienen funciones que describen las propiedades del material estelar tales como la densidad  $\rho$ , la energía liberada por reacciones nucleares  $\epsilon_n$ , las pérdidas de energía por neutrinos  $\epsilon_\nu$ , la opacidad  $\kappa$  y el calor específico  $C_p$ . Estas cantidades son funciones de la presión, temperatura y composición química, y son dadas por la microfísica particular del problema. Las Ecuaciones (C.1) a (C.4) constituyen un set de ecuaciones diferenciales parciales no lineales, siendo la coordenada masa  $M_r$  y el tiempo  $t$  las variables independientes.

Estas ecuaciones deben ser complementadas con las ecuaciones diferenciales que describen los cambios en las abundancias de composición química debido a reacciones nucleares, mezcla convectiva y difusión microscópica. En forma esquemática, estas ecuaciones pueden escribirse como

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} = \left( \frac{\partial n_i}{\partial t} \right)_{\text{nuc}} + \left( \frac{\partial n_i}{\partial t} \right)_{\text{mix}}, \quad i = 1, \dots, I \quad (\text{C.5})$$

donde  $n_i$  es el número de partículas por unidad de volumen de la especie  $i$ . El primer término del miembro derecho representa el cambio resultante de las reacciones nucleares, y el segundo el cambio producido por diferentes mecanismos de mezcla:

convección, semiconvección, difusión microscópica. Por cada especie química relevante hay una ecuación de la forma (C.5) y todas están acopladas entre sí, es decir que en realidad (C.5) representa un sistema de  $I$  ecuaciones diferenciales acopladas ( $I$  es el número total de especies nucleares consideradas).

Brevemente, consideremos la contribución debida a las reacciones nucleares. Una dada especie nuclear puede ser creada y aniquilada luego de numerosas reacciones nucleares con otras especies. Si  $\langle v\sigma \rangle_{ij}$  indica la tasa de reacciones nucleares por par de partículas entre las especies  $i$  y  $j$ , y  $\langle v\sigma \rangle_{kl}$  la correspondiente a las reacciones entre partículas  $k$  y  $l$  que producen partículas  $i$ , tenemos

$$\left(\frac{\partial n_i}{\partial t}\right)_{\text{nuc}} = -\sum_j \langle v\sigma \rangle_{ij} n_i n_j + \sum_{k,l} \langle v\sigma \rangle_{kl} n_k n_l \quad (\text{C.6})$$

La primer sumatoria corresponde a las reacciones que destruyen partículas de la especie  $i$ , mientras que la segunda corresponde a las reacciones que las crean. En particular, se utiliza un esquema de linealización implícito para la solución de estas ecuaciones (Arnett & Truran 1969).

La segunda contribución en la ecuación (C.5) representa una variedad muy amplia de procesos de mezcla que pueden modificar la composición química en una dada región de la estrella, de los cuales el más conocido es la convección. Con respecto a la convección, hemos considerado que los procesos de mezcla son instantáneos, dado que la escala de tiempo de dichos procesos son varios órdenes de magnitud menores que las escalas de tiempo en las cuales las especies químicas cambian por efectos de las reacciones nucleares.

Antes de terminar esta sección, mencionaremos brevemente la forma en que opera el código de evolución en relación a los cambios producidos en las abundancias de composición química. Los cambios de la composición química en un modelo estelar, dados por el conjunto de Ecuaciones (C.5), no son tratados en el código de evolución estelar de manera completamente autoconsistente con los cambios en las variables de estructura estelar. En efecto, al momento de integrar las ecuaciones de estructura estelar en un paso temporal ( $\Delta t$ ) la composición química se supone conocida. Una vez obtenidas  $T$ ,  $p$ ,  $r$  y  $L_r$  al tiempo, digamos,  $t_n$ , se avanza la composición química mediante la integración (empleando las variables de estructura en  $t_n$ ) de las Ecuaciones (C.5) al nuevo tiempo,  $t_{n+1} = t_n + \Delta t$ . Luego se avanzan las variables de estructura al tiempo  $t_{n+1}$ , y así sucesivamente. La resolución *simultánea* de las ecuaciones de estructura y de composición química implica un enorme costo computacional. De hecho, no es imprescindible cuando el paso temporal se mantiene suficientemente pequeño como para que, tanto las variables de estructura como la composición química, no cambian demasiado en cada paso de integración.

En la siguiente sección incluimos el formalismo considerado en nuestros cálculos para el tratamiento de la difusión microscópica.

## C.2 Ecuaciones de difusión

Bajo la influencia de la gravedad, presiones parciales, gradientes térmicos y campos eléctricos inducidos, las velocidades de difusión en un plasma multicomponente satisfacen el set de ecuaciones de difusión (Burgers 1969)

$$\frac{dp_i}{dr} - \frac{\rho_i}{\rho} \frac{dp}{dr} - n_i Z_i e E = \sum_{j \neq i}^N K_{ij} (w_j - w_i) + \sum_{j \neq i}^N K_{ij} z_{ij} \frac{m_j r_i - m_i r_j}{m_i + m_j}, \quad (\text{C.7})$$

y la ecuación de flujo de calor

$$\begin{aligned} \frac{5}{2} n_i k_B \nabla T = & -\frac{5}{2} \sum_{j \neq i}^N K_{ij} z_{ij} \frac{m_j}{m_i + m_j} (w_j - w_i) - \frac{2}{5} K_{ii} z_{ii}' r_i \\ & - \sum_{j \neq i}^N \frac{K_{ij}}{(m_i + m_j)^2} (3m_i^2 + m_j^2 z_{ij}' + 0.8m_i m_j z_{ij}'') r_i \\ & + \sum_{j \neq i}^N \frac{K_{ij} m_i m_j}{(m_i + m_j)^2} (3 + z_{ij}' - 0.8z_{ij}'') r_j. \end{aligned} \quad (\text{C.8})$$

Aquí,  $p_i$ ,  $\rho_i$ ,  $n_i$ ,  $Z_i$  y  $m_i$  significan, respectivamente, la presión parcial, densidad de masa, número densidad, carga media y masa para la especie  $i$  ( $N$  es el número de especies iónicas más los electrones).  $T$ ,  $k_B$  y  $\nabla T$  son la temperatura, la constante de Boltzmann y el gradiente de temperatura, respectivamente. Las variables desconocidas son las velocidades de difusión con respecto al centro de masa,  $w_i$ , y los flujos de calor residuales  $r_i$  (para iones y electrones). En adición, el campo eléctrico  $E$  debe ser determinado. Los coeficientes de resistencia ( $K_{ij}$ ,  $z_{ij}$ ,  $z_{ij}'$  y  $z_{ij}''$ ) son aquellos de Paquette et al (1986).

Para completar el set de ecuaciones, usamos las condiciones de flujo neto nulo de masa

$$\sum_i A_i n_i w_i = 0, \quad (\text{C.9})$$

y corriente eléctrica nula

$$\sum_i Z_i n_i w_i = 0. \quad (\text{C.10})$$

En términos del gradiente en el número densidad podemos transformar la Ecuación (C.7) en

$$\frac{1}{n_i} \left[ \sum_{j \neq i}^N K_{ij} (w_i - w_j) + \sum_{j \neq i}^N K_{ij} z_{ij} \frac{m_i r_j - m_j r_i}{m_i + m_j} \right] - Z_i e E = \alpha_i - k_B T \frac{d \ln n_i}{dr}, \quad (\text{C.11})$$

donde

$$\alpha_i = -A_i m_H g - k_B T \frac{d \ln T}{dr}, \quad (\text{C.12})$$

siendo  $A_i$ ,  $m_H$ ,  $g$  y  $T$  el número atómico, la masa del átomo de hidrógeno y la gravedad, respectivamente. Escribiendo las incógnitas  $w_i$ ,  $r_i$  y  $E$  en términos del gradiente de la densidad de iones en la forma (similarmente para  $r_i$  y  $E$ )

$$w_i = w_i^{gt} - \sum_{\text{iones}(j)} \sigma_{ij} \frac{d \ln n_j}{dr}, \quad (\text{C.13})$$

donde  $w_i^{gt}$  indica la componente de la velocidad debida a la sedimentación gravitacional y la difusión térmica. La suma en la Ecuación (C.13) es afectada sobre los iones solamente. Con las Ecuaciones (C.8) y (C.11) junto con (C.9) y (C.10) podemos fácilmente encontrar las componentes  $w_i^{gt}$  y  $\sigma_{ij}$  a través de inversiones matriciales.

Ahora estamos en condiciones de encontrar la evolución de la distribución de elementos a través del interior de la estrella resolviendo la ecuación de continuidad. Para tal fin, siguiendo el tratamiento de Iben & MacDonald (1985), escribimos la ecuación de continuidad como

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left[ r^2 \left( w_i^{gt} n_i - \sum_j \frac{n_i}{n_j} \sigma_{ij} \frac{\partial n_j}{\partial r} \right) \right], \quad (\text{C.14})$$

la cual es resuelta por medio de un esquema semi-implícito en diferencias finitas. más detalles son dados en Althaus & Benvenuto (2000). En particular, seguimos la evolución de los isótopos  $^1\text{H}$ ,  $^3\text{He}$ ,  $^4\text{He}$ ,  $^{12}\text{C}$ ,  $^{14}\text{N}$  y  $^{16}\text{O}$ . Las condiciones de borde para la Ecuación (C.14) son  $\partial n_i / \partial r = 0$  en el centro estelar y  $n_i = 0$  en la superficie. Con el objeto de calcular la dependencia de la estructura de la estrella con las abundancias variables en forma autoconsistente, el set de ecuaciones que describen la difusión ha sido acoplado al código evolutivo. Para tal fin, reemplazamos la condición de borde externa por la continuidad de la abundancia por masa  $X_i$  en la envoltura. En el centro, empleamos un desarrollo a segundo orden para  $n_i$ . Una vez computados los perfiles químicos que resultan de los procesos de difusión microscópica mencionados anteriormente, evaluamos los cambios de abundancia química inducidos por reacciones nucleares y mezcla convectiva. En particular, las opacidades radiativas son calculadas para metalicidades consistentes con lo predicho por la difusión microscópica.

### C.3 Aproximación de *trace element*

Aquí describimos las ecuaciones empleadas para incluir procesos de difusión suponiendo equilibrio difusivo en la aproximación *trace element*. Este tratamiento está basado en el trabajo de Arcoragi & Fontaine (1980) (ver también Tassoul et al. 1990). Nos limitaremos a comentar sólo los aspectos más importantes involucrados en este tratamiento.

Arcoragi & Fontaine (1980) consideran un plasma estelar constituido por dos especies iónicas con carga promedio  $Z_1$  y  $Z_2$  y peso atómico  $A_1$  y  $A_2$ . También,

la difusión térmica es despreciada y se considera la ecuación de estado de un gas ideal bajo la suposición de que el plasma está suficientemente diluído. Bajo estas aproximaciones la velocidad de difusión  $w_{12}$  es:

$$w_{12} = D_{12}(1 + \gamma) \left[ -\frac{\partial \ln c_2}{\partial r} + \frac{A_2 - A_1}{A_1 + \gamma A_2} \frac{\partial \ln p}{\partial r} + \frac{A_2 Z_1 - A_1 Z_2}{A_1 + \gamma A_2} \frac{eE}{k_B T} \right]. \quad (\text{C.15})$$

$D_{12}$  es el coeficiente de difusión, y  $c_i$ , la concentración de iones de especies  $i$ , está definido como

$$c_i \equiv \frac{n_i}{n_1 + n_2} = \frac{p_i}{p_1 + p_2} \quad (\text{C.16})$$

siendo  $p_i$  la presión parcial.  $E$  es el campo eléctrico, dado por

$$eE = m_p g \frac{A_1 Z_1 + A_2 Z_2 \gamma}{Z_1 (Z_1 + 1) + Z_2 (Z_2 + 1) \gamma}, \quad (\text{C.17})$$

y  $\gamma$  está definido como

$$\gamma \equiv \frac{n_2}{n_1} = \frac{p_2}{p_1} = \frac{c_2}{c_1}. \quad (\text{C.18})$$

El resto de los símbolos tienen el significado usual. Notemos que las Ecuaciones (C.16) y (C.18) son válidas en un medio isotérmico, esto es, se están despreciando gradientes de temperatura. Ahora imponemos la situación de equilibrio difusivo considerando  $w_{12} = 0$ , y a partir de las Ecuaciones (C.15-C.18) obtenemos la ecuación diferencial ordinaria para el perfil de equilibrio (ecuación A5 of Arcoragi & Fontaine 1980). En la aproximación de *trace element* ( $\gamma \ll 1$ ), para la especie 2 considerada como minoritaria, tenemos

$$\frac{\partial \ln c_2}{\partial r} = \alpha_2 \frac{\partial \ln q}{\partial r}, \quad (\text{C.19})$$

donde

$$\alpha_2 = \frac{A_2}{A_1} (1 + Z_1) - Z_2 - 1. \quad (\text{C.20})$$

Con el objeto de implementar este tratamiento, Tassoul et al. (1990) dividen la zona de transición en dos partes: una superior en la cual el elemento 1 es dominante y el elemento 2 es minoritario, y una inferior en la cual los roles de los respectivos elementos son invertidos. Para la región superior el perfil de abundancia para el elemento 2 considerado como minoritario está dado por la Ecuación (C.19) y para la parte inferior de la zona de transición la abundancia del elemento 1 (considerado como minoritario) está dada por

$$\frac{\partial \ln c_1}{\partial r} = \alpha_1 \frac{\partial \ln q}{\partial r}, \quad (\text{C.21})$$

donde

$$\alpha_1 = \frac{A_1}{A_2} (1 + Z_2) - Z_1 - 1. \quad (\text{C.22})$$



$q$  es la masa fraccional ( $1 - M_r/M_*$ ). La integración de las Ecuaciones (C.19) y (C.21) proporciona los perfiles de abundancia en equilibrio:

$$c_2 = k_2 q^{\alpha_2} \quad (\text{región superior de la interfase}) \quad (\text{C.23})$$

y

$$c_1 = k_1 q^{\alpha_1} \quad (\text{región inferior de la interfase}) \quad (\text{C.24})$$

Invocando la condición de continuidad en el punto medio de la interfase, obtenemos la relación

$$k_2 q_m^{\alpha_2} = k_1 q_m^{\alpha_1} = \frac{1}{2}, \quad (\text{C.25})$$

donde  $q_m$  es la masa fraccional donde las abundancias de los dos elementos son iguales; el valor  $q_m$  es obtenido forzando la conservación de la masa del elemento 1. Así, en el caso de la región de transición de hidrógeno-helio, la masa fraccional externa de hidrógeno ( $q_{\text{H}} = M_{\text{H}}/M_*$ ) es empleada para calcular  $q_m$ . Notemos que los posibles cambios en los perfiles de equilibrio resultan sólo de leves cambios en los estados de ionización de los elementos presentes en la interfase, o sea, variaciones en los exponentes  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  (Tassoul et al. 1990).

Para implementar este tratamiento en el modelado de la región de transición hidrógeno-helio, es necesario fijar pequeñas abundancias a cero para evitar la presencia de hidrógeno en regiones suficientemente profundas donde el carbono es abundante. Por otra parte, si no hacemos esto, tendríamos hidrógeno presente en regiones suficientemente calientes como para forzar a la estrella a experimentar un flash termonuclear.

# Apéndice D

## D.1 Autovalores de polítropas

En las Tablas D.1 a D.6 presentamos autovalores de polítropas con  $n = 1.5, 2, 2.5, 3, 3.5$  y 4 para modos  $p$ ,  $g$  y  $f$  en los casos  $\ell = 2, 3$  y 4. La columna encabezada con  $N_{y_1}$  indica el número total de nodos de la autofunción  $y_1 = \xi_r/r$ . Para los casos  $n = 3.5, 4$  (Tablas D.5 y D.6) dos columnas extras han sido incluídas,  $N_G$  y  $N_P$ , las cuales indican el número de nodos localizados en las zonas de propagación G y P, respectivamente (ver Figura 1.2). Nótese que para el caso  $n = 1.5$  no existen modos  $g$  (tienen autovalor  $\omega^2 = 0$ ). Un hecho notable es lo que sucede con el número de nodos en los casos  $n = 3.5$  y 4. Aquí el número total de nodos no se corresponde con el orden radial del modo (indicado por el subíndice de las letras  $g$  y  $p$ ). Como vimos al final de la Sección 1.2.2 de la Introducción, en modelos estelares con alta condensación central de masa, la correspondencia uno a uno entre el orden radial y el número de ceros de la autofunción radial deja de existir, y esto sucede en polítropas con  $n \gtrsim 3.25$ . Así, el modo  $f$  adquiere 2 nodos cuando  $n = 3.5$ , un nodo ubicado en la zona P y el otro en la zona G. De esta forma el modo  $f$  es un modo de carácter mixto, que oscila en ambas zonas de propagación. Para  $n = 4$  la situación es aún más anómala: en los casos  $\ell = 2$  y  $\ell = 3$  el modo  $f$  posee cuatro nodos, y en el caso  $\ell = 4$  seis nodos, repartidos simétricamente en las zonas P y G. En este caso incluso los modos  $p$  y  $g$  de bajo orden radial adquieren nodos extras (ver Tabla D6). En estos casos es necesario utilizar un esquema de clasificación adecuado, como el que ha sido provisto por Scuffaire (1974). La regla es asignar a los modos el orden radial de acuerdo a  $k = N_P - N_G$  ó  $k = N_G - N_P$ , dependiendo de que el mayor número de nodos esté localizado en la zona P o en la zona G, respectivamente. Como mencionamos antes, estos modos tienen naturaleza mixta, en el sentido de que oscilan en ambas zonas de propagación, G y P, y esto es una consecuencia de que la frecuencia de Brunt-Väisälä adquiere un máximo local en la zona central de los modelos politrópicos de alto índice  $n$ . Un diagrama de propagación para el caso  $n = 4$  con  $\ell = 2$  puede apreciarse en la figura 5 de Scuffaire (1974).

Tabla D.1: Autovalores  $\omega^2$  para modos  $p$  (índice politrópico  $n=1.5$ )

Modo	$\ell = 2$	$N_{y_1}$	$\ell = 3$	$N_{y_1}$	$\ell = 4$	$N_{y_1}$
p <sub>1</sub>	10.287120	1	13.658657	1	16.746470	1
p <sub>2</sub>	23.514952	2	28.608011	2	33.408750	2
p <sub>3</sub>	41.304993	3	48.184728	3	54.746908	3
p <sub>4</sub>	63.472905	4	72.196211	4	80.570788	4
p <sub>5</sub>	89.921092	5	100.53369	5	110.76522	5
p <sub>6</sub>	120.59360	6	133.13122	6	145.25664	6
p <sub>7</sub>	155.45677	7	169.94703	7	183.99629	7
p <sub>8</sub>	194.48965	8	210.95388	8	226.95107	8
p <sub>9</sub>	237.67871	9	256.13348	9	274.09793	9
p <sub>10</sub>	285.01513	10	305.47393	10	325.42428	10
p <sub>11</sub>	336.49254	11	358.96438	11	380.90745	11
p <sub>12</sub>	392.10842	12	416.60177	12	440.54933	12
p <sub>13</sub>	451.85606	13	478.37751	13	504.33964	13
p <sub>14</sub>	515.73657	14	544.29182	14	572.27541	14
p <sub>15</sub>	583.74940	15	614.34645	15	644.35374	15
p <sub>16</sub>	655.88803	16	688.52147	16	720.56327	16
p <sub>17</sub>	732.15757	17	766.86437	17	800.91826	17
p <sub>18</sub>	812.55919	18	849.28193	18	885.39665	18
p <sub>19</sub>	897.08178	19	935.85572	19	974.01502	19
p <sub>20</sub>	985.73912	20	1026.5748	20	1066.7759	20

Tabla D.2: Autovalores  $\omega^2$  para modos  $g$ ,  $f$ , y  $p$  (índice politrópico  $n=2.0$ )

Modo	$\ell = 2$	$N_{y_1}$	$\ell = 3$	$N_{y_1}$	$\ell = 4$	$N_{y_1}$
g <sub>20</sub>	0.0090505	20	0.0172918	20	0.0275532	20
g <sub>19</sub>	0.0099312	19	0.0189327	19	0.0301037	19
g <sub>18</sub>	0.0109474	18	0.0208192	18	0.0330258	18
g <sub>17</sub>	0.0121283	17	0.0230029	17	0.0363954	17
g <sub>16</sub>	0.0135119	16	0.0255501	16	0.0403094	16
g <sub>15</sub>	0.0151476	15	0.0285466	15	0.0448922	15
g <sub>14</sub>	0.0171008	14	0.0321052	14	0.0503057	14
g <sub>13</sub>	0.0194599	13	0.0363762	13	0.0567642	13
g <sub>12</sub>	0.0223462	12	0.0415641	12	0.0645557	12
g <sub>11</sub>	0.0259305	11	0.0479528	11	0.0740751	11
g <sub>10</sub>	0.0304587	10	0.0559456	10	0.0858756	10
g <sub>9</sub>	0.0362966	9	0.0661311	9	0.1007510	9
g <sub>8</sub>	0.0440071	8	0.0793966	8	0.1198744	8
g <sub>7</sub>	0.0544936	7	0.0971304	7	0.1450371	7
g <sub>6</sub>	0.0692830	6	0.1216056	6	0.1790874	6
g <sub>5</sub>	0.0911264	5	0.1567581	5	0.2267757	5
g <sub>4</sub>	0.1254077	4	0.2099006	4	0.2965133	4
g <sub>3</sub>	0.1838976	3	0.2959379	3	0.4043646	3
g <sub>2</sub>	0.2967409	2	0.4493971	2	0.5842435	2
g <sub>1</sub>	0.5633168	1	0.7674575	1	0.9185239	1
f	3.1132862	0	4.9535015	0	6.3308255	0
p <sub>1</sub>	11.554915	1	14.905582	1	17.846970	1
p <sub>2</sub>	24.074041	2	28.956621	2	33.421329	2
p <sub>3</sub>	40.631430	3	47.069877	3	53.070602	3
p <sub>4</sub>	61.132876	4	69.159996	4	76.723032	4
p <sub>5</sub>	85.510349	5	95.159545	5	104.31461	5
p <sub>6</sub>	113.71605	6	125.01832	6	135.79467	6
p <sub>7</sub>	145.71622	7	158.69909	7	171.12389	7
p <sub>8</sub>	181.48677	8	196.17411	8	210.27186	8
p <sub>9</sub>	221.01029	9	237.42258	9	253.21495	9
p <sub>10</sub>	264.27421	10	282.42881	10	299.93480	10
p <sub>11</sub>	311.26913	11	331.18065	11	350.41676	11
p <sub>12</sub>	361.98831	12	383.66943	12	404.65023	12
p <sub>13</sub>	416.42621	13	439.88751	13	462.62572	13
p <sub>14</sub>	474.57938	14	499.82895	14	524.33397	14
p <sub>15</sub>	536.44333	15	563.49001	15	589.77249	15
p <sub>16</sub>	602.01854	16	630.87095	16	658.93966	16
p <sub>17</sub>	671.30127	17	701.95824	17	731.81748	17
p <sub>18</sub>	744.28833	18	776.76071	18	808.42270	18
p <sub>19</sub>	821.00104	19	855.27543	19	888.73358	19
p <sub>20</sub>	901.38100	20	937.49004	20	972.76004	20

Tabla D.3: Autovalores  $\omega^2$  para modos  $g$ ,  $f$ , y  $p$  (índice politrópico  $n=2.5$ )

Modo	$\ell = 2$	$N_{y_1}$	$\ell = 3$	$N_{y_1}$	$\ell = 4$	$N_{y_1}$
g <sub>20</sub>	0.0323241	20	0.0616886	20	0.0981509	20
g <sub>19</sub>	0.0354461	19	0.0674898	19	0.1071376	19
g <sub>18</sub>	0.0390446	18	0.0741515	18	0.1174189	18
g <sub>17</sub>	0.0432229	17	0.0818536	17	0.1292567	17
g <sub>16</sub>	0.0481132	16	0.0908256	16	0.1429826	16
g <sub>15</sub>	0.0538875	15	0.1013636	15	0.1590211	15
g <sub>14</sub>	0.0607736	14	0.1138557	14	0.1779232	14
g <sub>13</sub>	0.0690778	13	0.1288184	13	0.2004142	13
g <sub>12</sub>	0.0792204	12	0.1469511	12	0.2274646	12
g <sub>11</sub>	0.0917899	11	0.1692204	11	0.2603966	11
g <sub>10</sub>	0.1076321	10	0.1969922	10	0.3010487	10
g <sub>9</sub>	0.1279978	9	0.2322482	9	0.3520381	9
g <sub>8</sub>	0.1548006	8	0.2779521	8	0.4171922	8
g <sub>7</sub>	0.1910896	7	0.3386992	7	0.5022877	7
g <sub>6</sub>	0.2419671	6	0.4219287	6	0.6163749	6
g <sub>5</sub>	0.3165095	5	0.5403380	5	0.7742860	5
g <sub>4</sub>	0.4321658	4	0.7170901	4	1.0017135	4
g <sub>3</sub>	0.6261217	3	0.9982630	3	1.3463946	3
g <sub>2</sub>	0.9899082	2	1.4870867	2	1.9055712	2
g <sub>1</sub>	1.8047750	1	2.4601694	1	2.9041745	1
f	4.8323226	0	6.6869120	0	7.8945800	0
p <sub>1</sub>	13.139580	1	16.454875	1	19.175228	1
p <sub>2</sub>	25.120923	2	29.839058	2	33.954235	2
p <sub>3</sub>	40.683145	3	46.802364	3	52.302546	3
p <sub>4</sub>	59.794614	4	67.323319	4	74.213599	4
p <sub>5</sub>	82.422405	5	91.374831	5	99.666546	5
p <sub>6</sub>	108.53770	6	118.93094	6	128.63867	6
p <sub>7</sub>	138.11650	7	149.96871	7	161.10861	7
p <sub>8</sub>	171.13923	8	184.46854	8	197.05729	8
p <sub>9</sub>	207.58993	9	222.41383	9	236.46800	9
p <sub>10</sub>	247.45570	10	263.79065	10	279.32632	10
p <sub>11</sub>	290.72603	11	308.58734	11	325.61978	11
p <sub>12</sub>	337.39250	12	356.79420	12	375.33778	12
p <sub>13</sub>	387.44797	13	408.40288	13	428.47099	13
p <sub>14</sub>	440.88737	14	463.40702	14	485.01211	14
p <sub>15</sub>	497.70504	15	521.79999	15	544.95349	15
p <sub>16</sub>	557.89876	16	583.57831	16	608.29060	16
p <sub>17</sub>	621.46388	17	648.73659	17	675.01749	17
p <sub>18</sub>	688.39912	18	717.27349	18	745.13261	18
p <sub>19</sub>	758.70042	19	789.18156	19	818.62472	19
p <sub>20</sub>	832.36747	20	864.46346	20	895.50026	20

Tabla D.4: Autovalores  $\omega^2$  para modos  $g$ ,  $f$ , y  $p$  (índice politrópico  $n=3.0$ )

Modo	$\ell = 2$	$N_{y_1}$	$\ell = 3$	$N_{y_1}$	$\ell = 4$	$N_{y_1}$
g <sub>20</sub>	0.0974808	20	0.185707	20	0.2948093	20
g <sub>19</sub>	0.1068543	19	0.203061	19	0.3215669	19
g <sub>18</sub>	0.1176544	18	0.222974	18	0.3521437	18
g <sub>17</sub>	0.1301872	17	0.245976	17	0.3873032	17
g <sub>16</sub>	0.1448456	16	0.272743	16	0.4280091	16
g <sub>15</sub>	0.1621408	15	0.304145	15	0.4754928	15
g <sub>14</sub>	0.1827482	14	0.341322	14	0.5313477	14
g <sub>13</sub>	0.2075745	13	0.385783	13	0.5976635	13
g <sub>12</sub>	0.2378604	12	0.439571	12	0.6772261	12
g <sub>11</sub>	0.2753390	11	0.505495	11	0.7738136	11
g <sub>10</sub>	0.3224916	10	0.587510	10	0.8926544	10
g <sub>9</sub>	0.3829773	9	0.691334	9	1.0411510	9
g <sub>8</sub>	0.4623623	8	0.825469	8	1.2300646	8
g <sub>7</sub>	0.5694591	7	1.003011	7	1.4755196	7
g <sub>6</sub>	0.7188911	6	1.244992	6	1.8025671	6
g <sub>5</sub>	0.9363708	5	1.586933	5	2.2518485	5
g <sub>4</sub>	1.2705178	4	2.092711	4	2.8928591	4
g <sub>3</sub>	1.8222705	3	2.886668	3	3.8524148	3
g <sub>2</sub>	2.8281515	2	4.236443	2	5.3811291	2
g <sub>1</sub>	4.9145734	1	6.766970	1	8.0029616	1
f	8.1753282	0	9.413778	0	10.052897	0
p <sub>1</sub>	15.263638	1	18.443581	1	20.751993	1
p <sub>2</sub>	26.723372	2	31.259984	2	34.896420	2
p <sub>3</sub>	41.473426	3	47.316174	3	52.236377	3
p <sub>4</sub>	59.427851	4	66.566361	4	72.762480	4
p <sub>5</sub>	80.566560	5	88.998609	5	96.470289	5
p <sub>6</sub>	104.87698	6	114.60450	6	123.35428	6
p <sub>7</sub>	132.34813	7	143.37581	7	153.40803	7
p <sub>8</sub>	162.96994	8	175.30437	8	186.62474	8
p <sub>9</sub>	196.73319	9	210.38227	9	222.99753	9
p <sub>10</sub>	233.62953	10	248.60200	10	262.51969	10
p <sub>11</sub>	273.65141	11	289.95649	11	305.18468	11
p <sub>12</sub>	316.79218	12	334.43937	12	350.98657	12
p <sub>13</sub>	363.04574	13	382.04455	13	399.91936	13
p <sub>14</sub>	412.40707	14	432.76698	14	451.97825	14
p <sub>15</sub>	464.87099	15	486.60121	15	507.15753	15
p <sub>16</sub>	520.43426	16	543.54378	16	565.45392	16
p <sub>17</sub>	579.09182	17	603.58933	17	626.86160	17
p <sub>18</sub>	640.84264	18	666.73630	18	691.37903	18
p <sub>19</sub>	705.68107	19	732.97891	19	758.99995	19
p <sub>20</sub>	773.60820	20	802.31762	20	829.72490	20

Tabla D.5: Autovalores  $\omega^2$  para modos  $g$ ,  $f$ , y  $p$  (índice politrópico  $n=3.5$ )

Modo	$\ell = 2$	$N_{y_1}$	$N_G$	$N_P$	$\ell = 3$	$N_{y_1}$	$N_G$	$N_P$	$\ell = 4$	$N_{y_1}$	$N_G$	$N_P$
g <sub>20</sub>	0.3188269	20	20	0	0.6057413	20	20	0	0.9582834	20	20	0
g <sub>19</sub>	0.3494416	19	19	0	0.6621446	19	19	0	1.0446974	19	19	0
g <sub>18</sub>	0.3847065	18	18	0	0.7268317	18	18	0	1.1433591	18	18	0
g <sub>17</sub>	0.4256160	17	17	0	0.8015109	17	17	0	1.2566987	17	17	0
g <sub>16</sub>	0.4734455	16	16	0	0.8883551	16	16	0	1.3877804	16	16	0
g <sub>15</sub>	0.5298525	15	15	0	0.9901623	15	15	0	1.5405122	15	15	0
g <sub>14</sub>	0.5970228	14	14	0	1.1105842	14	14	0	1.7199407	14	14	0
g <sub>13</sub>	0.6778861	13	13	0	1.2544589	13	13	0	1.9326730	13	13	0
g <sub>12</sub>	0.7764414	12	12	0	1.4283053	12	12	0	2.1874939	12	12	0
g <sub>11</sub>	0.8982623	11	11	0	1.6410747	11	11	0	2.4962852	11	11	0
g <sub>10</sub>	1.0513022	10	10	0	1.9053242	10	10	0	2.8754293	10	10	0
g <sub>9</sub>	1.2472218	9	9	0	2.2391038	9	9	0	3.3480094	9	9	0
g <sub>8</sub>	1.5036674	8	8	0	2.6690948	8	8	0	3.9473547	8	8	0
g <sub>7</sub>	1.8483383	7	7	0	3.2360116	7	7	0	4.7228976	7	7	0
g <sub>6</sub>	2.3266380	6	6	0	4.0042675	6	6	0	5.7500413	6	6	0
g <sub>5</sub>	3.0169858	5	5	0	5.0798067	5	5	0	7.1461729	5	5	0
g <sub>4</sub>	4.0628610	4	4	0	6.6415924	4	4	0	9.0834124	4	4	0
g <sub>3</sub>	5.7411891	3	3	0	8.9586192	3	3	0	11.463156	3	3	0
g <sub>2</sub>	8.5456644	2	2	0	11.654023	2	2	0	13.071750	2	2	0
g <sub>1</sub>	12.098295	1	1	0	14.378194	1	1	0	17.251649	1	1	0
f	16.165369	2	1	1	20.297012	2	1	1	22.564853	2	1	1
p <sub>1</sub>	0.3188269	1	0	1	0.6057413	1	0	1	0.9582834	1	0	1
p <sub>2</sub>	0.3494416	2	0	2	0.6621446	2	0	2	1.0446974	2	0	2
p <sub>3</sub>	0.3847065	3	0	3	0.7268317	3	0	3	1.1433591	3	0	3
p <sub>4</sub>	0.4256160	4	0	4	0.8015109	4	0	4	1.2566987	4	0	4
p <sub>5</sub>	0.4734455	5	0	5	0.8883551	5	0	5	1.3877804	5	0	5
p <sub>6</sub>	0.5298525	6	0	6	0.9901623	6	0	6	1.5405122	6	0	6
p <sub>7</sub>	0.5970228	7	0	7	1.1105842	7	0	7	1.7199407	7	0	7
p <sub>8</sub>	0.6778861	8	0	8	1.2544589	8	0	8	1.9326730	8	0	8
p <sub>9</sub>	0.7764414	9	0	9	1.4283053	9	0	9	2.1874939	9	0	9
p <sub>10</sub>	0.8982623	10	0	10	1.6410747	10	0	10	2.4962852	10	0	10
p <sub>11</sub>	1.0513022	11	0	11	1.9053242	11	0	11	2.8754293	11	0	11
p <sub>12</sub>	1.2472218	12	0	12	2.2391038	12	0	12	3.3480094	12	0	12
p <sub>13</sub>	1.5036674	13	0	13	2.6690948	13	0	13	3.9473547	13	0	13
p <sub>14</sub>	1.8483383	14	0	14	3.2360116	14	0	14	4.7228976	14	0	14
p <sub>15</sub>	2.3266380	15	0	15	4.0042675	15	0	15	5.7500413	15	0	15
p <sub>16</sub>	3.0169858	16	0	16	5.0798067	16	0	16	7.1461729	16	0	16
p <sub>17</sub>	4.0628610	17	0	17	6.6415924	17	0	17	9.0834124	17	0	17
p <sub>18</sub>	5.7411891	18	0	18	8.9586192	18	0	18	11.463156	18	0	18
p <sub>19</sub>	8.5456644	19	0	19	11.654023	19	0	19	13.071750	19	0	19
p <sub>20</sub>	12.098295	20	0	20	14.378194	20	0	20	17.251649	20	0	20

Tabla D.6: Autovalores  $\omega^2$  para modos  $g$ ,  $f$ , y  $p$  (índice politrópico  $n=4.0$ )

Modo	$\ell = 2$	$N_{y_1}$	$N_G$	$N_P$	$\ell = 3$	$N_{y_1}$	$N_G$	$N_P$	$\ell = 4$	$N_{y_1}$	$N_G$	$N_P$
g <sub>20</sub>	1.4155110	20	20	0	2.6797302	20	20	0	4.2195049	20	20	0
g <sub>19</sub>	1.5514526	19	19	0	2.9288602	19	19	0	4.5985195	19	19	0
g <sub>18</sub>	1.7079907	18	18	0	3.2144253	18	18	0	5.0309042	18	18	0
g <sub>17</sub>	1.8895048	17	17	0	3.5438751	17	17	0	5.5271052	17	17	0
g <sub>16</sub>	2.1016001	16	16	0	3.9266517	16	16	0	6.1002050	16	16	0
g <sub>15</sub>	2.3515430	15	15	0	4.3748559	15	15	0	6.7667137	15	15	0
g <sub>14</sub>	2.6488840	14	14	0	4.9041781	14	14	0	7.5475834	14	14	0
g <sub>13</sub>	3.0063713	13	13	0	5.5352102	13	13	0	8.4693828	13	13	0
g <sub>12</sub>	3.4413128	12	12	0	6.2952953	12	12	0	9.5650741	12	12	0
g <sub>11</sub>	3.9776531	11	11	0	7.2210701	11	11	0	10.871193	11	11	0
g <sub>10</sub>	4.6492096	10	10	0	8.3615885	10	10	0	12.400304	10	10	0
g <sub>9</sub>	5.5048103	9	9	0	9.7800554	9	9	0	13.964450	9	9	0
g <sub>8</sub>	6.6165208	8	8	0	11.539484	8	8	0	15.400874	8	8	0
g <sub>7</sub>	8.0923471	7	7	0	13.562006	7	7	0	17.649221	7	7	0
g <sub>6</sub>	10.090474	6	6	0	15.412331	6	6	0	20.820250	8	7	1
g <sub>5</sub>	12.768193	5	5	0	18.016939	5	5	0	24.071739	7	6	1
g <sub>4</sub>	15.357911	4	4	0	21.777947	6	5	1	26.338994	6	5	1
g <sub>3</sub>	18.003959	5	4	1	24.986716	5	4	1	31.899209	5	4	1
g <sub>2</sub>	23.008664	4	3	1	30.244567	4	3	1	37.514588	6	4	2
g <sub>1</sub>	27.596060	3	2	1	35.949569	5	3	2	41.412658	5	3	2
f	34.336477	4	2	2	42.425766	4	2	2	52.511538	6	3	3
p <sub>1</sub>	42.138603	3	1	2	51.003411	5	2	3	55.566767	5	2	3
p <sub>2</sub>	50.815507	4	1	3	61.388277	4	1	3	71.589601	6	2	4
p <sub>3</sub>	62.880905	5	1	4	69.685188	5	1	4	76.082462	5	1	4
p <sub>4</sub>	76.685759	4	0	4	88.007631	6	1	5	93.375311	6	1	5
p <sub>5</sub>	87.471007	5	0	5	99.539032	5	0	5	111.20699	7	1	6
p <sub>6</sub>	105.28724	6	0	6	112.52192	6	0	6	117.58847	6	0	6
p <sub>7</sub>	128.44523	7	0	7	137.11513	7	0	7	143.56934	7	0	7
p <sub>8</sub>	154.80133	8	0	8	164.86265	8	0	8	172.52099	8	0	8
p <sub>9</sub>	183.97366	9	0	9	195.33318	9	0	9	204.13288	9	0	9
p <sub>10</sub>	215.85577	10	0	10	228.46119	10	0	10	238.38101	10	0	10
p <sub>11</sub>	250.40619	11	0	11	264.22586	11	0	11	275.25783	11	0	11
p <sub>12</sub>	287.60539	12	0	12	302.61839	12	0	12	314.75983	12	0	12
p <sub>13</sub>	327.44299	13	0	13	343.63453	13	0	13	356.88503	13	0	13
p <sub>14</sub>	369.91300	14	0	14	387.27208	14	0	14	401.63225	14	0	14
p <sub>15</sub>	415.01173	15	0	15	433.52988	15	0	15	449.00068	15	0	15
p <sub>16</sub>	462.73675	16	0	16	482.40727	16	0	16	498.98976	16	0	16
p <sub>17</sub>	513.08632	17	0	17	533.90382	17	0	17	551.59903	17	0	17
p <sub>18</sub>	566.05917	18	0	18	588.01928	18	0	18	606.82815	18	0	18
p <sub>19</sub>	621.65436	19	0	19	644.75353	19	0	19	664.67689	19	0	19
p <sub>20</sub>	679.87114	20	0	20	704.10652	20	0	20	725.14508	20	0	20



# Bibliografía

- Alexander D. R., & Ferguson J. W., 1994, *The Astrophysical Journal*, 437, 879
- Althaus L. G., & Benvenuto O. G., 1997, *The Astrophysical Journal*, 477, 313
- Althaus L. G., & Benvenuto O. G., 2000, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 317, 952
- Althaus L. G., Serenelli A. M., & Benvenuto O. G., 2001, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 323, 471
- Althaus L. G., Serenelli A. M., Córscico, A. H., & Benvenuto O. G., 2002, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 330, 685 (**Capítulo 2**)
- Angulo C., et al., 1999, *Nuclear Physics A*, 656, 3
- Ando, H., & Osaki, Y., 1975, *Publications of the Astronomical Society of Japan*, 27, 581
- Arcoragi J.-P., & Fontaine G., 1980, *The Astrophysical Journal*, 242, 1208
- Arnett, W. D., Truran, J. W., *The Astrophysical Journal*, 154, 339
- Beauchamp, A., Wesemael, F., Bergeron, P., Fontaine, G., Saffer, R. A., Liebert, J., & Brassard, P., 1999, *The Astrophysical Journal*, 516, 887
- Benvenuto, O. G., & Althaus, L. G., 1998, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 293, 177
- Benvenuto, O. G., Córscico, A. H., Althaus, L. G., & Serenelli, 2002, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 332, 399 (**Capítulo 4**).
- Benvenuto, O. G., Córscico, A. H., Althaus, L. G., & Serenelli, A. M., 2002, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 335, 480 (**Capítulo 6**)
- Bergeron, P., Saffer, R. A., & Liebert, J., 1992, *The Astrophysical Journal*, 394, 228
- Bergeron, P., Wesemael, F., & Beauchamp, A., 1995, *Publications of the Astronomical Society of the Pacific*, 107, 1047
- Bergeron, P., Wesemael, F., Lamontagne, R., Fontaine, G., Saffer, R. A., & Allard, N. F., 1995, *The Astrophysical Journal*, 449, 258
- Böhm-Vitense E., 1958, *Zeitschrift Astrophysics*, 46, 108
- Bond, H. E., Grauer, A. D., Green, R. F., & Liebert, J. W., 1984, *The Astrophysical Journal*, 279, 751
- Bradley, P. A., & Winget, D. E., 1994, *The Astrophysical Journal*, 421, 236
- Bradley, P. A., 1996, *The Astrophysical Journal*, 468, 350
- Bradley, P. A., & Kleinman, S. J., 1997, *White dwarfs*, ASSL, 214, 445

- Bradley, P. A., 1998a, *Baltic Astronomy*, 7, 111
- Bradley, P. A., 1998b, *The Astrophysical Journal Supplement*, 116, 307
- Bradley, P. A., 2000, *Baltic Astronomy*, 9, 485
- Bradley, P. A., 2001, *The Astrophysical Journal*, 552, 326
- Brassard, P., Fontaine, G., Wesemael, F., Kawaler, S. D., & Tassoul, M., 1991, *The Astrophysical Journal*, 367, 601
- Brassard, P., Fontaine, G., Wesemael, F., & Hansen, C. J., 1992a, *The Astrophysical Journal Supplement*, 80, 369
- Brassard, P., Fontaine, G., Wesemael, F., & Tassoul, M., 1992b, *The Astrophysical Journal Supplement*, 81, 747
- Brassard, P., Fontaine, G., Wesemael, F., Talon, A., 1993, in *White Dwarfs: Advances in Observations and Theory*, Ed.: M. A. Barstow (Dordrecht: Kluwer Academic Publishers), 485
- Brickhill, A. J., 1975, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 170, 404
- Brickhill, A. J., 1991, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 251, 673
- Brown, T. M., & Gilliland, R. L., 1994, *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*, 32,37
- Burgers J.M., 1969, *Flow Equations for Composite Gases* (New York: Academic)
- Caughlan G. R., & Fowler W. A., 1988, *Atomic Data and Nuclear Data Tables*, 40, 290
- Chandrasekhar, S., 1939, *An Introduction to the Study of Stellar Structure*, Chicago: University of Chicago Press
- Chanmugam, G., 1972, *Nature Physical Science*, 236, 83
- Chitre, S. M., 1998, in *New Eyes to See Inside the Sun and Stars*, IAU Symp. 185 ed. F-L. Deubner, J. Christensen-Dalsgaard, and D. Kurtz, 471.
- Christensen-Dalsgaard, J., & Gough, D. O., 1975, *Memoires of the Societe Royale des Sciences de Liege*, 8, 309
- Christensen-Dalsgaard, J., 1976, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 174, 87
- Christensen-Dalsgaard, J., & Mullan, D. J., 1994, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 270, 921
- Christensen-Dalsgaard, J., 1998a, *Lecture Notes on Stellar Oscillations*, <http://astro.ifa.au.dk/jcd/oscilnotes/>
- Christensen-Dalsgaard, J., 1998b, *The First MONS Workshop: Science with a Small Space Telescope*, Eds.: H. Kjeldsen, T. R. Bedding, Aarhus Universitet, 17
- Clemens, J.C., 1993, *Baltic Astronomy*, 2, 407
- Clemens, J.C., 1997, in *New Eyes to See Inside the Sun and Stars*, IAU Symp. 185 ed. F-L. Deubner, J. Christensen-Dalsgaard, and D. Kurtz, 253
- Córsico, A. H., Benvenuto, O. G., Althaus, L. G., & Serenelli, A. M., 2002, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 332, 392, (**Capítulo 5**)

- Córsico, A. H., & Benvenuto, O. G., 2002, *Astrophysics and Space Science*, 279, 281 (**Capítulo 3**)
- Córsico, A. H., Benvenuto, O. G., Althaus, L. G., Isern, J., & García-Berro, E., 2001, *New Astronomy*, 6, 197 (**Capítulo 3**)
- Córsico, A. H., Althaus, L. G., Benvenuto, O. G., & Serenelli, A. M., 2001, *Astronomy and Astrophysics (Letters)*, 380, L17 (**Capítulo 6**)
- Córsico, A. H., Althaus, L. G., Benvenuto, O. G., & Serenelli, A. M., 2002, *Astronomy and Astrophysics*, 387, 531 (**Capítulo 6**)
- Costa, J. E. S., Kepler, S. O., & Winget, D. E., 1999, *The Astrophysical Journal*, 522, 973
- Cowling, T. G., 1941, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 101, 367
- Cowling, T. G., & Newing, R. A., 1949, *The Astrophysical Journal*, 109, 149
- Cox, A. N., Kidman, R. B., Starrfield, S. G., & Pesnell, W. D., 1987, *The Astrophysical Journal*, 317, 303
- Cox, J. P., 1974, *Reports on Progress in Physics*, 37, 563
- Cox, J. P., 1980, *Theory of Stellar Pulsations*, Princeton University Press, Princeton
- D'Antona, F., & Mazzitelli, I., 1990, *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*, 28, 139
- Dine, M., Fischler, W., & Srednicki, M., 1981, *Physics Letter B*, 104, 199
- Dolez, N., & Vauclair, G., 1981, *Astronomy and Astrophysics*, 102, 375
- Domínguez, I., Straniero, O., & Isern, J., 1999, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 306, L1
- Domínguez, I., Chieffi, A., Limongi, M., & Straniero, A., 1999, *The Astrophysical Journal*, 524, 226
- Dreizler, S., Werner, K., & Heber, U., 1995, *White Dwarfs*, Lecture Notes in Physics, 443, 160
- Dreizler, S., 1998, *Baltic Astronomy*, 7, 71
- Dziembowski, W. A., 1975, *Memoires of the Societe Royale des Sciences de Liège*, 8, 287
- Dziembowski, W., & Koester, D., 1981, *Astronomy and Astrophysics*, 97, 16
- Dziembowski, W. A., 1977a, *Acta Astronomica*, 27, 203
- Dziembowski, W. A., 1977b, *Acta Astronomica*, 27, 1
- Eddington, A. S., 1917, *The Observatory*, 40, 290
- Eddington, A. S., 1918a, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 79, 2
- Eddington, A. S., 1918b, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 79, 177
- Eddington, A. S., 1926, *The Internal Constitution of the Stars*, Cambridge University Press, Cambridge
- Emden, R., 1907, *Gaskugeln, Anwendungen der mechanischen Wärmetheorie*, Teub-

- ner, Leibzig
- Epstein, I., 1950, *The Astrophysical Journal*, 112, 6
- Fontaine G., Brassard P., Bergeron P., & Wesemael F., 1992, *The Astrophysical Journal*, 399, L91
- Fontaine, G., Brassard, P., Wesemael, F., & Tassoul, M., 1994, *The Astrophysical Journal*, 428, L61
- Fontaine, G., & Brassard, P., 1994, in IAU Colloq. 147, *The Equation of State in Astrophysics*, Eds.: G. Chabrier & E. Schatzman (Cambridge: Cambridge University Press), 347
- Fontaine, G., Brassard, P., & Bergeron, P., 2001, *Publications of the Astronomical Society of the Pacific*, 113, 409
- Gaustchy, A., & Saio, H. 1995, *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*, 33, 75
- Gaustchy, A., Ludwig, H., & Freytag, B., 1996, *Astronomy and Astrophysics*, 311, 493
- Gaustchy, A., & Saio, H. 1996, *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*, 34, 551
- Gautschy, A., 1997, *Vistas in Astronomy*, 41, 95
- Gautschy, A., & Althaus, L. G., 2002, *Astronomy and Astrophysics*, 382, 141
- Goldreich, P., & Wu, Y. 1999, *The Astrophysical Journal*, 511, 904
- Goossens, M., & Smeyers, P., 1974, *Astrophysics and Space Science*, 26, 137
- Gough, D. O., & Toomre, J., *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*, 29, 627
- Grauer, A. D., & Bond, H. E., 1984, *The Astrophysical Journal*, 277, 211
- Hansen, C. J., & Kawaler, S. D., 1989, *Stellar Interiors*, New York: Springer
- Hine B. P., & Nather R. E., 1987, in *The Second Conference on Faint Blue Stars, IAU Colloquium 95*, Eds. A. G. D. Philip, D. S. Hayes, J. Liebert), 627
- Hubbard W. B., & Lampe M., 1969, *The Astrophysical Journal Supplement*, 18, 297
- Hurley, M., Roberts, P. H., & Wright, K., 1966, *The Astrophysical Journal*, 143, 535
- Iben, I. Jr., 1984, *The Astrophysical Journal*, 277, 333
- Iben I. Jr., & MacDonald J., 1985, *The Astrophysical Journal*, 296, 540
- Iben I. Jr., & MacDonald J., 1986, *The Astrophysical Journal*, 301, 164
- Iglesias C. A., & Rogers F. J., 1996, *The Astrophysical Journal*, 464, 943
- Isern, J., Hernanz, M., & García-Berro, E., 1992, *The Astrophysical Journal*, 392, L23
- Itoh N., Mitake S., Iyetomi H., & Ichimaru S., 1983, *The Astrophysical Journal*, 273, 774
- Jones, P. W., Hansen, C. J., Pesnell, W. D., & Kawaler, S. D., 1989, *The Astrophysical Journal*, 336, 403
- Kanaan, A. N., 1996, *PhD Thesis*, University of Texas

- Kawaler, S. D., Hansen, C. J., & Winget, D. E. 1985, *The Astrophysical Journal*, 295, 547
- Kawaler, S. D., Winget, D. E., Hansen, C. J., & Iben, I., 1986, *The Astrophysical Journal*, 306, L41
- Kawaler, S. D., 1988, *The Astrophysical Journal*, 334, 220
- Kawaler, S. D., & Weiss, P., 1990, *Progress of Seismology of the Sun and Stars*, Lecture Notes in Physics, 367, 431
- Kawaler, S. D., 1993, *The Astrophysical Journal*, 404, 294
- Kawaler, S. D., & Bradley, P. A., 1994, *The Astrophysical Journal*, 427, 415
- Kawaler, S. D., Bond, H. E., Sherbert, L. E., & Watson, T. K., 1994, *Astronomical Journal*, 107, 298
- Keeley, D. A., 1979, in *White Dwarfs and Variable Degenerate Stars*, IAU Colloq. 53, ed. H. M. van Horn, 388
- Kepler, S. O., Nather, R. E., McGraw, J. T., & Robinson, E. L., 1982, *The Astrophysical Journal*, 254, 676
- Kepler, S. O., et al., 1991, *The Astrophysical Journal*, 378, L45
- Kepler, S. O., et al., 1995, *The Astrophysical Journal*, 447, 874
- Kepler, S. O., & Bradley, P. A., 1995, *Baltic Astronomy*, 4, 166
- Kepler, S. O., Mukadam, A., Winget, D. E., Nather, R. E., Metcalfe, T. S., Reed, M. D., Kawaler, S. D., & Bradley, P. A., 2000a, *The Astrophysical Journal*, 534, L185
- Kepler, S. O., Robinson, E. L., Koester, D., Clemens, J. C., Nather, R. E., & Jiang, X. J. 2000b, *The Astrophysical Journal*, 539, 379
- Kim, J. E., 1979, *Physical Review Letters*, 43, 103
- Kippenhahn, R., Weigert, A., & Hofmeister, E., 1967, in *Methods in Computational Physics*, 6, 129
- Koester, D., & Chanmugam, G., 1990, *Reports on Progress in Physics*, 53, 837
- Koester, D., & Allard, N. F., 2000, *Baltic Astronomy*, 9, 119
- Kopal, Z., 1949, *The Astrophysical Journal*, 109, 509
- Lasker, B., & Hesser, J., 1969, *The Astrophysical Journal*, 158, L171
- Lasker, B., & Hesser, J., 1971, *The Astrophysical Journal*, 163, L89
- Landolt, A. U., 1968, *The Astrophysical Journal*, 153, 151
- Ledoux, P., & Walraven, Th., 1958, *Handbuch der Physik*, Eds. S. Flüge, Berlin: Springer-Verlag, 353
- Ledoux, P., 1951, *The Astrophysical Journal*, 114, 373
- Lynden-Bell, D., & Ostriker, J. P., 1967, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 136, 293
- Magni G., & Mazzitelli I., 1979, *Astronomy and Astrophysics*, 72, 134
- McGraw, J. T., & Robinson, E. L., 1975, *The Astrophysical Journal*, 200, L89

- McGraw, J. T., & Robinson, E. L., 1976, *The Astrophysical Journal*, 205, L155
- McGraw, J. T., 1979, *The Astrophysical Journal*, 229, 203
- McGraw, J. T., Liebert, J., Starrfield, S. G., & Green, R., 1979, in *White Dwarfs and Variable Degenerate Stars, IAU Colloq. 53*, ed. H. M. van Horn, 377
- Metcalf T. S., Nather, R. E., & Winget, D. E., 2000, *The Astrophysical Journal*, 545, 974
- Metcalf T. S., Winget D. E., & Charbonneau P., 2001, *The Astrophysical Journal*, 557, 1021
- Montgomery M. H., & Winget, D. E., 1999, *The Astrophysical Journal*, 526, 976
- Montgomery M. H., Metcalfe T. S., & Winget D. E., 2001, *The Astrophysical Journal*, 548, L53
- Moulton, F. R., 1909, *The Astrophysical Journal*, 29, 257
- Nakagawa, M., Kohyama, Y., & Itoh, N., 1988, *The Astrophysical Journal*, 326, 241
- Nather, R. E., Winget, D. E., Clemens, J. C., Hansen, C. J., & Hine, B. P., 1990, *The Astrophysical Journal*, 361, 309
- Osaki, Y., & Hansen, C. J., 1973, *The Astrophysical Journal*, 185, 277
- Osaki, Y., 1975, *Publications of the Astronomical Society of Japan*, 27, 237
- Owen, J. W., 1957, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 117, 384
- Paquette C., Pelletier C., Fontaine G., & Michaud G., 1986a, *The Astrophysical Journal Supplement*, 61, 177
- Peccei, R. D., & Quinn, H. R., 1977, *Physical Review Letters*, 38, 1440
- Pekeris, C. L., 1938, *The Astrophysical Journal*, 88, 189
- Pekeris, C. L., & Ledoux, P., 1941, *The Astrophysical Journal*, 94, 124
- Pfeiffer, B., et al., 1996, *Astronomy and Astrophysics*, 314, 182
- Press, W. H., Teukolsky, S. A., Vetterling, W. T., & Flannery, B. P., 1992, *Numerical Recipes, The Art of Scientific Computing*, Cambridge Univ. Press.
- Raffelt, G. G., 1996, *Stars as Laboratories for Fundamental Physics* (Chicago: University of Chicago Press)
- Raffelt, G. G., 2000, *Physics Reports*, 333, 593
- Ritter, A., 1879, *Wiedemanns Annalen*, VIII, 173
- Robe, H., 1968, *Annales d'Astrophysique*, 31, 475
- Robinson, E. L., Nather, R. E., & McGraw, J. T., 1976, *The Astrophysical Journal*, 210, 211
- Robinson, E. L., Kepler, S. O., & Nather, R. E., 1982, *The Astrophysical Journal*, 259, 219
- Robinson, R. L., 1984, *Astronomical Journal*, 89, 1732
- Robinson, E. L., et al., 1995, *The Astrophysical Journal*, 438, 908
- Saio, H., Winget, D. E., & Robinson, E. L., 1983, *The Astrophysical Journal*, 265,

982

- Salaris, M., Domínguez, I., García-Berro, E., Hernanz, M., Isern, J., & Mochkovitch, R., 1997, *The Astrophysical Journal*, 486, 413
- Scuflaire, R., 1974, *Astronomy and Astrophysics*, 36, 107
- Schwank, D. C., 1976, *Astrophysics and Space Science*, 43, 459
- Schwarzschild, M., & Savedoff, M. P., 1949, *The Astrophysical Journal*, 109, 298
- Serenelli, A. M., *Tesis Doctoral*, Facultad de Ciencias Astronómicas y Geofísicas, Universidad Nacional de La Plata
- Shapley, H., 1914, *The Astrophysical Journal*, 40, 448
- Silvotti, R., Dreizler, S., Handler, G., & Jiang, X. J., 1999, *Astronomy and Astrophysics*, 342, 745
- Smeyers, P., *Acad. R. Sci., Lett. Beaux-Arts Liège, Brussels. Cl. Sci. Bull. Sér.*, 5, 1126
- Stanghellini, L., Cox, A. N., & Starrfield, S., 1991, *The Astrophysical Journal*, 383, 766
- Starrfield, S. G., Cox, A. N., Hodson, S. W., & Pesnell, W. D., 1983, *The Astrophysical Journal*, 268, L27
- Starrfield, S., Cox, A. N., Kidman, R. B., & Pesnell, W. D., 1984, *The Astrophysical Journal*, 281, 800
- Starrfield, S., Cox, A. N., Kidman, R. B., & Pensnell, W. D., 1985, *The Astrophysical Journal*, 293, L23
- Stover, R. J., Nather, R. E., Robinson, E. L., Hesser, J. E., & Lasker, B. M., 1980, *The Astrophysical Journal*, 240, 865
- Tassoul, M., 1980, *The Astrophysical Journal Supplement*, 43, 429
- Tassoul, M., Fontaine, G., & Winget, D. E., 1990, *The Astrophysical Journal Supplement*, 72, 335
- Thompson, W., *Phil. Trans. Soc. Lond.*, 153, 612
- Unno W., Osaki Y., Ando H., Saio H., & Shibahashi H., 1989, *Nonradial Oscillations of Stars*, University of Tokyo Press, 2nd. ed.
- Vauclair, G., 1997, in *Sounding Solar and Stellar Interiors*, IAU Symp. 181 ed. J. Provost, F. Schmider, Dordrecht: Kluwer, 367
- van Altena, W. F., Lee, J. T., & Hoffleit, E. D., 1994, *The General Catalogue of Trigonometric Parallaxes*, Yale University Observatory, New Haven
- Vennes, S., Thejll, P. A., Galvan, R. G., & Dupuis, J., 1997, *The Astrophysical Journal*, 480, 714
- Vuille, F., & Brassard, P., 2000, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 313, 185
- Warner, B., & Robinson, E. L., 1972, *Nature Physical Science*, 239, 2
- Werner, K., 1992, *The Atmospheres of Early-Type Stars*, Lecture Notes in Physics, 401, 273

- Werner, K., 1993, in *White Dwarfs: Advances in Observation and Theory*, NATO ASIC Proc. 403, 67
- Winget, D. E., 1981, *PhD Thesis*, University of Rochester, New York
- Winget, D. E., van Horn, H. M., & Hansen, C. J., 1981, *The Astrophysical Journal*, 245, L33
- Winget, D. E., van Horn, H. M., Tassoul, M., Fontaine, G., Hansen, C. J., & Carroll, B. W., 1982a, *The Astrophysical Journal*, 252, L65
- Winget, D. E., Robinson, E. L., Nather, R. D., & Fontaine, G., 1982b, *The Astrophysical Journal*, 262, L11
- Winget, D. E., van Horn, H. M., Tassoul, M., Hansen, C. J., & Fontaine, G., 1983, *The Astrophysical Journal*, 268, L33
- Winget, D. E., Hansen, C. J., & van Horn, H. M., 1983, *Nature*, 303, 781
- Winget, D. E., Hansen, C. J., Liebert, J., van Horn, H. M., Fontaine, G., Nather, R. E., Kepler, S. O., & Lamb, D. Q., 1987, *The Astrophysical Journal*, 315, L77
- Winget, D. E., 1988, in *Advances in Helio- and Asteroseismology, IAU Symp. 123* ed. J. Christensen-Dalsgaard, S. Frandsen, Dordrecht: Reidel, 305
- Winget D. E. et al., 1991, *The Astrophysical Journal*, 378, 326
- Winget, D. E. et al., 1994, *The Astrophysical Journal*, 430, 839
- Wood, M. A., 1992, *The Astrophysical Journal*, 386, 539