

Universidad Nacional de La Plata
Facultad de Ciencias Astronómicas y Geofísicas

Formación de Líneas en Atmósferas
Extendidas en Expansión

por

Lydia Sonia Cidale

Tesis para obtener el Título de Doctora en Astronomía

La Plata, 1993

Este trabajo ha sido desarrollado bajo la dirección de la Dra. Adela E. Ringuelet. Durante la realización del mismo me desempeñé como becaria de Iniciación y Perfeccionamiento del Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET)

INDICE ANALITICO

Introducción,	1
Capítulo 1 Reseña Histórica y Objetivos	3
1.1 Las Estrellas Be,	3
1.2 Interpretación de las Observaciones. Modelos Básicos,	8
1.3 Hipótesis y Objetivos,	14
Capítulo 2 Modelo de Atmósfera,	16
2.1 Estructura de la Atmósfera de una Estrella Be,	16
2.2 Ley de Temperatura,	19
2.3 Ley de Velocidad,	20
2.4 Tasa de Pérdida de Masa,	21
2.5 Cálculo de \dot{M} ,	23
2.6 Fuentes de Opacidad del Continuo,	24
2.7 Velocidad de Turbulencia,	24
2.8 Balance de Ionización,	25
2.9 Aplicación al átomo de Hidrógeno,	26
2.10 Densidad Electrónica,	27
Capítulo 3 Ecuación de Transporte Radiativo,	28
3.1 Formulación de la Ecuación de Transporte Radiativo,	30
3.2 Solución de la Ecuación de Transporte en un Sistema Lagrangiano,	33
3.3 Condiciones de Contorno Espaciales,	37
3.4 Condición Inicial para la Frecuencia,	38
3.5 Solución Numérica,	40
3.6 Ecuaciones para los Momentos del Campo de Radiación,	41
3.7 Condiciones de Contorno,	46

- 3.8 Procedimiento de Cálculo, 48
- 3.9 Determinación de los Factores Variables de Eddington, 48
- 3.10 Campo de Radiación Emergente en el Marco de Referencia del Observador, 50

Capítulo 4 Átomos con Muchos Niveles de Energía, 51

- 4.1 Ecuaciones de Equilibrio Estadístico, 52
- 4.2 Aproximación Equivalente a un Atomo de Dos Niveles, 55
- 4.3 Opacidad, Emisividad y Función Fuente, 57
- 4.4 Método de Resolución, 62

Capítulo 5 Líneas de la Serie de Balmer, 63

- 5.1 $H\alpha$, 65
 - a) Ley de temperatura, 65
 - b) Ley de Velocidad, 67
 - c) Velocidad de Turbulencia, 68
 - d) Tipo Espectral, 69
- 5.2 $H\beta$, 70
- 5.3 Comparación entre Perfiles Teóricos y Perfiles Observados, 71
- 5.4 Tasa de Pérdida de Masa, 73
- 5.5 Regiones de Formación de las Líneas de Balmer, 74
- 5.6 Conclusiones, 76

Capítulo 6 Líneas de Magnesio y Carbono, 79

- 6.1 Magnesio II, 79
 - 6.1.1 Modelo de Atomo. Niveles de Energía, 81
 - 6.1.2 Transiciones Radiativas, 81
 - 6.1.3 Procesos Colisionales, 82
 - 6.1.4 Procedimiento de Cálculo, 83
 - 6.1.5 Resultados, 85
- 6.2 Conclusiones, 87
- 6.3 Elementos Superionizados, 88

6.3.1	Modelo Atómico para C IV,	89
6.3.2	Resultados y Discusión,	90
Capítulo 7	Conclusiones Finales y Perspectivas,	92
Apéndice A	Ecuación de Transporte para la Radiación Monocromática,	96
A.1	Ecuaciones de Diferencias Finitas,	96
A.2	Esquema de Eliminación,	101
A.3	Solución de la Ecuación de Transporte para el Continuo,	106
Apéndice B	Ecuación de Transporte para los Momentos del Campo de Radiación,	107
B.1	Ecuaciones de Diferencias Finitas,	107
B.2	Esquema de Eliminación,	112

INTRODUCCION

El estado físico de una atmósfera estelar puede inferirse de un estudio detallado de la distribución de energía en el espectro continuo y de líneas, y está relacionado con los procesos energéticos que tienen lugar en la estrella. Los perfiles de líneas pueden brindar información acerca de la geometría, la dinámica y las condiciones termodinámicas que predominan en las regiones de formación de los mismos. El análisis de estos datos espectrales depende, fundamentalmente, de nuestro conocimiento acerca de la interacción de la radiación con la materia (átomos, iones y electrones que constituyen la atmósfera estelar). Sin embargo, debemos ser muy cauteosos cuando se recurre a una aproximación clásica para el análisis espectral (aproximación plano paralela, medios que se expanden con velocidad constante, etc.), ya que puede conducir a una mala interpretación de las condiciones físicas de las atmósferas estelares. Por ejemplo, regiones relativamente calientes pueden parecer frías a un observador (*Cannon 1985*), o regiones que se mueven hacia el observador pueden ser interpretadas como alejándose del mismo (*Mihalas 1978*).

El problema que nosotros deseamos estudiar está vinculado con la interpretación de los espectros de las estrellas Be. Estas estrellas revelan una enorme variedad de fenómenos (rápida rotación, pulsaciones no radiales, líneas de emisión en $H\alpha$, polarización lineal, exceso IR y de radio, vientos estelares de alta temperatura y baja densidad, etc), por lo cual resulta difícil atribuir el origen de todos estos fenómenos a la acción de un sólo parámetro (por ejemplo, la rotación).

Los modelos clásicos de atmósferas estelares no son suficientes para explicar un espectro de líneas en emisión. Entonces, para poder explicar los fenómenos observados debemos recurrir al concepto de atmósferas extendidas e incluir campos de velocidades. Esto implica resolver, autoconsistentemente, las ecuaciones de movimiento,

conservación de energía, continuidad, y transporte radiativo. Pero dada la complejidad física y matemática del problema, aún no son viables estas soluciones simultáneamente. Por lo tanto, nos vemos limitados a analizar las atmósferas desde un punto de vista puramente cinemático. Es decir, debemos especificar las leyes de velocidad y temperatura, puesto que estas distribuciones todavía no pueden ser derivadas de cálculos teóricos consistentes con la teoría de la radiación.

Hasta el momento, todos los modelos que intentan relacionar directamente las propiedades físicas de un plasma con las estructuras espectrales observadas en estrellas con atmósferas extendidas, son en mayor o menor grado modelos ad-hoc. En el marco de esta metodología hemos desarrollado modelos teóricos de atmósferas extendidas con simetría esférica, con la finalidad de predecir el espectro observado.

En el capítulo 1 presentamos, sucintamente, las principales características, o rasgos peculiares observados en los espectros de las estrellas tipo Be, junto con una reseña de los modelos matemáticos realizados hasta el presente. Al final de este capítulo presentamos las hipótesis y los objetivos de este trabajo. En el capítulo 2 describimos y discutimos detalladamente el modelo de atmósfera adoptado para representar una estrella Be. En el capítulo 3 presentamos la ecuación de transporte radiativo para un medio con simetría esférica y un campo radial de velocidades, en un marco de referencia que se mueve con un elemento de fluido. Además, describimos dos métodos para obtener la solución de esta ecuación. El capítulo 4 está dedicado a las ecuaciones de equilibrio estadístico para átomo con muchos niveles de energía.

Sobre la base del modelo de atmósfera adoptado, calculamos perfiles de líneas de H, Mg II, C IV y Si IV, y analizamos la influencia que tienen, sobre los perfiles mencionados, las distintas distribuciones de temperatura y velocidad propuestas. En los capítulos 5 y 6 presentamos estos resultados y en el capítulo 7 damos las conclusiones de este trabajo.

1.1 LAS ESTRELLAS Be

La mayoría de las estrellas de tipo espectral B muestran un espectro visible de líneas de absorción dominado por H I y He I. Son estrellas calientes con temperaturas efectivas comprendidas entre $1 \cdot 10^4$ y $3 \cdot 10^4$ K y presentan masas de 2 a 20 masas solares. Sus espectros pueden ser modelados de manera satisfactoria empleando una teoría clásica de atmósferas estelares. Sin embargo, existen algunas estrellas B peculiares, denominadas estrellas Be, que se destacan por presentar, o haber presentado alguna vez, emisiones en las líneas de Balmer. Probablemente esta caracterización agrupe una gran cantidad de objetos con propiedades físicas muy diferentes, pues las estrellas Be poseen una enorme variedad de fenómenos intrínsecos que aún no han podido ser interpretados teóricamente. Por tanto, si se recurre sólo a un análisis cualitativo de la forma e intensidad de las líneas y del espectro continuo observado, podemos clasificar a las estrellas B con líneas de emisión en cinco grupos (Snow, 1982):

- a) Estrellas Be Clásicas
- b) Estrellas Be Peculiares
- c) Estrellas Herbig Ae y Be
- d) Estrellas P Cygni
- e) Estrellas B Supergigantes

En este capítulo presentaremos un resumen de los rasgos más importantes que exhiben las estrellas de cada uno de los grupos mencionados en sus distintos rangos espectrales. Posteriormente, daremos una breve descripción de los modelos más relevantes propuestos en la literatura para discutir el origen del fenómeno Be. Interesantes resúmenes sobre todos estos temas han sido realizados

por Marlborough (1976), Slettebak (1979 y 1982), Doazan (1982 y 1987), Poeckert (1982), Dachs (1987) y Snow & Stalio (1987).

a) Estrellas Be Clásicas

Históricamente, a las estrellas de este grupo se las denomina "Estrellas Be". Son estrellas de tipo espectral comprendido entre O9 y A tempranas, de secuencia principal o gigantes, que exhiben en sus espectros emisiones en las líneas de Balmer. Frecuentemente, estas estrellas también manifiestan en el visible emisiones en las líneas de metales una vez ionizados. Las características espectrales más importantes de este grupo son:

- Espectro Visible (3500 - 8500 Å)

Se caracteriza por la presencia de emisiones en las líneas de la serie de Balmer y de Fe II. En este rango espectral el fenómeno Be puede reconocerse en dos tipos de espectros: un Espectro Be, donde las líneas de H en emisión muestran una inversión de la intensidad central más o menos pronunciada (figura 1.1), y un Espectro de Envoltura, donde las líneas exhiben núcleos de absorción, muy profundos y angostos, que pueden o no presentar emisiones en las alas (figura 1.2).

Las líneas de Fe II muestran estructuras similares a las líneas de H I pero son mucho más débiles.

Las velocidades radiales medidas en las líneas de emisión, o en las líneas de envoltura¹, son inferiores a 100 Km/Seg y frecuentemente están desplazadas hacia el violeta. Sin embargo, corrimientos al rojo también han sido detectados.

En general, todas las estrellas Be tienen variaciones irregulares de la intensidad de las líneas y del continuo en escalas de tiempo

¹ En un espectro de envoltura, estas velocidades se refieren a la parte más profunda del núcleo de absorción y, en un espectro Be, al centro de una línea de emisión.

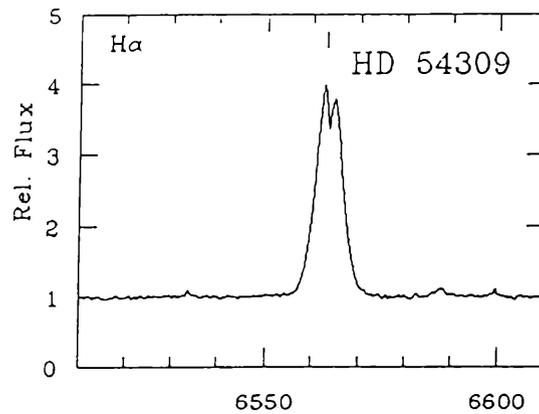
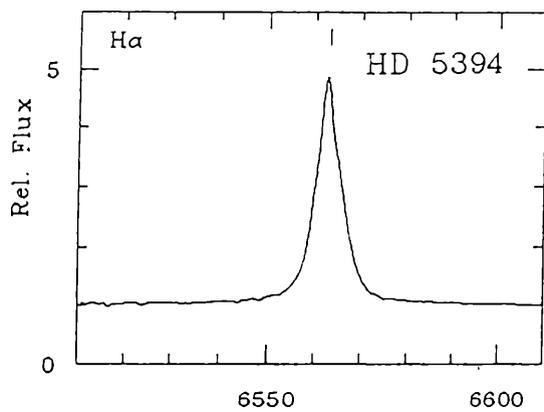


FIGURA 1.1. Perfiles de emisión típicos de un espectro Be (de Doazan et al. 1991).

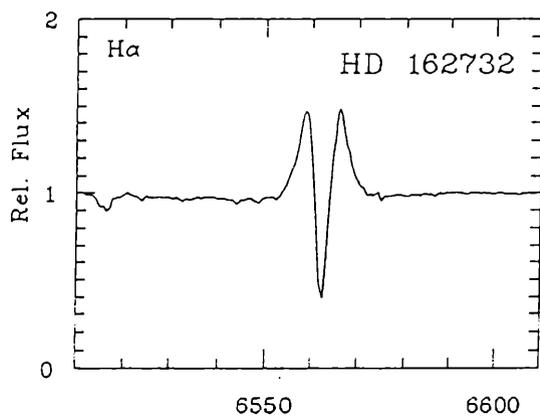
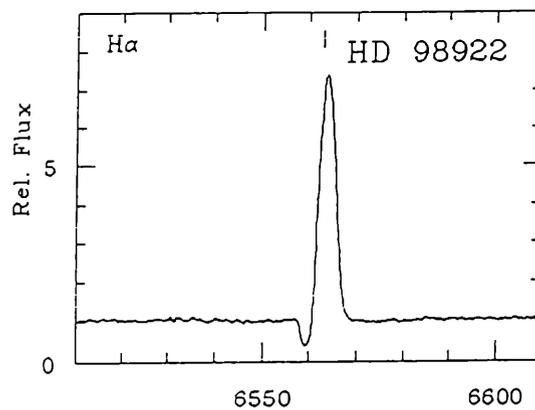


FIGURA 1.2. Perfil de emisión característico de un espectro de envoltura (de Doazan et al. 1991).

FIGURA 1.3. Perfil P Cygni tipo I (según la clasificación de Beals 1950) (de Doazan et al. 1991).



que van de minutos a décadas (por ejemplo, variaciones de las magnitudes fotométricas, de los anchos equivalentes, de la relación V/R, etc.)². En algunos casos, la variabilidad es tal que un mismo objeto, en diferentes épocas, puede mostrar un espectro Be, un espectro de envoltura y un espectro tipo B normal. Es decir, un espectro Be, ó un espectro de envoltura, puede perder completamente sus líneas de emisión y convertirse en una estrella B normal, o viceversa. También puede ocurrir que una estrella con un espectro Be se transforme en una Be con espectro de envoltura, o viceversa. Esto sugiere que los objetos B y Be no son objetos estructuralmente diferentes.

- Espectro Infrarrojo (8500 - 20000 Å)

Johnson (1967) descubrió que las estrellas B con líneas de emisión presentan un exceso de color en el índice (K-L) respecto a las estrellas B normales. Estudios estadísticos realizados por *Allen (1973)* indican que, en la mayoría de las estrellas Be, el exceso IR medido en las bandas (K-L) es aproximadamente igual a 1/10 de magnitud.

En este rango espectral también se observan líneas de emisión de H (series de Paschen y Bracket), Ca II y Fe II.

- Espectro Ultravioleta (900 - 3200 Å)

Observaciones ultravioleta de moderada y alta resolución han sido realizadas con los satélites Copernicus e IUE y han revelado que las estrellas Be presentan un espectro rico de líneas de absorción, principalmente líneas de metales de baja ionización. En este mismo rango espectral, exhiben intensas líneas de resonancia de elementos altamente ionizados (C IV, Si IV y NV) que pueden observarse, inclusive, en las estrellas Be tardías. Por ejemplo, las líneas de

² La relación V/R está definida como el cociente de la máxima intensidad, por encima del continuo, de la emisión del lado violeta del perfil y la emisión del lado rojo.

C IV no son observadas en las estrellas B normales más frías que B2 mientras que en una estrella Be puede aún manifestarse hasta los tipos más tardíos que B9. Lo mismo ocurre con Si IV y N V. La existencia de elementos altamente ionizados con intensidades anómalas da origen al fenómeno de superionización. Estas líneas también pueden presentar perfiles asimétricos o componentes múltiples en absorción desplazadas hacia el violeta. Las velocidades radiales inferidas de las líneas de He II y de los elementos superionizados son superiores a las medidas en el espectro visible.

- Rayos X (1 - 60 Å)

Hasta el presente, la emisión de rayos X blandos en las estrellas Be sólo ha sido detectada en ζ Ophiuchi (van den Heuvel 1987) y en rayos X duros fue detectada en γ Cassiopea con el satélite UHURU (SAC A). Probablemente las estrellas Be sean fuentes débiles de rayos X. En general, toda la información existente en rayos X duros corresponde a sistemas binarios Be/X ray, constituídos por una estrella Be más una fuente de rayos X pulsantes.

- Polarización

Todas las estrellas con líneas de emisión muestran algún grado de polarización lineal, generalmente es inferior al 2 %, en el espectro visible continuo y de líneas.

b) Estrellas Be Peculiares

Las estrellas Be peculiares o B[e], además de tener todas las características típicas de una estrella Be clásica, presentan líneas prohibidas en emisión. Estas estrellas son consideradas peculiares por tener un gran exceso IR en el índice de color (K-L) que generalmente superan una magnitud.

c) Estrellas Herbig Ae y Be

Son considerados objetos de pre-secuencia principal pues están asociados con regiones H II y/o nubes moleculares oscuras. En la región visible tienen propiedades similares a las estrellas del grupo (a) pero se destacan por presentar grandes excesos de radiación en el IR cercano y lejano. Otra característica relevante es la presencia de líneas prohibidas en emisión que cubren un amplio grado de ionización (por ejemplo, de [O I] a [O III]). En la región UV se observa el fenómeno de superionización y, simultáneamente, se ven líneas de muy baja ionización; como ser OI.

d) Estrellas P Cygni

Algunas estrellas B presentan perfiles de líneas de H en emisión acompañadas de una componente en absorción desplazada hacia el azul (figura 1.3). A este tipo de perfil se lo denomina "perfil P Cygni". También en el espectro UV puede observarse perfiles P Cygni en la líneas de resonancia de Mg II y, eventualmente, en Si IV y C IV.

e) Estrellas Supergigantes

En las supergigantes B Ia ($M_v \cong -7$) es muy frecuente observar la línea de $H\alpha$ en emisión, pero su intensidad es mucho más débil que el valor medio observado en las estrellas Be clásicas. Por otra parte, las estructuras de emisión no se extienden a otros miembros de la serie de Balmer (sólo se observa en $H\alpha$). En cambio, las supergigantes B Ib ($M_v \cong -6$) raramente presentan emisiones de $H\alpha$.

Si bien las supergigantes B muestran líneas de H en emisión, no son consideradas estrellas Be, dada su distinta clase de luminosidad. Por otro lado, las líneas de resonancia de Si IV, C IV, N V, y O VI exhiben características típicas de perfiles P Cygni.

1.2 INTERPRETACION DE LAS OBSERVACIONES. MODELOS BASICOS.

Dado que es la atmósfera de una estrella lo que observamos, para comprender mejor su espectro emergente debemos estudiar en primer lugar los procesos físicos responsables de la formación de líneas e inferir en que regiones de la atmósfera estas líneas son generadas.

El modelo de atmósfera más simple que podemos proponer es suponer un medio gaseoso y homogéneo, constituido por átomos e iones, en equilibrio radiativo e hidrostático. Estas hipótesis establecen que la temperatura y la densidad del medio deben decrecer hacia las capas más externas de la atmósfera. La distribución de átomos en sus diversos estados de ionización y excitación pueden determinarse usando las leyes de Saha y Boltzmann, que son válidas para la radiación y el gas en estado de equilibrio termodinámico. En el caso de las estrellas B, esta teoría presenta discrepancias con las observaciones, pues conduce a determinaciones erróneas de la abundancia de los elementos químicos en las atmósferas cuando se intenta ajustar las intensidades de las líneas (Mihalas 1972). Esto indica que en las atmósferas existen grandes apartamientos del equilibrio termodinámico local (LTE).

Modelos de atmósfera más realistas exigen calcular la distribución de átomos, en sus distintos estados de excitación e ionización, usando la condición de equilibrio estadístico. El espectro teórico (líneas y continuo) calculado de esta manera presenta un buen acuerdo con muchos detalles observados, indicando que la composición química de las estrellas es esencialmente similar a la solar. Sin embargo, existen aún discrepancias en los anchos equivalentes de algunas líneas de la región visible y UV de las estrellas B, siendo mayores los valores observados que los calculados para las líneas de He I $\lambda\lambda$ 5876, 6678, y 7065 Å. Estas discrepancias se acrecientan a medida que aumenta la luminosidad de la estrella (Underhill 1982).

La teoría de atmósfera en equilibrio radiativo, equilibrio hidrostático y fuera de LTE predice sólo líneas de absorción, por lo que no explicaría las emisiones observadas en las líneas de H α de

algunas estrellas B.

Con el advenimiento de los datos UV se tuvo un nuevo panorama del fenómeno Be. Las observaciones mostraron que las estrellas Be presentan líneas de C IV, Si IV, N V y O IV cuyos anchos equivalentes son mayores que los valores calculados por *Kamp (1973)*; quien utilizó una solución fuera de LTE en equilibrio radiativo e hidrostático. Además, las asimetrías o las componentes múltiples observadas en los perfiles de los elementos superionizados, y de otros iones, han sido interpretadas como un flujo de materia caliente de alta velocidad que escapa de la estrella, al que se denominó viento estelar (*Snow & Marlborough 1976*, y *Marlborough & Snow 1976*).

La mayoría de los trabajos teóricos para interpretar el origen de las líneas de emisión de los objetos astronómicos fueron realizados durante la primera mitad de este siglo. Estos trabajos, basados en los datos obtenidos para las longitudes de onda ópticas, aportaron las ideas básicas sobre las que, posteriormente, se construyeron modelos de atmósferas más refinados matemáticamente.

Si bien, en la actualidad, la mayoría de los astrónomos aceptan que las líneas de emisión tienen su origen en una envoltura extendida, no existe aún un acuerdo general respecto a la geometría y la termodinámica de dichas envolturas. Diversos modelos han sido propuestos para explicar el origen y las características del fenómeno Be. Entre ellos podemos mencionar:

a) Modelo de Disco

Struve (1931) fue el primero que atribuyó el origen de las líneas de emisión de las estrellas Be a la presencia de una envoltura extendida alrededor de una estrella B. Esta envoltura, ionizada por la absorción de la radiación UV de la estrella, produce líneas de emisión como consecuencia de procesos de fluorescencia. Entonces, para justificar la formación de líneas de emisión de Fe II e hidrógeno, es necesario que la temperatura de la envoltura sea inferior a la temperatura efectiva de la estrella.

Struve encontró la existencia de una correlación entre el ancho de las líneas de emisión y la velocidad proyectada de la estrella (determinada con los perfiles de absorción), y formuló la hipótesis que las estrellas Be son altos rotadores de forma lenticular que, por inestabilidad rotacional, eyectan materia por el ecuador formando un anillo nebular, el cual revoluciona en torno de la estrella. La geometría del material circumestelar sería la responsable de la forma de los perfiles dependiendo de la dirección de observación, es decir, si la estrella es vista de ecuador o de polo, y las intensidades de las líneas resultarían proporcional al volumen de la envoltura. En la figura 1.4 se esquematiza el modelo de *Struve (1933)* para una estrella Be. Los perfiles de líneas de un pico son atribuidos a estrellas vistas de polo ($i < 30^\circ$) y los perfiles de líneas de emisión con dos picos corresponden a estrellas vistas de ecuador ($i > 60^\circ$).

La idea que las estrellas Be son altos rotadores intrínsecos es la hipótesis más frecuentemente utilizada en los modelos. En este esquema, la pérdida de masa tiene lugar en el plano ecuatorial de la estrella.

Descripciones hidrodinámicas de envolturas circumestelares originadas sólo por fuerzas rotacionales fueron desarrolladas por *Limber (1964, 1967)* y *Marlborough & Limber (1968)*. Cálculos de perfiles de líneas en el marco de un modelo que supone una envoltura concentrada en el plano ecuatorial fueron realizados por *Kogure (1969)*, *Marlborough (1969)*, *Kriz (1976, 1979a y 1979b)* y *Brown (1987)*. En este esquema de trabajo, las líneas de envoltura pueden ser explicadas con un modelo de disco rotante ópticamente opaco (*Rybicki & Hummer 1983*).

b) Modelo de Disco Rotante Alimentado por un Viento Estelar.

Es sabido que las líneas de emisión de las estrellas Be sufren variaciones irregulares con el tiempo, y a veces desaparecen por completo, por tanto, es imposible suponer que la rotación misma origine la eyección de materia en forma irregular.

El modelo de disco alimentado por vientos estelares propone que las asimetrías observadas en los perfiles de las líneas es causada por la existencia de movimientos de expansión superpuestos al movimiento de rotación. *Poekert & Marlborough (1977, 1978a y 1978b)* adoptaron un modelo de disco rotante, en el plano ecuatorial de la estrella, el cual presenta una suave expansión. Este modelo fue utilizado para ajustar el perfil de $H\alpha$, el exceso IR, y las observaciones polarimétricas del continuo y de las líneas de γ Cassiopea. En este modelo, las regiones que dan origen a las líneas de los elementos superionizados se ubicarían en las zonas que se encuentran a ambos lados del disco de alta densidad. En la figura 1.5 mostramos el escenario propuesto por *Marlborough, Snow & Slettebak (1979)*, las regiones polares presentan un viento caliente de baja densidad y alta velocidad, mientras que en el plano ecuatorial domina una estructura de alta densidad.

Si bien, este modelo es considerado el más completo, pues reproduce algunas estructuras observadas en el espectro visible e IR, no puede explicar los cambios de fases observados en las Be.

c) Modelo con Simetría Esférica o Elipsoidal.

Un modelo alternativo fue propuesto por *Doazan & Thomas (1982)*. El modelo describe la atmósfera de una estrella Be como una secuencia de regiones, con simetría esférica o elipsoidal, que están conectadas físicamente. Para explicar el fenómeno Be, este modelo requiere una pérdida de masa variable y la existencia de flujo de energía no radiativo.

Basándose en los resultados de las observaciones UV y del visible los autores han sugerido dividir la atmósfera de las estrellas Be en una serie de regiones con características termodinámicas diferentes:

1) La fotosfera, es la parte interior de la atmósfera estelar donde se origina la mayor parte de la radiación del continuo. Esta fotosfera puede modelarse satisfactoriamente utilizando un modelo clásico que considere equilibrio radiativo e hidrostático.

2) La cromosfera-corona, es la parte de la atmósfera exterior a la

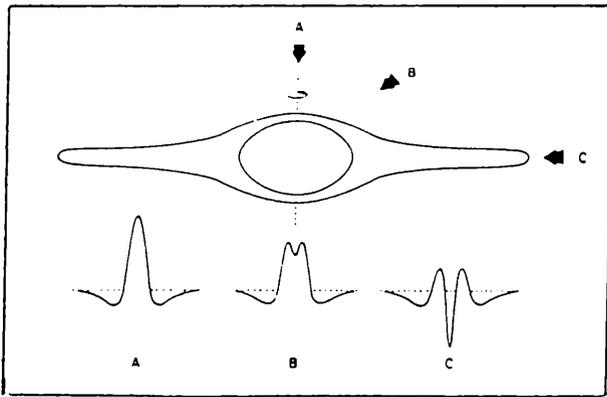


FIGURA 1.4. Esquema del modelo rotacional de Struve. Los distintos tipos de perfiles, A, B, y C, son interpretados como un resultado del ángulo de inclinación bajo el cual se ve la estrella (de Slettebak 1979).

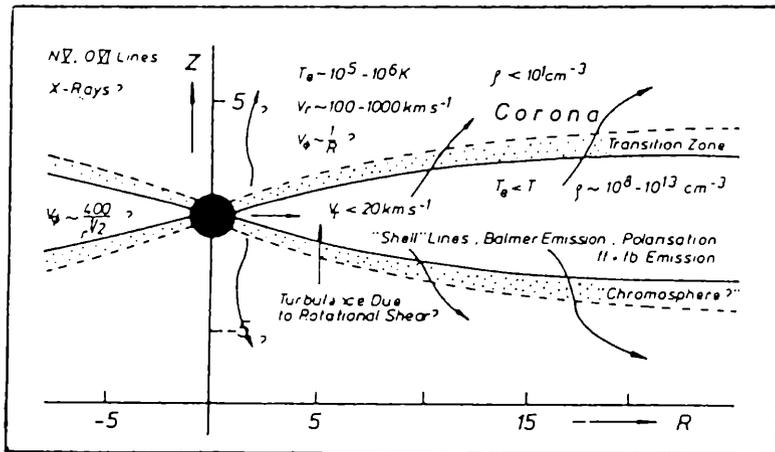
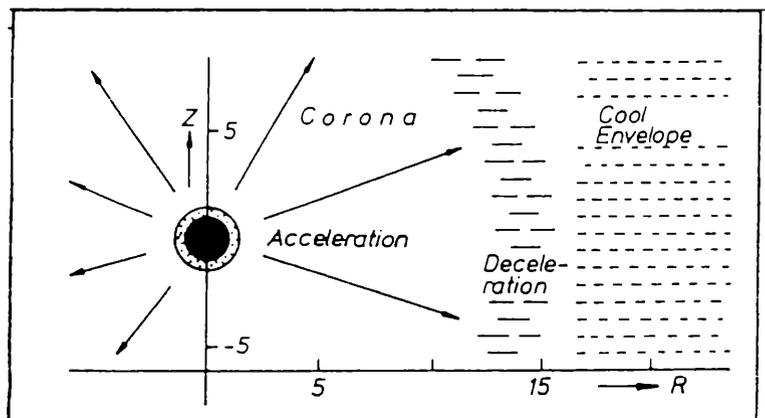


FIGURA 1.5. Esquema del modelo de Marlborough et al. (1979) (de Poekert 1982).

FIGURA 1.6. Esquema del modelo esférico propuesto por Doazan (de Poekert 1982).



fotosfera donde el medio gaseoso que la constituye es afectado, principalmente, por la deposición de energía y momento de origen no radiativo, además de la energía y momento inyectados por el campo de radiación proveniente de la fotosfera. La corona es la región donde se observa un flujo de materia de alta velocidad y temperaturas electrónicas elevadas ($T_e \sim 10^5$ K). Es decir, esta zona presenta vientos con características transónicas y supersónicas.

4) La envoltura templada, es una región post-coronal, donde no hay deposición de energía (dado que hay pérdidas de energía por escape de la radiación al espacio). Por lo tanto, en esta región la temperatura desciende a medida que nos alejamos de la estrella. Eventualmente, esta temperatura alcanza la temperatura del medio interestelar. En esta región, el viento estelar comienza a desacelerarse debido a las interacciones con flujos de materia de distintas velocidades, que la estrella ha eyectado en otras oportunidades, o con el medio interestelar.

La presencia de una cromosfera-corona (tal vez de pequeñas dimensiones) es indispensable para explicar la formación de líneas de elementos altamente ionizados y la envoltura templada sería la responsable de la formación de líneas metálicas de elementos de baja ionización y de las emisiones de las líneas de la serie de Balmer.

Una descripción matemática de esta estructura de atmósfera fue realizada por *Doazan & Thomas (1982)*. En la figura 1.6 mostramos el escenario que proponen los autores.

d) Modelo de Estrellas Binarias

Muchas estrellas Be son miembros de sistemas binarios; este modelo supone que el fenómeno Be se produce cuando la estrella secundaria pierde masa debido a fuerzas de interacción con su compañera (*Harmanec 1982, 1987*). Este modelo permite explicar las variaciones de V/R de largo período debido a una envoltura elongada que gira entorno de la estrella por la atracción gravitacional de la estrella secundaria. Este modelo es adecuado para interpretar el espectro de sistemas binarios. Pero, esto no significa que todas

las estrellas Be sean binarias.

e) Modelos con Campos Magnéticos

Aunque no ha sido posible la detección de campos magnéticos en las estrellas Be se ha sugerido que las variaciones temporales de un espectro de emisión o un espectro shell podrían resultar de interacciones magnetohidrodinámicas en la envoltura circumestelar (Barker 1987).

Modelos de envolturas concentradas en el plano ecuatorial que incluyen un viento conducido por presión de radiación, y que está distorsionado por rotación y campos magnéticos, fue propuesto por Friend & MacGregor (1984). Este modelo está basado en el trabajo de Weber & Davis (1967) y en la teoría de vientos, conducidos por radiación de las líneas, de Castor, Abbott & Klein (1975). Posteriormente, este modelo fue modificado por Poe & Friend (1986), quienes consideraron a la estrella como una fuente no puntual, y por Iglesias & Ringuélet (1993), quienes trataron una solución no isotérmica.

f) Pulsaciones No Radiales

La existencia de pulsaciones no radiales en las estrellas Be fue originalmente propuesta por Baade (1982) para explicar las rápidas variaciones observadas en los perfiles de líneas de la estrella 28 CMa. Estas variaciones consisten en caracteres que se mueven rápidamente (en escalas de tiempo de horas) a través del perfil de absorción. En principio, las variaciones podrían interpretarse en término de la rotación de caracteres en la superficie estelar. Vogt & Penrod (1983) encontraron una correlación entre la amplitud aparente de las pulsaciones y los episodios de emisión en ζ Oph y sugirieron que los episodios de emisión en esta estrella, y posiblemente en otras, son originados por el aumento de energía de la pulsación durante el cambio de modos. Las oscilaciones están

caracterizadas por un modo l , que determina la concentración de oscilaciones hacia el ecuador, y por un modo m , el cual determina el número de crestas de onda a lo largo del ecuador.

Smith (1988) encuentra que las pulsaciones no radiales no son una causa suficiente para eyectar materia de la superficie de la estrella ya que no proveen la energía necesaria para ajustar las observaciones.

Obviamente, un modelo adecuado para reproducir el espectro de una estrella Be es sumamente difícil de construir y ello se debe a los numerosos procesos que se combinan para producir una estrella con envoltura. Estos procesos son:

- 1) Rotación
- 2) Presión de radiación
- 3) Campos magnéticos
- 4) Pulsaciones

1.3 HIPOTESIS Y OBJETIVOS

En este capítulo hemos presentado a grandes rasgos una descripción del fenómeno Be. Vimos que las estrellas Be revelan una enorme variedad de perfiles de emisión y, al mismo tiempo, se observa que la variabilidad es una propiedad inherente a casi todas estas estrellas.

Debido a la gran diversidad de objetos que manifiestan el fenómeno Be, en este trabajo nos limitaremos a estudiar estrellas Be, no binarias, de secuencia principal o gigantes.

Las principales hipótesis de este modelo son:

- 1) **Simetría Esférica.** Supondremos que la atmósfera está distribuida globalmente alrededor de la estrella, y que en primera aproximación, las propiedades físicas del medio pueden ser representadas por un modelo con simetría esférica.

2) **Estado Estacionario.** Supondremos que todas las propiedades del medio que constituyen la atmósfera son independientes del tiempo. Por lo tanto, dado que las estrellas Be son variables, nuestro modelo sólo es adecuado para analizar las condiciones de la atmósfera en un estado o fase particular, y no podremos prever sus variaciones.

3) **Existencia de Flujos Radiativo, No Radiativos, y Flujos de Masa.** Supondremos la existencia de regiones con características termodinámicas diferentes (y en algunos aspectos similar al escenario propuesto por *Doazan & Thomas (1982)*). Consideramos que:

a) el flujo radiativo es emitido por una fotosfera en equilibrio radiativo e hidrostático,

b) el flujo de energía no radiativo gobierna la distribución de temperatura en la atmósfera exterior; la temperatura aumenta hacia el exterior y luego decrece debido a las pérdidas radiativas, y

c) el flujo de masa, que determina la distribución de densidad, produce un viento que se acelera hacia las capas externas de la atmósfera pasando por regiones subtérmicas, transtérmicas y supertérmicas.

Con este trabajo nos proponemos:

A) Calcular perfiles de líneas de átomos neutros e ionizados, que se originan en las atmósferas extendidas de las estrellas Be (por ejemplo, HI, MgII, Si IV y C IV). Esto implica resolver la ecuación de transporte radiativo en un medio que cumple con las hipótesis propuestas anteriormente.

B) Estimar las regiones de formación de las líneas más intensas.

C) Buscar relaciones globales entre la intensidad del perfil y los parámetros atribuidos a la atmósfera estelar. Es decir, estudiar la sensibilidad de los perfiles a las distribuciones de temperatura y velocidad.

D) Buscar relaciones entre la morfología de los perfiles y las propiedades cinemáticas de un viento estelar.

E) Discutir las limitaciones del modelo de atmósfera adoptado.

Nuestro principal objetivo es estudiar de qué manera se manifiestan las propiedades físicas de las atmósferas de las estrellas Be en las diferentes regiones de su espectro emergente. Para ello, es necesario conocer de qué manera es generada, o cómo interactúa la radiación con un medio en movimiento. Desde un punto de vista físico, esto significa confeccionar un modelo de atmósfera que describa macroscópicamente las propiedades del material que constituye la atmósfera y, luego, discutir la interacción de la radiación con ese medio.

El criterio que utilizamos para modelar la atmósfera de una estrella Be está basado en las predicciones y limitaciones de modelos previos y en la descripción de los datos observacionales. Esto nos permite elaborar un modelo matemático semi-empírico para describir la estructura de la atmósfera y su espectro emergente.

En el capítulo 1 presentamos sucintamente las principales características, o rasgos peculiares, observados en los espectros de las estrellas tipo Be, junto con una reseña de los modelos propuestos hasta el presente. Esto nos permite esquematizar la siguiente estructura de atmósfera.

2.1 ESTRUCTURA DE LA ATMOSFERA DE UNA ESTRELLA Be.

Consideramos que la atmósfera está constituida por átomos neutros e iones distribuidos en capas esféricas homogéneas en estado estacionario. De esta forma, todas las propiedades del medio se especificarán como una función de la distancia radial al centro de simetría de la estrella.

Nosotros hemos adoptado esta geometría basándonos en los siguientes datos observacionales:

1) Los datos UV, sensores de vientos de alta velocidad, sugieren que el material está distribuido globalmente con poca o sin

concentración en el plano ecuatorial (Snow & Stalio 1987). Este hecho está basado en la falta de una clara dependencia de la tasa de pérdida de masa con la velocidad proyectada de la estrella (Snow 1981).

2) Polidan et al. (1986) encontraron que las estrellas Be rotan con velocidades inferiores a 0.85 veces la velocidad crítica. En consecuencia, todos los efectos derivados de una alta rotación estelar son pequeños (Cassinelli 1987). Por lo tanto, consideramos que la rotación distorsiona levemente la atmósfera estelar.

3) Estudios estadísticos de la polarización en estrellas Be, realizados por McLean & Brown (Coyne & McLean 1982), muestran que:

i) la polarización intrínseca nunca es mayor que un 2 %, indicando que envolturas extremadamente oblatas no existen.

ii) predominan las estrellas Be de baja polarización, señalando que hay más objetos en los cuales la envoltura circumestelar está más próxima de una configuración esférica, o que la densidad electrónica es relativamente baja.

4) Catala & Kunasz (1987) han ajustado el perfil de H α observado en AB Aur (objeto Herbig Ae/Be) con perfiles calculados empleando un medio con simetría esférica.

Basándonos en los diferentes grados de ionización observados en los espectros de líneas de las estrellas Be, y en las mediciones de los anchos equivalentes de las líneas, distinguimos tres regiones atmosféricas con características termodinámicas diferentes:

a) una fotosfera en equilibrio radiativo e hidrostático (ER y EH).

b) una cromosfera en expansión, ubicada exteriormente a la región de la fotosfera.

c) una envoltura templada en expansión, exterior a la cromosfera.

Es un hecho observacional que las fotosferas de las estrellas B y Be, de igual tipo espectral, son similares (Snow & Stalio 1987 y las referencias citadas en ese trabajo). Sus continuos de Balmer y de Paschen están bien representados por modelos calculados bajo la aproximación de equilibrio radiativo, equilibrio hidrostático y equilibrio termodinámico local. Asimismo, estos modelos permiten

reproducir satisfactoriamente, las alas de los perfiles observados en la línea de H δ . Por lo tanto, nosotros consideramos adecuado adoptar los modelos de Kurucz (1979) para representar las distribuciones de temperatura y densidad en la fotosfera.

El fenómeno de superionización y la existencia de vientos de alta velocidad, ambas propiedades observadas en el espectro UV de las estrellas Be, revelan la existencia de una zona de alta temperatura (con temperaturas mayores a la T_{eff}) en expansión, a la que designamos "cromosfera". El aumento de la temperatura en esta región se debe principalmente a la deposición de energía no radiativa y, allí, la temperatura alcanza su máximo valor. Nosotros omitimos la presencia de una región coronal con temperaturas de 10^5 K (Doazan & Thomas 1982), puesto que Catala (1988) mostró que no es necesario considerar temperaturas excesivamente altas para reproducir las líneas de elementos superionizados.

Designamos "región de mínimo de temperatura", por analogía con el caso solar, a aquella porción de la atmósfera ubicada entre la fotosfera y la cromosfera. Esta región constituye la base de un viento estelar (región fuera de equilibrio hidrostático y radiativo) y podría jugar un rol importante en la formación de líneas de átomos neutros y de Ca II que se originan en las zonas próximas a la fotosfera de las estrellas Be (Costa & Ringuélet 1985 y Chen et al. 1989).

Finalmente, en la parte exterior a la cromosfera se ubica la envoltura templada con temperaturas inferiores a la T_{eff} . Los modelos geométricos tradicionales le atribuyen a esta envoltura la formación de las líneas en emisión de la serie de Balmer y líneas de elementos una vez ionizados, con perfiles Doppler, que pueden o no manifestar estructuras en emisión.

Thomas (1983) ha discutido, desde un punto de vista cualitativo, los posibles fenómenos físicos que determinan la estructura de la atmósfera propuesta.

Antes de calcular la distribución de energía radiante, describiremos las propiedades termodinámicas y cinéticas que atribuimos a la atmósfera de una estrella Be.

Para construir nuestros modelos de atmósfera seguiremos,

fundamentalmente, los lineamientos presentados en los trabajos de *Catala, Kunasz & Praderie (1984)* y *Catala & Kunasz (1987)*.

2.2 LEY DE TEMPERATURA

En la fotosfera, la ley de temperatura adoptada decrece con el radio según la distribución de temperatura del modelo de Kurucz seleccionado para representar la estrella, hasta alcanzar un valor dado en el radio $r = R_k$. Para construir una escala de distancia en esta región, definimos el radio de la fotosfera, R_{ph} ; radio donde la temperatura es igual a la temperatura efectiva.

Representamos la distribución de temperatura para la cromosfera y la envoltura templada mediante el modelo de "cromosfera profunda" propuesto por *Catala, Kunasz & Praderie (1984)*,

$$T = \begin{cases} T_0 + (T_{\max} - T_0) \exp\left(-4 \ln 2 \frac{(r - R_{ch})^2}{\Delta_1^2}\right) & \text{si } R_{ph} \leq r \leq R_{ch} \\ T_0 + (T_{\max} - T_0) \exp\left(-4 \ln 2 \frac{(r - R_{ch})^2}{\Delta_2^2}\right) & \text{si } r > R_{ch} \end{cases} \quad (2.1)$$

donde,

$$R_{ch} = R_{ph} + \left(\frac{\Delta_1}{2} \sqrt{\ln 2} \sqrt{\ln \left[\frac{T_{\max} - T_0}{T_{eff} - T_0} \right]}\right)$$

El máximo de temperatura (T_{\max}) es alcanzado en radio R_{ch} ; Δ_1 y Δ_2 son dos parámetros libres que controlan la posición del máximo de temperatura y la extensión de la cromosfera (figura 2.1). En la región exterior a la cromosfera la temperatura desciende hasta T_0 , indicando la presencia de una envoltura templada.

Nosotros hemos modificado levemente la ecuación (2.1) con la finalidad de incluir la región de mínimo de temperatura,

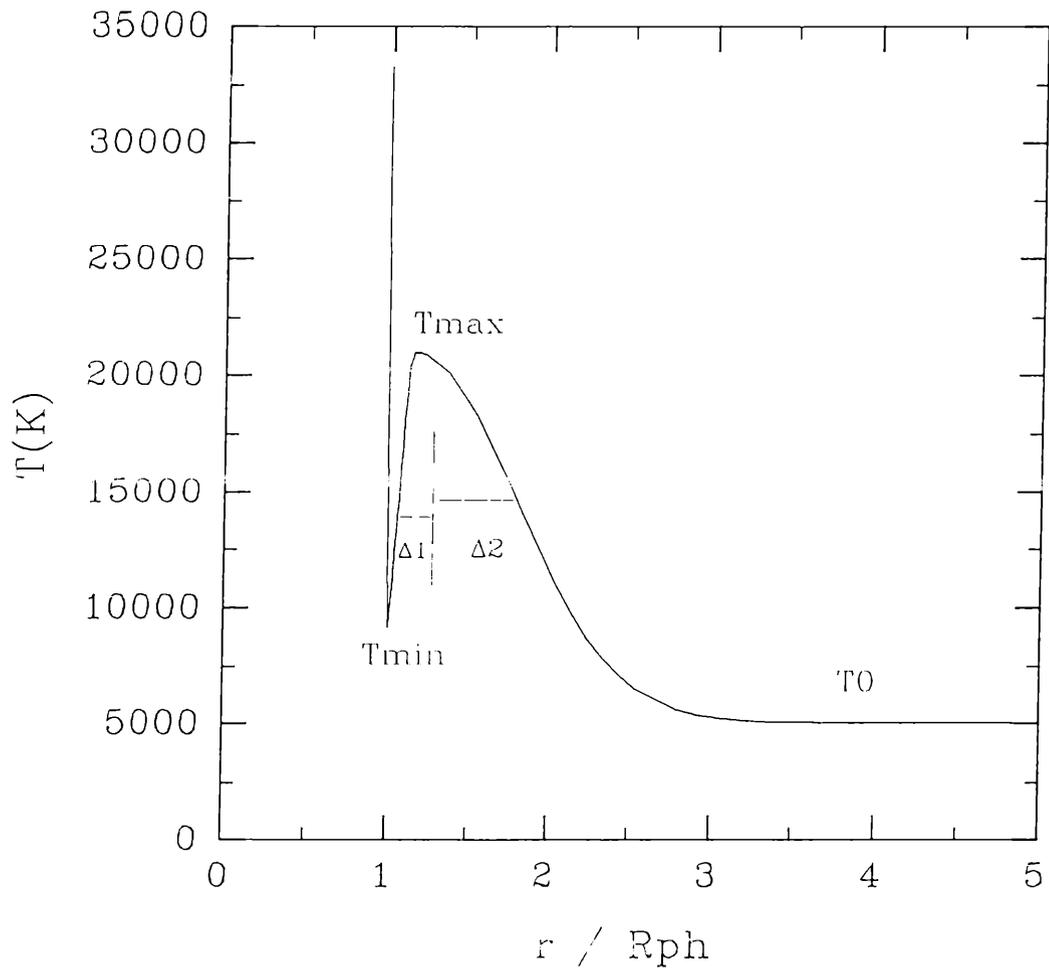


FIGURA 2.1. Distribución de Temperatura.

$$T_k (R/R_{ph})^\alpha$$

$$\text{si } R_k \leq r \leq R_{\text{min}}$$

donde, T_k es el último valor de temperatura seleccionado del modelo de Kurucz, en $r = R_k$, R_{min} ($< R_{\text{ch}}$) es el radio donde la temperatura toma su mínimo valor, T_{min} , y α es un parámetro libre y negativo.

2.3 LEY DE VELOCIDAD

Las mediciones de los desplazamientos Doppler, en las componentes múltiples de las líneas de absorción o la presencia de perfiles asimétricos en las líneas de resonancia UV, evidencian movimientos macroscópicos de gran escala en las atmósferas estelares.

En nuestro caso particular, nosotros estudiaremos un fluido que se expande monótonamente con simetría esférica. Consideramos que el plasma de la fotosfera se desplaza radialmente con velocidades inferiores a las velocidades térmicas correspondientes a esta región. De esta manera, los continuos de Balmer y Paschen resultarán aún bien representados por modelos calculados en ER Y EH.

Las velocidades, subsónicas o subtérmicas, de las capas fotosféricas son determinadas consistentemente con la ley de densidad tomada del modelo de Kurucz y la ecuación de continuidad.

Ensayamos diferentes leyes de velocidad, las cuales pueden ser agrupadas según las siguientes características:

- a1) presentan pequeños gradientes de velocidad en la región interior de la cromosfera.
- a2) presentan grandes gradientes de velocidad en la región interior de la cromosfera.
- b1) el fluido alcanza su velocidad asintótica después del máximo de temperatura.
- b2) el fluido alcanza su velocidad asintótica en el máximo de temperatura.
- c) diferentes velocidades iniciales (subsónicas o subtérmicas).
- d) diferentes velocidades asintóticas.

Cada curva en particular es construída por una combinación del caso a), más una del caso b), más el caso c) y el caso d).

En la figura 2.2 se presenta un esquema de estas curvas de velocidad y en la tabla 1 se detallan las leyes de velocidad usadas a lo largo de este trabajo.

2.4 TASA DE PERDIDA DE MASA

Para representar la atmósfera se consideró un gas homogéneo, distribuído radialmente, en expansión y en estado estacionario. La ecuación de continuidad,

$$\dot{M} = 4 \pi r^2 \rho(r) V(r), \quad (2.2)$$

acopla la densidad, $\rho(r)$, y la velocidad radial, $V(r)$, a través de un factor de escala, la tasa de pérdida de masa \dot{M} .

Si despejamos $\rho(r)$ de la ecuación (2.2) y lo reemplazamos en la definición de la profundidad óptica del continuo,

$$d\tau_c(r) = - X_\nu(r) \rho(r) dr,$$

donde X_ν es el coeficiente de absorción por unidad de masa de la fuentes del continuo, obtenemos

$$d\tau_c(r) = \frac{- X_\nu(r) \dot{M} dr}{4 \pi r^2 V(r)} \quad (2.3)$$

Luego, al integrar la fórmula (2.3) desde el borde exterior de la atmósfera extendida ($R_{\text{máx}}$) hasta el radio de la fotosfera, recordando que en $r = R_{\text{máx}}$, $\tau_c = 0$, tenemos

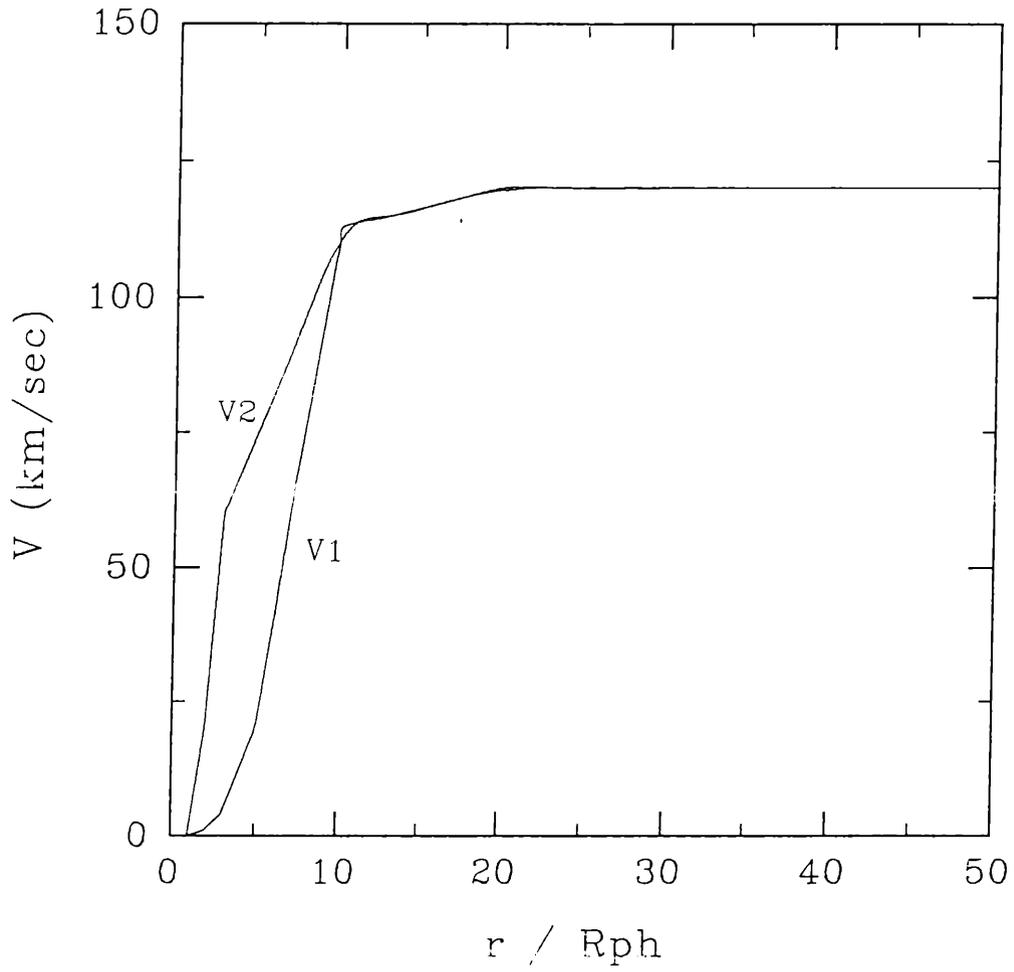


FIGURA 2.2. Leyes de velocidades utilizadas en este trabajo para resolver problemas de transporte radiativo.

TABLA 1

Leyes de Velocidad

r/R_{ph}	V ₁ (km/s)	V ₂ (km/s)	V ₃ (km/s)	V ₄ (km/s)	V ₅ (km/s)	V ₆ (km/s)	V ₇ (km/s)	V ₈ (km/s)
1.0	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001
1.006							8.5	
1.01						0.69		1.
1.05		1.		1.	0.4			
1.1						7.		13.
1.2		4.	1.	4.	4.		20.2	55.
1.3						50.	70.	80.
1.5					10.	70.	100.	
2.0	1.	20.		20.		90.		
2.5							117.	120.
3.0	4.	50.	4.		70.	110.	132.	
5.0	20.		20.					
7.0	60.		60.	60.				180.
10.0	113.	113.	113.	113.	125.		133.	
20.0	120.	120.	120.	120.				230.
30.0					148.	145.		
50.0	120.	120.	120.	120.	150.	150.		
70.0	120.	120.	120.	120.	150.		133.	270.

$$\tau_c(R_{ph}) = \int_{R_{ph}}^{R_{m\acute{a}x}} \frac{X_\nu(r) \dot{M} dr}{4 \pi r^2 V(r)} . \quad (2.4)$$

Esta expresi3n nos permitir4 determinar \dot{M} . Para ello, es necesario introducir la hip3tesis de que el espesor 3ptico del continuo, τ_c , evaluado en $r = R_{ph}$ y $\lambda = 2800 \text{ \AA}$, es igual a 2/3. Despejamos \dot{M} de la expresi3n (2.4),

$$\dot{M} = \frac{8 \pi / 3}{\int_{R_{ph}}^{R_{m\acute{a}x}} \frac{X_\nu dr}{r^2 V(r)}} , \quad (2.5)$$

y obtenemos un m3todo para calcular la tasa de p3rdida de masa, consistente con la ley de velocidad propuesta y el coeficiente de absorci3n del continuo, tal como lo hicieron *Catala & Kunasz (1987)*. La m4xima contribuci3n a la integral proviene de la base del viento.

Por otra parte, en $r = R_{ph}$, debe cumplirse que

$$\dot{M} = 4 \pi R_{ph}^2 \rho(R_{ph}) V_{ph} , \quad (2.6)$$

donde $\rho(R_{ph})$ es la densidad de masa, evaluada en R_{ph} , de un modelo de fotosfera en ER y EH, y V_{ph} es la velocidad en ese mismo radio.

La velocidad fotosf3rica, V_{ph} , se calcula consistentemente con la tasa de p3rdida de masa sustituyendo la expresi3n (2.6) en (2.5),

$$\frac{8 \pi / 3}{\int_{R_{ph}}^{R_{m\acute{a}x}} \frac{X_\nu(r) dr}{r^2 V(r)}} = 4 \pi R_{ph}^2 \rho(R_{ph}) V_{ph} \quad (2.7)$$

2.5 CALCULO DE \dot{M}

Una vez establecida la ley de temperatura y velocidad (§ 2.1 y 2.2), la tasa de pérdida de masa se determina, autoconsistentemente, con la ley de velocidad elegida y un modelo de fotosfera clásica, ubicada en la base del viento.

Una primera estimación de \dot{M} se tiene considerando que el coeficiente de absorción del continuo es constante, por ejemplo, se puede elegir el coeficiente de absorción en $r = R_{ph}$. Luego, la ecuación (2.5) puede escribirse,

$$\dot{M}^{(1)} = \frac{8 \pi / 3}{X_{\nu} \int_{R_{ph}}^{R_{m\acute{a}x}} \frac{dr}{r^2 V(r)}} .$$

Esta integral se resuelve numéricamente generando una grilla de radios para cada profundidad geométrica.

Con $\dot{M}^{(1)}$ se determina para cada radio, la densidad numérica, $\rho^{(1)}$, la densidad electrónica, $n_e^{(1)}$ (ver § 2.10) y se calculan nuevos valores de $X_{\nu}^{(1)}$ usando los valores preestablecidos de la temperatura de radiación (ver § 2.8). Posteriormente, se recalcula una nueva tasa de pérdida de masa, $\dot{M}^{(2)}$, usando los valores $X_{\nu}^{(1)}$ en la ecuación (2.5). Con $\dot{M}^{(2)}$ determinamos, nuevamente, valores para ρ , n_e , y X_{ν} . En cada paso iterativo, es necesario redefinir la temperatura de radiación (como se explica en § 2.8) y verificar la validez de la ecuación (2.6); si esta fórmula no se cumple, debemos calcular una nueva velocidad fotosférica con la ecuación de continuidad,

$$V_{ph}^{(2)} = \frac{\dot{M}^{(2)} / 4 \pi}{R_{ph}^2 \rho(R_{ph})} ,$$

antes de recalcular $\dot{M}^{(3)}$, pues debemos respetar la distribución de

densidad del modelo clásico, para $r < R_{ph}$. El nuevo valor de V_{ph} modificará la ley de velocidad e , indirectamente, modificará \dot{M} . Este procedimiento debe continuar hasta lograr la convergencia. En la práctica, la convergencia se obtiene en 5 o 6 iteraciones.

2.6 FUENTES DE OPACIDAD DEL CONTINUO

Supondremos la atmósfera constituida por hidrógeno, helio, iones y e^- libres. Las fuentes de opacidad del continuo X_{ν} , para cada profundidad, han sido evaluadas usando los datos y fórmulas dadas por Kurucz (1970). Los números ocupacionales de los niveles atómicos se consideraron en LTE, pues simplifica notablemente el cálculo computacional y, a su vez, permite incluir una mayor cantidad de procesos de absorción y emisión. En este trabajo, en particular, se consideraron las siguientes fuentes de opacidad: Transiciones ligado libre y libre libre de H I y H^- , dispersión de Rayleigh por átomos de H I, dispersión Thomson por electrones libres, y las principales transiciones de C, N, Ne, O, Si y sus respectivos iones.

2.7 VELOCIDAD DE TURBULENCIA

La velocidad Doppler está determinada por

$$V_D^2 = V_{th}^2 + V_t^2,$$

donde V_{th} es la velocidad Doppler térmica y V_t es la velocidad de microturbulencia. En nuestros modelos, V_t es un parámetro libre y lo consideraremos constante sobre toda la atmósfera.

2.8 BALANCE DE IONIZACION

Cuando la recombinación dielectrónica y la autoionización se desprecian, la ecuación de equilibrio de ionización iguala las tasas radiativas y colisionales de ionización a las tasas radiativas y colisionales de recombinación. Dado que los procesos radiativos involucran el campo de radiación, el equilibrio de ionización y la ecuación de transporte están necesariamente acoplados. Sin embargo, es posible describir cualitativamente el estado de ionización de una especie usando una aproximación para la radiación ionizante, válida sólo cuando los procesos radiativos dominan el balance de ionización.

En la base del viento, la radiación ionizante correspondiente a un ion está termalizada. Si se describe la intensidad media de la radiación ionizante por la función de Planck a la temperatura electrónica local, el equilibrio de ionización está dado por la ecuación de Saha.

Llamaremos superficie de determalización a aquella capa donde la radiación ionizante comienza a apartarse de la función de Planck. Obviamente, tendremos una capa diferente de determalización según qué ion sea considerado. Típicamente la determalización ocurre cuando $\tau_{\nu_0} \cong 2$, y ν_0 es la frecuencia umbral de fotoionización del ion. La mayoría de los iones en los que estamos interesados (Mg II, Si IV, C IV) presentan este umbral en el lejano UV, más allá de la discontinuidad de Lyman.

Por encima de la superficie de determalización el medio puede considerarse ópticamente delgado y, por lo tanto, la radiación ionizante puede aproximarse con la siguiente expresión;

$$J_{\nu_0} \sim W(r) B_{\nu_0}(T_r),$$

donde $W(r) = \frac{1}{2} \left(1 - \sqrt{1 - (R_1/r)^2} \right)$ es el factor de dilución, R_1 es la distancia radial a la superficie de determalización y T_r es la temperatura de radiación definida como la temperatura electrónica de la superficie de determalización. En estas regiones, si la

temperatura electrónica es menor que la temperatura de radiación, los procesos radiativos aún dominan el equilibrio de ionización y este último está descrito por la fórmula de Strömgen,

$$\frac{N^{++} N_e}{N^+} = \left[\frac{2\pi m_e K T_r}{n^2} \right]^{3/2} \frac{2 g^{++}}{g^+} X W(r) \left(\frac{T_e}{T_r} \right)^{1/2} e^{(-h \nu_0 / K T_r)},$$

donde, X es la fracción de recombinaciones que pueblan el nivel fundamental. Este número se consideró igual a 1/2. W es el factor de dilución y vale 1/2 en la superficie de determalización, lo que origina una discontinuidad entre las fórmulas de Saha y de Strömgen. Esta discontinuidad se produce al pasar de un medio ópticamente opaco a uno transparente. Por lo tanto, una zona de transición es necesaria entre ambas regiones.

2.9 APLICACION AL ATOMO DE HIDROGENO

En base a lo expuesto anteriormente la ionización del hidrógeno puede expresarse

$$\frac{n_e n_p}{N(HI)} = S(T_e), \quad (2.8)$$

donde, n_e es la densidad electrónica, n_p es la densidad de protones, $N(HI)$ es la densidad numérica de hidrógeno neutro y $S(T_e)$ es la fórmula de Saha, para radios interiores a la superficie de determalización, o Strömgen, para radios exteriores a la superficie de determalización.

Una zona de transición ha sido introducida entre las dos regiones para asegurar un suave comportamiento de las variables. En esta región, la ionización se calcula mediante una combinación lineal entre las fórmulas de Saha y Strömgen.

2.10 DENSIDAD ELECTRONICA

En primera aproximación, nosotros podemos determinar la densidad electrónica, n_e , suponiendo una atmósfera constituida solamente por hidrógeno y helio, es decir, no consideramos la presencia de los metales. Entonces, la densidad de masa

$$\rho(r) = 1.4 m_H N_H(r), \quad (2.9)$$

donde, m_H es la masa del átomo de hidrógeno y N_H el número total de átomos de H.

Si además, suponemos que todo el hidrógeno está completamente ionizado tenemos que $n_e = n_p$. Entonces, la ecuación (2.8) nos brinda una manera de calcular n_e ,

$$\frac{1}{S(T_e)} n_e^2 + n_e - \frac{\rho(r)}{1.4 m_H} = 0, \quad (2.10)$$

donde $S(T_e)$ es la fórmula de Saha o Strömngren dependiendo de la ubicación de la región de detormalización.

La solución de la ecuación (2.10) da la densidad electrónica. Este valor será posteriormente mejorado al resolver las ecuaciones de equilibrio estadístico para átomos de H.

La solución de la ecuación de transporte radiativo para las frecuencias de una línea brinda los elementos necesarios para estudiar las condiciones físicas que tienen lugar en las regiones de formación de las mismas.

En este capítulo haremos una descripción del transporte de la radiación a través de un medio que se encuentra en movimiento. Cuando existen gradientes de velocidad, los fotones en las distintas líneas pueden escapar, no sólo de las capas más externas de la atmósfera sino también de las regiones más profundas, como consecuencia del efecto Doppler. Entonces, el campo de velocidades juega un papel fundamental en el proceso de formación de las líneas, pues contribuye aumentando la probabilidad de escape de fotones.

El cálculo de la intensidad de una línea implica resolver un sistema de ecuaciones integro-diferenciales no lineales, que involucra las condiciones de equilibrio para cada nivel atómico, y las ecuaciones de transporte radiativo para cada línea y cada continuo.

Existen numerosas técnicas para calcular un espectro de líneas en atmósferas que se expanden con simetría esférica. La aproximación de *Sobolev (1947)* o método de probabilidad de escape nos provee de una excelente solución cuando la velocidad de la envoltura es considerablemente superior a la velocidad térmica media de los átomos¹. *Castor (1970)* y *Castor & Lamers (1979)* consideraron la

¹ En este caso particular, el problema del transporte radiativo se simplifica notablemente pues el medio tiende a volverse ópticamente transparente. La radiación de frecuencia ν en la dirección al observador será emitida no por toda la envoltura, sino solamente por alguna región de la misma que se encuentre a ambos lados de la superficie de velocidad radial asociada con la frecuencia ν . Así, el campo de radiación en una línea, en un punto dado de la atmósfera, depende ligeramente de la radiación de la misma línea que proviene de otras regiones.

función fuente en términos de las probabilidades de escape y desarrollaron un método para resolver la ecuación de transporte en una configuración con simetría esférica. El método Monte Carlo fue utilizado por *Magnan (1968, 1970)*, *Caroff, Noerdlinger, & Scargle (1972)* y *Auer & Van Blerkom (1972)*, si bien este método permite un correcto tratamiento de la integral de scattering es inadecuado en medios ópticamente opacos. *Kunasz & Hummer (1974)* desarrollaron un método que resuelve rigurosamente el problema del transporte radiativo para medios en movimiento en un sistema de referencia donde el centro de simetría y el observador están en reposo, es decir, en el marco de referencia del observador. En este marco de referencia existen serias dificultades numéricas cuando se calcula la integral de scattering por sumas de cuadraturas, pues el campo de velocidades produce un fuerte acoplamiento entre la dirección de propagación de los fotones y sus correspondientes frecuencias (debido al efecto Doppler). Por otra parte los coeficientes de opacidad y emisividad son ángulo dependientes. La ventaja de este procedimiento yace en que pueden utilizarse campos de velocidades totalmente arbitrarios (*Mihalas 1980*).

El tratamiento riguroso de la ecuación de transporte radiativo en un marco de referencia que acompaña el movimiento de un elemento de fluido (comoving-frame) fue elaborado por *Mihalas, Kunasz & Hummer (1975, 1976)*. Este método permite utilizar las funciones de redistribución clásicas, elaboradas para medios estáticos, y evaluar la integral de scattering sólo en el intervalo de frecuencias del perfil de línea. Si además se supone que el proceso de redistribución es independiente del ángulo, los coeficientes de absorción y emisión son isótropos. El método del comoving-frame provee una solución general tanto para altos como bajos gradientes de velocidad, pero su aplicación está restringida a distribuciones de velocidades monótonamente crecientes o decrecientes.

En este capítulo describiremos dos métodos numéricos para obtener la solución de la ecuación de transporte radiativo para un medio que se expande con simetría esférica, en el marco de referencia que acompaña el movimiento de una partícula del fluido, y consistente

con las ecuaciones de equilibrio estadístico para átomos con muchos niveles de energía. En primer lugar contaremos detalladamente el método desarrollado por *Mihalas, Kunasz & Hummer (1975)* para resolver la ecuación de transporte para la radiación monocromática. Esta solución sólo puede aplicarse a problemas que utilizan la hipótesis de redistribución completa, pues está basada en el esquema de eliminación de *Rybicki (1971)*. El segundo método, desarrollado por *Mihalas, Kunasz & Hummer (1976)*, resuelve las ecuaciones de los momentos del campo de radiación y puede extenderse a situaciones que involucren funciones arbitrarias de redistribución en frecuencia. Se resuelven las ecuaciones de los momentos del campo de radiación usando los factores variables de Eddington y empleando una solución tipo *Feautrier (1964)*.

3.1 FORMULACION DE LA ECUACION DE TRANSPORTE RADIATIVO

La ecuación de transporte para la radiación de frecuencia ν_0 que se propaga en una dirección \bar{s} en un medio con simetría esférica es:

$$\mu \frac{\partial I(\nu_0, \mu, r)}{\partial r} + \frac{1 - \mu^2}{r} \frac{\partial I(\nu_0, \mu, r)}{\partial \mu} = \eta - \chi I(\nu_0, \mu, r), \quad (3.1)$$

donde $\mu = \cos(\vartheta)$, ϑ es el ángulo que forma la dirección \bar{s} con el radio vector medido en un sistema de referencia local² situado en cada punto P del medio estelar (figura 3.1), que está en reposo respecto al centro de simetría del sistema. r es la distancia radial de dicho punto P al centro de la estrella. η y χ son, respectivamente, la emisividad y opacidad total por unidad de

² Es costumbre elegir un sistema de referencia local para describir la dependencia geométrica de las variables físicas del problema respecto a la posición r y la dirección \bar{s} .

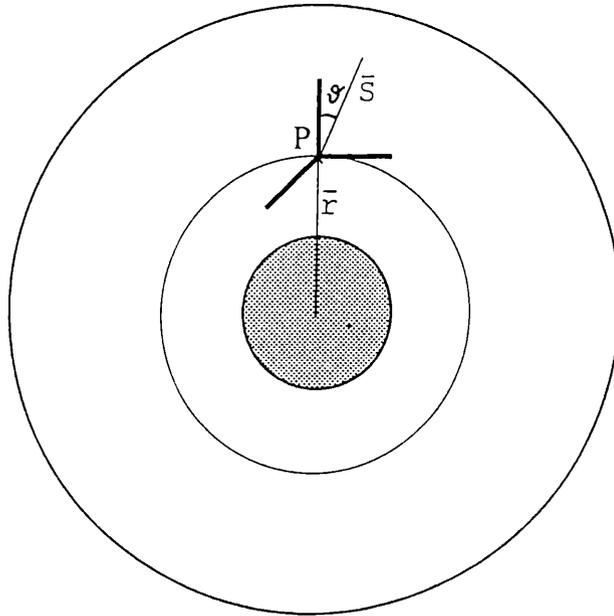


Figura 3.1
Sistema de Referencia Local.

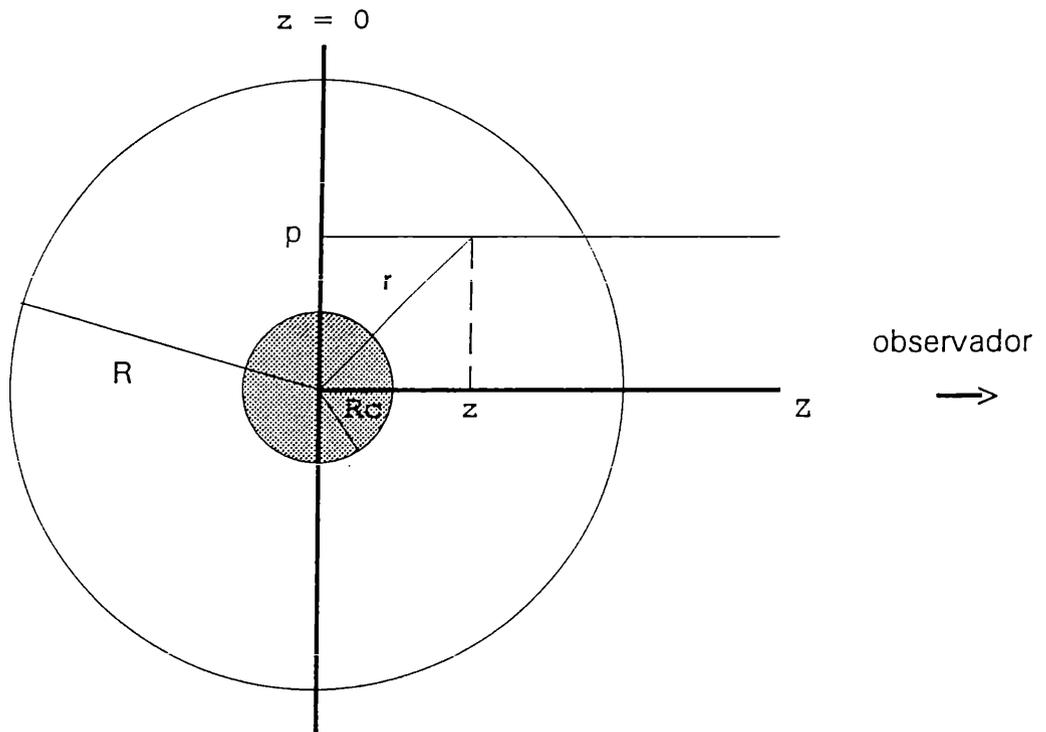


Figura 3.2
Sistema de coordenadas

frecuencia y por unidad de volumen.

La ecuación (3.1) describe los cambios en la intensidad específica, $I(\nu_0, \vec{S})$, que ocurren cuando la radiación atraviesa un medio que absorbe y emite, visto por un observador externo que está también en reposo respecto al centro de simetría del sistema.

Analícemos qué sucede cuando el material se mueve con velocidad relativa, $V(r)$, respecto al observador. La existencia de un campo de velocidades produce corrimiento Doppler entre la frecuencia observada (ν_0) y la frecuencia emitida, o absorbida, por los átomos en su propio marco de referencia (ν).

La relación entre la frecuencia percibida por el observador y la frecuencia que se observa cuando un observador y la fuente emisora están en reposo viene dada, según la aproximación clásica del efecto Doppler, por

$$\nu = \nu_0 (1 - \mu V(r)/c). \quad (3.2)$$

Una consecuencia inmediata del efecto Doppler es la dependencia angular de los coeficientes de absorción y emisión para un observador estacionario, es decir, $\eta = \eta(\nu_0, \mu, r)$ y $\chi = \chi(\nu_0, \mu, r)$. A su vez, la evaluación de la función fuente de una línea, definida como

$$S_1 = (1 - \epsilon) \int_{-\infty}^{\infty} d\nu' \int_{-1}^1 d\mu' I(r, \mu', \nu') \phi(r, \mu', \nu') + \epsilon B(r),$$

presenta serias dificultades numéricas pues el término de scattering depende del campo de radiación y, por tanto, estará fuertemente afectado por el movimiento del material. Luego, para calcular numéricamente la integral de scattering es necesario considerar un extenso rango de frecuencias y un gran número de ángulos.

Estas dificultades numéricas se atenúan cuando se cambia el sistema de referencia local estacionario por un sistema de referencia que se mueve solidario a un elemento del fluido. Para

nuestros fines prácticos optaremos por esta última formulación. Para ello debemos realizar una transformación que exprese a todas las cantidades físicas, de la ecuación de transporte (3.1), en el nuevo sistema de referencia local. En el marco de referencia del observador las derivadas de las cantidades físicas son evaluadas a frecuencia constante ν_0 . En cambio, cuando las cantidades se miden respecto a un sistema de referencia en movimiento, sus variaciones ocurren no sólo porque las cantidades físicas cambian en dos posiciones diferentes \bar{r} y $\bar{r} + d\bar{r}$, sino también porque el sistema de referencia se ha desplazado con velocidad $V(r)$. Entonces, recordando que $\nu = \nu(\nu_0, \mu)$ (ecuación 3.2), las correspondientes derivadas en el sistema móvil se obtienen mediante las siguientes relaciones:

$$\left(\frac{\partial I}{\partial r}\right)_{\nu_0} = \left(\frac{\partial I}{\partial r}\right)_{\nu} + \left(\frac{\partial I}{\partial \nu}\right)_r \left(\frac{\partial \nu}{\partial r}\right)_{\nu_0} \quad \text{y} \quad \left(\frac{\partial \nu}{\partial r}\right)_{\nu_0} = - \frac{\nu_0 \mu V(r)}{c r} \frac{d \ln V}{d \ln r} ,$$

$$\left(\frac{\partial I}{\partial \mu}\right)_{\nu_0} = \left(\frac{\partial I}{\partial \mu}\right)_{\nu} + \left(\frac{\partial I}{\partial \nu}\right)_{\mu} \left(\frac{\partial \nu}{\partial \mu}\right)_{\nu_0} \quad \text{y} \quad \left(\frac{\partial \nu}{\partial \mu}\right)_{\nu_0} = - \frac{\nu_0 V(r)}{c} .$$

Utilizando estas relaciones para las derivadas podemos reescribir la ecuación (3.1), en el sistema de referencia móvil, en la forma

$$\begin{aligned} \mu \frac{\partial I(\nu, \mu, r)}{\partial r} + \frac{1 - \mu^2}{r} \frac{\partial I(\nu, \mu, r)}{\partial \mu} - \frac{\nu_0 V(r)}{c r} \left\{ 1 - \mu^2 + \mu^2 \left(\frac{d \ln V(r)}{d \ln r} \right) \right\} \frac{\partial I(\nu, \mu, r)}{\partial \nu} \\ = \eta(\nu, r) - \chi(\nu, r) I(\nu, \mu, r). \end{aligned} \quad (3.3)$$

Esta es la ecuación de transporte para la radiación monocromática de frecuencia ν que fluye en la dirección que forma un ángulo ϑ con el versor \mathbf{r} , medido por un observador que se mueve con un elemento de fluido en \bar{r} , en un medio con simetría esférica que se expande con velocidad $V(r)$.

Las derivadas de la frecuencia, respecto de la posición y la

dirección, representan el cambio de la frecuencia ν de un fotón en el marco de referencia solidario al fluido, visto por un observador externo. También pueden interpretarse como el corrimiento de la frecuencia del fotón observado en el marco de referencia solidario al elemento de fluido.

Recordemos además, que un campo de velocidades produce corrimientos Doppler, aberración de fotones y da lugar a términos de advección (formalmente todos estos términos son del orden de V/c). Sin embargo, como estamos interesados en calcular perfiles de líneas el único término que cobra importancia es el desplazamiento Doppler³, entonces, en primera aproximación, podemos ignorar la aberración y la advección y, así, quedarnos con la expresión (3.3).

La solución de la ecuación (3.3) esta sujeta a dos condiciones de contorno espaciales y una condición inicial para la frecuencia.

3.2 SOLUCION DE LA ECUACION DE TRANSPORTE EN UN SISTEMA LAGRANGIANO

En esta sección nos limitamos a describir un método para resolver la ecuación de transporte (3.3). Para ello, es conveniente transformar el sistema de coordenadas (r, μ) en otro sistema de coordenadas (z, p) a través de la relación

$$\begin{aligned} z &= r \cos \vartheta \\ p &= r \sin \vartheta. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Esta transformación define un conjunto de rayos paralelos caracterizados por el parámetro de impacto "p", que es la distancia perpendicular del rayo al centro de simetría, y "z", que es la

³ En el caso de perfiles de líneas, el efecto de los corrimientos en frecuencia son importantes cuando $\Delta \nu / \Delta \nu_D \cong \nu / V_{th}$ (V es la velocidad térmica del medio). Por lo tanto, el efecto Doppler está amplificado en un factor c/V_{th} respecto de los términos de aberración y advección.

distancia a lo largo de un rayo, medida desde el plano perpendicular que pasa por dicho centro, como se muestra en la figura 3.2. Elegimos el eje z positivo hacia el observador externo.

Todas las variables que eran funciones del radio r, ahora dependen de z y de p a través de la relación elemental $r^2 = z^2 + p^2$.

Debido a la forma particular de la transformación (3.4), a cada punto (z,p) le corresponden dos valores de la intensidad específica $I(\nu, \mu, r)$, dependiendo de si μ es mayor o menor que cero respecto a un observador externo⁴. Esto conduce a definir una intensidad $I^+ \equiv I(\nu, \mu, r)$ e $I^- \equiv I(\nu, -\mu, r)$ para todo $|\mu| \leq 1$. Se designa con los signos (+) y (-) a la radiación que se propaga acercándose (radiación emergente) y alejándose (radiación entrante) respecto al observador externo.

Usando las relaciones dadas en (3.4), $I(\nu, \pm\mu, r)$ se transforma en $I^\pm(\nu, p, z)$, y los operadores en derivadas parciales en;

$$\frac{\partial}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial r} = \mu \frac{\partial}{\partial z} + \text{sen } \vartheta \frac{\partial}{\partial p},$$

$$\frac{\partial}{\partial \mu} = \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \mu} + \frac{\partial}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial \mu} = r \frac{\partial}{\partial z} - r \frac{\mu}{\text{sen } \vartheta} \frac{\partial}{\partial p}.$$

Luego, sobre cada rayo identificado con un parámetro de impacto "p", la ecuación de transporte para la radiación de frecuencia ν (ecuación 3.3) puede escribirse,

$$\frac{\partial I^+(\nu, p, z)}{\partial z} - \frac{\alpha(r)}{r} \left(1 - \mu^2 - \beta(r) \mu^2 \right) \frac{\partial I^+(\nu, p, z)}{\partial \nu} = \eta(\nu, r) - \chi(\nu, r) I^+(\nu, p, z) \quad (3.5a)$$

⁴ Recordar que todas las cantidades están evaluadas en un marco de referencia que acompaña el movimiento de un elemento de fluido.

$$-\frac{\partial \mathbf{I}^-(\nu, p, z)}{\partial z} - \frac{\alpha(r)}{r} \left(1 - \mu^2 - \beta(r) \mu^2 \right) \frac{\partial \mathbf{I}^-(\nu, p, z)}{\partial \nu} = \eta(\nu, r) - \chi(\nu, r) \mathbf{I}^-(\nu, p, z), \quad (3.5b)$$

donde $\alpha(r) = \nu V(r)/c$

y $\beta(r) = d \ln V(r) / d \ln r$

Es conveniente definir los promedios simétrico y antisimétrico U y V que son, respectivamente, variables similares a la intensidad media y al flujo;

$$U(\nu, p, z) \equiv \frac{1}{2} \left(\mathbf{I}^+(\nu, p, z) + \mathbf{I}^-(\nu, p, z) \right)$$

y (3.6)

$$V(\nu, p, z) \equiv \frac{1}{2} \left(\mathbf{I}^+(\nu, p, z) - \mathbf{I}^-(\nu, p, z) \right).$$

Estos promedios nos permiten construir un sistema de dos ecuaciones diferenciales de primer orden. Para ello procedemos de la siguiente manera: para cada rayo identificado con un parámetro p , sumamos miembro a miembro las ecuaciones para la radiación emergente (3.5a) y la radiación entrante (3.5b) y dividimos por $\chi(\nu, r)$. Luego, empleamos las definiciones dadas en (3.6) y obtenemos,

$$\frac{1}{\chi(\nu, r)} \frac{\partial}{\partial z} U(\nu, p, z) - \gamma(\nu, p, z) \frac{\partial}{\partial \nu} V(\nu, p, z) = -V(\nu, p, z), \quad (3.7)$$

donde $\gamma(\nu, p, z) \equiv \frac{\alpha(r)}{r \chi(\nu, r)} \left(1 - \mu^2 + \beta(r) \mu^2 \right).$

Análogamente, restando miembro a miembro las ecuaciones (3.5a) y (3.5b) obtenemos

$$\frac{1}{\chi(\nu, r)} \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{V}(\nu, p, z) - \gamma(\nu, p, z) \frac{\partial}{\partial \nu} \mathbf{U}(\nu, p, z) = \mathbf{S}(\nu, r) - \mathbf{U}(\nu, p, z). \quad (3.8)$$

Observemos que en la ecuación (3.8) hemos introducido la función fuente,

$$\mathbf{S}(\nu, r) \equiv \eta(\nu, r) / \chi(\nu, r),$$

cuya forma más general es una función lineal de la intensidad media del campo de radiación de una línea,

$$\mathbf{S}(\nu, r) = \zeta(\nu, r) \bar{\mathbf{J}}(r) + \theta(\nu, r) \quad (3.9)$$

$$\text{donde } \bar{\mathbf{J}}(r) = \int_{\nu_{\min}}^{\nu_{\max}} d\nu \phi(\nu, r) \int_0^1 d\mu \mathbf{U}(\nu, p, z). \quad (3.10)$$

La función $\phi(\nu, r)$ es el perfil de absorción de la línea normalizado respecto a la frecuencia, es decir

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(\nu, r) d\nu = 1,$$

ν_{\min} y ν_{\max} se elige de manera tal que contenga a todo el perfil de la línea en el marco de referencia que se mueve con el fluido.

La forma funcional de $\phi(\nu, r)$, $\zeta(\nu, r)$ y $\theta(\nu, r)$ dependerá del problema físico a estudiar y se especificará en el capítulo (4). Se debe notar que, de la expresión de $\bar{\mathbf{J}}$ (ecuación 3.10) resultan acopladas todas las frecuencias comprendidas dentro del perfil de una línea.

El sistema de ecuaciones (3.7) y (3.8) debe resolverse sujeto a dos condiciones de contorno espaciales y una condición de contorno inicial para la frecuencia.

3.3 CONDICIONES DE CONTORNO ESPACIALES

Resolvemos la ecuación de transporte en una región comprendida entre dos superficies esféricas concéntricas de radio interior R_c y radio exterior R , como se ilustró en la figura 3.2.

Como condición de contorno para el borde exterior supondremos que la radiación incidente sobre la superficie de radio $r = R$ es nula, es decir,

$$I^-(\nu, p, z_{\text{máx}}) = 0,$$

por tanto, de la ecuación (3.6) resulta que

$$U(\nu, p, z_{\text{máx}}) = V(\nu, p, z_{\text{máx}}).$$

Luego, sustituyendo esta expresión en la ecuación (3.7) se tiene,

$$\frac{1}{\chi(\nu, R)} \frac{\partial}{\partial z} U(\nu, p, z) \Big|_{z_{\text{máx}}} = \gamma(\nu, z_{\text{máx}}) \frac{\partial}{\partial \nu} U(\nu, p, z_{\text{máx}}) - U(\nu, p, z_{\text{máx}}), \quad (3.11)$$

donde $z_{\text{máx}}$ es el valor de z en la intersección del rayo p con la superficie de radio R ($z_{\text{máx}} = (R^2 - p^2)^{1/2}$).

En el interior, las condiciones de contorno para los rayos que inciden sobre la superficie de radio R_c , ó núcleo, es diferente de aquellos que no lo hacen.

Para los parámetros que no impactan sobre el núcleo, es decir $p \geq R_c$, la simetría del problema en $z = 0$ implica que $V(\nu, p, 0) = 0$, luego, de la ecuación (3.7) se tiene que

$$\frac{\partial}{\partial z} U(\nu, p, z) \Big|_{z=0} = 0 \quad \text{si } p \geq R_c. \quad (3.12)$$

Para $p < R_C$ supondremos, para todas las frecuencias, que el espesor óptico de las capas del núcleo es suficientemente grande. Esto significa que la profundidad óptica del continuo $\tau_C \gg 1$ y la profundidad óptica de las líneas es mayor que la profundidad óptica de termalización. Entonces podemos utilizar la aproximación de difusión,

$$I^{\pm}(\nu, p, z_{\min}) = B(\nu) \pm \frac{|\mu|}{\chi(\nu, R_C)} \left| \frac{dB(\nu)}{dr} \right|_{R_C}, \quad (3.13)$$

que al ser sustituida en (3.6) conduce a

$$V(\nu, p, z_{\min}) = \frac{|\mu|}{\chi(\nu, R_C)} \left| \frac{dB(\nu)}{dr} \right|_{R_C} = \frac{(R_C^2 - p^2)^{1/2}}{R_C \chi(\nu, R_C)} \left| \frac{dB(\nu)}{dr} \right|_{R_C}, \quad (3.14)$$

cuando $p < R_C$,

donde $z_{\min} = (R_C^2 - p^2)^{1/2}$, $B(\nu)$ y $dB(\nu)/dr$ son la función de Planck y su gradiente radial evaluados en $r = R_C$, respectivamente.

3.4 CONDICION INICIAL PARA LA FRECUENCIA

Nos restringimos al caso de un campo radial de velocidades monótonamente creciente con el radio. En un marco de referencia que se mueve con un elemento de fluido, toda partícula en una atmósfera en expansión, con $V \geq 0$ y $dV/dr \geq 0$, siempre ve que se está alejando de todas las demás partículas. Por lo tanto, la radiación de frecuencia ν comprendida dentro del perfil de una línea, que proviene de cualquier punto de una región distante, se observará enrojecida respecto a la radiación que emerge de un perfil local. Como resultado, sobre el borde azul del perfil local sóloamente

pueden incidir fotones provenientes del continuo de otros lugares de la atmósfera. Con esta última propiedad, podemos establecer una condición inicial para $\partial U/\partial \nu$ dando el valor de la pendiente del continuo. Particularmente, en este trabajo elegimos

$$\frac{\partial}{\partial \nu} U(\nu, p, z) \Big|_{\nu_{\text{máx}}} = 0,$$

donde $\nu_{\text{máx}}$ corresponde a la frecuencia más alta dentro de un perfil de una línea.

Con esta condición, las ecuaciones (3.7) y (3.8) se reducen simplemente a la forma tradicional de la ecuación de transporte para la radiación del continuo en el caso estático,

$$\frac{1}{\chi(\nu, r)} \frac{\partial}{\partial z} U(\nu, p, z) \Big|_{\nu_{\text{máx}}} = -V(\nu_{\text{máx}}, p, z) \tag{3.15}$$

$$y \quad \frac{1}{\chi(\nu, r)} \frac{\partial}{\partial z} V(\nu, p, z) \Big|_{\nu_{\text{máx}}} = S(\nu_{\text{máx}}, r) - U(\nu_{\text{máx}}, p, z),$$

porque las variaciones de las propiedades del continuo son despreciables frente a los corrimientos de frecuencia causados por un campo de velocidades.

La solución del sistema en derivadas parciales (3.15), $U(\nu, p, z)$ evaluada en $\nu_{\text{máx}}$, nos provee de valores iniciales para comenzar la integración numérica de las ecuaciones (3.7) y (3.8), las cuales luego se calcularán frecuencia a frecuencia, en orden decreciente, hasta alcanzar el borde de menor frecuencia de la línea. Esto da suficiente información para calcular la integral de scattering requerida en la ecuación (3.10).

Con un campo de velocidades como el mencionado, no es necesario dar una condición inicial a $\partial U/\partial \nu$ en el ala de baja frecuencia, pues desde un punto de vista matemático sería un problema sobre

especificado. Físicamente tampoco es apropiado, ya que el campo de radiación puede variar con la frecuencia más allá del perfil local de una línea, debido al transporte de radiación de la misma línea en otros puntos en la atmósfera.

3.5 SOLUCION NUMERICA

La interacción de la radiación con la materia tiene su descripción matemática en los sistemas de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales (3.7) y (3.8), que relacionan en cada punto los valores y velocidades de cambio de las variables $U(\nu, p, z)$ y $V(\nu, p, z)$ con sus valores en otros puntos cercanos.

A excepción de algunos casos simples, es imposible obtener una descripción analítica de la solución exacta, por tanto, debemos necesariamente recurrir a las técnicas numéricas.

El método numérico que emplearemos consiste en dar una descripción discreta del campo de radiación, en la región a estudiar, mediante la introducción de una red finita de puntos en radio, en frecuencia y en ángulo. Así, los valores del campo de radiación se corresponderán exclusivamente con puntos de la red. El número de puntos que se utilice para resolver el problema depende de la dimensión espacial del modelo, la complejidad geométrica de la región y el grado de detalle buscado en el resultado.

El sistema de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales se sustituye por un extenso sistema de ecuaciones algebraicas ordinarias. Detalles sobre la representación en diferencias finitas de las ecuaciones (3.7), (3.8) y sus correspondientes condiciones de contorno se describen en el apéndice A.

La solución del sistema de ecuaciones algebraicas se obtiene recurriendo a una representación matricial siguiendo el método de *Mihalas, Kunasz y Hummer (1975)*, quienes se basaron en el proceso de eliminación de variables propuesto por *Rybicki (1971)*. Las variables discretas del campo de radiación $U(\nu, p, z)$ y $V(\nu, p, z)$ se organizan en vectores que guardan la información respecto a la variación de estas cantidades con la profundidad a lo largo de un rayo y para una

determinada frecuencia. La organización matricial y vectorial es indispensable para conservar en la memoria de la computadora la información numérica, la que se actualizará periódicamente. Los nuevos valores de las variables del campo en cada punto de la red se computan a partir de los valores calculados anteriormente en el mismo punto y en los puntos vecinos, como así también a partir de los nuevos valores calculados en otros puntos de la red (caso típico en un problema de naturaleza no local).

Finalmente, la solución del sistema da la descripción de la intensidad de la radiación en cada marco de referencia local en movimiento. Para obtener el flujo observado debemos transformar las cantidades físicas al marco de referencia del observador. Este procedimiento se realizará mediante un método totalmente independiente al presentado en los párrafos anteriores.

3.6 ECUACIONES PARA LOS MOMENTOS DEL CAMPO DE RADIACION

En las secciones 3.2 a 3.5 describimos un método numérico que permite hallar la solución de la ecuación de transporte radiativo para un medio con simetría esférica, en un sistema de referencia lagrangiano. Vimos que la descripción completa del campo de radiación, $I(r, \nu, \mu)$, puede obtenerse empleando el procedimiento de eliminación de Rybicki (válido sólo para los casos donde puede aplicarse redistribución completa). En lo que sigue de este capítulo daremos otro método numérico, para resolver el problema del transporte en medios que se expanden con simetría esférica. Este nuevo procedimiento resuelve las ecuaciones de los momentos del campo de radiación, en el marco de referencia del fluido, empleando el método de Feautrier.

La ventaja de trabajar con las ecuaciones de los momentos angulares de la intensidad específica es que se evita tener que especificar la distribución angular, reduciendo de esta forma el número de incógnitas. Otra ventaja de este método es que puede generalizarse para tratar problemas que incluyen funciones de redistribución en frecuencia.

Definiciones Básicas

Los momentos, o promedios angulares, de la intensidad $I(r, \mu, \nu)$ que describen el campo de radiación están definidos:

$$M^n(r, \nu) \equiv \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \mu^n I(r, \mu, \nu) d\mu. \quad (3.16)$$

En particular, los cuatro primeros momentos suelen escribirse con la notación

$$\begin{aligned} M^0(r, \nu) &\equiv J(r, \nu) & M^1(r, \nu) &\equiv H(r, \nu) \\ M^2(r, \nu) &\equiv K(r, \nu) & M^3(r, \nu) &\equiv N(r, \nu). \end{aligned} \quad (3.17)$$

Una descripción completa del campo de radiación en un punto r puede realizarse especificando la intensidad $I(r, \mu, \nu)$ en ese punto como una función de μ , o dando sus infinitos momentos $M^n(r, \nu)$ con $n = 0, 1, 2, \dots$.

Las ecuaciones diferenciales para los momentos del campo de radiación, en un marco de referencia que se mueve con un elemento del fluido, resultan de multiplicar la ecuación de transporte (3.3) por μ^n e integrar sobre todos los ángulos. Entonces,

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \mu^{n+1} \frac{\partial I}{\partial r} d\mu + \int_{-1}^1 \frac{\mu^n - \mu^{n+2}}{r} \frac{\partial I}{\partial \mu} d\mu - \alpha \int_{-1}^1 \left[\mu^n - \mu^{n+2} + \mu^{n+2} \beta \right] \frac{\partial I}{\partial \nu} d\mu \\ = \eta \int_{-1}^1 \mu^n d\mu - \chi \int_{-1}^1 \mu^n I d\mu, \end{aligned} \quad (3.18)$$

donde $\alpha = \frac{\nu_0 V(r)}{c r}$, $\beta = \frac{d \ln V(r)}{d \ln r}$ e $I = I(r, \mu, \nu)$.

(Por simplicidad omitimos, momentáneamente, indicar la dependencia de las funciones con sus respectivas variables).

Integrando por partes el segundo término del miembro izquierdo de la ecuación (3.18), y reordenando, obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} \int_{-1}^1 \mu^{n+1} I \, d\mu - \frac{1}{r} \int_{-1}^1 (n \mu^{n-1} - (n+2) \mu^{n+1}) I \, d\mu - \alpha \frac{\partial}{\partial \nu} \int_{-1}^1 (\mu^n - \mu^{n+2} + \mu^{n+2} \beta) I \, d\mu \\ = \eta(\nu, r) \int_{-1}^1 \mu^n \, d\mu - \chi(\nu, r) \int_{-1}^1 \mu^n I \, d\mu , \end{aligned}$$

que es sólo aplicable cuando la emisividad y la opacidad son funciones independientes del ángulo. Multiplicando ambos miembros por 1/2 e introduciendo las definiciones dadas en (3.16), hallamos una expresión general para las ecuaciones de los momentos,

$$\begin{aligned} \frac{\partial M^{n+1}(\nu)}{\partial r} - \frac{n M^{n-1}(\nu) - (n+2) M^{n+1}(\nu)}{r} - \alpha(r) \frac{\partial}{\partial \nu} \left[M^n(\nu) - M^{n+2}(\nu) + \beta(r) M^{n+2}(\nu) \right] \\ = \eta(r, \nu) \frac{\mu^{n+1}}{2(n+1)} \Big|_{-1}^1 - \chi(r, \nu) M^n(\nu) . \end{aligned}$$

Las dos primeras ecuaciones para los momentos del campo de radiación son:

para $n = 0$,

$$\frac{\partial H(\nu)}{\partial r} + \frac{2H(\nu)}{r} - \alpha(r) \frac{\partial}{\partial \nu} \left\{ J(\nu) - K(\nu) + \beta(r) K(\nu) \right\} = \eta(r, \nu) - \chi(r, \nu) J(\nu) \quad (3.19)$$

y para $n = 1$,

$$\frac{\partial K(\nu)}{\partial r} - \frac{J(\nu) - 3K(\nu)}{r} - \alpha(r) \frac{\partial}{\partial \nu} \left\{ H(\nu) - N(\nu) + \beta(r) N(\nu) \right\} = -\chi(r, \nu) H(\nu). \quad (3.20)$$

El momento $N(r, \nu)$ aparece debido al factor μ^2 que multiplica a $\partial I / \partial \nu$ en la ecuación (3.3).

Las ecuaciones (3.19) y (3.20) constituyen un sistema de dos ecuaciones diferenciales en derivadas parciales con 4 incógnitas. Aún cuando se extienda este sistema agregando un número mayor de ecuaciones de momentos, siempre habrá dos variables más que el número de ecuaciones establecido. Debido a la imposibilidad de trabajar con un número infinito de ecuaciones, el sistema se resuelve adicionando dos ecuaciones de cierre. Es decir, se establece una relación auxiliar entre las variables del campo de radiación. Como relación de cierre usaremos los factores variables de Eddington

$$f_\nu = K_\nu / J_\nu \quad \text{y} \quad g_\nu = N_\nu / H_\nu,$$

definidos como el cociente entre dos variables homólogas del campo de radiación. Estos factores se definen para evitar la dependencia angular del campo.

Escribimos a continuación, las ecuaciones (3.19) y (3.20) en términos de los factores variables de Eddington:

para $n = 0$, tenemos

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 H_\nu)}{\partial r} - \alpha \left(\frac{\partial (1 - f_\nu) J_\nu}{\partial \nu} + \beta \frac{\partial (f_\nu J_\nu)}{\partial \nu} \right) = \eta_\nu - \chi_\nu J_\nu \quad (3.21)$$

y, para $n = 1$,

$$\frac{\partial (f_\nu J_\nu)}{\partial r} + \frac{(3f_\nu - 1)}{r} J_\nu - \alpha \left(\frac{\partial (1 - g_\nu) H_\nu}{\partial \nu} + \beta \frac{\partial (g_\nu H_\nu)}{\partial \nu} \right) = -\chi_\nu H_\nu. \quad (3.22)$$

Una expresión más simplificada de las ecuaciones (3.21) y (3.22) se tiene al introducir la profundidad óptica generalizada

$$dX_\nu = -\chi_\nu q_\nu dr = q_\nu dr_\nu,$$

donde $q_\nu(r)$ es el factor de esfericidad, introducido por Auer (1971). q_ν se obtiene integrando la siguiente ecuación,

$$\frac{\partial \ln(r^2 q_\nu)}{\partial r} = \frac{3f_\nu - 1}{f_\nu r}.$$

Finalmente, llegamos a las expresiones para los momentos del campo de radiación buscadas,

$$q_\nu \frac{\partial (r^2 H_\nu)}{\partial X_\nu} + \gamma_\nu \left(\frac{\partial (1 - f_\nu) r^2 J_\nu}{\partial \nu} + \beta \frac{\partial (f_\nu r^2 J_\nu)}{\partial \nu} \right) = r^2 (J_\nu - S_\nu) \quad (3.23)$$

$$y \quad \frac{\partial (f_\nu q_\nu r^2 J_\nu)}{\partial X_\nu} + \gamma_\nu \left(\frac{\partial (1 - g_\nu) r^2 H_\nu}{\partial \nu} + \beta \frac{\partial (g_\nu r^2 H_\nu)}{\partial \nu} \right) = r^2 H_\nu, \quad (3.24)$$

donde $\gamma_\nu = \alpha / \chi_\nu$ y $S_\nu = \eta_\nu / \chi_\nu$ es la función fuente total.

En principio, supondremos que los factores variables de Eddington (\mathbf{f} y \mathbf{g}) son funciones conocidas, por lo tanto, el sistema de ecuaciones diferenciales para los momentos de orden cero y primer orden del campo de radiación pueden ser integrados numéricamente en el marco de referencia lagrangiano.

Cuando los efectos de redistribución parcial en frecuencia son tenidos en cuenta, la función fuente tiene la misma forma estructural que presenta la ecuación (3.9) excepto que ahora la integral de scattering depende de la frecuencia,

$$S(\nu, r) = \Gamma(\nu, r) \int \mathcal{R}(\nu', \nu; r) \mathcal{J}(\nu', \nu) d\nu' + \Omega(\nu, r). \quad (3.25)$$

$\Gamma(\nu, r)$ y $\Omega(\nu, r)$ son funciones conocidas y dependen del modelo atómico, su forma particular se detalla en el capítulo 4.

$\mathcal{R}(\nu', \nu; r)$ es la función de redistribución parcial en frecuencia promediada sobre todos los ángulos.

3.7 CONDICIONES DE CONTORNO

La solución del sistema de ecuaciones (3.23) y (3.24) está completamente determinada por las condiciones de contorno. Consideremos las mismas condiciones de contorno que fueron planteadas en la secciones 3.3 y 3.4 de este capítulo.

En el borde exterior ($r = R$), la intensidad incidente $I^-(R, \mu, \nu)$ y la profundidad óptica generalizada, $\mathbf{X}(\nu, R)$, son ambas nulas. Entonces, utilizando dos factores auxiliares de Eddington,

$$h_\nu = \frac{H_\nu(R)}{J_\nu(R)} \quad \text{y} \quad n_\nu = \frac{N_\nu(R)}{J_\nu(R)},$$

podemos eliminar la densidad de flujo H_ν , evaluada en $r = R$, de la ecuación (3.24),

$$\left. \frac{\partial (\mathbf{f}_\nu \mathbf{q}_\nu r^2 \mathcal{J}_\nu)}{\partial \mathbf{x}_\nu} \right|_R + \gamma_\nu \left(\frac{\partial (1 - \mathbf{g}_\nu) r^2 \mathbf{H}_\nu}{\partial \nu} + \beta \frac{\partial (\mathbf{g}_\nu r^2 \mathbf{H}_\nu)}{\partial \nu} \right) = R^2 \mathbf{H}_\nu (R),$$

y escribir la primera condición de contorno,

$$\left. \frac{\partial (\mathbf{f}_\nu \mathbf{q}_\nu r^2 \mathcal{J}_\nu)}{\partial \mathbf{x}_\nu} \right|_R = R^2 \left\{ \mathbf{h}_\nu \mathcal{J}_\nu (R) - \gamma_\nu \left(\frac{\partial (\mathbf{h}_\nu - \mathbf{n}_\nu) \mathcal{J}_\nu (R)}{\partial \nu} + \beta \frac{\partial (\mathbf{n}_\nu \mathcal{J}_\nu (R))}{\partial \nu} \right) \right\}. \quad (3.26)$$

Como condición de contorno en el borde interior ($r = R_c$), supondremos que:

- i) en las capas más profundas de la atmósfera la velocidad de expansión es esencialmente cero, lo que equivale a decir que $\gamma_\nu = 0$, y
- ii) es válida la aproximación de difusión para todas las frecuencia de una línea, es decir,

$$\mathbf{H}_\nu = \frac{1}{3\chi_\nu} \left. \frac{\partial \mathbf{B}_\nu}{\partial r} \right|_{R_c}$$

Al sustituir las condiciones (i) e (ii) en (3.24) obtenemos la condición de contorno en el borde interior,

$$\left. \frac{\partial (\mathbf{f}_\nu \mathbf{q}_\nu r^2 \mathcal{J}_\nu)}{\partial \mathbf{x}_\nu} \right|_{R_c} = \frac{R_c^2}{3\chi_\nu} \left. \frac{\partial \mathbf{B}_\nu}{\partial r} \right|_{R_c} \quad (3.27)$$

Tal como se detalló en el método anterior, además necesitamos una condición inicial para la frecuencia, para ello establecemos que $\left. \frac{\partial \mathbf{I}}{\partial \nu} \right|_{\nu_{\text{máx}}} = 0$.

Si los factores de Eddington son funciones conocidas, las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales para los momentos del campo de radiación, y sus respectivas condiciones de contorno, pueden ser integradas numéricamente utilizando el método elaborado

por *Mihalas, Kunasz, & Hummer (1976)*, basado en el esquema de Feautrier. En este esquema, el sistema de ecuaciones diferenciales es reemplazado por un sistema de ecuaciones en diferencias finitas. Detalles del método, de las fórmulas de diferencias finitas que corresponden a las ecuaciones (3.23) y (3.24), y de las condiciones de contorno (3.26) y (3.27) se describen en el apéndice B.

3.8 PROCEDIMIENTO DE CALCULO

Para iniciar la integración, necesitamos conocer a priori un valor estimado de J_ν que nos permita determinar un valor inicial para la función fuente η , por lo tanto, debemos calcular las poblaciones de los niveles atómicos.

La solución de las ecuaciones para los momentos del campo de radiación, (3.23) y (3.24), nos proveen de valores mejorados de J_ν . Los nuevos valores de J_ν , son usados en el capítulo 4, para actualizar las poblaciones de los niveles atómicos, y recalcular los coeficientes de la expresión (3.25). Este procedimiento se repite hasta lograr la convergencia.

3.9 DETERMINACION DE LOS FACTORES VARIABLES DE EDDINGTON

Para obtener la solución de las ecuaciones (3.23) y (3.24) debemos conocer la variación de f_ν y g_ν con la profundidad, para todas las frecuencias. En la práctica, los factores variables de Eddington son calculados utilizando la solución formal de la ecuación de transporte para cada rayo p , en el marco de referencia que se mueve con un elemento de fluido. Para ello se procede de la siguiente manera:

a) Con una expresión aproximada de la función fuente (por ejemplo, consideremos un caso con redistribución completa), resolvemos las ecuaciones (3.6) y (3.7) junto a sus correspondientes condiciones de

contorno, para cada parámetro de impacto y una frecuencia por vez. El sistema a resolver (ver apéndice A) es de la forma $\mathbb{T} \bar{U} = \bar{S}$ siendo \mathbb{T} una matriz tridiagonal. La solución de este sistema determina el campo de radiación, $U_{d,p,\nu}^{CR}$ y $V_{d,p,\nu}^{CR}$.

b) Los valores de $U_{d,p,\nu}$ y $V_{d,p,\nu}$, calculados con una modesta aproximación (según se detalló en a), originan factores variables de Eddington de mayor precisión.

$$f_{d,\nu} = \frac{H_{d,\nu}}{J_{d,\nu}} \quad \text{Y} \quad g_{d,\nu} = \frac{N_{d,\nu}}{J_{d,\nu}},$$

donde $J_{d,\nu} = \sum_p a_{d,p} U_{d,p,\nu}$ $H_{d,\nu} = \sum_p b_{d,p} \mu V_{d,p,\nu}$,

Y $N_{d,\nu} = \sum_p c_{d,p} \mu^3 V_{d,p,\nu}$.

c) Con los f_ν y g_ν determinados en b) resolvemos las ecuaciones para los momentos, (3.23) y (3.24), usando la ecuación (3.25). De esta manera, obtenemos nuevos valores de J_ν para cada profundidad.

d) Recalculamos S_ν (ecuación 3.25) con el valor de J_ν obtenido en c). Si la función fuente recalculada difiere de la usada en c), entonces, utilizando los nuevos valores de S_ν calculamos la intensidad recurriendo a la solución formal del transporte. Luego, repetimos el procedimiento descrito en b) - d) hasta alcanzar la convergencia.

Este método converge muy rápidamente además de economizar memoria y tiempo de máquina.

3.10 CAMPO DE RADIACION EMERGENTE EN EL MARCO DE REFERENCIA DEL OBSERVADOR

Una vez determinada la función fuente y la opacidad de la línea, estamos en condiciones de calcular el perfil emergente en el marco de referencia del observador. Para cada frecuencia observada resolvemos la ecuación de transporte radiativo (3.1); su solución se obtiene integrando numéricamente sus correspondientes ecuaciones de diferencias finitas de segundo orden, para un conjunto especificado de parámetros de impacto.

Recordemos que la ecuación (3.1) fue formulada en un marco de referencia inercial. Entonces, en un medio en expansión, todas aquellas cantidades que dependen de la frecuencia tienden a estar altamente localizadas sobre cada rayo; es decir, aparecen zonas de resonancia. La resonancia ocurre cuando la función perfil $\phi(y)$ es grande; aquí $y = x - \mu v(r)$, donde x es el desplazamiento respecto al centro de la línea en el marco de referencia del observador, y $v(r)$ es la proyección de la velocidad sobre un rayo⁵. Es decir, existen intervalos de puntos donde $\mu v(r)$ es grande, ya sea, porque el gradiente de velocidad es grande o porque cambia abruptamente el factor de proyección. Entonces, en las zonas de resonancia debemos refinar la grilla de radios. En esta región, los valores de $\mu v(r)$ son interpolados directamente como una función de z sobre cada rayo.

Una vez calculada la intensidad emergente monocromática sobre todos los parámetros de impacto, determinamos el flujo emergente para cada frecuencia.

⁵ x está expresada en unidades de ancho Doppler térmico y v en unidades de la velocidad térmica.

El capítulo anterior estuvo totalmente dedicado a explicar los métodos que emplearemos para resolver problemas de transporte radiativo en medios que se expanden con simetría esférica. Vimos que la ecuación de transporte radiativo para las frecuencias de una línea, se resuelve formalmente expresando la función fuente en términos de la intensidad media del campo de radiación que involucra a la transición atómica (ecuación 3.9 ó 3.25). Es a través de esta relación que el campo de radiación depende de los procesos de absorción y emisión que ocurren en las atmósferas estelares y, por lo tanto, de los valores de las poblaciones atómicas que dan lugar a la línea. A su vez, las poblaciones de los niveles son modificadas por el campo de radiación (procesos de absorción y emisión estimulada). Por esta razón, para calcular el flujo emergente en las líneas debemos resolver, simultáneamente, la ecuación de transporte radiativo y las ecuaciones de equilibrio estadístico. Para ello, debemos considerar una atmósfera constituida por átomos e iones de una gran variedad de elementos químicos, donde cada partícula debe pensarse formada por un número infinito de estados de energía cuantizados (niveles de energía), que van desde el nivel fundamental hasta el continuo. Un análisis minucioso de la interacción de la radiación con la materia (átomos) requiere introducir un modelo atómico que incluya muchos niveles de energía. La dificultad principal del cálculo no radica en el gran número de niveles de energía incorporados en el modelo, sino se debe a que el campo de radiación que proviene de una transición puede afectar al que se origina en otras transiciones. Este acoplamiento de la radiación conduce a que la función fuente dependa de manera no lineal del campo de radiación de las otras líneas y de la transición considerada. El problema puede simplificarse al suponer que existe una única transición atómica de frecuencia ν , originada entre dos estados i y j , capaz de modificar el campo de radiación. Esta

simplificación, conocida como aproximación equivalente a un átomo de dos niveles, permite despejar el cociente de dos poblaciones atómicas de las ecuaciones de equilibrio estadístico, para átomos con muchos niveles de energía. Mediante este procedimiento es posible determinar la forma funcional de los coeficientes de las ecuaciones (3.9) y (3.25) y así, resolver formalmente la ecuación de transporte para cada transición empleando los métodos citados en el capítulo 3.

4.1 ECUACIONES DE EQUILIBRIO ESTADISTICO

Modelo de Atomo

Consideremos un modelo de átomo formado por dos estados de ionización sucesivos, como se esquematiza en la figura 4.1.

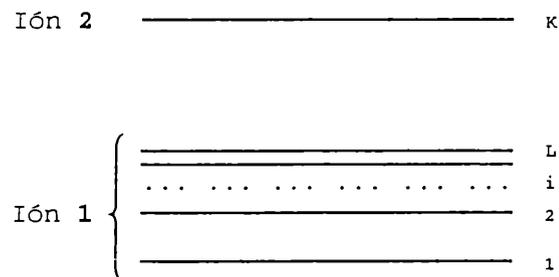


Figura 4.1 - Esquema de niveles

El primer ión tiene L niveles de energía identificados secuencialmente por $1, 2, \dots, i, \dots, L$, mientras que el segundo ión está constituido por un único nivel de energía identificado con la letra K .

En este modelo, los átomos pueden realizar transiciones radiativas y colisionales de tipo ligado-ligado y ligado-libre.

Sea P_{ij} la probabilidad total por unidad de tiempo, o rapidez

total, de que en un átomo ocurra una transición desde un nivel i a un nivel j . El subíndice j puede hacer referencia tanto a niveles del Ión 1 como del Ión 2.

La rapidez total P_{ij} puede escribirse

$$P_{ij} = R_{ij} + C_{ij},$$

donde R_{ij} y C_{ij} son las tasas radiativa y colisional correspondientes a la transición $i \rightarrow j$, respectivamente.

$$R_{ij} = A_{ij} + B_{ij} \bar{J}_{ij} \quad \text{si } i > j$$

$$\text{ó} \quad R_{ij} = B_{ij} \bar{J}_{ij} \quad \text{si } i < j,$$

donde A_{ij} es el coeficiente de Einstein para la emisión espontánea, B_{ij} es el coeficiente de Einstein para la emisión (absorción) estimulada si $i > j$ ($i < j$).

\bar{J}_{ij} es la intensidad media integrada sobre todas las frecuencias,

$$\bar{J}_{ij} = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \int_{\nu_{\text{mín}}}^{\nu_{\text{máx}}} \phi_{\nu} I_{\nu}(\mu) d\nu d\mu, \quad (4.1)$$

donde ϕ_{ν} es el perfil de absorción de la línea. En el marco de referencia del fluido, el rango de integración del término de scattering se elige de manera tal que abarque todo el ancho del perfil ϕ_{ν} .

La intensidad media, \bar{J}_{ij} , es la variable que acopla las ecuaciones de equilibrio estadístico con la ecuación de transporte radiativo.

En estado estacionario, la ecuación de equilibrio estadístico para un nivel i arbitrario que pertenece al Ión 1 ($1 \leq i \leq L$) es de la forma

$$n_i \left(\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^L P_{ij} + P_{ik} \right) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^L n_j P_{ji} + n_k P_{ki} , \quad (4.2)$$

donde n_i son las poblaciones atómicas por unidad de volumen en el estado i . La ecuación (4.2) establece un balance entre los procesos de excitación y desexcitación que pueblan y despueblan el nivel de energía i de modo que se mantenga constante el número total de átomos en cada estado.

Si escribimos las ecuaciones de equilibrio estadístico para cada nivel de energía obtenemos un sistema de L ecuaciones con $(L+1)$ incógnitas n_i de la forma

$$\sum_{i=1}^{L+1} A_{ji} n_i = B_j \quad (j = 1, \dots, L). \quad (4.3)$$

Por lo tanto, para resolver este sistema necesitamos una ecuación de cierre; la ecuación de conservación del número de partículas,

$$\sum_{i=1}^L n_i + n_k = N_{\text{atom}} , \quad (4.4)$$

donde N_{atom} es el número total de átomos (sumados sobre todos los estados de energía ligados y sobre todos los estados de ionización) del elemento químico de la especie, X , en consideración. Este número está determinado por la abundancia química de este elemento relativa al hidrógeno multiplicada por el número total de átomos de hidrógeno por cm^3 , es decir,

$$N_{\text{atom}} = \text{Abundancia}(X,H) N_H$$

El sistema de ecuaciones (4.3) y (4.4) puede expresarse para cada punto de la atmósfera mediante una representación matricial,

$$A \bar{N} = \bar{B}, \quad (4.5)$$

donde \bar{N} es un vector de dimensión $L+1$ que contiene las poblaciones de cada nivel para cada profundidad, \bar{B} es un vector de dimensión $L+1$ y tiene todos sus elementos nulos, excepto el elemento $B_{NL+1} = N_{atom}$, y A es una matriz cuadrada completa de dimensión $(L+1) \times (L+1)$ cuyos elementos son

$$A_{ij} = -P_{ji} \quad i \neq j,$$

$$A_{NL+1,j} = 1,$$

$$y \quad A_{ii} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{NL+1} P_{ij}$$

El sistema de ecuaciones (4.5) puede resolverse explícitamente para cada n_i , si y sólo si, el campo de radiación \bar{J}_{ij} es conocido.

4.2 APROXIMACION EQUIVALENTE A UN ATOMO DE DOS NIVELES

La no linealidad de la ecuación de transporte, en el contexto de un átomo con muchos niveles, se simplifica notablemente cuando se considera que la transición $i \rightarrow j$ es la única transición que modifica el campo de radiación. Es decir, se admite un acoplamiento débil entre las líneas. Con esta hipótesis, y empleando las técnicas utilizadas para el átomo de dos niveles, se puede escribir una expresión analítica para la función fuente de la línea donde el campo de radiación de la transición $i \rightarrow j$ se expresa explícitamente, mientras que todas las restantes transiciones se suponen conocidas. Para aislar los términos correspondientes a la transición ν_{ij} usaremos las ecuaciones de equilibrio estadístico (4.2) para el nivel i y el nivel j , las cuales pueden escribirse de la forma

$$n_i \left(R_{ij} + C_{ij} + \sum_{m<i} P_{im} + \sum_{i<n \neq j} P_{in} \right) = n_j P_{ji} + \sum_{m<i} n_m P_{mi} + \sum_{i<n \neq j} n_n P_{ni}$$

y

$$n_j \left(R_{ji} + C_{ji} + \sum_{j>m \neq i} P_{jm} + \sum_{n>j} P_{jn} \right) = n_i P_{ij} + \sum_{j>m \neq i} n_m P_{mj} + \sum_{n>j} n_n P_{nj}.$$

Esto es equivalente a escribir,

$$\begin{aligned} n_i (R_{ij} + a_1) - n_j P_{ji} &= a_2 \\ -n_i P_{ij} + n_j (R_{ji} + a_3) &= a_4 \end{aligned} \tag{4.6}$$

donde $a_1 = \left(\sum_{m<i} P_{im} + \sum_{i<n \neq j} P_{in} \right) + C_{ij},$

$$a_2 = \sum_{m<i} n_m P_{mi} + \sum_{i<n \neq j} n_n P_{ni},$$

$$a_3 = \left(\sum_{j>m \neq i} P_{jm} + \sum_{n>j} P_{jn} \right) + C_{ji},$$

$$a_4 = \sum_{j>m \neq i} n_m P_{mj} + \sum_{n>j} n_n P_{nj},$$

y $P_{ij} = R_{ij} + C_{ij}.$

Eliminando n_i y n_j de las ecuaciones (4.6) se deriva la siguiente expresión para el cociente de las poblaciones,

$$\frac{n_i}{n_j} = \frac{R_{ji} + \alpha_{ij}}{R_{ij} + \beta_{ij}} = \frac{A_{ji} + B_{ji} \bar{J}_{ij} + \alpha_{ij}}{B_{ij} \bar{J}_{ij} + \beta_{ij}}, \tag{4.7}$$

donde $\alpha_{ij} \equiv (a_{23} a_{34} + a_{4j} C_{ji}) / (a_{23} + a_{4j})$

y $\beta_{ij} \equiv (a_{14} a_{4j} + a_{2j} C_{ij}) / (a_{14} + a_{2j})$

Como veremos en la sección 4.3, la evaluación de la ecuación (4.7) es necesaria para calcular la función fuente.

4.3 OPACIDAD, EMISIVIDAD Y FUNCIÓN FUENTE

En el capítulo 3 mencionamos que una de las ventajas de formular las ecuaciones en un marco de referencia Lagrangiano es que los coeficientes de opacidad y emisividad total, para la frecuencia ν de una transición $i \rightarrow j$ (ligado-ligado o ligado-libre), pueden expresarse de la siguiente manera:

$$\chi(\nu) = \chi_{ij}(\nu) + X_{\nu} + \sigma_e n_e \quad (4.8)$$

y $\eta(\nu) = \eta_{ij}(\nu) + E_{\nu} + \sigma_e n_e J_{\nu}$.

Las cantidades X_{ν} y E_{ν} son los coeficientes de opacidad y emisividad del continuo¹, respectivamente, y pueden escribirse como

$$X_{\nu} = \sum_b \sigma_{bk}(\nu) (n_b - n_b^* e^{-(h\nu/kT)})$$

¹ Si en particular se está resolviendo el átomo de H o He, las poblaciones de sus niveles influyen apreciablemente en los coeficientes de absorción y de emisión del continuo. Por lo tanto, estos coeficientes deberán ser recalculados cada vez que se determinen nuevos números ocupacionales.

$$Y \quad E_\nu = \sum_b \frac{2h\nu^3}{c^2} e^{-(h\nu/kT)} \sigma_{bk}(\nu) n_b^* ,$$

donde la suma se extiende sobre todos los niveles ligados que pueden ser ionizados por fotones de frecuencia ν . n_b y n_b^* son los números ocupacionales calculados en NLTE y LTE, respectivamente. σ_{bk} es la sección eficaz de fotoionización y σ_e es el coeficiente de Thomson para la dispersión por electrones. Aquí tendremos en cuenta todas las fuentes de opacidad que hemos detallado en el capítulo 2.

Si la transición $i \rightarrow j$ es de tipo ligado-ligado, el coeficiente de absorción de la línea puede escribirse

$$\chi_{ij}(\nu) = \sigma_{ij}(\nu) (n_i - (g_i/g_j) n_j) \quad (4.9a)$$

y el coeficiente de emisión

$$\eta(\nu) = (2h\nu^3/c^2) \sigma_{ij}(\nu) (g_i/g_j) n_j, \quad (4.9b)$$

donde
$$\sigma_{ij}(\nu) = (\pi e^2/mc) \phi_\nu g_i f_{ij}.$$

g_i y g_j son los pesos estadísticos del nivel inferior y superior, respectivamente; f_{ij} es la intensidad de oscilador de la transición, y ϕ_ν es el perfil de absorción de la línea normalizado respecto a la frecuencia.

Según lo expresado en (4.9a) y (4.9b) estamos en un caso de redistribución completa, pues los perfiles de absorción y de emisión son idénticos.

La intensidad media J_ν que aparece en el término de dispersión electrónica (fórmula (4.8)) se considera constante dentro del perfil de la línea y se elige numéricamente igual al valor de la intensidad del continuo en el borde de alta-frecuencia.

Si la transición $i \rightarrow j$ es de tipo ligado-libre, los coeficientes de opacidad y emisividad vienen dados por

$$\chi_{ij}(\nu) = \sigma_{ij}(\nu) \left(n_i - g_{ij}(\nu) e^{-h\nu/kT} n_j \right) \quad (4.10)$$

$$\eta_{ij}(\nu) = (2h\nu^3/c^2) \sigma_{ij}(\nu) g_{ij}(\nu) n_j e^{-h\nu/kT},$$

con

$$g_{ij}(\nu) = \left(\frac{n_i^* n_\rho^*}{n_j^* n_\rho} \right).$$

ρ identifica el nivel de referencia respecto al cual se calculan en LTE las poblaciones n_i^* ; en nuestro caso se tomará como referencia el nivel K del Ión 2.

Nótese que en el caso de una transición ligado-libre debe considerarse la variación de J_ν con la frecuencia en la fórmula (4.8).

La función fuente total (línea más continuo) puede expresarse en la siguiente forma

$$S(\nu) = \frac{\eta(\nu)}{\chi(\nu)} = \frac{\eta_{ij}(\nu) + E_\nu + \sigma_e n_e J_\nu}{\chi_{ij}(\nu) + X_\nu + \sigma_e n_e} \quad (4.11)$$

Dado que $\eta_{ij}(\nu) = \chi_{ij}(\nu) S_{ij}(\nu)$,

donde $S_{ij}(\nu)$ es la función fuente de la transición $i \rightarrow j$. Entonces, la función fuente total puede escribirse en la forma

$$S(\nu) = \frac{\chi_{ij}(\nu) S_{ij}(\nu) + E_\nu + \sigma_e n_e J_\nu}{\chi_{ij}(\nu) + X_\nu + \sigma_e n_e} \quad (4.12)$$

Para el caso de una línea, S_{ij} viene dada por

$$S_{ij}(\nu) = \frac{(2h\nu^3/c^2) g_i/g_j n_j/n_i}{1 - g_i/g_j n_j/n_i}. \quad (4.13)$$

Luego, al reemplazar el cociente de las poblaciones atómicas que surge de la solución formal de las ecuaciones de equilibrio estadístico (ecuación (4.7)) en la fórmula (4.13), se llega a una expresión más compacta para la función fuente de una línea, similar a la expresión deducida para el caso de un átomo de dos niveles (Mihalas 1978),

$$S_{ij} \equiv \gamma_{ij} \bar{J}_{ij} + \epsilon_{ij}, \quad (4.14)$$

donde $\gamma_{ij} \equiv (1 + (\alpha_{ij} - g_i/g_j \beta_{ij})/A_{ji})^{-1}$ y $\epsilon_{ij} \equiv \gamma_{ij} \beta_{ij}/B_{ij}$.

En (4.14) se observa que el campo de radiación de la transición ν_{ij} aparece explícitamente, mientras que los campos de radiación de todas las demás transiciones están en forma implícita en los coeficientes γ y ϵ , los cuales se mantienen constantes cuando se resuelve la ecuación de transporte para la frecuencia ν_{ij} .

Finalmente, reemplazando la ecuación (4.14) en (4.12) se obtiene la función fuente total (ecuación 3.9)

$$S(\nu) = \zeta(\nu, r) \bar{J}_{ij} + \theta(\nu, r), \quad (4.15)$$

donde $\zeta(\nu, r) = \chi_{ij} \gamma_{ij} / (\chi_{ij} + X_\nu + \sigma_e n_e)$,

y $\theta(\nu, r) = (\chi_{ij} \epsilon_{ij} + E_\nu + \sigma_e n_e J_{\nu 1}) / (\chi_{ij} + X_\nu + \sigma_e n_e)$.

Así, hemos obtenido la forma funcional de los coeficientes de las ecuaciones (3.9) y (3.25).

Para las transiciones al continuo se procede de manera análoga al caso de una línea, a excepción que sólo necesitamos las ecuaciones de equilibrio estadístico para el nivel i . Así, si empleamos dicha ecuación,

$$-\sum_{m < i} n_m P_{mi} + n_i (P_{ij} + \sum_{m < i} P_{im} + \sum_{i < n \neq j} P_{in}) - \sum_{i < n \neq j} n_n P_{ni} - n_j P_{ji} = 0$$

podemos escribir

$$\frac{n_i}{n_j} = \frac{a'_2}{R_{ij} + a_1}$$

donde $a'_2 = P_{ji} + (a_2 / n_j)$ y, a_1 y a_2 tienen el mismo significado que en la ecuación (4.6). Entonces, si reemplazamos el cociente de las poblaciones en la expresión de la función fuente para una transición ligado libre, obtenemos

$$S_{ij}(\nu) = \frac{(2h\nu^3/c^2) g_{ij} (R_{ij} + a_1)}{a'_2 - g_{ij}(\nu) (R_{ij} + a_1)}$$

Luego, reemplazando esta expresión en la ecuación (4.12) obtenemos la forma funcional de los coeficientes ζ y θ .

Es interesante destacar que la tasa de fotoionización R_{ij} tiene dos contribuciones: a) una contribución en el rango de frecuencia en el cual la transición $i \rightarrow j$ domina la opacidad y emisividad, por lo tanto, el campo de radiación; y b) una integral

$$\tilde{R}_{ij} = 4\pi \int \frac{\sigma_{ij}(\nu) J_\nu d\nu}{h\nu},$$

donde el campo de radiación está principalmente determinado por la opacidad y emisividad de otras transiciones.

4.4 METODO DE RESOLUCION

Hemos dividido a las transiciones atómicas en dos categorías:

(a) Transiciones explícitas, donde el campo de radiación es desconocido y, por lo tanto, se determinará resolviendo formalmente la ecuación de transporte (3.3), y

(b) Transiciones implícitas, donde las tasas radiativas y colisionales se suponen conocidas con anticipación, y se consideran constantes a lo largo del cálculo.

El cálculo se inicia tomando un valor aproximado para las poblaciones atómicas, por ejemplo, adoptamos los valores de n_i que corresponden a una solución LTE. Esto nos permite estimar un valor inicial de los coeficientes de la función fuente (ecuación (4.15) ó (3.9)). A continuación, resolvemos la ecuación de transporte para cada transición por vez. Con el campo de radiación resultante, para cada profundidad, obtenemos una nueva estimación de las tasas radiativas y de los números ocupacionales, empleando la ecuación (4.5). Las nuevas poblaciones nos permiten determinar los coeficientes a_1 , a_2 , a_3 , y a_4 (ecuación (4.6)) y, por lo tanto, podemos calcular la forma funcional de los coeficientes ξ y θ en la ecuación (4.15). Este proceso iterativo es repetido hasta que la convergencia es obtenida.

En este capítulo presentamos un minucioso estudio sobre las líneas de la serie de Balmer. Las líneas de Balmer, y en particular $H\alpha$, son de gran interés pues sus características espectrales son las que definen el fenómeno Be. Por otra parte, dado que el hidrógeno es el elemento más abundante esperaríamos que estas líneas den cuenta, al menos globalmente, de las propiedades físicas ($\rho(r)$, $T(r)$, $V(r)$) de la atmósfera extendida de una estrella Be; o que permitan establecer posibles rangos de variación de las propiedades básicas mencionadas.

Sobre la base del modelo de atmósfera que hemos propuesto en el capítulo 2 - un medio con simetría esférica, constituido por regiones con propiedades termodinámicas diferentes, en expansión - calculamos el espectro emergente con el fin de dar una interpretación cualitativa del fenómeno Be. Por lo tanto, los modelos que presentamos en este trabajo no corresponden a ninguna estrella en particular. Sólomente deseamos establecer relaciones globales que nos permitan vincular propiedades físicas de las regiones de formación de las líneas con las características morfológicas de los perfiles calculados.

La metodología que seguiremos consiste en estudiar la dependencia de los perfiles que predice el modelo con los parámetros libres del mismo. Si bien, es cierto que es imposible tener en cuenta todas las combinaciones de parámetros, hemos calculado unos 90 modelos en los que se ha variado las leyes de velocidad y temperatura que caracterizan la estructura de la atmósfera, para estrellas con temperaturas efectivas comprendidas entre 9000 y 25000 K y $\log g = 3.5$. El valor de la gravedad fue seleccionado teniendo en cuenta la clase de luminosidad de las estrellas Be (típicamente pertenecen a la clase luminosa V-III). Para cada tipo espectral empleamos las distribuciones de temperatura y de velocidad que hemos delineado en el capítulo 2. En la Tabla 2 presentamos los parámetros de los

modelos más significativos.

Una vez establecido el modelo de atmósfera y el campo de velocidades, los perfiles de las líneas se calculan recurriendo a la ecuación de transporte radiativo para un fluido que se expande con simetría esférica, y a las ecuaciones de equilibrio estadístico para átomos de hidrógeno con seis niveles de energía y un continuo, empleando la aproximación equivalente a un átomo de dos niveles. Suponemos redistribución completa, y para representar el perfil intrínseco de la línea adoptamos un perfil gaussiano.

Para este fin, utilizamos el programa "ETLA", elaborado por *Mihalas & Kunasz (1978)* cuya versión original consta, aproximadamente, de 10000 sentencias ejecutables. Nosotros hemos adaptado y modificado el código para ser utilizado en la computadora IBM 3032 del CeSPI (Centro Superior para el Procesamiento de la Información, UNLP) y posteriormente en una PC AT-486. Para poner en funcionamiento estos programas tuvimos bastantes dificultades operativas. Además, desarrollamos 4 subrutinas vinculadas con el esquema de cálculo pues el código estaba incompleto. Una vez finalizada la adaptación de estos programas, para verificar el buen funcionamiento del código hemos ensayado con los modelos publicados por *Catala & Kunasz (1987)* y hemos obtenido resultados similares.

En las § 5.1 y 5.2, nos limitamos a analizar los efectos producidos por la presencia de una estructura cromosférica sobre los perfiles de las líneas de Balmer, sin modificar la distribución de velocidad. Luego, para una misma ley de temperatura, analizamos la influencia que tienen las propiedades cinéticas de un viento estelar en las regiones de formación de las líneas. En la § 5.3 comparamos y discutimos las características de los perfiles calculados y perfiles observados en las estrellas Be. En la § 5.4 analizamos cómo se modifica la tasa de pérdida de masa con los parámetros del modelo. En la § 5.5 damos una estimación del tamaño de las regiones de formación, y por último, en la § 5.6 presentamos las conclusiones de este capítulo.

TABLA 2

Parámetros de los Modelos

MODELO	LEY de VELOCIDAD	T _{EFP}	Δ ₁	Δ ₂	T _{MAX} K	T _O K	T _{MIN} K	\dot{M} (M _☉ /Y _a)
1	V ₁	14000	0.33	1.5	21000	5000	9100	3.8 10 ⁻¹⁰
2	V ₁	14000	0.66	1.5	21000	5000	9100	3.6 10 ⁻¹⁰
3	V ₁	14000	1.00	1.5	21000	5000	9100	3.6 10 ⁻¹⁰
4	V ₁	14000	2.00	1.5	21000	5000	9100	3.6 10 ⁻¹⁰
5	V ₁	14000	0.66	1.5	21000	5000	7000	3.5 10 ⁻¹⁰
6	V ₂	14000	0.33	1.5	21000	5000	9100	7.3 10 ⁻⁹
7	V ₃	14000	2.00	1.5	21000	5000	9100	1.8 10 ⁻⁹
8	V ₄	14000	2.00	1.5	21000	5000	9100	7.1 10 ⁻⁹
9	V ₅	25000	2.00	1.5	40000	7000	15000	2.5 10 ⁻⁸
10	V ₅	25000	2.00	1.5	40000	7000	13000	2.4 10 ⁻⁸
11	V ₅	25000	2.00	1.5	40000	7000	11000	2.2 10 ⁻⁸
12	V ₆	25000	2.00	3.5	40000	7000	15000	2.0 10 ⁻⁷
13	V ₇	25000	0.50	0.3	26000	7000	15000	4.2 10 ⁻⁷
14	V ₅	9000	2.00	1.5	17000	3000	6500	2.7 10 ⁻⁹
15	V ₈	9000	1.20	1.5	18000	5000	6500	3.3 10 ⁻⁸

Los modelos con Teff = 9000 K fueron calculados con $R_{ph} = 3.5 \cdot 10^{11}$ cm.; los modelos con Teff = 14000 K con $R_{ph} = 4.2 \cdot 10^{11}$ cm. y los modelos con Teff = 25000 K, con $R_{ph} = 8.8 \cdot 10^{11}$ cm.

5.1 H α

a) Ley de Temperatura

Describiremos, a continuación, la contribución de una atmósfera extendida sobre el perfil de H α variando los parámetros que controlan la ley de temperatura; es decir, posición del máximo de temperatura (Δ_1), extensión de la cromosfera (Δ_2), valores máximos y mínimos de temperatura, etc. (ver figura 2.1).

Un estudio con características similares fue realizado por *Catala & Kunasz (1987)*. Los autores analizaron la influencia de diferentes parámetros que gobiernan la ley de temperatura (ecuación 2.1) sobre el perfil de H α en AB Aurigae. Ellos concluyen que el perfil de H α es insensible al valor del máximo de temperatura ($T_{\text{máx}}$) y al parámetro Δ_1 , cuando estos valores son modificados dentro de los límites impuestos en sus modelos. La variación del parámetro Δ_2 tiene efectos de menor importancia sobre la componente de emisión de H α ; si Δ_2 aumenta, la intensidad de esta componente disminuye. También, encontraron que la envoltura templada contribuye a la intensidad global de la componente de emisión; al disminuir la temperatura de la envoltura (T_0) se intensifica el perfil de emisión. Sin embargo, la temperatura de la envoltura templada tiene efectos despreciables sobre la componente de absorción. Estudios relacionados con la región de mínimo de temperatura no fueron realizados, pues los autores no incluyeron dicha región.

Dado que nuestros modelos no tienen restricciones sobre el rango de variación de los parámetros, mediante un análisis similar al propuesto por *Catala & Kunasz*, encontramos que al variar el parámetro Δ_1 , es decir al aumentar el radio correspondiente a la posición del máximo de temperatura, R_{ch} , la intensidad de las componentes de emisión de H α aumentan monótonamente hasta alcanzar un valor límite superior. Este valor límite se tiene, aproximadamente, cuando Δ_1 es mayor que 2 radios estelares ($2 R_{\text{ph}}$). En la figura 5.1 se ilustran perfiles teóricos de H α , correspondientes a una estrella con $T_{\text{eff}} = 14000$ K, calculados con

los modelos 1, 3, y 4, en los que se ha variado únicamente el parámetro Δ_1 .

Por otro lado, también hemos estudiado la influencia de la región de mínimo de temperatura sobre los perfiles emergentes. Para ello calculamos perfiles de $H\alpha$ considerando modelos que incluyen la región de mínimo de temperatura (por ejemplo el modelo 5) y otros que no contienen dicha región (por ejemplo el modelo 2). En la figura 5.2 se ilustran los perfiles que predice cada modelo; puede observarse que la presencia de una región de mínimo de temperatura próxima a la fotosfera contribuye a intensificar las emisiones de $H\alpha$. En los modelos que incluyen la región de mínimo de temperatura adoptamos una T_{\min} que se encuentra entre 1000 y 3000 K por debajo de la temperatura que el modelo de Kurucz establece en $r = R_k$. Encontramos que al disminuir T_{\min} aumentan las intensidades de las componentes de emisión.

Es interesante destacar que variaciones en Δ_1 como en T_{\min} carecen de efectos de importancia sobre las componentes de absorción del perfil. El perfil de $H\alpha$ es sensible a las condiciones térmicas de la región de mínimo de temperatura que contribuyen a la intensidad global sin alterar las características generales del mismo. Este hecho se debe, fundamentalmente, a que la función fuente de la línea de $H\alpha$ está dominada, principalmente, por recombinaciones radiativas.

La tasa de recombinación radiativa,

$$R_{ki} \propto n_e T_e^{-1/2},$$

es una función inversa de la temperatura electrónica. Este hecho explicaría por qué se intensifican las componentes de emisión de $H\alpha$ cuando disminuye la temperatura electrónica. Si bien la tasa de recombinación depende también de la densidad electrónica, n_e , dicha densidad no cambia con la temperatura dado que el material está completamente ionizado (ver figura 5.17).

Nuestros resultados indican que la región próxima a la fotosfera juega un papel muy importante en la emisión total del perfil de $H\alpha$.

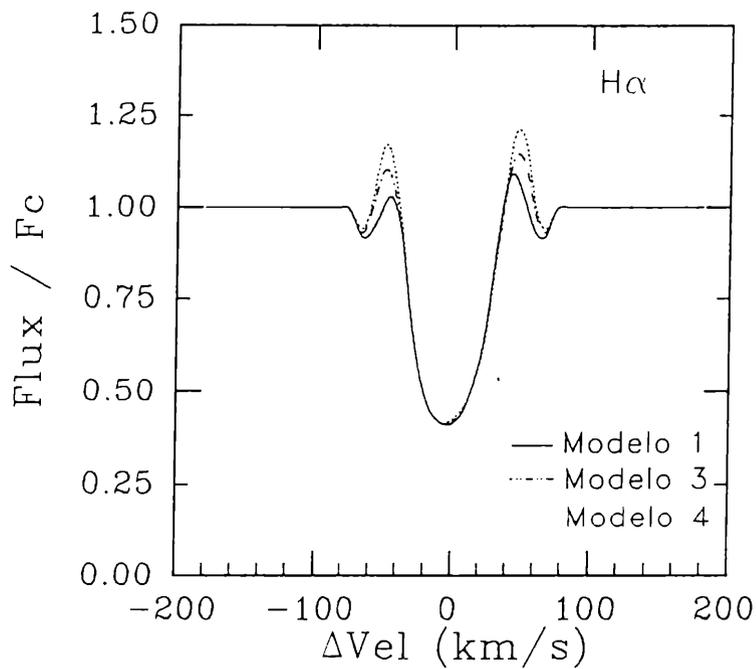


FIGURA 5.1. Perfiles de $H\alpha$ calculados para una estrella de $T_{\text{eff}} = 14000$ K y $\log g = 3.5$. En la figura se muestra que al alejar de la estrella la región cromosférica la intensidad de las componentes de emisión del perfil se incrementan.

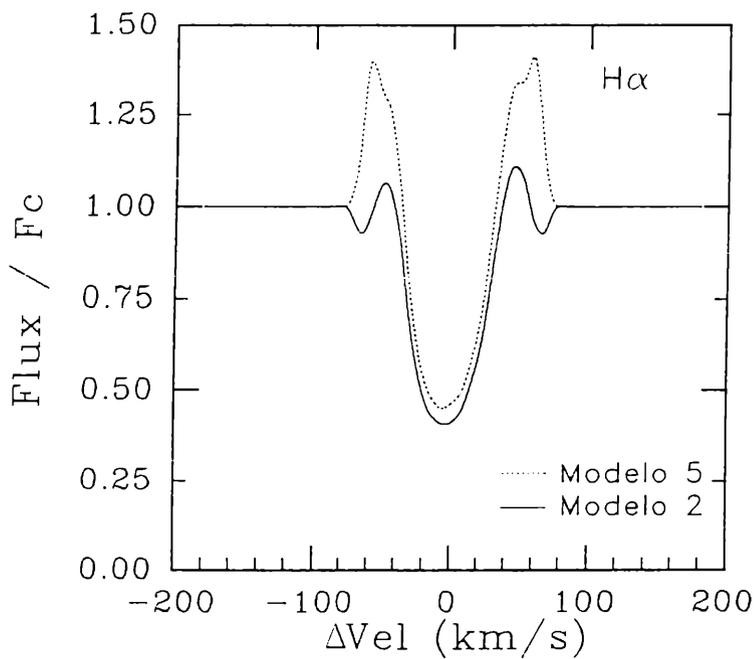


FIGURA 5.2. Perfiles de $H\alpha$ calculados con diferentes distribuciones de temperatura en el borde exterior de la fotosfera. El perfil en línea continua fue calculado con la distribución de temperatura dada por Kurucz ($T_{\text{eff}} = 14000$ K $\log g = 3.5$ y $T_{\text{min}} = 9100$ K). El Perfil en líneas de trazo resulta de incluir una región de mínimo de temperatura con $T_{\text{min}} = 7000$ K.

Los efectos originados por variaciones de los restantes parámetros que caracterizan la ley de temperatura (Δ_2 y T_0), fueron discutidos en detalle por *Catala & Kunasz (1987)*, y nosotros sólo nos hemos limitado a mencionar sus conclusiones al comienzo de esta sección.

b) Ley de Velocidad

En las figuras 5.3a y 5.4a se muestran los perfiles de $H\alpha$ calculados utilizando distintas leyes de velocidad: V_1 y V_2 , (modelos 4 y 6, respectivamente), para una estrella de $T_{\text{eff}} = 14000$ K y $\log g = 3.5$. En las figuras 5.3b y 5.4b representamos gráficamente las curvas de velocidad utilizadas en cada caso. Se aprecia que el perfil de la línea es fuertemente dependiente del campo de velocidades.

En la región próxima a la fotosfera, entre 1 y 3 R_{ph} , la ley de velocidad V_1 presenta gradientes de velocidad de un orden de magnitud menor que la ley V_2 (casos 2.2a1 y 2.2a2) (ver Tabla 1). Después de los 10 radios estelares, ambas curvas de velocidad tienen el mismo comportamiento asintótico (caso 2.2b2). Concluimos que las curvas de velocidad con una pequeña pendiente en las capas próximas a la fotosfera originan un perfil de $H\alpha$ en absorción con ambas alas en emisión (perfil con dos componentes en emisión) mientras que una curva de velocidad con una gran pendiente en la misma región da lugar a un perfil P Cygni (una componente en absorción desplazada hacia el azul y una componente roja en emisión).

Hemos realizado varios experimentos numéricos para determinar cómo se modifica el perfil de $H\alpha$ cuando el medio se expande como lo describen las curvas de velocidad V_3 y V_4 . Estas curvas de velocidad están acotadas por las leyes de velocidad V_1 y V_2 . En la figura 5.5a mostramos una secuencia de perfiles calculados con los modelos 4, 7 y 8, y en la figura 5.5b las correspondientes curvas de velocidad. Aquí pueden observarse claramente los efectos que producen las distintas pendientes iniciales de las curvas de velocidad sobre la estructura del perfil. Concluimos, nuevamente,

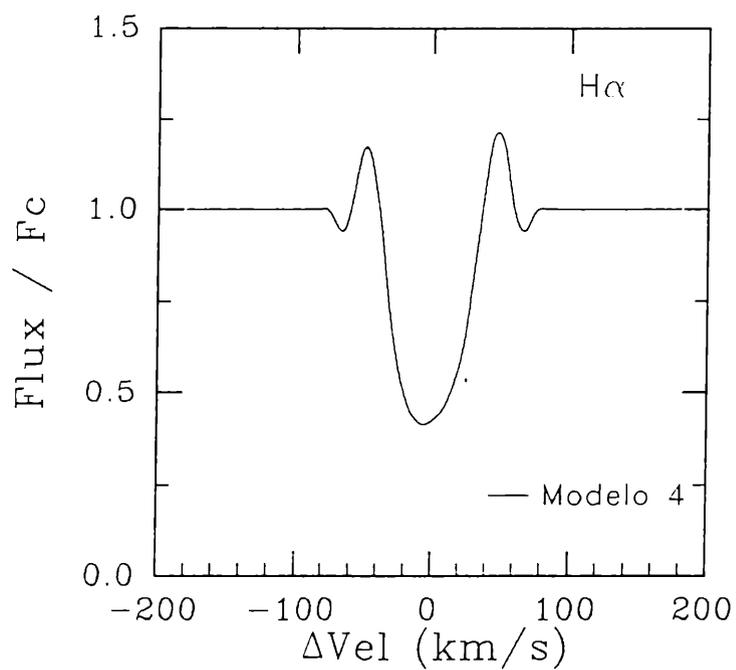


FIGURA 5.3a. Perfil de H α con una componente central de absorción y ambas alas en emisión obtenido con la ley de velocidad V₁.

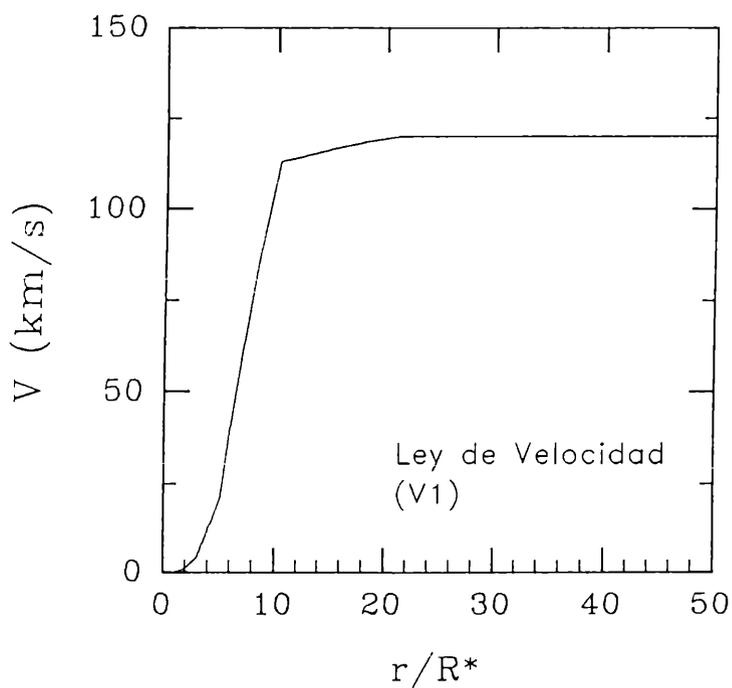


FIGURA 5.3b. Ley de velocidad utilizada para el cálculo del perfil de H α de la figura 5.3a. Las regiones próximas a la fotosfera presentan una suave expansión.

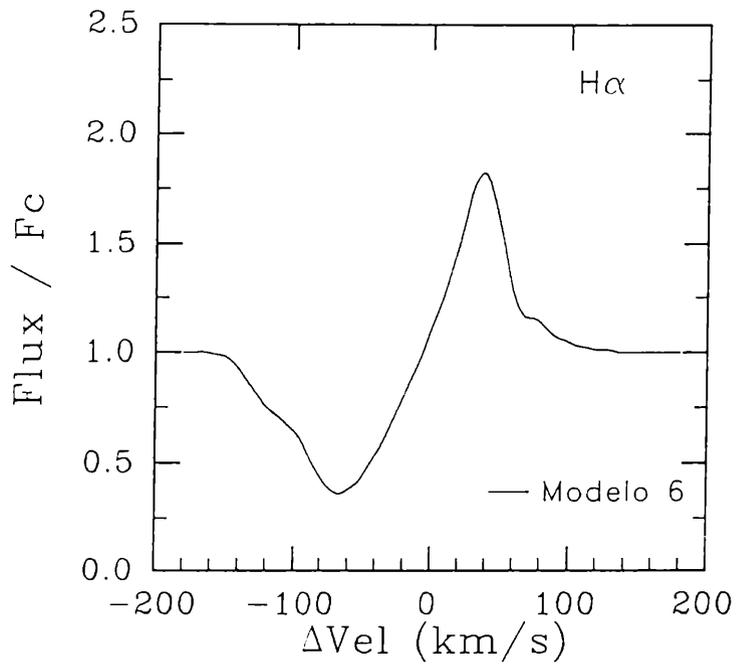


FIGURA 5.4a. Perfil de H α tipo P Cygni obtenido con la ley de velocidad V_2 .

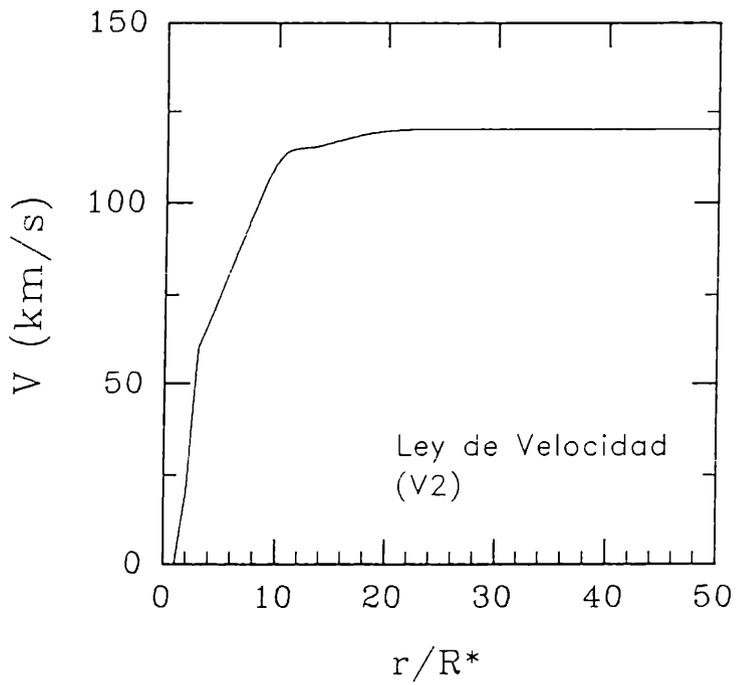


FIGURA 5.4b. Ley de velocidad utilizada para el cálculo del perfil de H α de la figura 5.4a. Las regiones próximas a la fotosfera presentan una fuerte expansión.

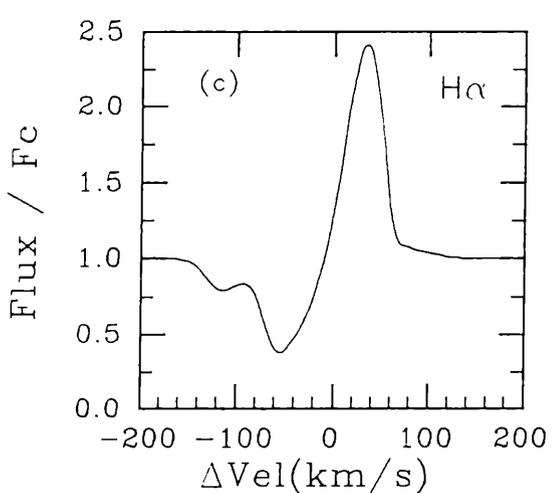
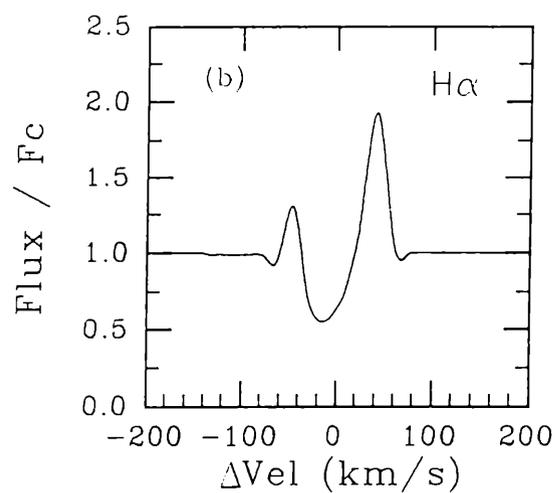
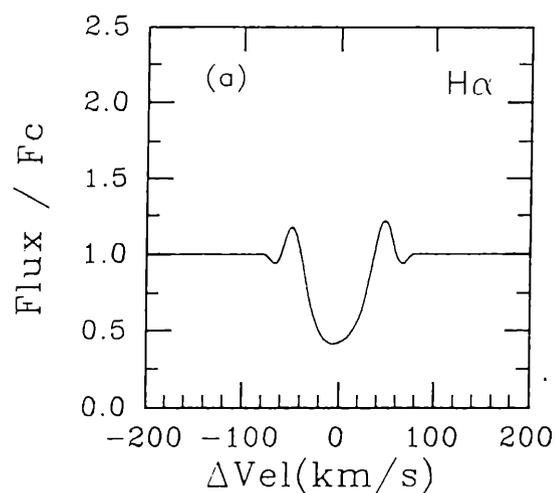


FIGURA 5.5a. a) Perfil de H α simétrico obtenido con la ley de velocidad V₁ (modelo 4). b) Perfil de H α , con una relación V/R < 1, obtenido con la ley de velocidad V₃ cuyo gradiente de velocidad inicial es levemente mayor al de la curva V₁, (modelo 7). c) Perfil de H α calculado con el modelo 8 y la ley de velocidad V₄.

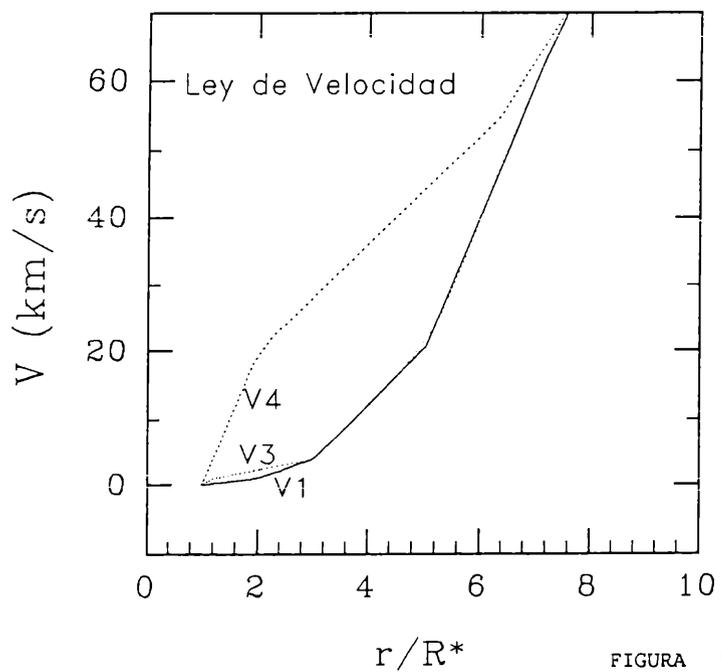


FIGURA 5.5b. Leyes de velocidad utilizadas para calcular los perfiles de la figura 5.5a.

que los gradientes de velocidad en las regiones adyacentes a la fotosfera determinan la forma del perfil.

Finalmente analizamos cómo se altera la forma del perfil frente a distintos comportamientos de la velocidad asintótica.

a) la velocidad alcanza el valor asintótico para distintos radios; en este caso notamos que la intensidad de la componente en emisión crece cuanto mayor es el radio donde la velocidad alcanza su valor asintótico. Este resultado también fue obtenido por *Catala & Kunasz (1987)*.

b) la velocidad tiene distintos valores asintóticos en un mismo radio; en este caso observamos que la intensidad de la componente en emisión aumenta al disminuir el valor de la velocidad asintótica.

Ambos resultados están relacionados con el comportamiento de la velocidad del viento en las regiones más externas, donde la pendiente de la curva de velocidad es muy pequeña. Por lo tanto, los resultados obtenidos en a) y b) están en relación directa con la densidad del viento en esta región. El aumento de la densidad de masa en las parte más externa de la atmósfera origina un aumento de la medida de emisión.

c) Velocidad de Turbulencia

Una consecuencia inmediata de una baja velocidad de turbulencia es producir componentes de absorción y emisión más angostas, lo que implica:

i) en un perfil con dos componentes en emisión (por ejemplo, el modelo 4), la distancia entre las estructuras en emisión disminuye aumentando la intensidad de las mismas (figura 5.6).

ii) en un perfil P Cygni, la intensidad de la componente en emisión se acrecienta y se desplaza hacia el azul (*Catala & Kunasz (1987)*, figura 2).

d) Tipo Espectral

Hasta el momento discutimos solamente los resultados relacionados con diferentes distribuciones de temperatura y velocidad en una estrella de un determinado tipo espectral ($T_{\text{eff}} = 14000 \text{ K}$ y $\log g = 3.5$). Observamos que los perfiles que predicen los modelos presentan comportamientos similares a las variaciones de las distribuciones de temperatura para todos los restantes tipos espectrales. Por ejemplo, en la figura 5.7 se ilustra una secuencia de perfiles de $H\alpha$ para una estrella de $T_{\text{eff}} = 25000 \text{ K}$, que resultan de incluir distintas regiones de mínimo de temperatura.

Respecto a las leyes de velocidades, debemos destacar que en cada tipo espectral, notamos que altos gradientes de velocidad en regiones cercanas a la fotosfera dan origen a perfiles P Cygni, mientras que bajos gradientes de velocidad producen perfiles con dos componentes en emisión. Sin embargo, si utilizamos la misma ley de velocidades en estrellas de distintos tipos espectrales el perfil resultante no es el mismo. La ley de velocidad que conduce a un perfil P Cygni en una estrella Be tardía, origina un perfil con dos componentes en emisión en una estrella temprana. Este resultado puede observarse en las figuras 5.8a y 5.8b, donde se muestra $H\alpha$ para un objeto de 25000 K y otro de 9000 K (modelos 9 y 14, respectivamente).

En la estrella caliente, un perfil P Cygni se obtiene introduciendo gradientes de velocidad aún más altos cerca de la fotosfera (figura 5.9). Esto significa, que la definición de alto o bajo gradiente de velocidad varía en relación directa con la temperatura efectiva. Además, observamos que cuando la pendiente de la curva de velocidad, en la región próxima a la fotosfera, es extremadamente grande, el perfil resultante es un perfil de emisión (sin estructuras de absorción) levemente desplazado hacia el rojo (figura 5.10).

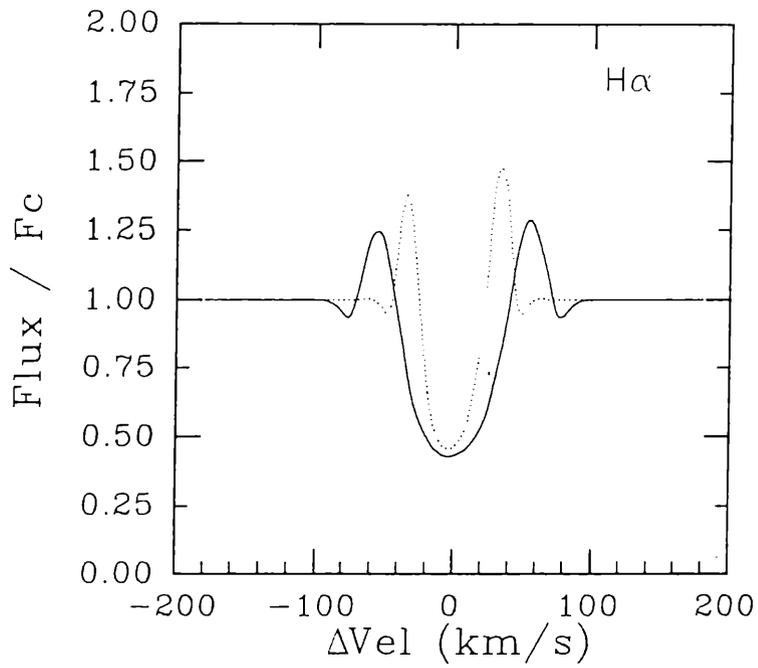


FIGURA 5.6. Perfiles de H α calculados con diferentes velocidades de turbulencia; $V_t = 2$ km/s (en líneas de trazo) y $V_t = 20$ km/s (en línea continua).

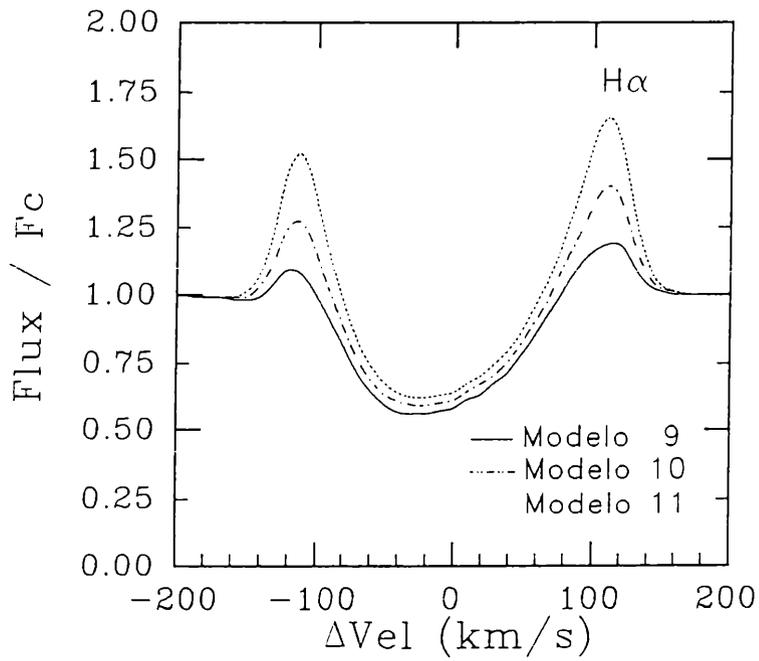


FIGURA 5.7. Secuencia de perfiles de H α que resultan de incluir la región de mínimo de temperatura en una estrella de $T_{\text{eff}} = 25000$ K, $\log g = 3.5$.

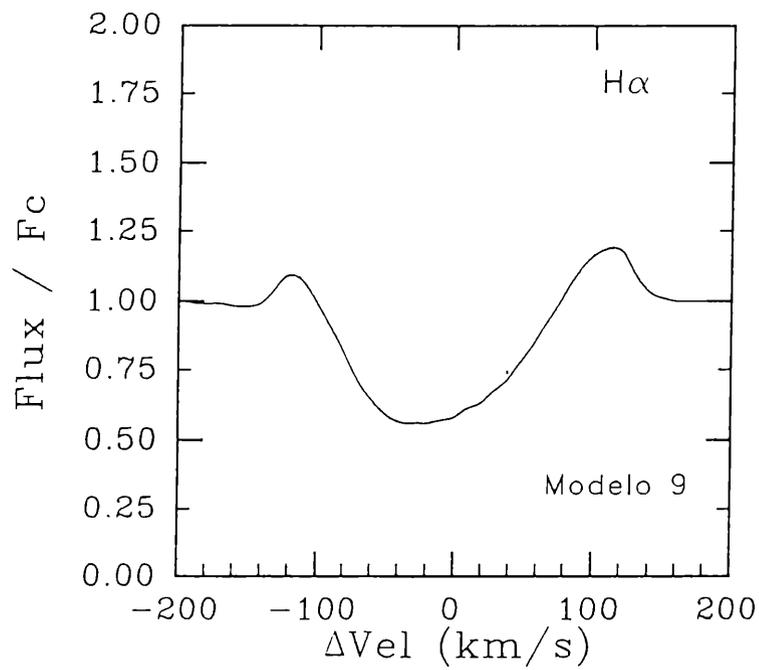


FIGURA 5.8a. Perfil de H α obtenido con la ley de velocidad V_s en una estrella con $T_{\text{eff}} = 25000$ K (modelo 9).

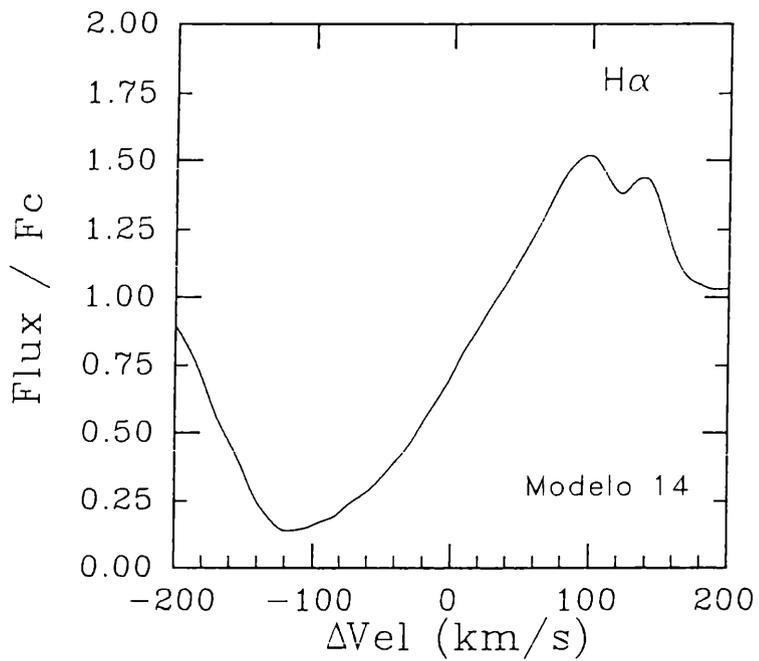


FIGURA 5.8b. Perfil de H α obtenido con la misma ley de velocidad de la figura 5.8a, pero en una estrella con $T_{\text{eff}} = 9000$ K (modelo 14).

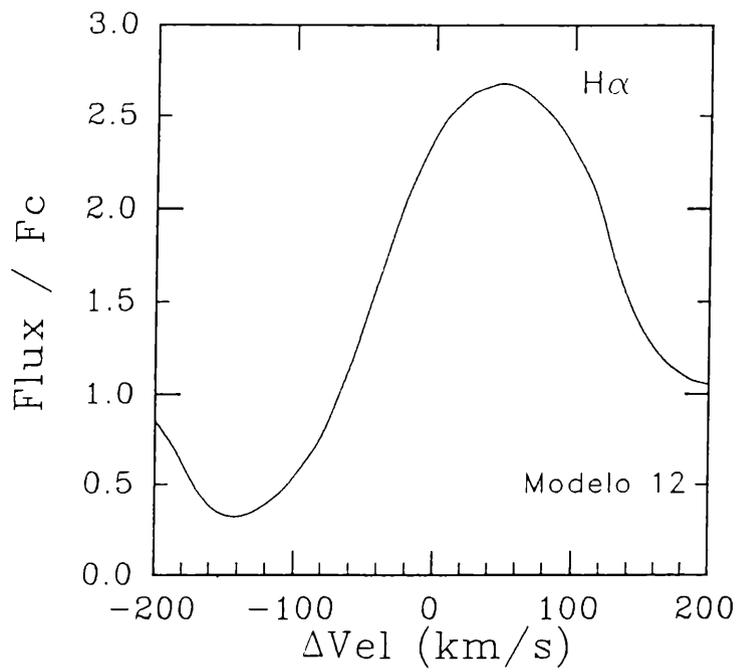


FIGURA 5.9. Perfil P Cygni obtenido con la ley de velocidad V_7 para una estrella de $T_{\text{eff}} = 25000$ K (modelo 12).

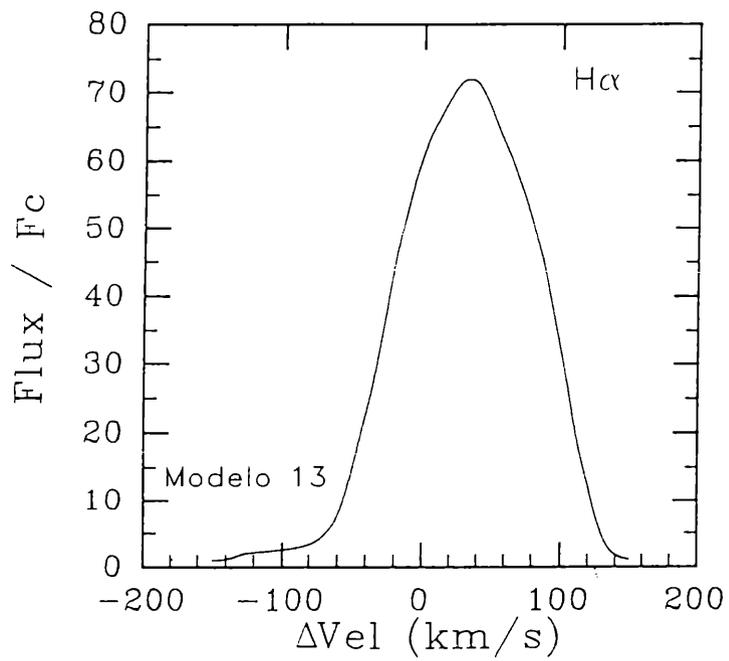


FIGURA 5.10. Perfil de H α de emisión (sin componente de absorción) obtenido con una pendiente de velocidad extremadamente abrupta en la región post-fotosférica (modelo 13).

5.2 H β

Así como discutimos el perfil de H α que resulta del modelo de atmósfera propuesto, es interesante también estudiar cómo se comportan otras líneas cuando se varían los parámetros de dicho modelo. En especial si se pretende hacer un diagnóstico de las condiciones físicas instantáneas de las atmósferas estelares mediante el ajuste de perfiles calculados con los observados. Si bien esta técnica de diagnóstico podría ser muy eficiente, presenta una serie de inconvenientes:

a) el modelo de atmósfera propuesto tiene demasiados parámetros libres y

b) estamos trabajando con ecuaciones no lineales;

en consecuencia, podría ocurrir que las condiciones físicas inferidas del análisis de los datos no sean únicas.

Este problema podría solucionarse calculando perfiles de líneas en otras regiones espectrales.

Calculamos perfiles de H β con el mismo conjunto de modelos que presentamos en la § 5.1; y en general, los perfiles de H β muestran un comportamiento similar al que presenta H α . Por ejemplo, en la figura 5.11 ilustramos una secuencia de perfiles de H β calculados con diferentes leyes de velocidad. Cuando un régimen de baja velocidad domina las regiones próximas a la fotosfera (modelo 4), el perfil de H β resultante es simétrico y presenta dos emisiones conspicuas en las alas, que no superan el nivel del continuo. A medida que se incrementa el gradiente de velocidad en la región post-fotosférica (modelo 7 y 8), los perfiles comienzan a tomar características asimétricas. Observamos que para el conjunto de modelos que hemos presentado (modelos 4, 7 y 8) las componentes de emisión de H β nunca superan el nivel del continuo.

Es interesante destacar que los perfiles de H β son menos sensibles que H α a la variación de los parámetros que determinan la ley de temperatura. En la figura 5.12a podemos observar los perfiles que predicen los modelos 1 y 4, en los que hemos variado la posición

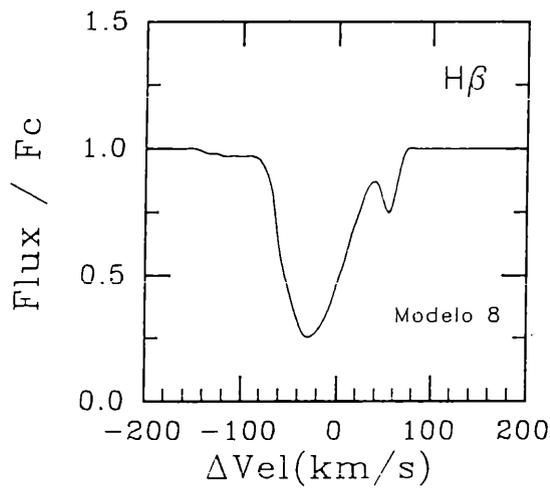
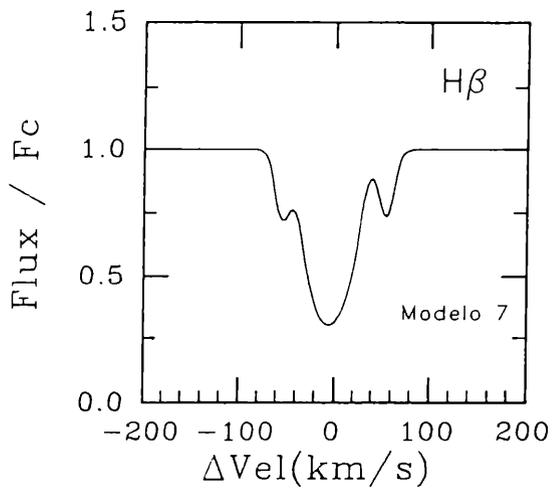
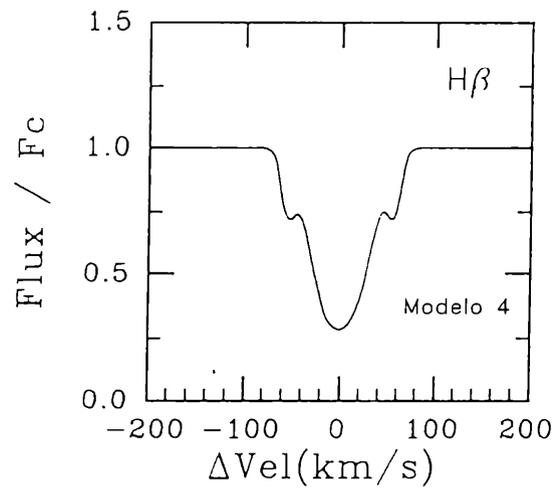


FIGURA 5.11. Secuencia de perfiles de H β calculados con diferentes leyes de velocidad.

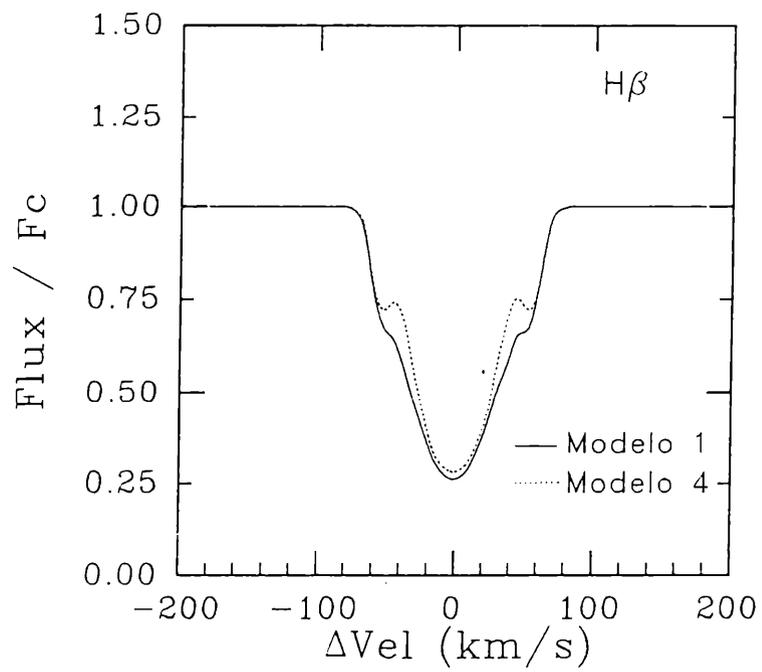


FIGURA 5.12a. Perfiles de H β obtenidos variando el parámetro Δ_1 (la posición del máximo de temperatura de la cromosfera).

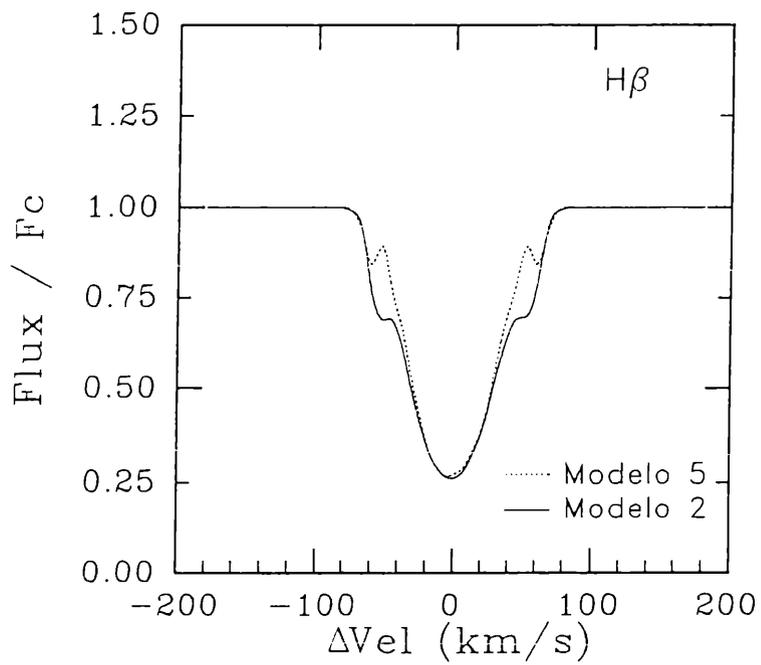


FIGURA 5.12b. Perfiles de H β calculados con distintos T_{min} .

del máximo de temperatura. En la figura 5.12b graficamos los perfiles calculados con los modelo 2 y 5, en los que hemos variado las condiciones termodinámicas de la región del mínimo de temperatura.

Observemos ahora los perfiles de $H\alpha$ (figura 5.5a) y $H\beta$ (figura 5.11) que resultan de aplicar un modelo determinado. Aquí puede verse claramente el decremento de Balmer (relación entre las intensidades relativas de las líneas de Balmer $I(H\alpha):I(H\beta)$) y la progresión de Balmer.

En la figura 5.13 mostramos también decrementos y progresiones de Balmer para distintos tipos espectrales.

5.3 COMPARACION ENTRE PERFILES TEORICOS Y PERFILES OBSERVADOS

Para confrontar algunos de los resultados que predicen estos modelos con casos reales, haremos comparaciones entre los perfiles de líneas calculados y perfiles observados en algunas estrellas Be. Pero estas comparaciones serán solamente ilustrativas, pues no es el objetivo de este trabajo ajustar detalladamente el espectro de un objeto particular (es decir, reproducir estructuras que se observan simultáneamente en distintos rangos espectrales). Nosotros, por el momento, sólo buscamos analizar comportamientos generales de la forma o de la intensidad de una línea. Por lo tanto, no debe interpretarse que los modelos calculados representan las condiciones físicas de las atmósferas de las estrellas seleccionadas para esta discusión.

Por ejemplo, perfiles de $H\alpha$ tipo P Cygni son comúnmente observados en las estrellas Herbig Ae-Be (*Garrison & Anderson 1977*). También este tipo de perfil ha sido observado en HD 190073 (*Ringuelet et al. 1987*) y HD 98922 (Figura 1.3). Ambos perfiles presentan similitudes cualitativas con el perfil calculado con el modelo 15 (Figura 5.13b).

Un perfil de $H\alpha$ similar, en forma e intensidad, al calculado con el modelo 13 (Figura 5.10) fue observado en HD 45677 (*Halbedel 1989*)

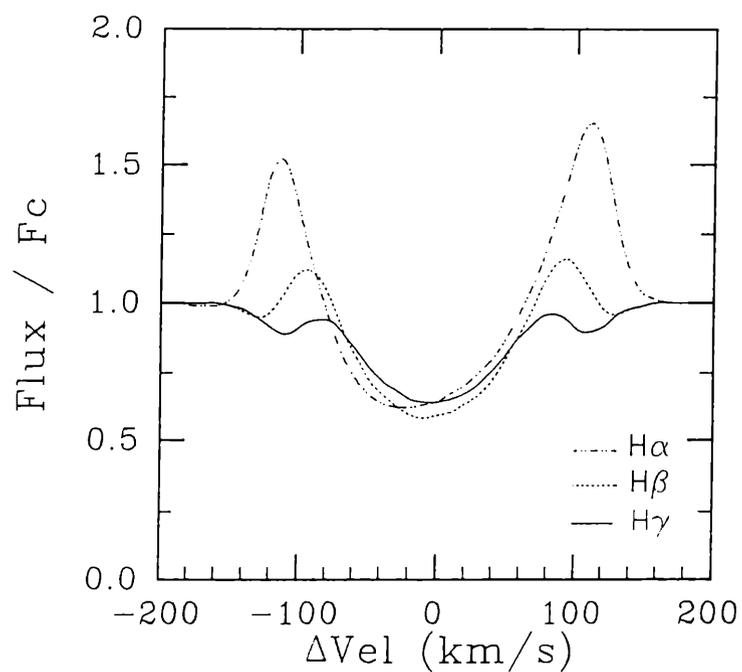
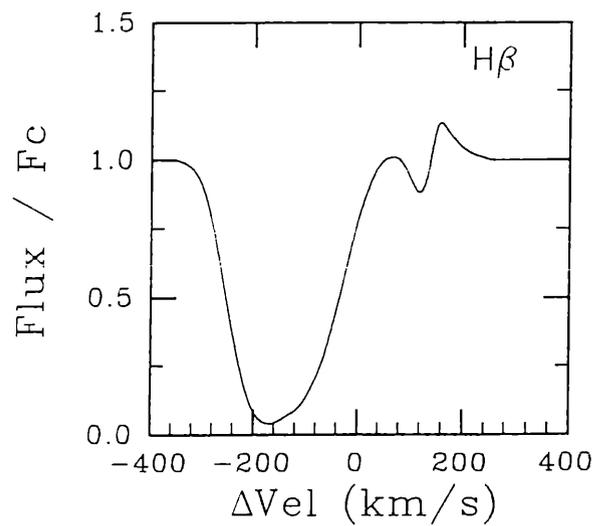
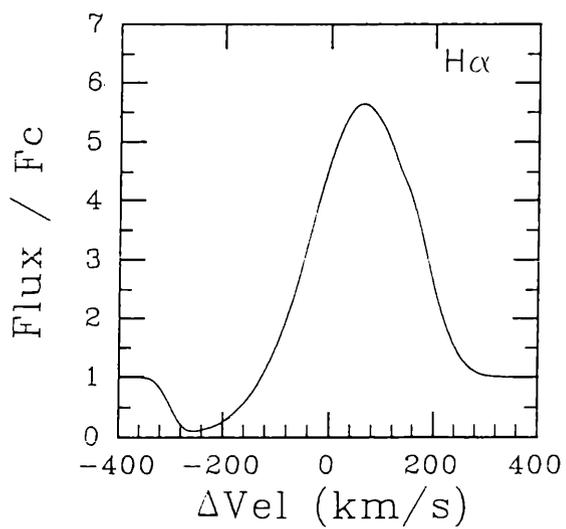


FIGURA 5.13. Progresión y decremento de Balmer que predice: a) el modelo 11; $T_{\text{eff}} = 25000 \text{ K}$ (arriba), y b) el modelo 15; $T_{\text{eff}} = 9000 \text{ K}$ (abajo).



y en γ Cassiopea (*Stiff & Jeffers 1987*); ambas estrellas presentan $T_{\text{eff}} \approx 25000$ K.

Perfiles de $H\alpha$ con dos picos de emisión (como los que predicen nuestros modelos) son considerados característicos de los espectros de envoltura. Este tipo de perfil ha sido observado, por ejemplo, en V 923 Aql (*Ringuelet et al 1984*), en 88 Her, en HD 142926 y en HD 183656 (*Doazan et al 1991*); todas estas estrellas presentan $T_{\text{eff}} = 14000$ K. Entre las estrellas más calientes podemos mencionar a HD 127972 y HD 205637 (*Doazan et al 1991*).

En estrellas tardías, donde los gradientes de velocidades pueden ser aún más bajos, obtenemos perfiles peculiares similares a los observados en 17 Tauri (*Andrillat & Fehrenbach 1982*), en HD 22780 y en HD 26670 (*Doazan et al. 1991*).

Cabe destacar que nuestros modelos no consideran rotación ni tampoco incluyen una función de redistribución que tenga en cuenta el scattering por electrones libres. Por lo tanto, en algunos casos, los perfiles calculados son mucho más angostos que los perfiles observados. *Poekert & Marlborough (1979)* investigaron el efecto del scattering por electrones sobre los perfiles de las líneas de Balmer y concluyeron que las alas del perfil de $H\alpha$ de algunas estrellas Be están ensanchadas por este efecto.

Si bien existen algunas similitudes entre los perfiles teóricos y los observados, la mayoría de las estrellas Be presentan un perfil de emisión que muestra una débil inversión de la intensidad central (como los perfiles mostrados en la figura 1.1). Este tipo de perfil aún no puede ser explicado con nuestro modelo. La presencia de esta pequeña absorción podría ser causada por: inhomogeneidades en el medio circumestelar que se proyecta sobre el disco estelar; efectos cinemáticos del viento, tales como la presencia de regiones que se desaceleran o la propia rotación estelar y/o la rotación diferencial.

5.4 TASA DE PERDIDA DE MASA

En la § 2.4 mencionamos que la tasa de pérdida de masa depende fuertemente de la velocidad en el radio fotosférico (V_{ph}) y del gradiente de velocidad inicial. Por lo tanto, las curvas de velocidad con mayor pendiente inicial tienen mayor tasa de pérdida de masa. En consecuencia, la forma del perfil (P Cygni, una o dos componentes en emisión) dependerá de los procesos físicos que ocurren en las regiones sub-fotosféricas y en la base del viento.

Snow (1981) usando la teoría de vientos conducidos por radiación determinó tasas de pérdida de masa entre 10^{-11} y 10^{-9} $M_{\odot}/año$, para un número de estrellas Be observadas con el satélite Copernicus.

Empleando el método que se explicó en el capítulo 2 para determinar la tasa de pérdida de masa, tenemos que los valores de \dot{M} que resultan de aplicar algunas de las leyes de velocidades y temperaturas que nosotros hemos seleccionado (ver Tabla 2), son del mismo orden de magnitud que los valores derivados de las observaciones de las líneas de resonancia UV.

En el capítulo 2 vimos que \dot{M} no sólo depende del gradiente de velocidad inicial, sino también depende del coeficiente de opacidad del continuo. Entonces, encontramos que la distribución de temperatura puede modificar levemente la tasa de pérdida de masa (unas pocas décimas de su valor). Intuitivamente esperaríamos que si \dot{M} crece, aumente la emisión de $H\alpha$; sin embargo, esto no ocurre. Por ejemplo, el modelo 1 tiene una tasa de pérdida de masa levemente mayor que el modelo 4 y la intensidad de la emisión de $H\alpha$ es menor. Lo mismo ocurre en el modelo 5; cuando desciende la temperatura, disminuye \dot{M} y aumenta la emisión de $H\alpha$. Por lo tanto, concluimos que la tasa de pérdida de masa no es necesariamente una función monótona de la intensidad de la emisión.

5.5 REGIONES DE FORMACION DE LAS LINEAS DE BALMER

Para comprender mejor el comportamiento que manifiestan las líneas de Balmer, es interesante estudiar las regiones de formación de las mismas.

La evaluación de las regiones de formación de las líneas puede realizarse de dos maneras distintas:

a) Integrar la expresión formal de la ecuación de transporte radiativo a lo largo del parámetro de impacto $p = 0$,

$$I_{\nu} = \int_0^{\infty} S_{\nu}(t) \exp(-t_{\nu}) dt_{\nu}, \quad (5.1)$$

donde S_{ν} es la función fuente de la línea, que ha sido obtenida cuando resolvimos la ecuación de transporte. De la expresión (5.1) podemos determinar para qué radio esta integral contribuye, aproximadamente, con un 99 % del valor total. Este radio puede ser interpretado como una estimación del tamaño de la región de formación.

b) Calcular la intensidad total emergente sobre cada parámetro de impacto. La ventaja de trabajar con los parámetros de impacto radica en que podemos estimar tanto el tamaño de las regiones de formación de las líneas, como los sectores que contribuyen al perfil de absorción y de emisión.

En la Tabla 3 damos una estimación del tamaño de la región de formación de las líneas de $H\alpha$ y $H\beta$ que resultan de aplicar el método a). Aquí puede observarse que la región de formación de la línea de $H\beta$ es interior a la región de formación de $H\alpha$. Es por esta razón que $H\beta$ es menos sensible a la distribución de temperatura propuesta. Observamos que las regiones de formación son más extensas cuando dominan los flujos de masa de alta velocidad en las regiones próximas a la fotosfera.

En la figura 5.14 graficamos, para $H\alpha$, los perfiles de intensidad específica emergentes para un conjunto de parámetros de impacto

TABLA 3

Regiones de Formación

MODELO	LEY de VELOCIDAD	T _{EFF}	H α		H β	
			R (90%)	R (99%)	R (90%)	R (99%)
1	V ₁	14000	3.4	4.8	2.2	3.1
2	V ₁	14000	3.3	4.5	2.3	3.1
3	V ₁	14000	3.4	4.0	2.2	3.1
4	V ₁	14000	3.1	4.1	2.2	2.9
5	V ₁	14000	3.3	4.5	2.2	2.9
6	V ₂	14000	8.0	17.	2.7	5.3
7	V ₃	14000	5.5	7.5	3.4	5.5
8	V ₄	14000	10.	19.	3.8	7.0
9	V ₅	25000	2.1	3.2	1.4	2.0
10	V ₅	25000	2.1	3.2	1.4	2.0
11	V ₅	25000	2.1	3.3	1.4	2.1
12	V ₆	25000	17.	33.	--	--
13	V ₇	25000	--	70.	--	--
14	V ₅	9000	16.	40.	3.5	8.1
15	V ₈	9000	62.	68.	19.	42.

Estimación del tamaño de la región de formación de las líneas de H α y H β empleando la solución formal de la ecuación de transporte radiativo para el parámetro de impacto $p = 0$.

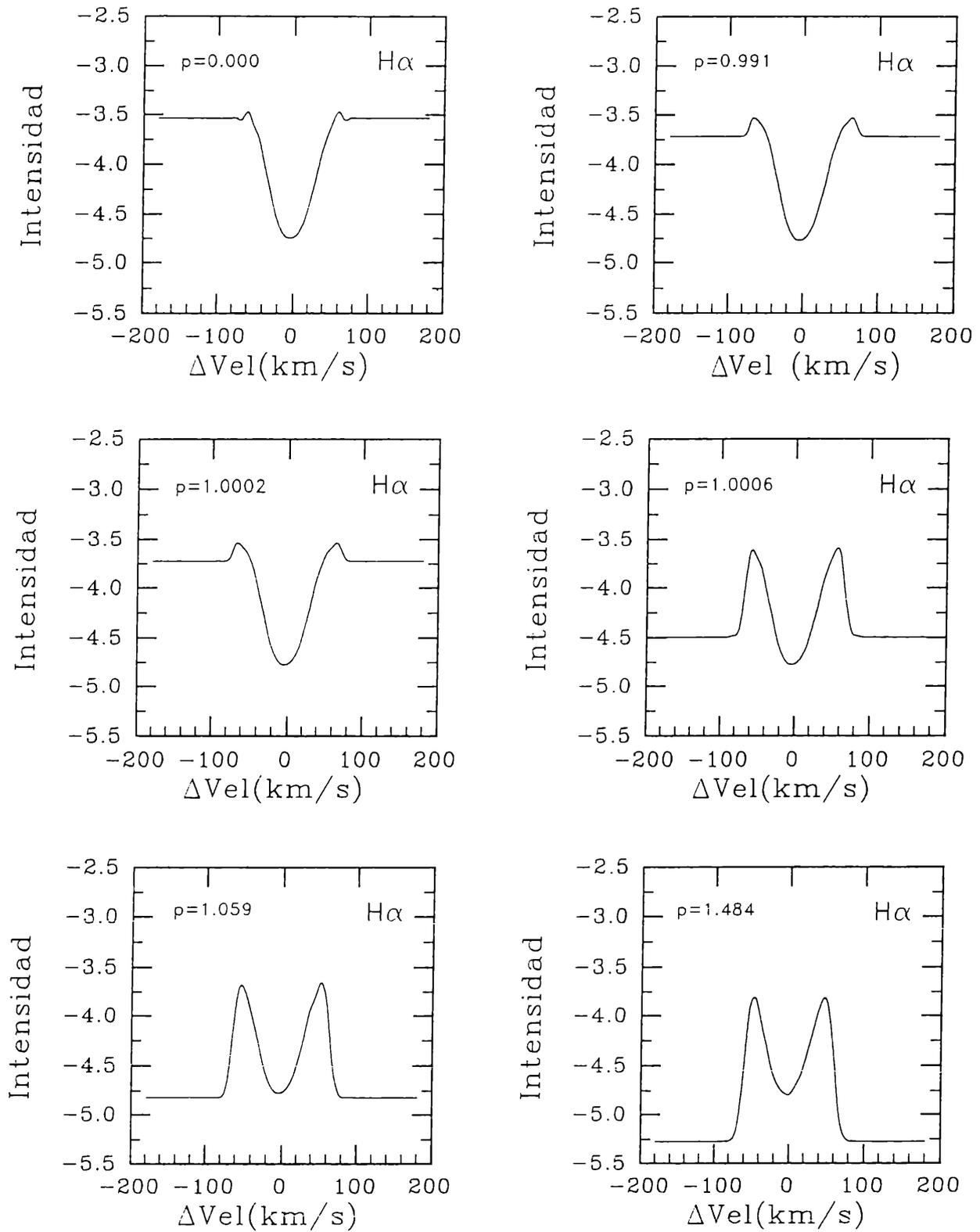


FIGURA 5.14. a) Perfiles de intensidad específica de H α en el borde exterior de la atmósfera para un conjunto de parámetros de impacto (modelo 2). Cada rayo está expresado en unidades del radio estelar.

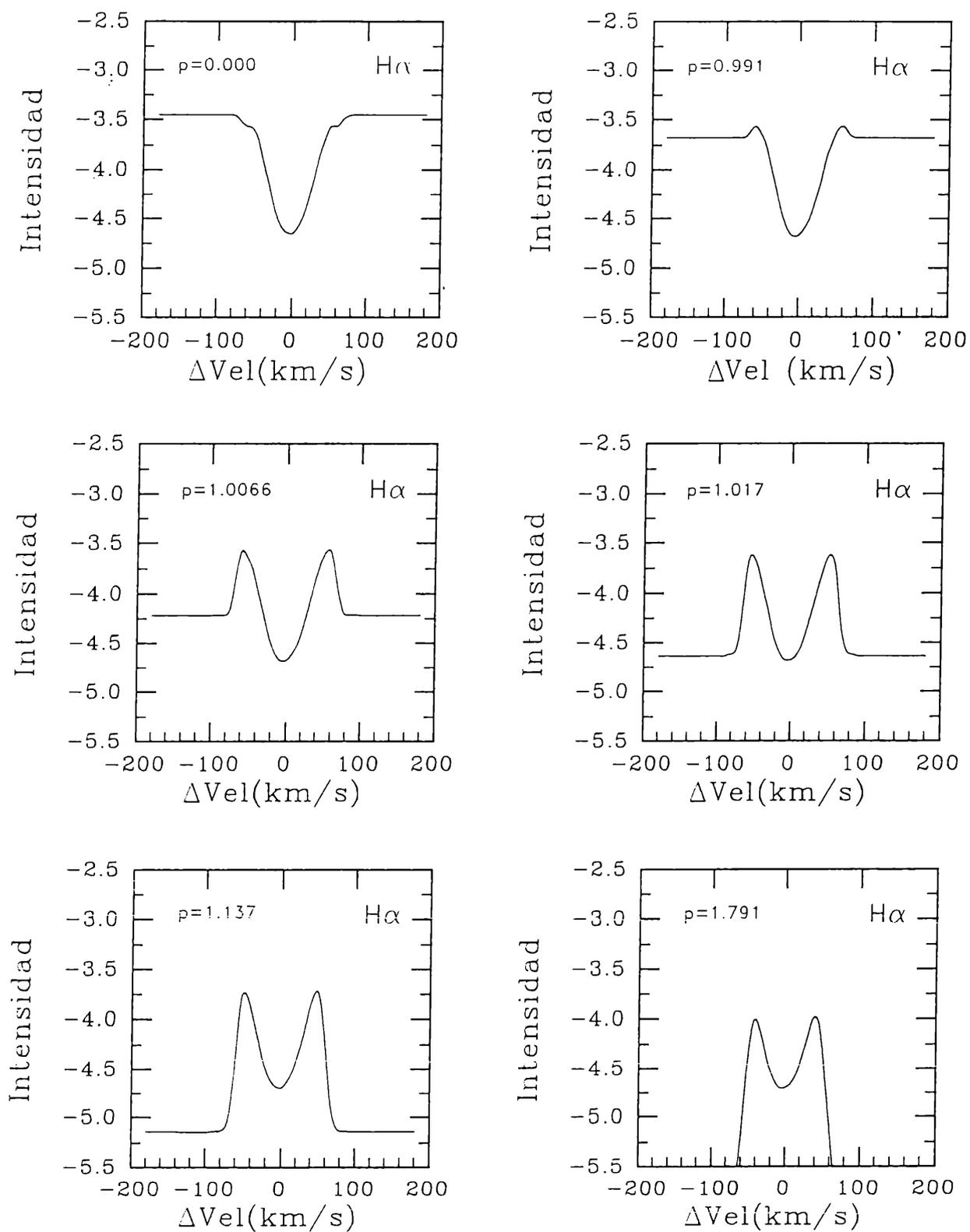


FIGURA 5.14. b) Perfiles de intensidad específica de H α en el borde exterior de la atmósfera para un conjunto de parámetros de impacto (modelo 4). Cada rayo está expresado en unidades del radio estelar.

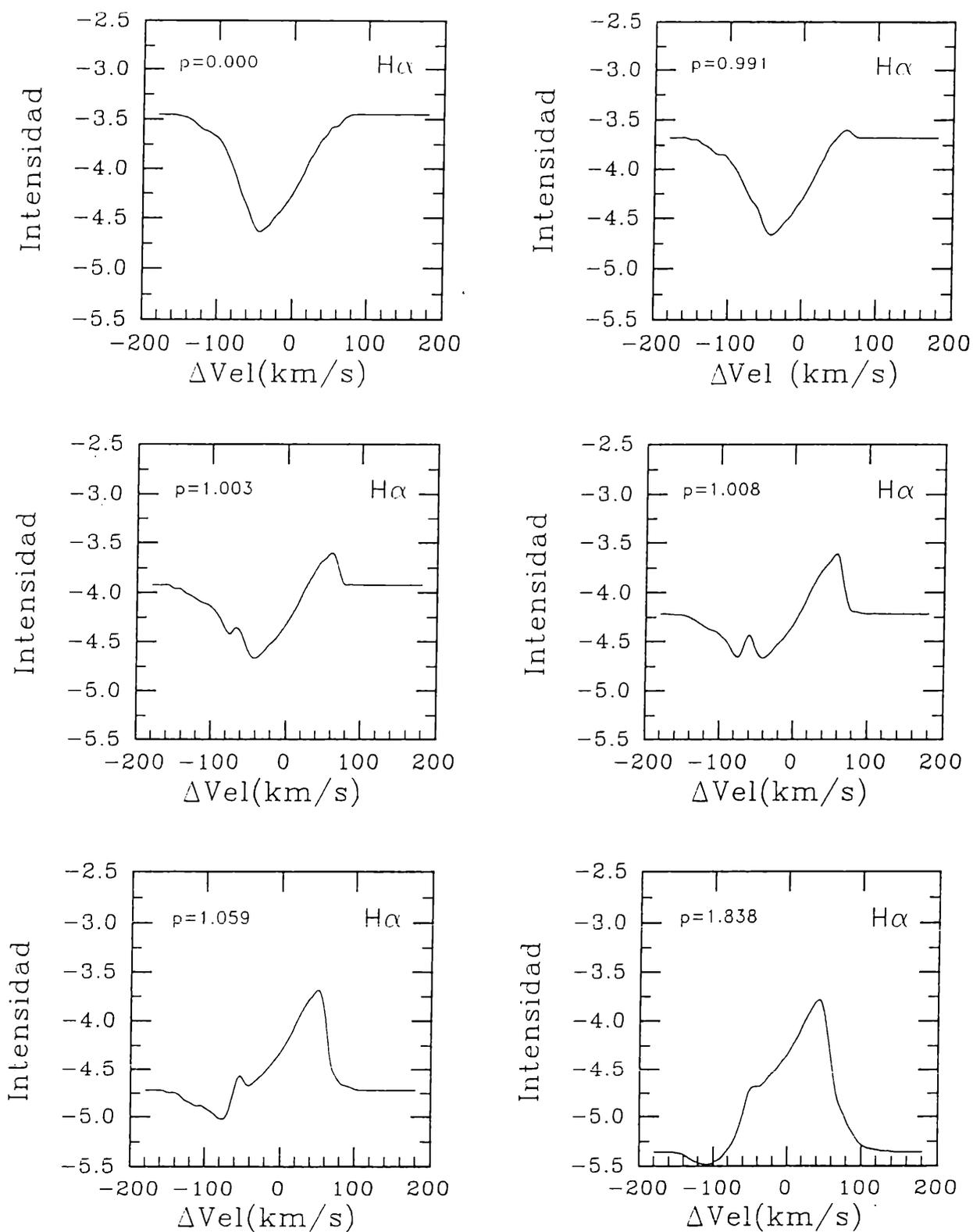


FIGURA 5.14. c) Perfiles de intensidad específica de H α en el borde exterior de la atmósfera para un conjunto de parámetros de impacto (modelo 6). Cada rayo está expresado en unidades del radio estelar.

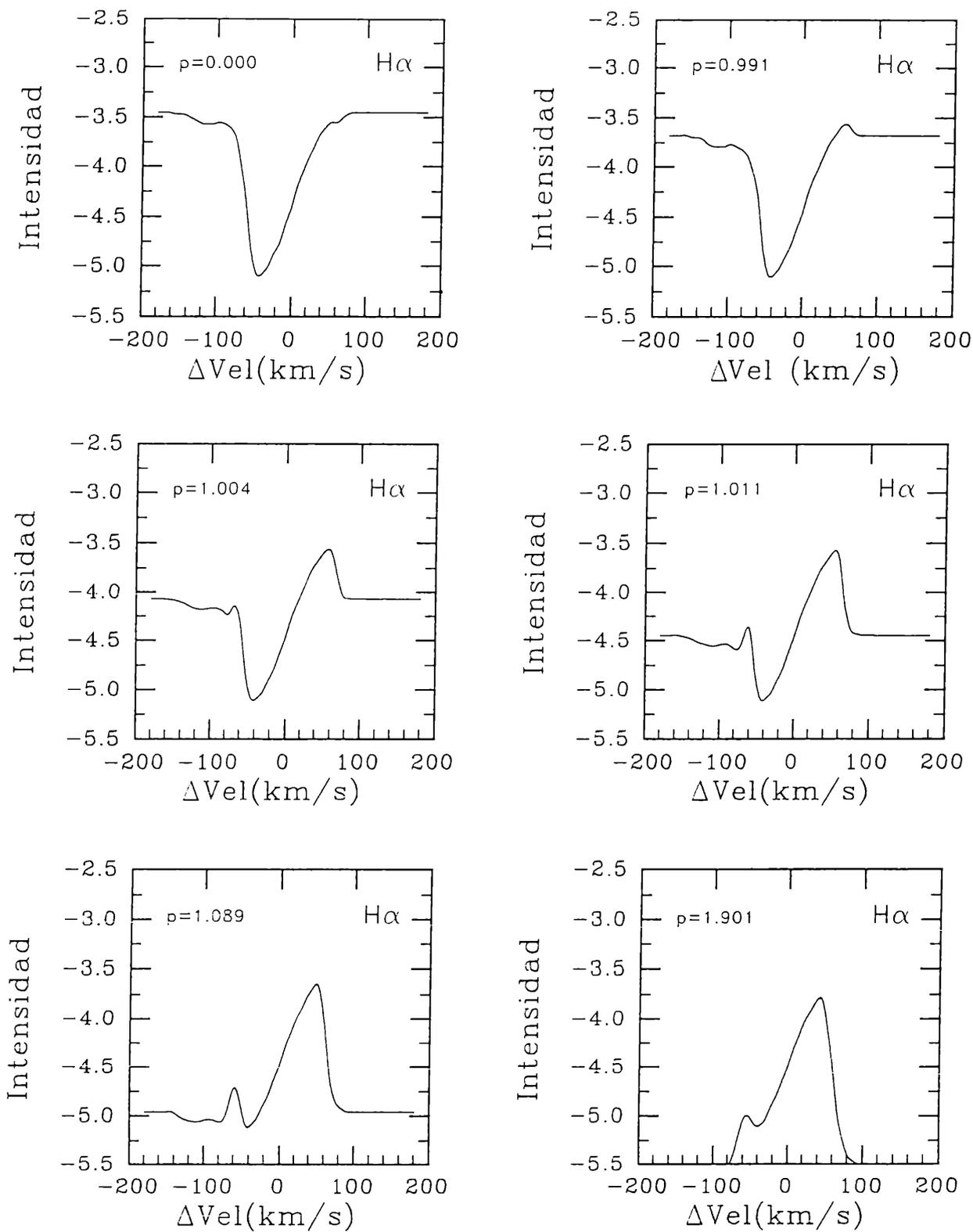


FIGURA 5.14. d) Perfiles de intensidad específica de H α en el borde exterior de la atmósfera para un conjunto de parámetros de impacto (modelo 7). Cada rayo está expresado en unidades del radio estelar.

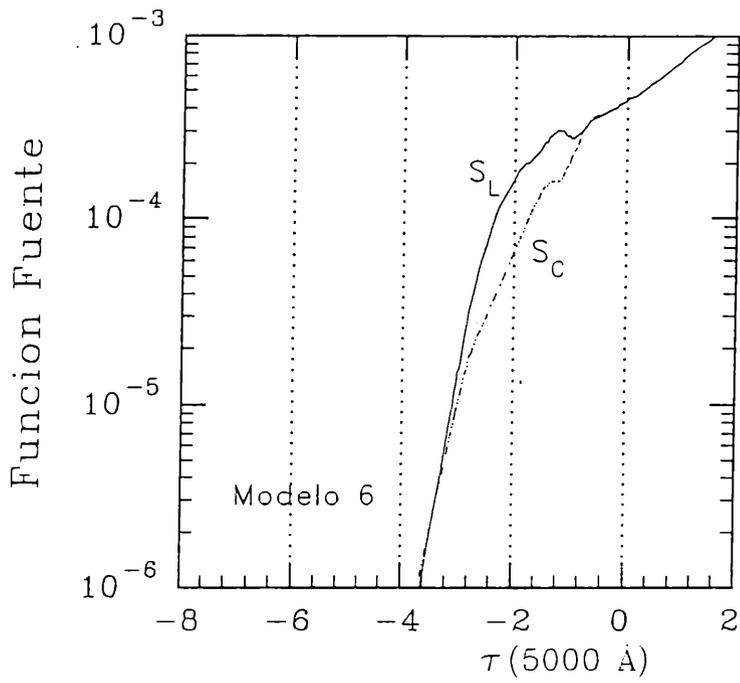


FIGURA 5.16a. Comportamiento de la función fuente de la línea H α (en línea continua) y del continuo (línea de trazos) con la profundidad óptica, para λ 5000 Å, correspondiente a un modelo con $T_{\text{eff}} = 14000$ K (modelo 6).

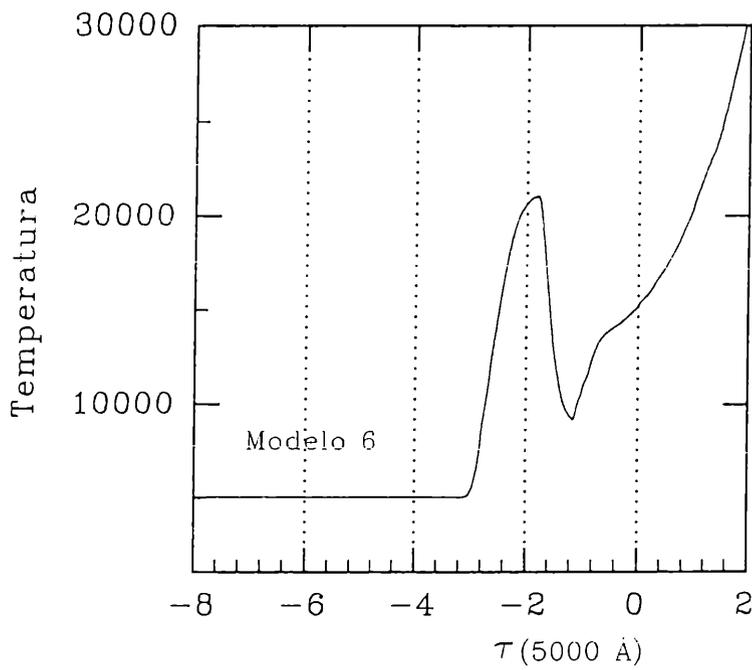


FIGURA 5.16b. Distribución de temperatura con la profundidad óptica $\tau_{5000 \text{ \AA}}$ (modelo 6).

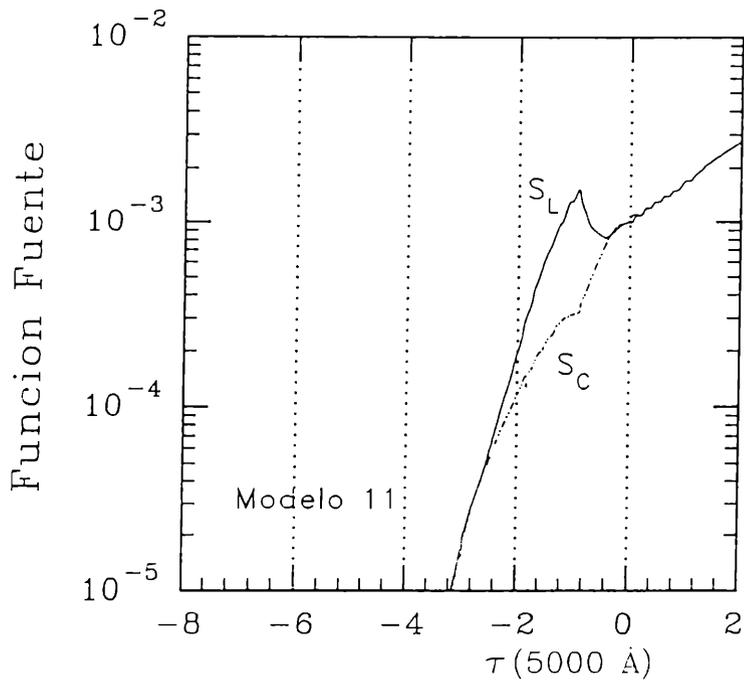


FIGURA 5.15a. Comportamiento de la función fuente de la línea H α (en línea continua) y del continuo (línea de trazos) con la profundidad óptica, para λ 5000 Å, correspondiente a un modelo con $T_{\text{eff}} = 25000$ K (modelo 11).

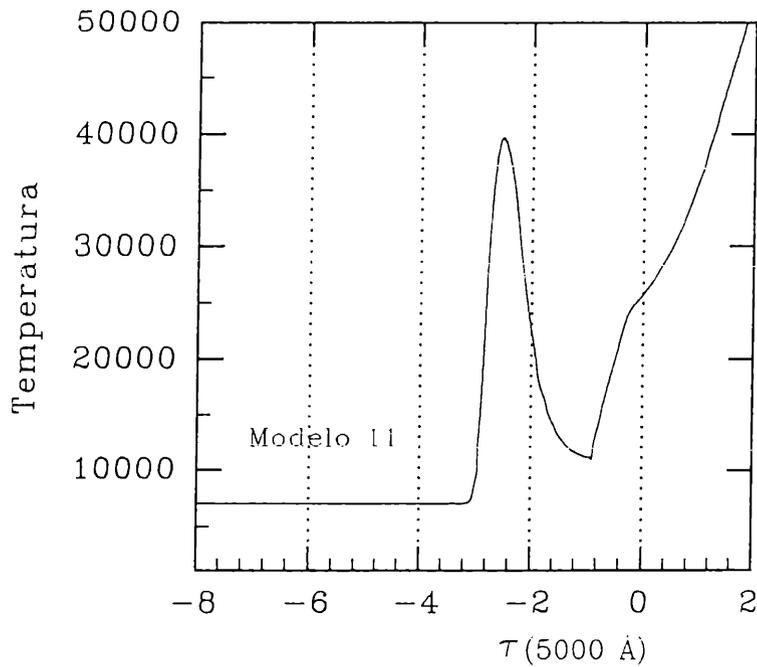


FIGURA 5.15b. Distribución de temperatura con la profundidad óptica $\tau_{5000 \text{ Å}}$ (modelo 11).

(método b). En general, las regiones que se proyectan sobre el disco estelar son las que contribuyen a la componente de absorción y el resto de la envoltura contribuye a la emisión.

Como ya mencionamos, una de las cantidades básicas que se obtiene de la solución de la ecuación de transporte radiativo es la dependencia de la función fuente de la línea $H\alpha$ con la profundidad óptica. Para ilustrar dicho comportamiento hemos seleccionado dos modelos: uno con $T_{\text{eff}} = 25000$ K (figura 5.15a) y otro con $T_{\text{eff}} = 14000$ K (figura 5.16a); cada uno de estos modelos es representativo de su correspondiente clase espectral. En ambos gráficos también hemos incluido la función fuente del continuo. Con el fin de comprender (desde otra óptica) cuáles son los mecanismos y qué regiones de la atmósfera contribuyen a la línea de $H\alpha$, en las figuras 5.15b y 5.16b representamos la marcha de la temperatura electrónica con $\tau_{5000 \text{ \AA}}$. Comparando el comportamiento de la función fuente con la distribución de temperatura, podemos concluir:

- En el interior de la fotosfera, para cada radio, tanto la función fuente de la línea como la del continuo toman el valor de la función de Planck para la temperatura electrónica del medio. Esto significa que en esa región dominan los procesos colisionales.

- En el borde exterior de la fotosfera, y en todo el resto de la envoltura, se evidencia fuertes apartamientos del equilibrio local termodinámico; a medida que disminuye la temperatura electrónica aumenta la función fuente de la línea, y viceversa. Esto indica que dicha función fuente está dominada por los procesos de recombinación radiativa (que son inversamente proporcionales a la raíz cuadrada de la temperatura electrónica). Aquí mismo puede observarse, claramente, que la máxima contribución al perfil de $H\alpha$ proviene de la región de mínimo de temperatura (donde la función fuente de la línea alcanza un máximo relativo), y en menor proporción contribuye la región cromosférica y la envoltura templada.

En la figura 5.17 representamos la distribución de densidad numérica de H ionizado e H neutro con la profundidad óptica para los modelos de los dos gráficos anteriores. Allí, podemos advertir que

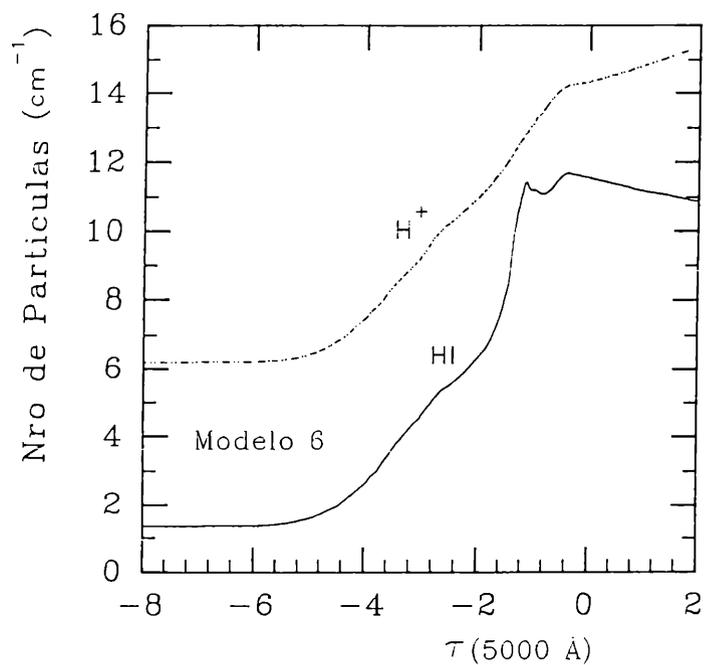
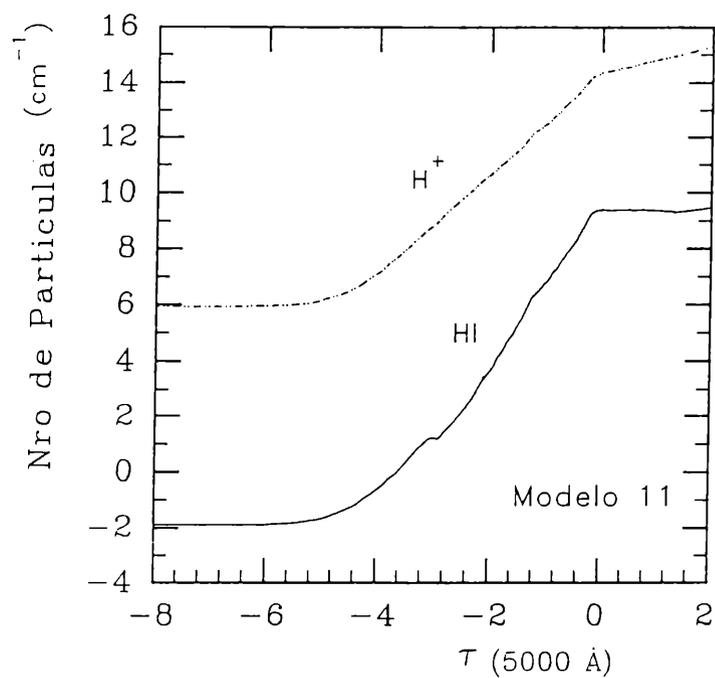


FIGURA 5.17. a) Distribuciones de HI y H^+ en función de la profundidad óptica τ , evaluada en λ 5000 Å, correspondientes al modelo 11 (arriba) y al modelo 6 (abajo). Dado que el He se encuentra en estado neutro, $N_H^+ = n_e$.

el H está completamente ionizado. En el modelo de menor temperatura efectiva la proporción de HII/HI aumenta en la región de mínimo de temperatura (figura 5.17b).

Deseamos destacar que, para cada tipo espectral, la marcha de la densidad numérica de todos los modelos restantes presenta un comportamiento similar a los modelos aquí ilustrados, a menos de un factor de escala. Este factor de escala está primordialmente determinado por la tasa de pérdida de masa del modelo; es decir, si domina un régimen de baja velocidad o uno de alta velocidad.

5.6 CONCLUSIONES

El modelo de atmósfera que proponemos en este trabajo puede reproducir, al menos en sus características fundamentales, las líneas de Balmer de algunas estrellas Be. Sin embargo, debemos recordar que la ecuación de transporte radiativo es una ecuación no lineal, y por lo tanto, las soluciones que obtenemos no son únicas. Por esta razón, es necesario calcular perfiles de líneas en otros rangos espectrales para obtener una mejor completitud del modelo.

Teniendo en cuenta los resultados que predice la estructura de atmósfera que hemos propuesto (existencia de una cromosfera y un viento estelar en un medio con simetría esférica), nuestras conclusiones son las siguientes:

a) Las características morfológicas del perfil de H α (P Cygni, uno o dos picos de emisión) dependen del gradiente de velocidad inicial, es decir, del comportamiento de la distribución de velocidad en las regiones adyacentes a la fotosfera (sub - fotosféricas y post - fotosféricas). Por otro lado, estas curvas de velocidad dependerán de los mecanismos de pérdida de masa e inyección de calor que tienen lugar allí (Iglesias & Ringuélet 1993). Por lo tanto, la estructura básica de los perfiles de líneas de la serie de Balmer impone restricciones al campo de velocidades y limita los rangos de variación de los procesos físicos que tienen lugar en las atmósferas

de las estrellas Be. Por esta razón no es frecuente observar, en una misma estrella Be, que el perfil de $H\alpha$ muestre variaciones temporales que alternen entre un perfil tipo P Cygni y un perfil con dos picos de emisión.

b) Curvas de velocidades muy abruptas en el borde exterior de la fotosfera predicen intensos perfiles de emisión (sin estructuras de absorción).

c) La intensidad de la componente de emisión también depende de los siguientes parámetros: i) el radio donde la velocidad alcanza su valor asintótico: cuanto mayor es este radio, mayor es la emisión, ii) la distribución de temperatura en la región de mínimo de temperatura, iii) la temperatura de la envoltura templada: la emisión aumenta como una función inversa de T_0 . Todos estos parámetros contribuyen a la intensidad del perfil de emisión sin modificar la forma global del mismo.

d) La posición e intensidad de la componente de absorción depende, fundamentalmente, de la ley de velocidad. Una componente de absorción central se produce cuando un régimen de baja velocidad domina las regiones próximas a la fotosfera, mientras que grandes gradientes de velocidad, en la misma región, producen una componente de absorción desplazada hacia el azul.

e) El valor de la velocidad asintótica no está correlacionado con ninguna estructura del perfil. En el caso de un perfil P Cygni, este valor tampoco se corresponde con la velocidad terminal (velocidad asociada con el flujo que emerge del borde del ala de mayor frecuencia, de la componente de absorción). Generalmente, el valor de la velocidad asintótica es inferior al valor que corresponde a la velocidad terminal.

f) La función fuente de $H\alpha$ está dominada fundamentalmente por recombinaciones radiativas. Por otro lado, la región próxima a la

fotosfera es la que determina su comportamiento general.

g) El tamaño de la región de formación de la línea de $H\alpha$ que predice un modelo con simetría esférica es inferior a 4 radios estelares cuando un régimen de baja velocidad domina esa región. Pero puede llegar a extenderse hasta, aproximadamente 10 radios, cuando dominan vientos de alta velocidad en la región adyacente a la fotosfera.

h) La región de formación de $H\beta$ es interior a la de $H\alpha$.

i) El modelo que proponemos podría en primera instancia ser utilizado para analizar el espectro de Balmer de algunas estrellas Be. Respecto a este resultado debemos resaltar que hemos propuesto un medio con simetría esférica aunque las estrellas Be son altos rotadores y posiblemente presenten rotación diferencial (Zorec 1986), por lo tanto, este modelo nos permitiría analizar, en primera aproximación, las regiones de formación de líneas en términos de distribuciones de temperatura y densidades promedio.

6.1 MAGNESIO II

Históricamente, el análisis de las líneas de Mg II observadas en el espectro visible estuvo basado en la hipótesis de LTE y HE. En las estrellas de tipo espectral O y B, esta aproximación conduce a que las intensidades de las líneas calculadas resulten notablemente inferiores a las observadas cuando se considera que la abundancia de Mg, relativa a H, es similar al valor determinado en la atmósfera solar. Típicamente la relación $(\text{Mg}/\text{H})_{\odot} \approx 3.7 \cdot 10^{-5}$ (Landolt & Börnstein 1982). Por lo tanto, las abundancias de Mg/H inferidas en las estrellas B tempranas, a través de un análisis basado en la aproximación LTE, pueden tener errores superiores a un orden de magnitud respecto del valor estimado para el sol.

Mihalas (1972) calculó anchos equivalentes de líneas de Mg II para estrellas O y B normales, utilizando una solución combinada de la ecuación de transporte y las ecuaciones de equilibrio estadístico para una atmósfera estática formada por capas plano-paralelas. Consideró átomos de Mg II con 15 niveles de energía y mostró que los anchos equivalentes calculados presentan un excelente ajuste con los observados cuando se utiliza la abundancia solar.

Cálculos de perfiles de líneas de Mg II fuera de LTE, en el contexto de átomos con muchos niveles de energía, para una atmósfera plano paralela en expansión fueron tratados por Scharner & Carlsson (1985). Este estudio estuvo principalmente dirigido a estrellas de tipos espectrales tardíos (A-G), estrellas de carbón y estrellas de tipo solar.

En medios que se expanden con simetría esférica, el análisis de las líneas de resonancia de Mg II en NLTE estuvo basado, en un principio, en la aproximación de Sobolev, utilizando un esquema de átomos con dos niveles de energía. Posteriormente, Kunasz & Praderie (1981) resolvieron la ecuación de transporte radiativo para un medio que se expande con simetría esférica en un marco de referencia que

acompaña al fluido (*Mihalas, Kunasz & Hummer 1976*), para estudiar la formación de las líneas de resonancia de Mg II en α Cyg. Mediante un procedimiento similar *Catala, Kunasz & Praderie (1984)* estudiaron la línea *k* de Mg II ($\lambda 2796$) en AB AUR. Un análisis más completo acerca de la formación de líneas en un viento estelar, con simetría esférica, fue realizado por *Hartmann et al. (1990)* para interpretar las envolturas de las estrellas T Tauri.

En algunas estrellas Be las líneas de Mg II *h* y *k* ($\lambda 2800$) presentan intensos núcleos de absorción y a veces muestran emisiones en las alas. Otras estrellas manifiestan componentes de absorción desplazadas hacia el azul con un rango de velocidades de - 50 Km/s a -200 Km/s (*Thomas 1983*). En general, la observación de emisiones en las líneas de resonancia está relacionada con la existencia de una envoltura extendida. En las estrellas tardías las líneas de emisión son indicadoras de la presencia de una cromosfera. En cambio, en las estrellas Be (si bien estas estrellas pueden presentar estructuras cromosféricas o coronales) la región de formación de estas líneas se considera asociada a una envoltura fría post-coronal (*Thomas 1983*).

En este trabajo, analizaremos el espectro de Mg II que se origina en las atmósferas de las estrellas Be. En particular, estamos interesados en las transiciones que conectan los estados $3d\ ^2D \rightarrow 4f\ ^2F$, que dan lugar al doblete $\lambda\lambda$ 4481.13 y 4481.33, pues estas líneas pertenecen al multiplete más intenso observable desde tierra. Otras líneas importantes que pueden ser utilizadas en el diagnóstico de las atmósferas son las líneas de resonancia, $\lambda\lambda$ 2795.53 y 2802.70, y las transiciones que se producen entre los estados $3p\ ^2P^o \rightarrow 3d\ ^2D$. De esta manera, podremos diagnosticar las propiedades físicas del medio en los distintos rangos espectrales.

Calculamos líneas de Mg II utilizando el mismo conjunto de modelos de atmósferas que hemos propuesto para determinar los perfiles de las líneas de H. Para ello, confeccionamos programas de lectura de datos atómicos, subrutinas para calcular tasas radiativas y colisionales (ligado-ligado y ligado-libre), y subrutinas para resolver las ecuaciones de equilibrio estadístico. Por otra parte, se aprovechó del código ETLA todas las subrutinas para resolver la ecuación de transporte radiativo y el cálculo para transformar las

cantidades físicas al marco de referencia del observador.

Consideramos un modelo atómico de Mg II formado por 15 niveles de energía, de modo que nos permite operar explícitamente con muchas transiciones. La resolución simultánea de la ecuación de transporte radiativo y las ecuaciones de equilibrio estadístico fue realizada como se detalla en los capítulos 3 y 4.

6.1.1 MODELO DE ATOMO. NIVELES DE ENERGIA

El modelo de átomo que usamos es similar al presentado por Mihalas (1972). Este modelo se describe en la figura 6.1 y en la Tabla 4. Aquí, hemos incluido explícitamente todos los niveles inferiores hasta el 5g inclusive. Los niveles 6p - 6h se promediaron y, en consecuencia, contribuyen como un único nivel al que se designó <6>. Mg III está representado por un sólo nivel de energía.

En general, en los espectros de las estrellas B y Be las únicas líneas de Mg I que se observan son líneas de resonancia de origen interestelar. Por esta razón, Mg I no fue incluido en el cálculo pues representa una fracción despreciable frente al número total de iones de Mg II y Mg III.

En todos nuestros modelos consideramos que la abundancia de Mg, relativa al H, es similar a la solar y adoptamos el valor $3.47 \cdot 10^{-5}$.

6.1.2 TRANSICIONES RADIATIVAS

a) ligado-ligado

Dada la gran cantidad de niveles que hemos incluido en nuestro modelo de átomo (ver Tabla 4) nos encontramos en condiciones de reproducir un espectro muy rico en líneas. Pero, debido a la imposibilidad de tratar todas esas transiciones hemos seleccionado un total de 15 líneas, las cuales se detallan en la Tabla 5. Este número es suficiente para hacer un análisis cuantitativo y completo

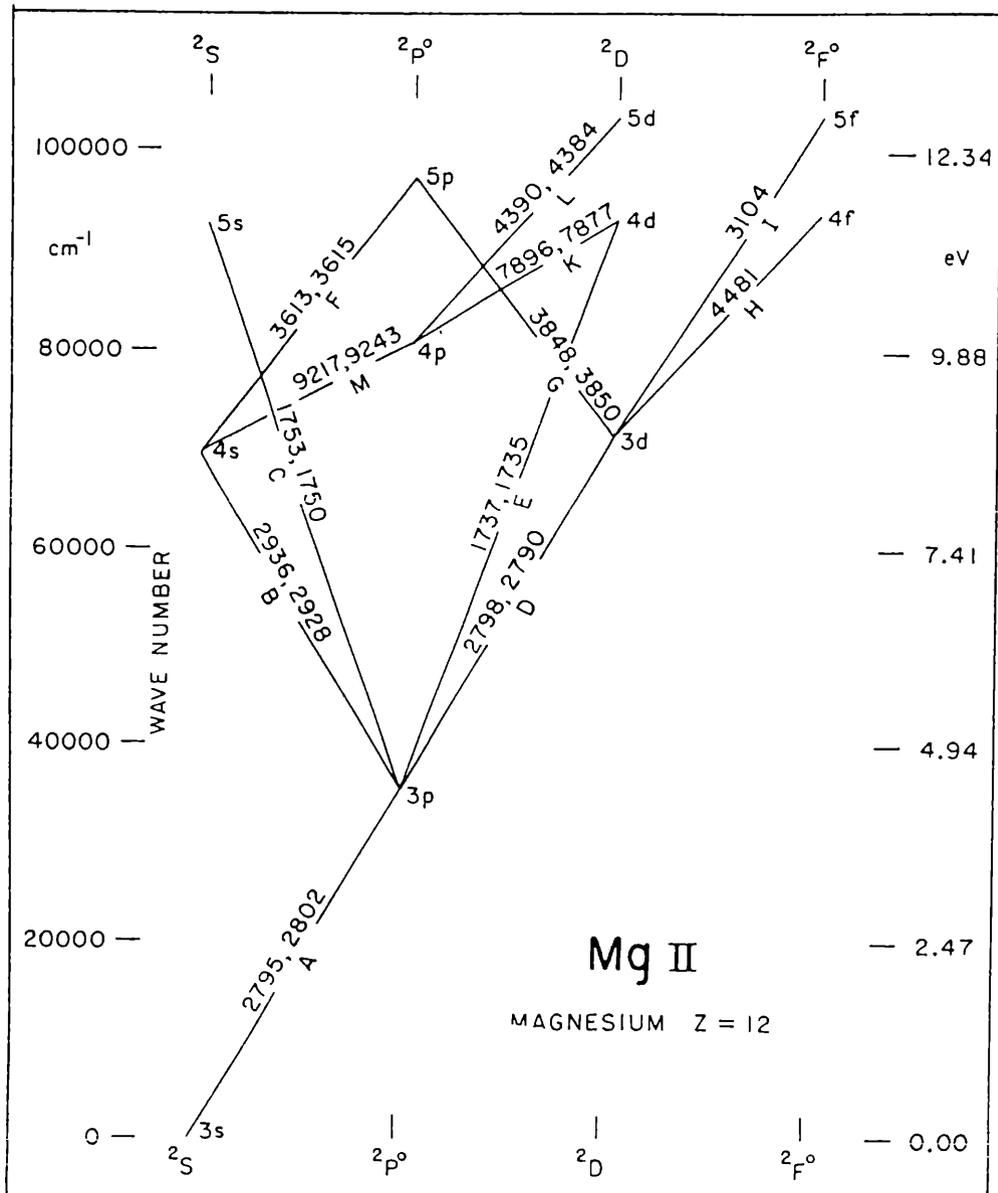


FIGURA 6.1. Esquema de Niveles de Mg II

TABLA 4

Niveles de Energia de Mg II

Configuración	Término	$\chi_{exc} \text{ (cm)}^{-1}$	$\chi_{ion} \text{ (cm)}^{-1}$	g	N°
Mg II 3s	2S	0.0	121267.4	2	1
3p	$^2P^{\circ}$	35730.5	85536.9	6	2
4s	2S	69805.2	51462.2	2	3
3d	2D	71490.8	49776.6	10	4
4p	$^2P^{\circ}$	80641.1	40626.3	6	5
5s	2S	92786.2	28481.2	2	6
4d	2D	93312.1	27955.3	10	7
4f	$^2F^{\circ}$	93800.0	27467.4	14	8
5p	$^2P^{\circ}$	97464.3	23803.1	6	9
6s	2S	103198.1	18069.3	2	10
5d	2D	103421.1	17846.3	10	11
5f	$^2F^{\circ}$	103690.2	17577.2	14	12
5g	2G	103709.5	17557.9	18	13
Mg II <6>	$^2P^{\circ} - ^2H^{\circ}$	109000.0	12267.4	70	14
MgIII 2p ⁶	1S	121267.4	646364.0	1	15

χ_{exc} , Potencial de Excitación; χ_{ion} , Potencial de Ionización;
g, Peso Estadístico del nivel.

sin perder generalidad.

La elección de las líneas fue realizada de manera que estén incluidas:

- i) todas las transiciones más importantes que llegan y salen de los estados 3d y 4f, y
- ii) la mayor cantidad de caminos que permitan conectar los niveles con el estado fundamental.

Las probabilidades de transición (f_{ij}) fueron extraídas de las tablas de *Wiese & Martin (1980)* y del trabajo de *Mihalas (1972)*. Dado que hemos seleccionado un subconjunto de transiciones, los valores presentados en la tabla 5 corresponden a valores promediados sobre todas las componentes del multiplete.

b) ligado - libre

Las secciones de choque para la fotoionización se calculan usando los parámetros ($\alpha_0, \beta, \lambda_0, s$) recopilados por *Mihalas (Mihalas 1972, tabla 4)* en la siguiente fórmula,

$$\alpha_\nu = \alpha_0 \left(\beta \left(\lambda / \lambda_0 \right)^s + (1 - \beta) \left(\lambda / \lambda_0 \right)^{s+1} \right) 10^{-18} \text{ cm}^2.$$

Estas secciones de choque están basadas en cálculos por defecto cuántico (*Peach 1967 a, b y c*) y en extrapolaciones por defecto cuántico de cada serie individual (*Peach 1970*). La sección de fotoionización para Mg II 3s \rightarrow Mg III fue calculada por *Norcross (1972)*.

6.1.3 PROCESOS COLISIONALES

La tasa de ionización colisional para la transición Mg II 3s \rightarrow Mg III 2p⁶ + ϵ se calcula mediante una expresión que ajusta los datos experimentales de *Martin, Peart & Dolder (1968)*,

TABLA 5

Transiciones de Mg II Seleccionadas

NIVEL	N ^o	λ	f_{ij}
3s → 3p	1	2797.9	0.940
3p → 4s	2	2933.8	0.139
3p → 3d	3	2795.5	0.920
3p → 5s	4	1752.7	0.016
3p → 4d	5	1736.7	0.038
4s → 4p	6	9226.0	1.37
3d → 4p	7	10926.0	0.166
3d → 4f	8	4481.2	0.950
3d → 5f	9	3104.8	0.164
4p → 5s	10	8231.6	0.264
4p → 4d	11	7889.9	1.23
4p → 5d	12	4388.6	0.081
4d → 5f	13	9632.2	0.80
4f → 5d	14	10393.8	0.014
4f → 5g	15	10091.3	1.35

$$C_{1K} = 5.465 \cdot 10^{-11} N_e T^{1/2} (I_H/E_0)^2 \left\{ a U_0 E_1(U_0) + b (U_0/U_1)^2 (E_1(U_1) + e^{-U_1}) \right\},$$

donde I_H es la energía de ionización para el hidrógeno; E_0 es la energía umbral para la ionización de Mg II;

$$\begin{aligned} U_0 &= E_0/kT, & U_1 &= U_0 + c, \\ a &= 2.8891, & b &= -0.8453, & y & c = 0.27. \end{aligned}$$

La ionización colisional para los estados excitados de Mg II y para el estado fundamental se calcula empleando la fórmula de Seaton (1962) la cual conduce a la tasa colisional dada por Jefferies (1968),

$$C_{nk} = 1.55 \cdot 10^{13} N_e T^{-1/2} \bar{g} \alpha_n(\nu_0) e^{-U_0/U_0},$$

donde $\bar{g} = 0.3$ para los iones.

$\alpha_n(\nu_0)$ es la sección de choque de fotoionización para la frecuencia umbral desde el estado n .

Para las transiciones colisionales entre los estados excitados adoptamos la fórmula de Van Regemorter (1962) con $\bar{g} = 0.25$.

$$C_{ij} = 5.465 \cdot 10^{-11} N_e T^{1/2} (14.5 f_{ij}) (I_H/E_0)^2 U_0 e^{-U_0} \Gamma(U_0),$$

donde $\Gamma(U_0) = \max[\bar{g}, 0.276 e^{U_0} E_1(U_0)]$

6.1.4 PROCEDIMIENTO DE CALCULO

Como ya hemos mencionado en el capítulo 4, recurrimos a la resolución simultánea de las ecuaciones de equilibrio estadístico y de la ecuación de transporte radiativo para un medio con simetría esférica en expansión, en el marco de referencia que se mueve con una partícula de fluido. Para cada profundidad, las líneas están representadas por perfiles gaussianos cuyos anchos están

determinados por el valor de la velocidad Doppler ($V_D^2 = V_{th}^2 + V_t^2$); además, supondremos redistribución completa.

Como las líneas de Mg II son consideradas líneas "metálicas" (con este nombre agrupamos todos los elementos químicos excepto H y He), supondremos que pueden variar sus números ocupacionales pero esta variación carece de efecto alguno sobre la estructura global de la atmósfera. Por lo tanto, el modelo de atmósfera se considera a priori conocido e invariable (ver capítulo 2).

El cálculo se inicia resolviendo las ecuaciones de equilibrio estadístico utilizando el valor del campo de radiación del continuo para la frecuencia del borde azul de cada línea. Una vez determinadas las poblaciones de cada nivel, se generan los términos fuentes y sumideros de la ecuación 3.9 empleando la aproximación equivalente a un átomo de dos niveles. En esta aproximación, la transición tratada explícitamente es una variable, mientras que las otras transiciones toman valores constantes. Se resuelve nuevamente la ecuación de transporte y con el campo de radiación resultante calculamos nuevas tasas radiativas y nuevos números ocupacionales. La convergencia de la solución se obtiene con unas pocas iteraciones. Generalmente no se necesitan más de cuatro iteraciones.

La población calculada, según se expresó en el párrafo anterior, es la población total del nivel identificado con los números cuánticos (n,l) . Para calcular las componentes individuales de un multiplete suponemos que el número ocupacional de cada nivel está distribuido sobre sus j estados de acuerdo a sus pesos estadísticos,

$$n_{ilj} = \frac{(2j + 1)}{2 (2l + 1)} n_{il}$$

Una vez determinada la función fuente de la transición de interés pasamos al marco de referencia del observador y calculamos el flujo emergente.

6.1.5 RESULTADOS

En la figura 6.2 y 6.3 mostramos perfiles de Mg II en la región UV calculados para un mismo tipo espectral; por ejemplo los modelos 4, 6, 7 y 8 de la tabla 2. Podemos observar que las líneas de resonancia de Mg II también son muy sensibles a la distribución de velocidades en la base del viento. Bajos gradientes de velocidad predicen perfiles de absorción (figura 6.2), pero a medida que el gradiente de velocidad aumenta, podemos obtener estructuras más complejas como los perfiles que se muestra en la figura 6.3. Es decir, los gradientes de velocidad de las regiones ubicadas en las proximidades de la fotosfera determinan la forma estructural del perfil. Este resultado está de acuerdo con aquellos obtenidos por otros autores (Catala et al. 1984 y Hartmann et al. 1990).

En la figura 6.2 también representamos el perfil de Mg II $\lambda 2795$, que se origina entre los estados $3p^2P^{\circ} - 3d^2D$ (multiplete UV 3). En todos nuestros modelos esta línea aparece en absorción y en general no es afectada por el campo de velocidades propuesto. Este hecho indica que su región de formación es principalmente fotosférica. Un resultado similar se obtiene para Mg II $\lambda 4481$. En cambio, las líneas de resonancia de Mg II presentan una extensa región de formación, y el tamaño de dicha región aumenta en relación directa con \dot{M} . Este resultado se observa al seguir la evolución del perfil en los modelos 4, 7, 8 y 6 (ver figura 6.2 y 6.3). En general, la intensidad y forma de las componentes de emisión y de absorción son altamente sensibles a la tasa de pérdida de masa (a través de la forma de $V(r)$). A medida que \dot{M} aumenta se intensifican las componentes de emisión, disminuye la intensidad de la componente de absorción, y comienza a manifestarse otra componente de absorción azul. Es interesante resaltar que la componente de emisión se origina en las regiones adyacentes a la fotosfera, por lo tanto, es sensible al gradiente de velocidad de esa región. En cambio, la componente de absorción más desplazada hacia el azul tiene origen en las regiones que se proyectan sobre el disco estelar y está afectada por la distribución de velocidades de las capas más externas, donde la función fuente de la línea decae (figura 6.4).

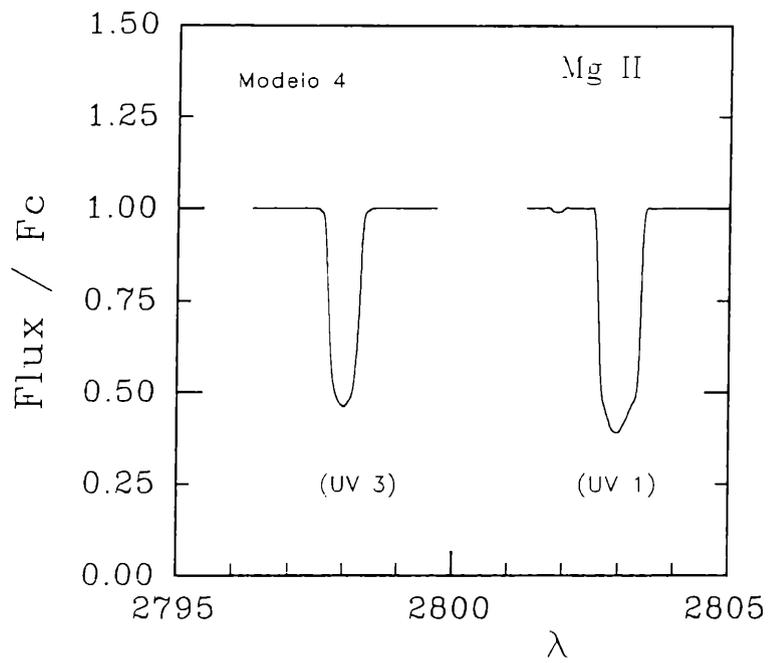


FIGURA 6.2a. Perfiles de Mg II λ 2802 (UV1) y λ 2795 (UV3) obtenido con el modelo 4 y ley de velocidad V_1 .

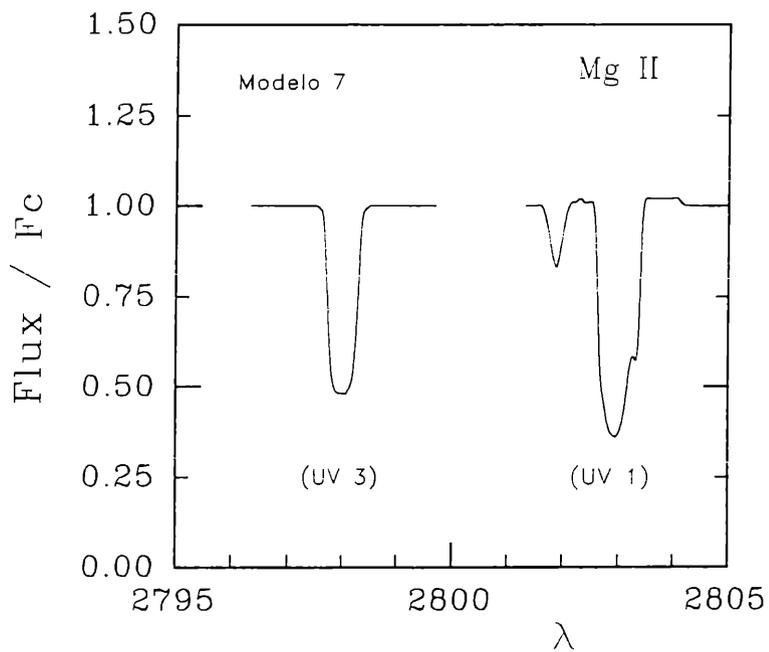


FIGURA 6.2b. Perfiles de Mg II λ 2802 (UV1) y λ 2795 (UV3) obtenido con el modelo 7 y ley de velocidad V_1 .

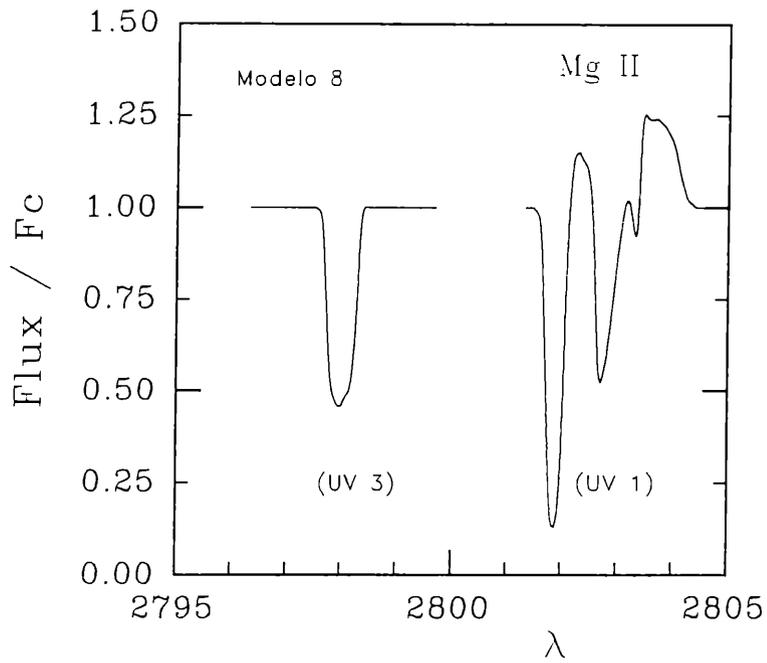


FIGURA 6.3a. Perfiles de Mg II $\lambda 2802$ (UV1) y $\lambda 2795$ (UV3) obtenido con el modelo 8 y ley de velocidad V_4 .

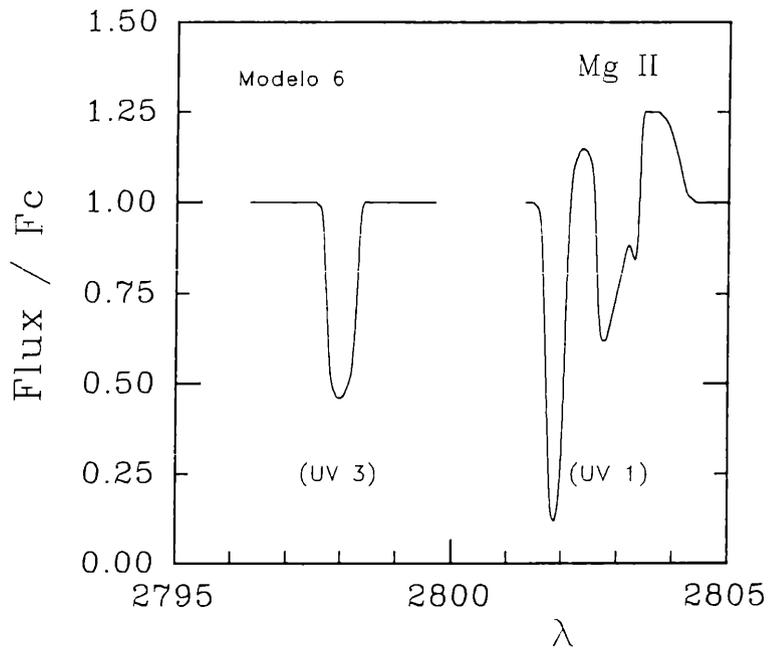


FIGURA 6.3b. Perfiles de Mg II $\lambda 2802$ (UV1) y $\lambda 2795$ (UV3) obtenido con el modelo 6 y ley de velocidad V_2 .

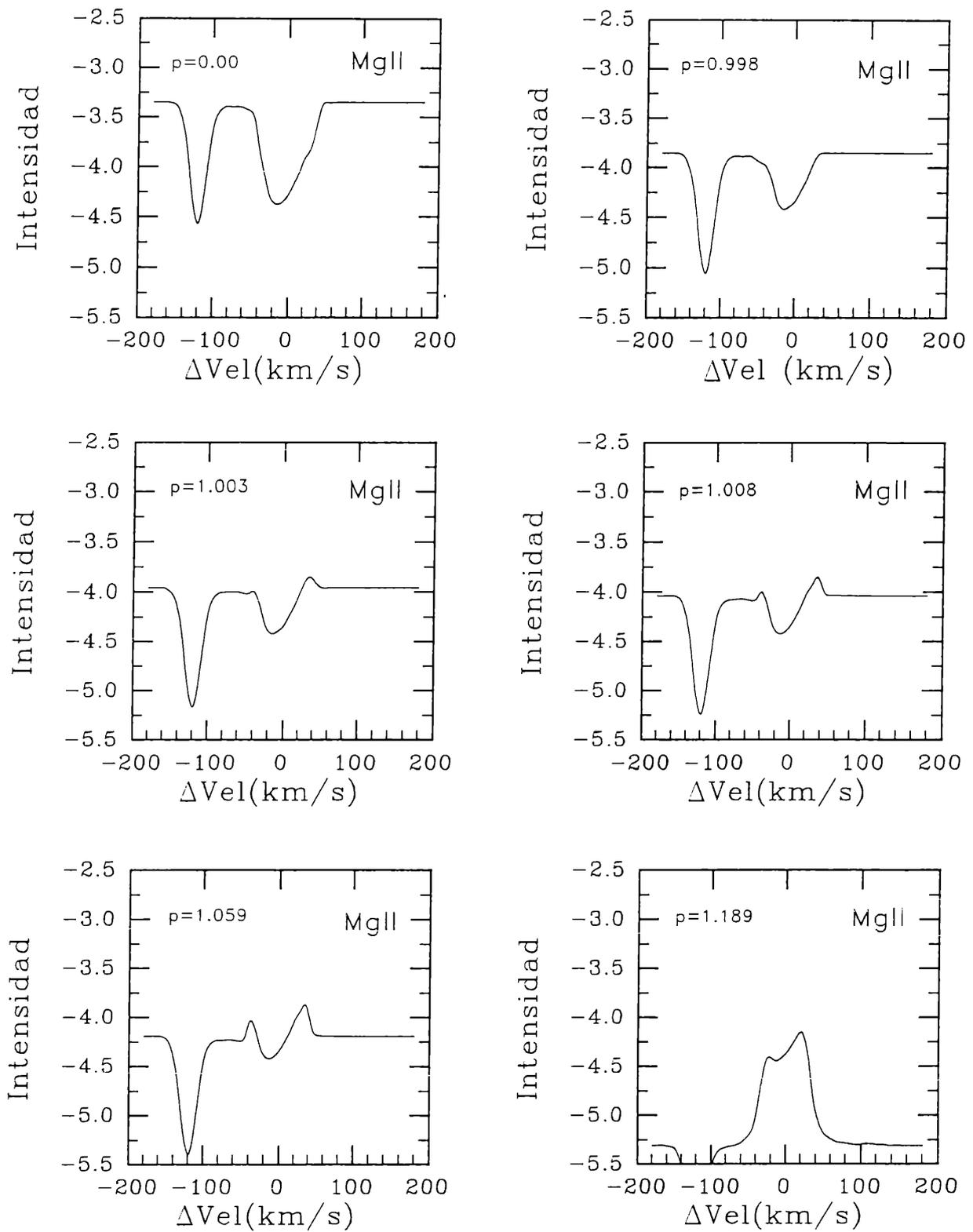


FIGURA 6.4. Perfiles de intensidad específica de Mg II en el borde exterior de la atmósfera para un conjunto de parámetros de impacto (modelo 6). Cada rayo está expresado en unidades del radio estelar.

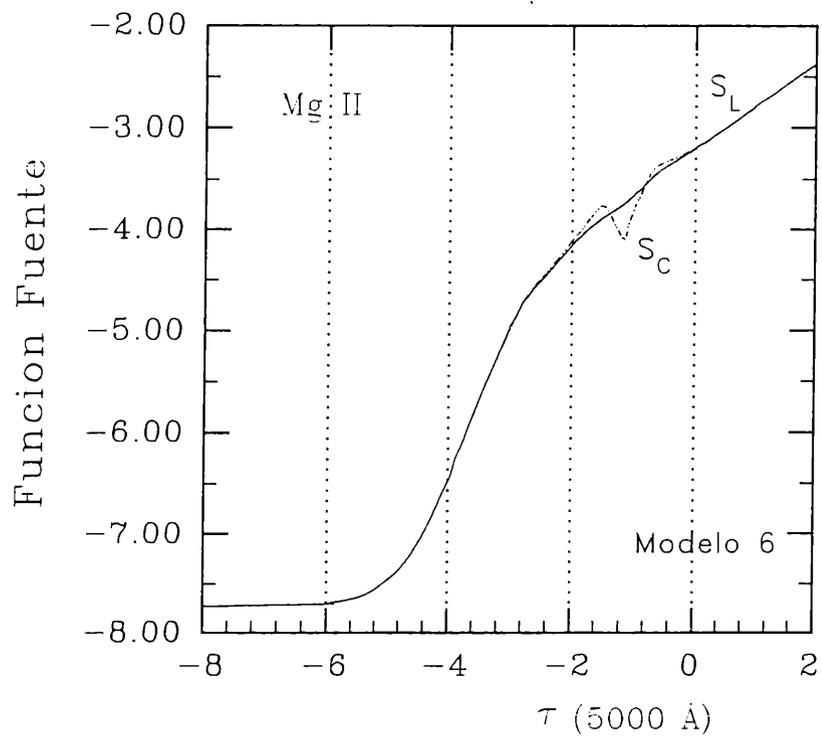


FIGURA 6.5. Comportamiento de la función fuente de Mg II con la profundidad óptica.

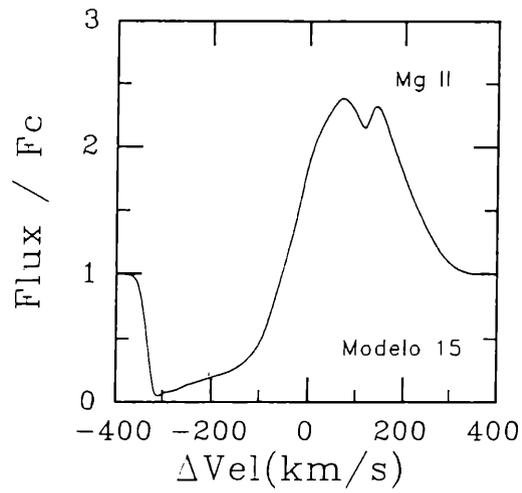


FIGURA 6.6a. Perfil P Cygni de Mg II (modelo 15) obtenido con una $T_{\text{eff}} = 9000 \text{ K}$ y $\Delta_1 = 1.2 R^*$.

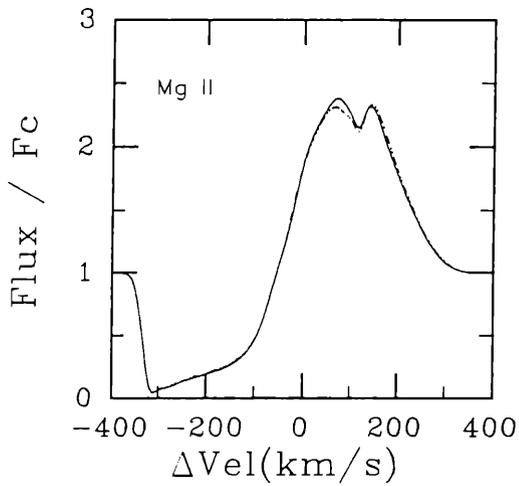


FIGURA 6.6b. Efecto de la distribución de temperatura sobre el perfil de Mg II obtenido con una $T_{\text{eff}} = 9000 \text{ K}$ y $\Delta_1 = 0.08 R^*$. En líneas de trazo se graficó el perfil de la figura 6.6a.

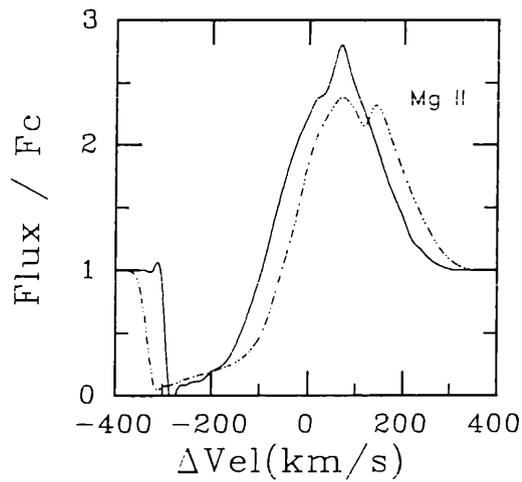


FIGURA 6.6c. Perfiles de Mg II calculados con diferentes velocidades de turbulencia; $V_t = 30 \text{ km/s}$ (en líneas de trazo) y $V_t = 45 \text{ km/s}$ (en línea continua).

En la figura 6.5 mostramos el comportamiento de la función fuente del continuo, y de la línea de Mg II (λ 2802), con la profundidad óptica para una estrella temprana ($T_{\text{eff}} = 14000$ K) con estructura cromosférica. Es de hacer notar que a grandes profundidades la función fuente de la línea, S_L , termaliza a S_C ; pero a medida que vamos hacia las capas más externas S_L decrece y se aparta del equilibrio local termodinámico. La función fuente del continuo sigue la marcha de la distribución de temperatura electrónica más allá de la región de mínimo de temperatura. El radio para el cual S_C ya no respeta la distribución de temperatura depende de cada modelo en particular, y del tipo espectral (para los tipos espectrales más tardíos S_C se asemeja más a la función de Planck). En la región de mínimo de temperatura S_L yace por encima de S_C , pero al comenzar la subida de temperatura dicho comportamiento se invierte. Luego en la regiones más externas ambas funciones vuelven a coincidir.

Una vez analizado el comportamiento de la función fuente con la profundidad óptica, podemos estudiar cómo influye la distribución de temperatura sobre las distintas componentes del perfil. Siempre y cuando estemos considerando variaciones en una cromosfera profunda (es decir $\Delta_1 < 1 R_{\text{ph}}$), encontramos que la componente de emisión (cuando dicha componente se manifiesta) se modifica levemente al variar el parámetro Δ_1 (este parámetro controla la posición del máximo de temperatura). La componente de emisión es más intensa cuando Δ_1 decrece. Este hecho puede interpretarse recordando que la función fuente de la línea está parcialmente dominada por colisiones en las regiones más profundas de la atmósfera. En la figura 6.6a ilustramos un perfil P Cygni de Mg II λ 2802 obtenido con el modelo 15 ($T_{\text{eff}} = 9000$ K) y en la figura 6.6b mostramos la influencia que produce la estructura cromosférica sobre dicho perfil.

La presencia de una cromosfera lejana en la estructura del perfil de Mg II carece de importancia.

En la figura 6.7 mostramos perfiles de Mg II λ 4481 para una estrella con $T_{\text{eff}} = 9000$ K y otra de $T_{\text{eff}} = 25000$ K. Las líneas subordinadas manifiestan perfiles de absorción y observamos que la máxima intensidad se obtiene para los tipos espectrales más tardíos. En general, en las estrellas B normales, Mg II λ 4481 desaparece para

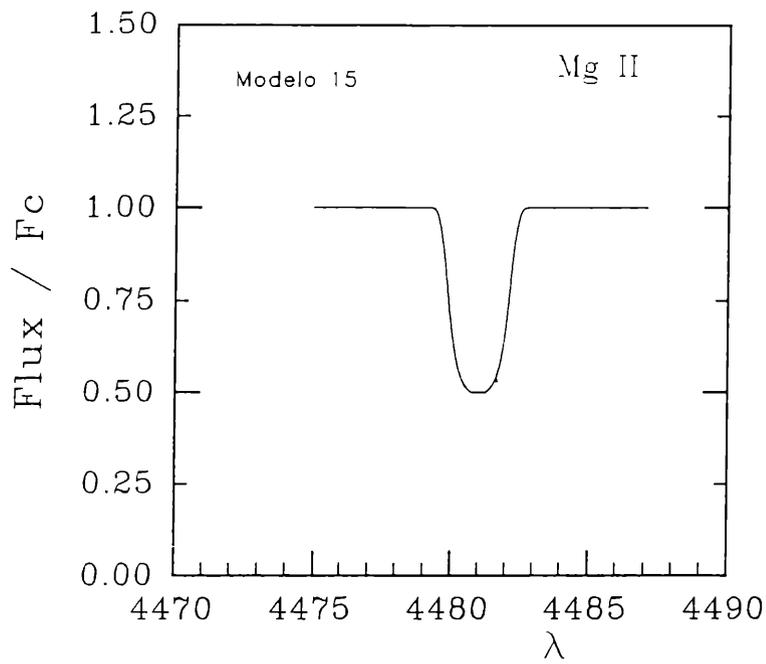
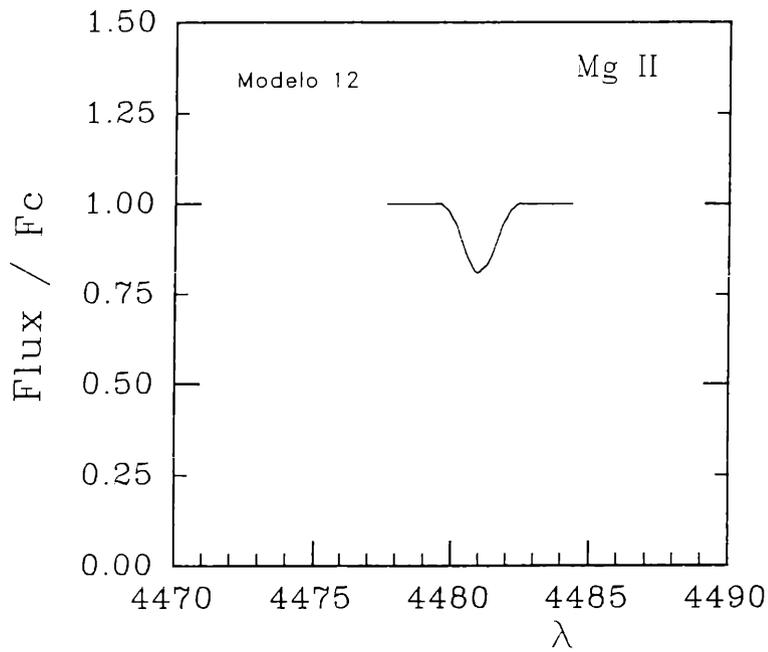


FIGURA 6.7. Perfiles de Mg II λ 4481 correspondiente a un modelo con $T_{\text{eff}} = 9000$ K (arriba) y otro de $T_{\text{eff}} = 25000$ (abajo).



tipos espectrales más tempranos que B5V, pero aún puede observarse en las estrellas de clase luminosa IV hasta un tipo espectral B2 (Thomas 1983). Los resultados que predicen nuestros modelos están de acuerdo con estas observaciones.

Observamos que las líneas subordinadas son insensibles a la distribución de temperatura cromosférica. Esto indica que ellas se originan en el borde de la fotosfera.

6.2 CONCLUSIONES

Los resultados obtenidos hasta el momento pueden sintetizarse de la siguiente manera:

- 1) Las líneas de resonancia presentan una extensa región de formación, mientras que las líneas subordinadas son de origen fotosférico.
- 2) La ley de velocidades juega un papel fundamental en la región de formación de las líneas de resonancia:
 - a) El gradiente de velocidad en las regiones post-fotosféricas influyen en las características morfológicas de las líneas de resonancia de MgII.
 - b) La intensidad de la componente de absorción azul depende de \dot{M} y su distribución interna de energía está caracterizada por las velocidades del viento en las regiones más externas de la atmósfera.
 - c) La intensidad y forma de la componente de emisión depende del gradiente de velocidad. Esta componente se origina en las regiones próximas a la fotosfera y no en la envoltura templada como originalmente se suponía.
- 3) Las componentes de absorción de las líneas de resonancia de Mg II son adecuadas para determinar las velocidades del viento en las regiones más externas de la atmósfera. Si bien estas líneas también ponen restricciones a las velocidades de las regiones más internas, no son suficientes para investigar la distribución de velocidades en

la base del viento. Este estudio debe ser complementado con las líneas de H.

4) Perfiles de Mg II tipo P Cygni se obtienen cuando fuertes gradientes de velocidad predominan en el borde de la fotosfera.

5) Debido a que las componentes de emisión de Mg II se originan en la base del viento, las emisiones son levemente sensibles a la distribución de temperatura cromosférica.

6) A medida que la velocidad de turbulencia aumenta la componente de emisión se ensancha y se desplaza al rojo y la componente de absorción se ensancha y se mueve hacia el azul (figura 6.6c).

7) Nuestros modelos predicen perfiles de Mg II que son, en algunos casos, globalmente similares a los observados.

6.3 ELEMENTOS SUPERIONIZADOS

Empleando el mismo conjunto de modelos que hemos construido para la interpretación de otras líneas espectrales (serie de Balmer y Mg II), en esta sección analizamos si los modelos propuestos también son adecuados para interpretar las líneas de resonancia de los elementos superionizados.

La existencia de elementos superionizados en estrellas A y B es comúnmente atribuida a la presencia de una región caliente con $T \approx 10^5$ K, donde el equilibrio coronal (balance entre ionizaciones colisionales y recombinaciones radiativas) describiría la ionización de C III (Doazan & Thomas 1982).

Una solución alternativa fue presentada por Catala y Talavera (1984). Este modelo supone que la radiación para ionizar la transición C III - C IV está termalizada en una cromosfera a 15000 - 18000 K. En ese caso, la ionización y recombinación radiativa controla dicha transición y el grado de ionización de C III - C IV está bien descrito por la ecuación de Saha. Con estas hipótesis se

tiene que C IV puede existir en cantidades suficientes en una estrella AO V con una temperatura cromosférica moderada.

En base a esta idea, aquí presentamos resultados numéricos referentes a las líneas de resonancia de C IV y Si IV. En la sección 6.3.1 presentamos el modelo atómico que hemos utilizado y en la sección 6.3.2 analizamos y discutimos los resultados obtenidos.

6.3.1 MODELO ATOMICO PARA C IV

En la figura 6.8 mostramos un esquema de niveles de C IV. Los dos niveles de energía que involucran a las transiciones de resonancia ($2s^2S - 2p^2P^o$) pueden considerarse desacoplados del resto de la estructura atómica. Por lo tanto, podemos adoptar un modelo atómico constituido por 2 niveles de energía para representar dicha transición. En la tabla 6 detallamos los datos atómicos de los niveles en consideración. Supondremos, además, que el equilibrio de ionización entre C III y CIV esta dado por la ley de Saha y adoptamos una abundancia de $3 \cdot 10^{-4}$ para el carbono. La intensidad de oscilador correspondiente a la transición $2s^2S - 2p^2P^o$ es 0.285. Esto indica que estamos considerando al multiplete como una única transición mientras resolvemos la ecuación de transporte en el marco de referencia del fluido; pero, antes de calcular el perfil emergente para un observador estacionario, respecto al centro de simetría del sistema, determinamos el número ocupacional correspondiente a cada transición del multiplete.

Hemos supuesto una función gaussiana para representar el perfil intrínseco de la línea, cuyo ancho está determinado por la velocidad Doppler ($V_D^2 = V_{th}^2 + V_t^2$) especificada por el modelo.

Para obtener el perfil emergente resolvemos la ecuación de transporte radiativo en el contexto de un átomo con dos niveles, en el marco de referencia del fluido. Para este fin hemos confeccionado subrutinas para calcular las tasas radiativas y colisionales de C IV, empleando las correspondientes expresiones desarrolladas para átomos hidrogenoides. Estas subrutinas fueron incorporadas al programa de cálculo general. Para verificar el buen funcionamiento

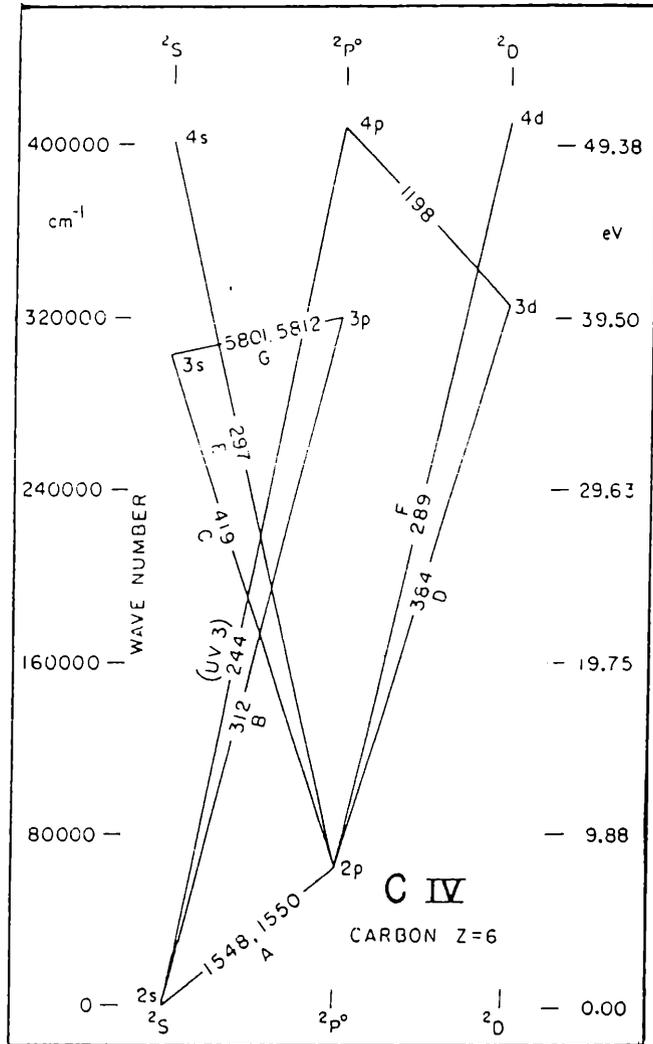


FIGURA 6.8. Esquema de Niveles de C IV

del programa hemos reproducido el perfil de línea de C IV $\lambda 1548$ publicado por Catala (1988), quien ha empleado un cálculo más detallado.

TABLA 6
Niveles de Energía

Término	g_i	χ_{exc} (cm^{-1})	χ_i (cm^{-1})
CIV 2s ² S	2	386159.70	520177.80
CIV 2p ² P ^o	6	450697.55	455639.95
CV 1S ² S	1	906337.50	0

g_i : Peso Estadístico del Nivel; χ_{exc} : Energía del Nivel;

χ_i : Energía de Ionización de ese Nivel.

6.3.2 RESULTADOS Y DISCUSION

Las estrellas Be presentan líneas de los elementos superionizados en absorción. Los perfiles de estas líneas pueden ser simétricos, asimétricos, o presentar componentes múltiples. Nosotros hemos calculado perfiles de C IV para un amplio rango de temperaturas efectivas. Nuestros modelos predicen perfiles cualitativamente semejantes a los perfiles observados en las estrellas Be tardías.

En la figura 6.9 mostramos un perfil tipo P Cygni de C IV ($\lambda 1548$) obtenido con el modelo 15. Este perfil muestra una componente de emisión muy débil en el ala roja. Observamos que la intensidad de la componente de emisión varía con la posición de la región de máximo de temperatura (figura 6.10); cuando aumenta Δ_1 , aumenta la intensidad de dicha emisión.

La intensidad de la componente de emisión también se modifica al variar la extensión de la cromosfera o el valor de la temperatura máxima en la región cromosférica (Catala 1988).

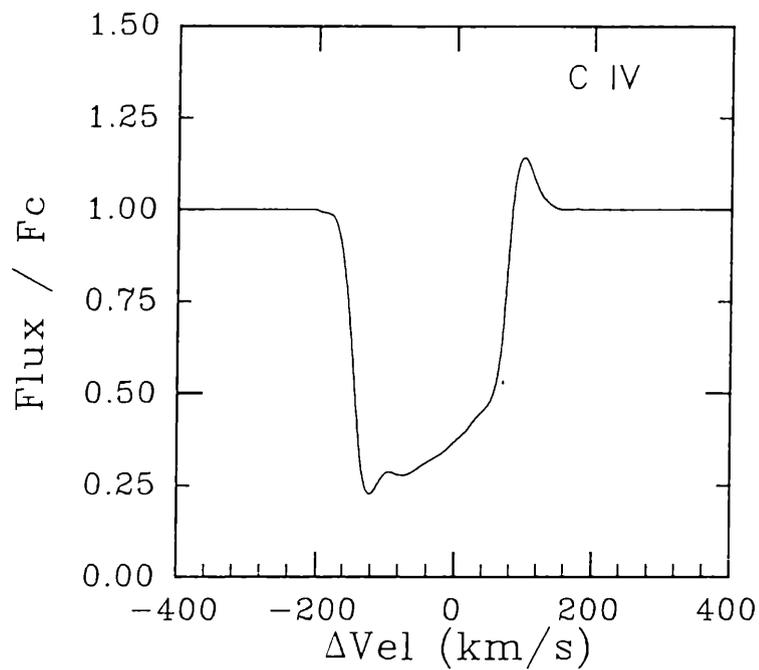


FIGURA 6.9. Perfil de C IV obtenido con el modelo 15.

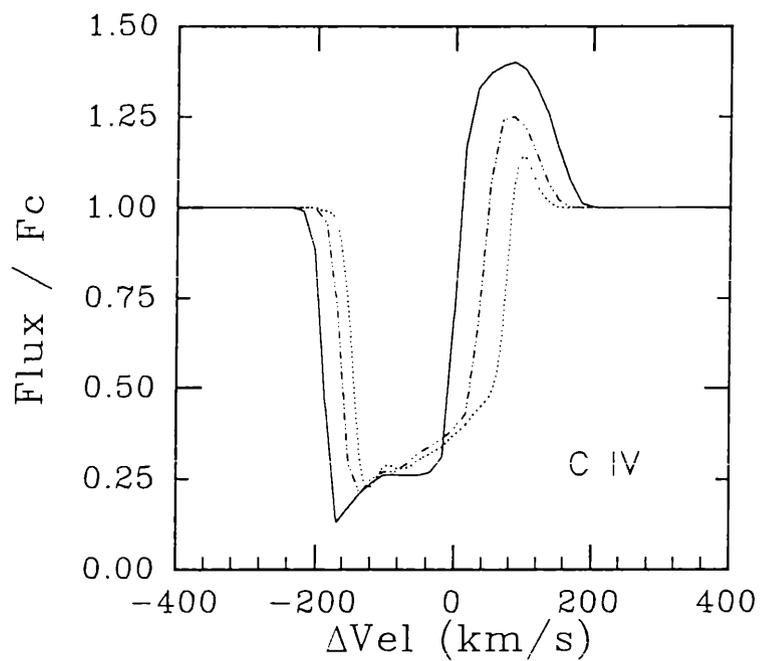


FIGURA 6.10. Perfiles de C IV obtenidos variando el parámetro Δ_1 (posición del máximo de temperatura de la cromosfera). a) $\Delta_1 = 0.08 R_{ph}$ (línea punteada), b) $\Delta_1 = 0.33 R_{ph}$ (línea de trazo) y c) $\Delta_1 = 1.5 R_{ph}$ (línea continua).

A medida que vamos hacia tipos espectrales más tempranos, los anchos equivalentes calculados son inferiores a los observados. Esta discrepancia se debe a que estamos trabajando con un modelo atómico muy simplificado donde consideramos que el equilibrio de ionización está dominado por procesos radiativos. Esta hipótesis solamente es válida cuando la región de detormalización de la línea es exterior a la región cromosférica. Desafortunadamente esta situación no se cumple para los tipos espectrales más tempranos.

La posición del núcleo de la línea de C IV nos brinda información de la distribución de velocidades en las regiones cromosféricas. La forma del perfil da pautas sobre el gradiente de velocidad y sobre la distribución de temperatura en la región de formación de esta línea.

Resultados similares hemos obtenido con las líneas de Si IV, empleando átomos con dos niveles de energía.

Las estructuras observadas en las líneas de resonancia de los elementos superionizados ponen limitaciones a las condiciones físicas del viento y de la cromosfera.

Dado que las estrellas Be manifiestan, en general, perfiles de C IV y Si IV en absorción, este hecho indicaría que la presencia de una cromosfera, ubicada en las regiones próximas a la fotosfera, es adecuada para justificar la apariencia de estas líneas en las estrellas Be tardías.

Los resultados obtenidos con este modelo brindan otro panorama del fenómeno Be. En principio, el modelo que proponemos serviría para explicar consistentemente la presencia de líneas de elementos altamente ionizados, de elementos de baja ionización y líneas de Balmer en emisión considerando una envoltura en expansión distribuída globalmente alrededor de una estrella B.

Hemos desarrollado y adaptado un conjunto de programas que nos permiten calcular perfiles de líneas de H, Mg II y C IV, en una atmósfera en movimiento con una estructura cromosférica.

La ecuación de transporte radiativo ha sido tratada rigurosamente en un medio que se expande con simetría esférica, utilizando un sistema de referencia local que se mueve con un elemento de fluido. Simultáneamente resolvimos las ecuaciones de equilibrio estadístico para átomos con muchos niveles de energía.

Nuestro objetivo fue investigar diferentes estructuras termodinámicas y cinemáticas de las regiones de formación de las líneas. En general, observamos que las propiedades físicas de un plasma se manifiestan de diferente manera en distintas regiones del espectro emergente; incluso aún en líneas que comparten las mismas regiones de formación.

El modelo de atmósfera que hemos propuesto es adecuado para reproducir, al menos en sus características fundamentales, muchas de las estructuras observadas en los espectros de algunas estrellas Be, por ejemplo: el espectro continuo, la presencia de líneas de H en emisión, líneas de Mg II o líneas que se originan en regiones de alta temperatura. Si bien no hemos aplicado estos modelos a un caso real, los resultados que hemos obtenido nos brindan una herramienta de trabajo básica para estudiar detalladamente el fenómeno Be a través de un estudio combinado del espectro visible y UV. Hasta el momento, los resultados obtenidos de un cálculo detallado de líneas de resonancia y subordinadas de varios iones, nos permiten establecer limitaciones a las estructuras de temperatura y velocidad

de un viento estelar. Por lo tanto, este trabajo constituye una primera etapa para describir cuantitativamente las atmósferas extendidas de algunas estrellas Be.

Los resultados de este trabajo pueden resumirse de la siguiente manera:

- Las características morfológicas de los perfiles de las líneas de H, y de las líneas de resonancia de C IV y Mg II, ponen limitaciones a las velocidades de expansión en las regiones próximas a la fotosfera y, por lo tanto, a la tasa de pérdida de masa. Nuestros resultados indican que la forma de los perfiles - P Cygni o un perfil de absorción con ambas alas en emisión - está fuertemente determinada por los gradientes de velocidad en las proximidades de la fotosfera.

- Las condiciones cinemáticas de la envoltura templada juegan un rol secundario. Las líneas de resonancia UV de elementos una vez ionizados (perfiles P Cygni o la presencia de componentes múltiples desplazadas al azul) dan información acerca de las propiedades cinemáticas del fluido en las capas más externas de la atmósfera.

- Nuestros resultados confirmarían las conclusiones de *Abbott (1985)*, quien sugirió que la velocidad medida en el ala azul de la componente de absorción de un P Cygni de una línea de resonancia UV, denominada velocidad terminal, no es representativa de la máxima velocidad con que se expande el material.

- Las líneas de emisión de la serie de Balmer tienen una importante contribución de las regiones próximas a la fotosfera, en particular de la región de mínimo de temperatura. Este resultado sugiere que las variaciones de intensidad observadas en estas líneas podrían relacionarse con fenómenos que tienen lugar en las regiones adyacentes a la fotosfera. Estas variaciones temporales podrían ser explicadas considerando una tasa de pérdida de masa variable, como ya habría sugerido *Doazan (1987)*, dado que la tasa de pérdida de

masa depende de la velocidad, y de los gradientes de velocidad, en las regiones sub-fotosférica y post-fotosféricas.

- La presencia de una cromosfera profunda con temperatura moderada ($T_e < 20000$ K) es suficiente para justificar la presencia de líneas de elementos superionizados en las atmósferas de las estrellas Be tardías.

Los perfiles de líneas derivados de un modelo de atmósfera con simetría esférica en expansión, que incluye una estructura cromosférica, presentan similitudes con los perfiles observados. Algunas de las discrepancias observadas en el ancho de los perfiles pueden ser probablemente atribuidas a efectos no incluidos en el modelo; por ejemplo, mecanismos de ensanchamiento adicionales como ser la rotación y la dispersión por electrones libres.

Este modelo, a diferencia de otros modelos propuestos para explicar el fenómeno Be, permitiría explicar los cambios de fase observados en un espectro (transición de un espectro Be a un espectro de envoltura, o a un espectro B normal) en términos de una tasa de pérdida de masa variable.

Es interesante resaltar que la observación de líneas de absorción desplazadas hacia las longitudes de onda azules son correctamente interpretadas como material que se desplaza hacia el observador, sin embargo debemos notar que la magnitud de este corrimiento no refleja la verdadera magnitud del movimiento. Sin embargo, la observación de líneas de emisión desplazadas hacia el rojo no necesariamente refleja la existencia de material que se aleja del observador; por ejemplo, el caso presentado en la figura 5.13. En esta figura mostramos un perfil de $H\alpha$ en emisión calculado con una atmósfera en expansión, la máxima intensidad observada está desplazada, aproximadamente, 35 Km/s hacia el rojo.

Del presente trabajo se derivan dos implicaciones inmediatas:

1) el papel preponderante que juega material en la base del viento y

2) la confirmación de la hipótesis que las velocidades terminales no son tales.

Dado que el ensanchamiento térmico y turbulento incorporado al modelo no ha sido suficiente para explicar el ancho observado en las líneas de H, planeamos realizar modelos más detallados con la finalidad de incluir mecanismos de ensanchamiento adicionales: como ser el ensanchamiento por electrones libres. En un futuro cercano también pensamos incluir otras estructuras atómicas. De esta manera contaremos con programas más completos para investigar los vientos en las estrellas Be y estrellas de tipos espectrales más tempranos.

Este modelo también podría servir para investigar posibles mecanismos físicos que dan origen al viento estelar o verificar futuros modelo hidrodinámicos propuestos para explicar los vientos estelares. Lamentablemente, con este modelo no es posible abordar el problema de la rotación estelar. Este tema quedará probablemente sin resolver hasta que no se desarrolle un método adecuado para tratar el problema del transporte radiativo en un viento axisimétrico.

A.1 ECUACIONES DE DIFERENCIAS FINITAS

Escribimos las ecuaciones diferenciales (3.7), (3.8) y sus respectivas condiciones de contorno como ecuaciones de diferencias finitas sobre una escala de camino óptico monocromático para cada rayo p , definida como

$$d\tau(\nu, p, z) = - \chi(\nu, r) dz, \quad (\text{A.1})$$

donde $r^2 = z^2 + p^2$ (ver figura 3.2).

Por convención $\tau(\nu, p, z) = 0$ en $z = z_{\text{máx}}$, $z_{\text{máx}}$ es el valor de z en la intersección de cada rayo p con la superficie esférica de radio R .

Definimos una grilla de radios en términos de un índice $d = 1, 2, \dots, ND$ el cual crece hacia el interior de la superficie de radio R , es decir, $r_1 = R > r_2 > r_3 > \dots > r_{ND} = R_C$. Identificamos la grilla de parámetros de impacto con un índice j tal que $p_1 = 0 < p_2 < p_3 < \dots < p_{NC} < \dots < p_{NP}$, donde NC es el número de rayos que interceptan al núcleo y no es tangente a la superficie de radio R_C , es decir, $p_{NC} < R_C$, y $NP = NC + ND$. ND es el número de rayos que no interceptan al núcleo y se eligen tangentes a las superficies esféricas definidas por la grilla de radios, es decir, $p_{NC+1} = R_C = R_{ND}$; $p_{NC+2} = r_{ND-1}$; \dots ; $p_{NP} = r_1 = R$.

Observemos que la intersección de cada rayo p_j con las superficies esféricas definidas por cada radio origina una grilla en z y en τ , tal que, $z_1 = (R^2 - p^2)^{1/2} > z_2 > \dots > z_{NI_j}$ y $\tau_1 = 0 < \tau_2 < \tau_3 < \dots < \tau_{NI_j}$; donde $NI_j = ND$ si $j \leq NC$, y $NI_j = ND + NC + 1 - j$ si $NC < j \leq NP$. Por lo tanto, cada rayo genera una discretización diferente para z y τ (figura A.1).

Las frecuencias también definen una grilla en orden de valores decrecientes a la que identificamos con el índice $k = 1, 2, \dots, NF$;

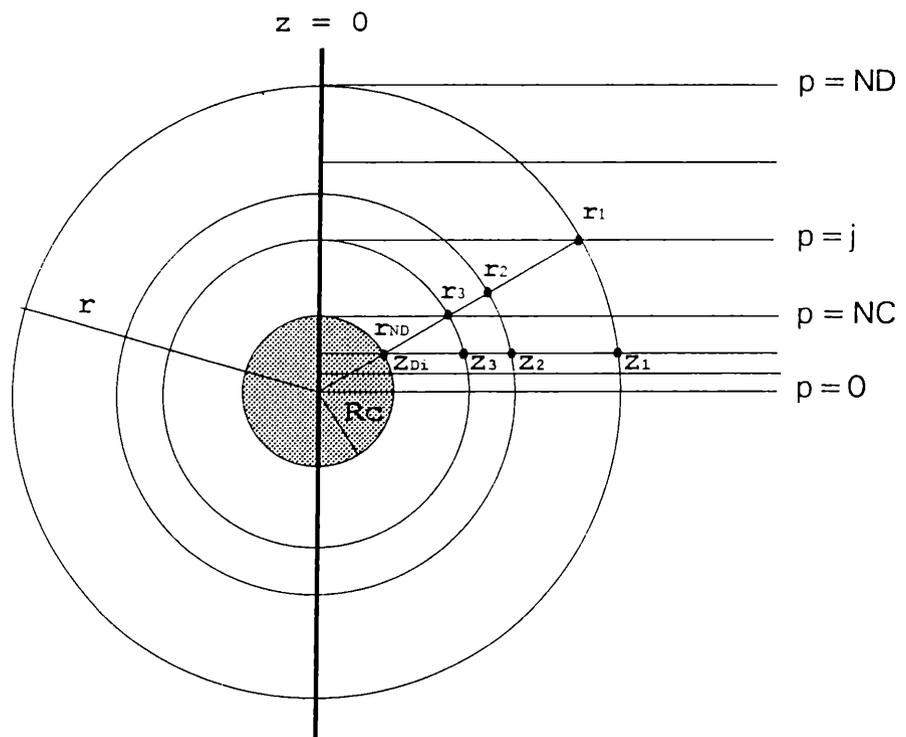


Figura A1
Parámetros de Impacto

es decir, $\nu_1 > \nu_2 > \dots > \nu_{NF}$.

Tanto para la discretización en profundidad como en frecuencia nos referimos a puntos intermedios ficticios de la grilla introduciendo $\pm 1/2$ a los índices de la red. Así, sobre un rayo dado, p_j , definimos:

$$\chi_{k,d\pm 1/2} \equiv \frac{1}{2} \left(\chi(\nu_k, z_{d\pm 1}) + \chi(\nu_k, z_d) \right) \quad (\text{A.2})$$

$$\Delta\tau_{k,d+1/2} \equiv \chi_{k,d+1/2} (z_d - z_{d+1}) \quad (\text{A.3})$$

$$\Delta\tau_{k,d-1/2} \equiv \chi_{k,d-1/2} (z_{d-1} - z_d) \quad (\text{A.4})$$

$$y \quad \Delta\tau_{k,d} \equiv \frac{1}{2} (\Delta\tau_{k,d+1/2} + \Delta\tau_{k,d-1/2}) \quad (\text{A.5})$$

La intensidad media \bar{J} , promediada sobre todas las frecuencias de la línea, es una cantidad que depende sólo de la variable r (ecuación 3.10), pero sobre cada rayo p puede expresarse como una función de z . En nuestro esquema de trabajo, las integrales son reemplazadas por sumatorias, entonces \bar{J} puede escribirse como

$$\bar{J}(z_d) = \sum_{k=1}^{NF} w_k \sum_{j=1}^{NR_d} a_j(z_d) \phi(\nu_k, z_d) U(\nu_k, p_j, z_d) \quad (\text{A.6})$$

donde $\{w_k\}$ y $\{a_j(z_d)\}$ son los pesos de cuadratura en frecuencia y ángulo, respectivamente, y $NR_d = NC + ND + 1 - d$.

Estamos ahora en condiciones de escribir las ecuaciones diferenciales (3.7) y (3.8) como un sistema de ecuaciones de diferencias finitas para cada rayo p . Este sistema viene dado por:

$$\frac{U(\nu_k, z_{d+1}) - U(\nu_k, z_d)}{\Delta \tau_{k, d+1/2}} = V(\nu_k, z_{d+1/2}) + \frac{\gamma_{k, d+1/2}}{\Delta \nu_{k-1/2}} (V(\nu_k, z_{d+1/2}) - V(\nu_{k-1}, z_{d+1/2})) \quad (\text{A.7})$$

y

$$\frac{V(\nu_k, z_{d+1/2}) - V(\nu_k, z_{d-1/2})}{\Delta \tau_{k, d}} = U(\nu_k, z_d) - S(\nu_k, z_d) + \frac{\gamma_{k, d}}{\Delta \nu_{k-1/2}} (U(\nu_k, z_d) - U(\nu_{k-1}, z_d)),$$

si $d = 2, \dots, NI - 1,$ (A.8)

donde $\Delta \nu_{k-1/2} \equiv \nu_{k-1} - \nu_k,$

$$\gamma_{k, d+1/2} \equiv \frac{\alpha_{d+1/2}}{r_{d+1/2} \chi_{k, d+1/2}} \left[1 - \mu_{d+1/2}^2 + \beta_{d+1/2} \mu_{d+1/2}^2 \right],$$

$$y \quad \gamma_{k, d} \equiv \frac{\alpha_d}{r_d \chi_{k, d}} \left[1 - \mu_d^2 + \beta_d \mu_d^2 \right]$$

Las cantidades α , β , r , y μ con subíndices d ó $d+1/2$ son simplemente cantidades evaluadas en z_d ó $z_{d+1/2}$. Es interesante destacar que el promedio simétrico U está definido sobre los puntos de la red, mientras que V está definida en puntos intermedios de la misma.

Despejando $V(\nu_k, z_{d+1/2})$ de la ecuación (A.7) tenemos que

$$V(\nu_k, z_{d+1/2}) = \frac{U(\nu_k, z_{d+1}) - U(\nu_k, z_d)}{(1 + \delta_{k-1/2, d+1/2}) \Delta\tau_{k, d+1/2}} + \frac{\delta_{k-1/2, d+1/2}}{1 + \delta_{k-1/2, d+1/2}} V(\nu_{k-1}, z_{d+1/2}), \quad (\text{A.9})$$

donde
$$\delta_{k-1/2, d+1/2} \equiv \frac{\gamma_{k, d+1/2}}{\Delta\nu_{k-1/2}}$$

Una expresión similar se encuentra para $V(\nu_k, z_{d-1/2})$ al reemplazar en (A.9) d por d-1.

La ecuación (A.9) junto a su ecuación análoga deducida para $V(\nu_k, z_{d-1/2})$ se utilizan para eliminar $V(\nu_k, z_{d\pm 1/2})$ de (A.8). Así, se llega a un sistema de ecuaciones en diferencias finitas de segundo orden,

$$\left\{ \frac{U(\nu_k, z_{d+1})}{(1 + \delta_{k-1/2, d+1/2}) \Delta\tau_{k, d+1/2}} - U(\nu_k, z_d) \left[\frac{1}{(1 + \delta_{k-1/2, d+1/2}) \Delta\tau_{k, d+1/2}} + \frac{1}{(1 + \delta_{k-1/2, d-1/2}) \Delta\tau_{k, d-1/2}} \right] + \frac{U(\nu_k, z_{d-1})}{(1 + \delta_{k-1/2, d-1/2}) \Delta\tau_{k, d-1/2}} \right\} \frac{1}{\Delta\tau_{k, d}}$$

$$= (1 + \delta_{k-1/2, d}) U(\nu_k, z_d) - S(\nu_k, z_d) - \delta_{k-1/2, d} U(\nu_{k-1}, z_d)$$

$$+ \left(\frac{\delta_{k-1/2, d-1/2} V(\nu_{k-1}, z_{d-1/2})}{1 + \delta_{k-1/2, d-1/2}} - \frac{\delta_{k-1/2, d+1/2} V(\nu_{k-1}, z_{d+1/2})}{1 + \delta_{k-1/2, d+1/2}} \right) \frac{1}{\Delta\tau_{k, d}},$$

si $d = 2, 3, \dots, NI-1$; y $k = 2, 3, \dots, NF$. (A.10)

Esta expresión tiene la forma de una ecuación con una derivada espacial de segundo orden y una derivada de primer orden respecto a

la frecuencia. El lado izquierdo de la ecuación (A.10) contiene a U en tres puntos sucesivos de profundidad a la misma frecuencia, mientras que en el miembro de la derecha, las variables $V(\nu_{k-1}, z_{d\pm 1/2})$ y $U(\nu_{k-1}, z_d)$ pueden ser eliminadas frecuencia a frecuencia en términos de \bar{J} .

Completamos el sistema de ecuaciones con las expresiones correspondientes a las condiciones de contorno.

En la superficie exterior $r = R$, las fórmulas de diferencias finitas de primer orden asociadas con las ecuaciones (3.11), para cada parámetro de impacto p_j , son de la forma

$$\frac{U(\nu_k, z_2) - U(\nu_k, z_1)}{\Delta\tau_{k, 3/2}} = (1 + \delta_{k-1/2, 1}) U(\nu_k, z_1) - \delta_{k-1/2, 1} U(\nu_{k-1}, z_1) \quad (\text{A.11})$$

La condición de contorno interior está identificada por puntos de la red en z_{NI} . En esta ocasión recordemos que debemos distinguir dos casos:

a) los rayos que no interceptan la superficie de radio R_c . En este caso se requieren fórmulas de diferencias finitas de segundo orden para disminuir los errores de truncamiento. Estas fórmulas pueden obtenerse de la ecuación (A.10) exigiendo que:

$$U(\nu_\nu, z_{NI+1}) \equiv U(\nu_\nu, z_{NI-1}) \quad \text{y} \quad V(\nu_\nu, z_{NI+1}) \equiv -V(\nu_\nu, z_{NI-1}).$$

Entonces,

$$\frac{U(\nu_k, z_{NI}) - U(\nu_\nu, z_{NI-1})}{(1 + \delta_{k-1/2, NI-1/2}) \Delta\tau_{k, NI-1/2}} = - \frac{\delta_{k-1/2, NI-1/2} V(\nu_{k-1}, z_{NI-1/2})}{1 + \delta_{k-1/2, NI-1/2}}$$

$$+ \frac{1}{2} \Delta\tau_{k,NI-1/2} \left[S(\nu_k, z_{NI}) - (1 + \delta_{k-1/2,NI}) U(\nu_k, z_{NI}) + \delta_{k-1/2,NI} U(\nu_{k-1}, z_{NI}) \right]$$

si $j > NC$ (A.12)

b) para $j \leq NC$ sustituimos la condición de contorno (3.14) en (3.7); luego, su correspondiente expresión en diferencias finitas es

$$\frac{U(\nu_k, z_{NI}) - U(\nu_{k-1}, z_{NI-1})}{\Delta\tau_{k,NI-1/2}} = \frac{(R_C^2 - p_j^2)^{1/2}}{R_C \chi(\nu_k, z_{NI})} \left| \frac{dB}{dr} \right| \left\{ 1 + \delta_{k-1/2,NI} \chi(\nu_k, z_{NI}) \left[\frac{1}{\chi(\nu_k, z_{NI})} - \frac{1}{\chi(\nu_{k-1}, z_{NI})} \right] \right\}$$

si $j \leq NC$ (A.13)

A.2 ESQUEMA DE ELIMINACION

El sistema de ecuaciones en diferencias finitas se resuelve utilizando el método de *Mihalas, Kunasz y Hummer (1975)*, basado en el esquema de eliminación propuesto por *Rybicki (1971)*. En este esquema, las variables discretizadas, $U(\nu_k, p_j, z_d)$ y $V(\nu_k, p_j, z_d)$, se organizan en vectores que especifican la variación de dichas variables con la profundidad a lo largo de un rayo y para una determinada frecuencia. Estos vectores se denotan de la siguiente manera,

$$\bar{U}_{k,j} = (U(\nu_k, p_j, z_1), \dots, U(\nu_k, p_j, z_{NI}))$$

y

$$\bar{V}_{k,j} = (V(\nu_k, p_j, z_1), \dots, V(\nu_k, p_j, z_{NI}))$$

Los elementos de cada vector fueron ordenados con el índice d ; y por lo tanto, el tamaño del vector dependerá del parámetro de impacto seleccionado. Nótese que NI varía para cada rayo de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} NI_j &= ND && \text{si } j \leq NC, \\ NI_j &= ND + NC + 1 - j && \text{si } NC < j \leq NP. \end{aligned}$$

Análogamente, definimos un vector que guarda los valores discretizados de \bar{J} para cada profundidad,

$$\bar{J} = (\bar{J}_1, \dots, \bar{J}_{ND})$$

El sistema de ecuaciones de segundo orden (A.10) y las condiciones de contorno (A.11), (A.12) y (A.13) se sintetizan con la siguiente notación matricial

$$T_{k,j} \bar{U}_{k,j} + R_{k,j} \bar{U}_{k-1,j} + S_{k,j} \bar{V}_{k-1,j} + W_{k,j} \bar{J} = \bar{X}_{k,j}, \quad (\text{A.14})$$

donde T es una matriz tridiagonal de $NI \times NI$, R y W son matrices diagonales de dimensión $NI \times NI$, S es una matriz de $NI \times (NI-1)$ compuesta por una matriz bidiagonal superior de dimensión $(NI-1) \times (NI-1)$ y una fila de elementos nulos, y \bar{X} es un vector de dimensión NI .

Las expresiones para los elementos de estas matrices, como así también para las componentes del vector \bar{X} , fueron dadas por *Mihalas, Kunasz y Hummer (1975, Apéndice C)*.

La ecuación (A.9) también tiene su representación matricial,

$$\bar{V}_{k,j} = G_{k,j} \bar{U}_{k,j} + H_{k,j} \bar{V}_{k-1,j}, \quad (\text{A.15})$$

donde G es una matriz bi-diagonal superior de $[(NI-1) \times NI]$ y H es una matriz diagonal de dimensión $[(NI-1) \times (NI-1)]$.

La relación (A.6) que define a \bar{J} puede ser escrita de la forma

$$\sum_{j,k} F_{k,j} \bar{U}_{k,j} - I \bar{J} = 0, \quad (\text{A.16})$$

donde I es la matriz identidad y F tiene dimensión $ND \times NI$.

Para resolver el sistema de ecuaciones (A.14) y (A.15), se elige un parámetro de impacto (p_j), y sobre dicho parámetro comenzamos a integrar frecuencia por frecuencia a partir de un valor inicial. En el capítulo 3, establecimos como condición inicial que $\partial U / \partial \nu \big|_{\nu_1} = 0$, donde ν_1 es el máximo valor de ν dentro del perfil de línea. Luego, el campo de radiación, $U(\nu_1, p, d)$ se obtiene resolviendo la ecuación de transporte para la radiación del continuo (ecuación 3.15). Las ecuaciones de diferencias finitas correspondientes al sistema de ecuaciones (3.15) se obtiene al imponer $\delta_{1/2,d} = 0$ en las expresiones (A.9) y (A.10). Como consecuencia, en las expresiones (A.14) y (A.15), para $k = 1$, se tiene que

$$R_{1,j} = 0, \quad S_{1,j} = 0, \quad \text{y} \quad H_{1,j} = 0.$$

Así, de (A.14) podemos despejar

$$\bar{U}_{1,j} = T_{1,j}^{-1} (\bar{X}_{1,j} - W_{1,j} \bar{J}) = \bar{A}_{1,j} - B_{1,j} \bar{J} \quad (\text{A.17})$$

y de (A.15),

$$\bar{V}_{1,j} = G_{1,j} \bar{U}_{1,j} = G_{1,j} (\bar{A}_{1,j} - B_{1,j} \bar{J}) = \bar{C}_{1,j} - D_{1,j} \bar{J} \quad (\text{A.18})$$

Luego, si despejamos $U_{k,j}$ de (A.14), para $k = 2$, obtenemos

$$\bar{U}_{2,j} = T_{2,j}^{-1} (\bar{X}_{2,j} - R_{2,j} \bar{U}_{1,j} - S_{2,j} \bar{V}_{1,j} - W_{2,j} \bar{J}),$$

reemplazando por (A.17) y (A.18) tenemos que

$$\bar{U}_{2,j} = T_{2,j}^{-1} (\bar{X}_{2,j} - R_{2,j} \bar{A}_{1,j} + R_{2,j} B_{1,j} \bar{J} - S_{2,j} \bar{C}_{1,j} + S_{2,j} D_{1,j} \bar{J} - W_{2,j} \bar{J})$$

y puede escribirse en forma abreviada de la siguiente manera,

$$\bar{U}_{2,j} = \bar{A}_{2,j} - B_{2,j} \bar{J},$$

donde $\bar{A}_{2,j} = T_{2,j}^{-1} (\bar{X}_{2,j} - R_{2,j} \bar{A}_{1,j} - S_{2,j} \bar{C}_{1,j})$

y $B_{2,j} = T_{2,j}^{-1} (W_{2,j} - R_{2,j} B_{1,j} - S_{2,j} D_{1,j})$

Análogamente, se deduce una expresión para $\bar{V}_{2,j}$,

$$\bar{V}_{2,j} = G_{2,j} \bar{U}_{2,j} + H_{2,j} \bar{V}_{1,j},$$

entonces,

$$\bar{V}_{2,j} = G_{2,j} (\bar{A}_{2,j} - B_{2,j} \bar{J}) + H_{2,j} (\bar{C}_{1,j} - D_{1,j} \bar{J}),$$

lo que equivale,

$$\bar{V}_{2,j} = \bar{C}_{2,j} - D_{2,j} \bar{J},$$

donde $\bar{C}_{2,j} = G_{2,j} \bar{A}_{2,j} + H_{2,j} \bar{C}_{1,j}$

$$D_{2,j} = G_{2,j} B_{2,j} + H_{2,j} D_{1,j}$$

repetiendo este procedimiento sucesivamente, para un valor de k arbitrario, tenemos

$$\bar{U}_{k,j} = \bar{A}_{k,j} - B_{k,j} \bar{J} \quad (\text{A.19})$$

$$y \quad \bar{V}_{k,j} = \bar{C}_{k,j} - D_{k,j} \bar{J}$$

$$\text{donde } \bar{A}_{k,j} = T_{k,j}^{-1} (\bar{X}_{k,j} - R_{k,j} \bar{A}_{k-1,j} - S_{k,j} \bar{C}_{k-1,j})$$

$$B_{k,j} = T_{k,j}^{-1} (W_{k,j} - R_{k,j} B_{k-1,j} - S_{k,j} D_{k-1,j}) \quad (\text{A.20})$$

$$\bar{C}_{k,j} = G_{k,j} \bar{A}_{k,j} + H_{k,j} \bar{C}_{k-1,j}$$

$$y \quad D_{k,j} = G_{k,j} B_{k,j} + H_{k,j} D_{k-1,j}$$

$\bar{A}_{k,j}$ y $\bar{C}_{k,j}$ son vectores de dimensión NI y NI-1, respectivamente.

$B_{k,j}$ y $D_{k,j}$ son matrices completas de dimensión NIxNI y (NI-1)xNI, respectivamente.

Los vectores y las matrices definidos en (A.20) se calculan para todos los valores de k, dando un valor fijo a j por vez.

Evidentemente, la mayor parte del tiempo de cálculo que emplea este método se consume en realizar estas operaciones, pues es proporcional al número de multiplicaciones que realiza, este número viene dado, aproximadamente por

$$NP \sum_{j=1}^{NP} (NI_j)^2 \cong NP (NC + 1/3 ND) ND^2 \cong 1/3 NP ND^3,$$

(generalmente NC < ND).

Una vez calculados todos los elementos del sistema (A.20), sobre un determinado parámetro de impacto, el vector \bar{J} se obtiene al sustituir para cada frecuencia

$$\bar{U}_{k,j} = \bar{A}_{k,j} - B_{k,j} \bar{J}$$

en la ecuación (A.16),

$$\sum_{j,k} F_{k,j} \bar{A}_{k,j} = \left(\sum_{j,k} F_{k,j} B_{k,j} + I \right) \bar{J}, \quad (\text{A.21})$$

lo que conduce a un sistema de $ND \times ND$ elementos para \bar{J} . Los elementos de \bar{J} pueden evaluarse directamente, pues A , B y F son conocidos. Una vez determinadas las componentes del vector J , podemos calcular U y V mediante la relación (A.19) y la función fuente (ecuación 3.9). Así, obtenemos una solución completa del campo de radiación en el marco de referencia no inercial.

La solución del sistema (A.21) requiere aproximadamente ND^3 multiplicaciones.

El flujo emergente, en el marco de referencia del observador, se obtiene con un método que es independiente de este procedimiento.

A.3 SOLUCION DE LA ECUACION DE TRANSPORTE PARA EL CONTINUO

La solución de la ecuación de transporte para la radiación del continuo se realiza de la misma manera como se procedió para una línea. Se obtiene una expresión similar a la ecuación (A.17), excepto que \bar{J} es igual a \bar{J}_c .

La solución que se obtiene para cada rayo es reemplazada en una ecuación similar a (A.16)

$$\sum_j F_j \bar{U}_j - I \bar{J}_c = 0,$$

pero, en este caso, la sumatoria se extiende sólo sobre el índice j .

El número de operaciones que se requiere para este cálculo es del orden de $ND^3/3$.

APENDICE B ECUACION DE TRANSPORTE PARA LOS MOMENTOS DEL
CAMPO DE RADIACION

B.1 ECUACIONES DE DIFERENCIAS FINITAS

En este apéndice detallamos las ecuaciones de diferencias finitas correspondientes a las ecuaciones de transporte para los momentos del campo de radiación. Para construir estas ecuaciones, discretizamos todas las variables sobre la red finita de puntos que se especificó en el apéndice A. Dado que la formulación de los momentos del campo de radiación elimina la información angular, consideramos solamente la red de puntos de frecuencia y de profundidad. La grilla de profundidad se identifica con un índice $d = 1, 2, \dots, ND$, el cual crece para radios menores; la grilla de frecuencia, identificada con un índice $k = 1, 2, \dots, NF$, ordena a las frecuencias de mayor a menor.

Escribimos la ecuación diferencial (3.24) como un sistema de ecuaciones de diferencias finitas,

$$\begin{aligned}
 & \frac{f_{k,d+1} \alpha_{k,d+1} r_{d+1}^2 J_{k,d+1} - f_{k,d} \alpha_{k,d} r_d^2 J_{k,d}}{\Delta X_{k,d+1/2}} + \\
 & + \frac{\gamma_{k-1/2,d+1/2} r_{d+1/2}^2}{\Delta \nu_{k-1/2}} \left\{ \left(1 - g_{k-1,d+1/2} + \beta_{d+1/2} g_{k-1,d+1/2} \right) H_{k-1,d+1/2} \right. \\
 & \left. - \left(1 - g_{k,d+1/2} + \beta_{d+1/2} g_{k,d+1/2} \right) H_{k,d+1/2} \right\} = r_{d+1/2}^2 H_{k,d+1/2} ,
 \end{aligned}
 \tag{B.1}$$

para $k = 2, \dots, NK$ y $d = 2, \dots, ND - 1$,

donde $\Delta X_{k,d+1/2} \equiv \frac{1}{2} (\alpha_{k,d+1} \chi_{k,d+1} + \alpha_{k,d} \chi_{k,d}) (r_d - r_{d+1})$,

$$\Delta \nu_{k-1/2} \equiv \nu_{k-1} - \nu_k,$$

$$r_{d+1/2} \equiv 1/2 (r_d + r_{d+1}),$$

$$\alpha_{d+1/2} \equiv \alpha(r_{d+1/2}), \quad \beta_{d+1/2} \equiv \beta(r_{d+1/2}), \quad g_{k,d+1/2} \equiv g(\nu_k, r_{d+1/2}),$$

$$\gamma_{k-1/2,d+1/2} \equiv \alpha_{d+1/2} / \chi_{k-1/2,d+1/2},$$

$$Y \quad \chi_{k-1/2,d+1/2} \equiv \frac{1}{4} (\chi_{k,d+1} + \dot{\chi}_{k,d} + \chi_{k-1,d+1} + \chi_{k-1,d}).$$

Despejamos $H_{k,d+1/2}$ de la ecuación (B.1) y multiplicamos por $r_{d+1/2}^2$, con lo que obtenemos una relación de recurrencia para H respecto de la frecuencia, en términos de $J_{k,d+1}$ y $J_{k,d}$.

$$r_{d+1/2}^2 H_{k,d+1/2} = \frac{f_{k,d+1} q_{k,d+1} r_{d+1}^2 J_{k,d+1} - f_{k,d} q_{k,d} r_d^2 J_{k,d}}{(1 + \omega_{k,k,d+1/2}) \Delta X_{k,d+1/2}} + r_{d+1/2}^2 H_{k-1,d+1/2} \frac{\omega_{k,k-1,d+1/2}}{1 + \omega_{k,k,d+1/2}},$$

(B.2)

$$\text{donde } \omega_{k,l,d+1/2} \equiv \frac{\gamma_{k-1/2,d+1/2}}{\Delta \nu_{k-1/2}} (1 - g_{l,d+1/2} + \beta_{d+1/2} g_{l,d+1/2}),$$

y $l \leq k$.

Para cada $r_{d+1/2}$ resolvemos la ecuación (B.2) usando la condición inicial para la frecuencia. Esta condición establece que $\partial I / \partial \nu = 0$ si $\nu \geq \nu_1$, lo que implica

$$\gamma_{1/2,d+1/2} \equiv 0 \quad \text{y} \quad \omega_{1,k,d+1/2} \equiv 0. \quad (\text{B.3})$$

Luego, al sustituir estas condiciones en (B.2) obtenemos una expresión para $H_{1,d+1/2}$ en función de $J_{1,d}$ y $J_{1,d+1}$. Por aplicaciones sucesivas de la relación de recurrencia (B.2), a partir de $H_{1,d+1/2}$, tenemos una expresión para cada $H_{k,d+1/2}$,

$$r_{d+1/2}^2 H_{k,d+1/2} = \sum_{k'=1}^k \Psi_{k,k',d+1/2} \left(\frac{f_{k',d+1} q_{k',d+1} r_{d+1}^2 J_{k',d+1} - f_{k',d} q_{k',d} r_d^2 J_{k',d}}{\Delta X_{k',d+1/2}} \right), \quad (\text{B.4})$$

$$\text{donde } \Psi_{k,k',d+1/2} = \frac{1}{1 + \omega_{k,k,d+1/2}} \prod_{l=k'+1}^k \frac{\omega_{1,l-1,d+1/2}}{1 + \omega_{1,l,d+1/2}}.$$

Notar que cuando $k = k'$ la productoria es igual a la unidad.

Escribimos, ahora, las ecuaciones de diferencias finitas correspondientes a la ecuación (3.23),

$$\frac{q_{k,d}}{\Delta X_{k,d}} (r_{d+1/2}^2 H_{k,d+1/2} - r_{d-1/2}^2 H_{k,d-1/2}) + \frac{\gamma_{k-1/2,d}}{\Delta \nu_{k-1/2}} \left[(1 - f_{k-1,d} + \beta_d f_{k-1,d}) r_d^2 J_{k-1,d} - (1 - f_{k,d} + \beta_d f_{k,d}) r_d^2 J_{k,d} \right] = r_d^2 (J_{k,d} - S_{k,d}), \quad (\text{B.5})$$

donde $S_{k,d}$ es de la forma,

$$S_{k,d} = \sum_{k'} R_{k',k,d} J_{k',d} + \epsilon_{k,d}.$$

Si usamos las ecuaciones (B.4) para eliminar $H_{k,d+1/2}$ de la ecuación (B.5), obtenemos una expresión para J ,

$$\begin{aligned}
& \frac{q_{k,d}}{\Delta X_{k,d}} \left(\sum_{k'=1}^k \frac{\Psi_{k,k',d+1/2}}{\Delta X_{k',d+1/2}} \left(f_{k',d+1} q_{k',d+1} r_{d+1}^2 J_{k',d+1} - f_{k',d} q_{k',d} r_d^2 J_{k',d} \right) \right. \\
& \left. - \sum_{k'=1}^k \frac{\Psi_{k,k',d-1/2}}{\Delta X_{k',d-1/2}} \left(f_{k',d} q_{k',d} r_d^2 J_{k',d} - f_{k',d-1} q_{k',d-1} r_{d-1}^2 J_{k',d-1} \right) \right) \\
& = r_d^2 \left[(1 + \pi_{k,k,d}) J_{k,d} - S_{k,d} - \pi_{k,k-1,d} J_{k-1,d} \right],
\end{aligned}
\tag{B.6}$$

donde

$$\pi_{k,1,d} = \frac{\gamma_{k-1/2,d}}{\Delta v_{k-1/2}} (1 - f_{1,d} + \beta f_{1,d}).$$

Para completar el sistema, necesitamos establecer las correspondientes condiciones iniciales y de contorno.

Nuevamente, la condición inicial para la frecuencia del ala azul, implica que

$$\pi_{1,1,d} = 0.$$

En la superficie exterior, donde $x_{k,1} = 0$, hemos introducido dos factores de Eddington auxiliares h_k y n_k (§ 3.6), los cuales están definidos en términos de la radiación emergente, pues $I(\nu, \mu, R) = 0$ si $\mu < 0$, entonces:

$$h_k \equiv H_{k,1} / J_{k,1} = \int_0^1 I(\nu_k, \mu, R) \mu \, d\mu / \int_0^1 I(\nu_k, \mu, R) \, d\mu$$

$$Y \quad n_k \equiv N_{k,1} / J_{k,1} = \int_0^1 I(\nu_k, \mu, R) \mu^3 \, d\mu / \int_0^1 I(\nu_k, \mu, R) \, d\mu.$$

Empleando estas cantidades, escribimos la ecuación (B.1) para $d = 1$,

$$\frac{f_{k,2} \alpha_{k,2} r_{k,2}^2 J_{k,2} - f_{k,1} \alpha_{k,1} r_{k,1}^2 J_{k,1}}{\Delta X_{k,3/2}} = r_1^2 \left[(h_k + \theta_{k,k,1}) J_{k,1} - \theta_{k,k-1,1} J_{k-1,1} \right]$$

(B.7)

$$\text{donde } \theta_{k,1,1} \equiv \frac{\gamma_{k-1/2,1}}{\Delta \nu_{k-1/2}} (h_1 - n_1 + \beta_1 n_1),$$

$$\gamma_{k-1/2,1} \equiv \alpha(r_1) / \chi_{k-1/2,1}$$

$$\text{Y } \chi_{k-1/2,1} \equiv \frac{1}{2} (\chi_{k-1,1} + \chi_{k-1,1}).$$

Nuevamente, empleando la condición inicial para la frecuencia tenemos que

$$\theta_{1,1,1} = 0.$$

La condición de contorno en el borde interior establece que en las capas más profundas de la atmósfera la velocidad es esencialmente nula. Entonces, vale la aproximación de difusión,

$$H_\nu = \frac{1}{3\chi_\nu} \left| \frac{\partial B_\nu}{\partial r} \right|,$$

que puede escribirse en forma discreta para $d = ND$ como

$$\frac{f_{k,ND} \alpha_{k,ND} r_{k,ND}^2 J_{k,ND} - f_{k,ND-1} \alpha_{k,ND-1} r_{k,ND-1}^2 J_{k,ND-1}}{\Delta X_{k,ND-1/2}} = \frac{r_{ND}^2}{3\chi_{k,ND}} \left| \frac{\partial B(\nu_k)}{\partial r} \right|_{ND}.$$

(B.8)

Dado que esta condición de contorno es de primer orden, su uso requiere de una red de puntos que presente un paso más pequeño, de manera tal que $\Delta X_{k, ND-1/2}$ sea suficientemente pequeño.

B.2 ESQUEMA DE ELIMINACION

Las variables discretizadas correspondientes a la intensidad media se organizan en un vector,

$$J_d \equiv (J_{1,d}, J_{2,d}, \dots, J_{NF,d}), \quad d = 1, 2, \dots, ND,$$

que indica la variación en frecuencia de J para una determinada profundidad.

Las ecuaciones (B.6), (B.7) y (B.8) pueden expresarse en la forma típica del método de Feautrier,

$$-A_d J_{d-1} + B_d J_d - C_d J_{d+1} = L_d \quad d = 1, 2, \dots, ND.$$

donde B_d es una matriz completa, y A_d y C_d son matrices triangulares inferior, todas ellas tienen dimensión $(NF \times NF)$.

De esta manera, empleando el método de Feautrier, obtenemos $J_{k,d}$. Luego, calculamos $S_{k,d}$ para todas las frecuencias y todas las profundidades.

Una vez determinada la función fuente, podemos evaluar el campo de radiación frecuencia a frecuencia comenzando en ν_1 , empleando la solución formal de la ecuación de transporte para cada rayo.

Las condiciones de contorno espaciales conducen a que $A_1 = 0$ y $C_D = 0$.

BIBLIOGRAFIA

- Abbott, D. C. 1985, en *Progress in Stellar Line Formation Theory*, ed. J. E. Beckman & L. Crivellari, Dordrecht, Reidel, 279
- Allen, D. A. 1973, *MNRAS*, 161, 145
- Andrillat, Y., & Fehrenbach, Ch. 1982, *Astr. Ap. Suppl.*, 48, 93
- Auer, L. H. 1971, *J. Quant. Spectrosc. and Rad. Transf.*, 11, 573
- Auer, L. H., & Van Blerkom, D. 1972, *Ap. J.*, 178, 175
- Baade, D. 1982, *Astr. Ap.*, 105, 65
- Barker, P. K. 1987, en *Physics of Be Stars*, eds. A. Slettebak & T. Snow, Cambridge University Press, 38
- Barker, P. K., Marlborough, J. M., & Landstreet, J. D. 1984, en *Future of Ultraviolet Astronomy Based on Six Years of IUE Research*, eds. J. M. Mead, R. D. Chapman, & Y. Kondo (NASA CP-2349), 219
- Brown, D., A. 1987, en *Physics of Be Stars*, eds. A. Slettebak & T. Snow, Cambridge University Press, 428
- Cannon, C. J. 1985, en *The Transfer of Spectral Line Radiation* Cambridge University Press
- Caroff, L. J., Noerdlinger, P. K., & Scargle, J. D. 1972, *Ap. J.*, 176, 439
- Carlsson, M 1985, A Program for Solving Multi-level Non-LTE Radiative Transfer Problems in Moving or Static Atmospheres, Uppsala Observatory Report 33
- Cassinelli, J. P. 1987, en *Physics of Be Stars*, eds. A. Slettebak & T. P. Snow, Cambridge University Press, 106.
- Castor, J. I. 1970, *MNRAS*, 149, 111
- Castor, J. I., Abbott, D. C., & Klein, R. I. 1975, *Ap. J.*, 195, 157
- Castor, J. I., & Lamers, H. J. G. L. M. 1979, *Ap. J. Suppl.*, 39, 481
- Catala, C. 1988, *Astr. Ap.*, 193, 222
- Catala, C., Kunasz, P. B., & Praderie, F. 1984, *Astr. Ap.*, 134, 402
- Catala, C., & Talavera, A 1984, *Astr. Ap.*, 140, 421
- Catala, C., & Kunasz, P. B. 1987, *Astr. Ap.*, 174, 158
- Chen, H., Ringuelet, A., Sahade, J., & Kondo, Y. 1989, *Ap. J.*,

347, 1082

- Coyne, G. V., & McLean, I. S. 1982, en *Be Stars*, IAU Symp. 98, eds. M. Jascheck & H. G. Groth, Reidel, Dordrecht, 77
- Costa, A., & Ringuélet, A. E. 1985, *Rev. Mexicana Astr. Ap.*, 10, 293
- Dachs, J. 1987, en *Physics of Be Stars*, eds. A. Slettebak & T. Snow, Cambridge University Press, 150
- Doazan, V. 1982, en *B Stars with and without Emissions Lines*, eds. A. Underhill & V. Doazan (NASA SP-456)
- Doazan, V. 1987, en *Physics of Be Stars*, eds. A. Slettebak & T. P. Snow, Cambridge University Press, 386
- Doazan, V., & Thomas, T. 1982, en *B Stars with and without Emissions Lines*, eds. A. Underhill & V. Doazan (NASA SP-456), capítulo 13
- Doazan, V., Sedmak, G., Barylak, M., & Rusconi, L. 1991, en *A Be Star Atlas of Far UV and Optical High-Resolution spectra* (ESA SP-1147)
- Friend, D. B., & MacGregor, K. B. 1984, *Ap. J.*, 282, 591
- Feautrier, P. 1964, *Compt. Rend. Acad. Sci. Paris*, 258, 3189
- Garrison, L. M., & Anderson, C. M. 1977, *Ap. J.*, 218, 438
- Haldebel, E. M. 1989, *PASP*, 101, 999
- Hamman, W. R. 1981, *Astr. Ap.*, 93, 353
- Harmanec, P. 1982, en *Be Stars*, IAU Symp. 98, eds. M. Jascheck & H. G. Groth, Reidel, Dordrecht, 279
- Harmanec, P. 1987, en *Physics of Be Stars*, eds. A. Slettebak & T. P. Snow, Cambridge University Press, 339
- Hartmann, L., Calvet, N., Avrett, E. H., & Loeser, R. 1990, *Ap. J.*, 349, 168
- Iglesias, M. E., & Ringuélet, A. E. 1993, *Ap. J.*, 409
- Jefferies, J. T. 1968, en *Spectral Line Formation*, Waltham, Mass: Blaisdell Publishing Co.
- Johnson, H. L. 1967, *Ap. J (Letters)* 150, L39
- Kamp, L. W., 1973, *Ap. J.*, 180, 447
- Kriz, S. 1976, *Bull. Astron. Inst. Czech.*, 27, 321
- Kriz, S. 1979a, *Bull. Astron. Inst. Czech.*, 30, 83
- Kriz, S. 1979b, *Bull. Astron. Inst. Czech.*, 30, 95

- Kogure, T. 1969, *Astr. Ap.*, 1, 253
- Kogure, T., & Hirata, R. 1982, *Bull. Astr. Soc. India*, 10 B, 281
- Kunasz, P. B., & Hummer, D. G. 1974, *M.N.R.A.S.*, 166, 57
- Kunasz, P. B., & Praderie, F. 1981, *Ap. J.*, 247, 949
- Kurucz, R. L. 1970, *ATLAS SAO Special Report*, 309
- Kurucz, R. L. 1979, *Ap. J. Suppl.*, 40, 1
- Limber, D. N. 1964, *Ap. J.*, 140, 1391
- Limber, D. N. 1967, *Ap. J.*, 148, 141
- Limber, D. N., & Marlborough, J. M. 1968, *Ap. J.*, 152, 181
- Magnan, C. 1968, *Ap. (Letters)*, 2, 213
- Magnan, C. 1970, *J. Quant. Spectrosc. and Rad. Transf.*, 10, 1
- Marlborough, J. M. 1976, en *Be and Shell Stars*, IAU Symp 70, ed A. Slettebak, Reidel, Dordrecht, 335
- Marlborough, J. M. & Snow, T. P. 1976, en *Be and Shell Stars*, IAU Symp. 70, ed. A. Slettebak, Reidel, Dordrecht, 179
- Marlborough, J. M., Snow, T. P., & Slettebak, A 1979, *Ap. J.*, 224, 157
- Martin, S. O., Peart, B., & Dolder, K. T. 1968, *J. Phys. B*, 1, 537
- Mihalas, D. 1972, *Ap. J.*, 177, 115.
- Mihalas, D. 1978, en *Stellar Atmosphere*, 2^{da} edición, San Francisco: W. H. Freeman & Company
- Mihalas, D. 1980, *Ap. J.*, 238, 1042
- Mihalas, D., Kunasz, P. B., & Hummer D. G. 1975, *Ap. J.*, 202, 465
- Mihalas, D., Kunasz, P. B., & Hummer D. G. 1976, *Ap. J.*, 210, 419
- Mihalas, D., & Kunasz, P. B. 1978, *Ap. J.*, 219, 635
- Norcross, D. 1972, ver Mihalas, D. 1972
- Peach, G. 1967a, *Mem.R.A.S.*, 71, 1
- Peach, G. 1967b, *Mem.R.A.S.*, 71, 13
- Peach, G. 1967c, *Mem.R.A.S.*, 71, 29
- Peach, G. 1970, *Mem.R.A.S.*, 73, 1
- Poe, C. H., & Friend, D. B. 1986, *Ap. J.*, 311, 317
- Poeckert, R. 1982, en *Be Stars*, IAU Symp. 98, eds. M. Jascheck & H. G. Groth, Reidel, Dordrecht, 453
- Poeckert, R., & Marlborough, J. M. 1977, *Ap. J. S.*, 38, 22.
- Poeckert, R., & Marlborough, J. M. 1978a, *Ap. J.*, 220, 940
- Poeckert, R., & Marlborough, J. M. 1978b, *Ap. J. S.*, 38, 22

- Poekert, R., & Marlborough, J. M. 1979, *Ap. J.*, 233, 259
- Polidan, R. S., Stalio, R., & Peters, G. J. 1986, ver Snow & Stalio (1987)
- Ringuelet, A. E., Sahade, J., Rovira, M., Fontenla, J. M., & Kondo, Y. 1984, *Astr. Ap.*, 131, 9
- Ringuelet, A. E., Rovira, M., Cidale, L., & Sahade, J. 1987, *Astr. Ap.*, 183, 287
- Rybicki, G. B. 1971, *J. Quant. Spectrosc. and Rad. Transf.*, 11, 589
- Rybicki, G. B., & Hummer, D., G. 1983, *Ap. J.*, 274, 380
- Seaton, M. J. 1962, en *Atomic and Molecular Processes*, ed D. R. Bates, New York: Academic Press, 374
- Slettebak, A. 1976, en *Be and Shell Stars*, IAU Symp. 70, ed. A. Slettebak, Reidel, Dordrecht
- Slettebak, A. 1979, *Space Sci. Rev.* 23, 541
- Slettebak, A. 1982, en *Be Stars*, IAU Symp. 98, eds. M. Jascheck & H. G. Groth, Reidel, Dordrecht, 109
- Slettebak, A. 1988, *PASP*, 100, 770
- Smith, M., A. 1988, comunicación privada a Slettebak (1988)
- Snow, T. P. 1981, *Ap. J.* 251, 139
- Snow, T. P. 1982, en *Advances in Ultraviolet Astronomy, Four years of IUE Research*, NASA (CP-2238), 61
- Snow, T. P., & Marlborough, J. M. 1976, *Ap. J. (Letters)* 203, L87
- Snow, T., P., & Stalio, R. 1987, en *Exploring the Universe With the IUE Satellite*, Ed. Y. Kondo, D. Reidel, Dordrecht, Holland, 183
- Sobolev, V. V. 1947, en *Moving Envelopes of Stars*, (English Transl., 1960, S. Gaposchkin, Cambridge: Harvard University Press
- Stiff, T., & Jeffers, S. 1987, en *Physics of Be Stars*, eds. A. Slettebak & T. Snow, Cambridge University Press, 211
- Struve, O. 1931, *Ap. J.*, 73, 94.
- Struve, O. 1933, ver Slettebak (1979)
- Thomas, R. N. 1983, en *Stellar Atmospheric Structural Patterns* (NASA SP-471)
- Underhill, A. 1982, en *B Stars with and without Emissions Lines* eds. A. Underhill & V. Doazan (NASA SP-456), 181
- van den Heuvel, 1987, en *Physics of Be Stars*, eds. A. Slettebak &

- T. P. Snow, Cambridge University Press, 291
- Van Regemorter, H. 1962, *Ap. J.*, 136, 906
- Vogt S. V. & Penrod G. D. 1983, *Ap. J.*, 275, 661
- Weber, E. J., & Davis Jr, L. 1967, *Ap. J.*, 148, 217
- Wiese, W. L., & Martin, G. A. 1980, *Wavelengths and Transition Probabilities for Atoms and Atomic Ions, Part II*, Washington, D. C., US Government Printing Office, NSRDS-NBS No. 68
- Zorec, J. 1986, *Tesis de Doctorado*, Universidad de Paris VII.