# Descomposición de Minkowski usando Algoritmos Genéticos

**María Teresa Taranilla** (1)

**Edilma Olinda Gagliardi**(1)

**Mario Guillermo Leguizamón**(2)

Departamento de Informática

Facultad de Ciencias Físico, Matemáticas y Naturales

Universidad Nacional de San Luis, Argentina

{tarani, oli, legui}@unsl.edu.ar

**Gregorio Hernández Peñalver** (1)

Departamento de Matemática Aplicada, Facultad de Informática

Universidad Politécnica de Madrid, España

gregorio@fi.upm.es

## Resumen

El objetivo general de este trabajo es proponer una solución alternativa para un problema de tipo geométrico para el cual, debido a su complejidad no se ha encontrado un algoritmo eficiente que lo solucione. Específicamente, estudiamos el problema de la descomposición de Minkowski. En este artículo, presentamos los antecedentes relacionados a nuestra investigación, exponiendo los aspectos relevantes del problema actualmente en estudio. Por otra parte, describimos el enfoque utilizado para su resolución.

**Palabras claves**: Descomposición de Minkowski. Suma de Minkowski. Algoritmos genéticos. Geometría Computacional.

## 1 Introducción

Los polígonos son objetos geométricos con los que se trabaja frecuentemente, ya que constituyen una representación adecuada de objetos del mundo real y, además, las operaciones que pueden realizarse entre ellos brindan soluciones en una variada gama de aplicaciones. Una de las operaciones que se aplica a polígonos es la suma de Minkowski. La suma de Minkowski de dos conjuntos $P$ y $Q \subset \mathbf{R}^n$, se define como $P \oplus Q = \{p + q\text{: } p \in P,\ q \in Q\}$. Las propiedades de esta operación la convierten en una herramienta útil en la resolución de problemas que se presentan en diversas áreas entre las que se pueden citar: robótica, diseño y fabricación asistida por computadora, procesamiento de imágenes, sistemas de información geográfica, entre otras.

En esta línea de investigación hemos estudiado la suma de Minkowski, presentamos su contexto teórico, propiedades geométricas y aplicaciones más destacadas. La construcción de la suma de Minkowski de polígonos es un problema de complejidad polinómica, para el cual existen algoritmos eficientes que lo resuelven y que hemos implementado en una herramienta que permite calcular y visualizar la suma de Minkowski entre distintos tipos de polígonos. También, hemos propuesto mejoras para su cálculo basadas en técnicas de paralelismo [11, 12, 13].

(1) Proyecto Tecnologías Avanzadas de Bases de Datos 22/F314, Departamento de Informática, UNSL.
Proyecto Geometría Computacional AL07-PAC-027, UPM.
(2) Laboratorio de Investigación y Desarrollo en Inteligencia Computacional (LIDIC), Departamento de Informática, UNSL.

Actualmente, trabajamos en el problema inverso al resuelto por la suma de Minkowski, la descomposición de Minkowski de polígonos convexos. Esto es, dado un polígono convexo *S*, queremos encontrar polígonos *P* y *Q* tales que *S* es la suma de Minkowski de *P* y *Q*. El problema de decidir si un polígono convexo admite una descomposición de Minkowski es un problema NP-Completo, tal como se demuestra en [5, 6, 8]. Una alternativa para la resolución aproximada de este tipo de problemas son las técnicas metaheurísticas. En trabajos previos propusimos la resolución del problema de descomposición de polígonos en suma de Minkowski utilizando un algoritmo genético obteniendo resultados satisfactorios [14, 16]. En esta presentación damos el marco formal del problema, presentamos la propuesta y los avances alcanzados.

## 2 Cómo recuperar la forma del robot

En robótica, la suma de Minkowski se utiliza en la planificación de movimientos de robots [9]. Se tiene un robot *R* que se mueve por sucesivas traslaciones en un espacio bidimensional formado por un conjunto $S=\{Q_1, Q_2,\ldots,Q_n\}$ de obstáculos poligonales disjuntos. La ubicación del robot en este espacio está determinada por el punto de referencia del robot. Si se hace coincidir el punto de referencia del robot con el origen de coordenadas y se construye $R'$, la figura simétrica de *R* respecto del origen, $Q_i \oplus R'$ representa el conjunto de todas las ubicaciones del punto de referencia del robot *R* tales que $Q_i \cap P \neq \emptyset$. Esta suma se denomina C-obstáculo y representa el conjunto de puntos en los cuales el robot no puede ubicarse, pues colisiona con el obstáculo $Q_i$. La unión de todos los C-obstáculos conforma el espacio prohibido, es decir los puntos del espacio que no son ubicaciones válidas para el robot *R* en el cálculo de una trayectoria. El espacio formado por las ubicaciones donde el robot no intersecta a ningún obstáculo se denomina espacio libre. Planteado el escenario anterior, se conoce el robot y el conjunto los C-obstáculos obtenidos a partir de la suma de Minkowski de cada obstáculo con el robot.

Supongamos ahora que la forma del robot fuese desconocida y que se tiene el conjunto de C-obstáculos que conforman el espacio prohibido. En este nuevo escenario, puede ser de interés recuperar la forma original del robot. Para recobrar la forma original del robot se puede pensar en descomponer cada uno de los C-obstáculos en sumandos de Minkowski. De esta forma, el polígono que resulte común a todas las descomposiciones será el polígono que representa al robot.

Se plantea así, el problema inverso a la suma de Minkowski, la descomposición en suma de Minkowski, que puede expresarse del siguiente modo: dado un polígono *S,* encontrar polígonos *P* y *Q* tales que la suma de Minkowski de *P* y *Q* sea *S*, es decir, $S = P \oplus Q$.

La construcción la suma de Minkowski en dos y tres dimensiones es un problema de complejidad polinómica y existen algoritmos eficientes que lo resuelven [1, 3]. En cambio, el problema de descomposición es un problema más complejo, para el cual no existen algoritmos eficaces que lo solucionen. Seguidamente presentamos la descomposición de Minkowski, mostrando sus aspectos relevantes y a continuación una propuesta para su resolución usando metaheurísticas.

## 3 Descomposición de Minkowski

Sea *S* un conjunto convexo en $\mathbf{R}^n$, una descomposición de Minkowski de *S* es un par de conjuntos convexos *P* y *Q* de $\mathbf{R}^n$ tales que, $S = P \oplus Q$. Los conjuntos *P* y *Q* se denominan sumandos de *S*.
Cualquier conjunto convexo S se descompone trivialmente en una suma de la forma $S=\lambda S \oplus (1-\lambda)S$ para $0 \leq \lambda \leq 1$. Estas descomposiciones que existen para cualquier conjunto *S* se denominan descomposiciones triviales. En la figura 1 se muestra una descomposición trivial de un polígono S para $\lambda=1/3$, (a la izquierda) y una descomposición no trivial para un polígono *R* (a la derecha). Un conjunto convexo *S* se dice descomponible si puede expresarse como suma de dos sumandos que no sean homotéticos a *S*.

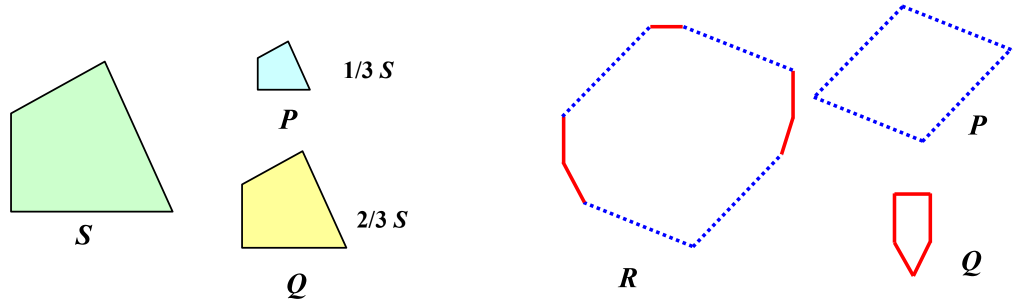


Figura 1: Una descomposición trivial de un polígono S y una descomposición no trivial de un polígono R

La noción de descomponibilidad de conjuntos convexos fue introducida por Gale [4] en 1954 Posteriormente, en 1963 Shepard [11] caracteriza los sumandos de un politopo iniciando una serie de trabajos dentro del campo de la Geometría Convexa. Seguidamente se presenta la caracterización en dimensión 2, de lo que denominamos descomposición clásica:

"*Dados S y P, polígonos convexos, P es un sumando de S es decir, existe Q tal que $S = P \oplus Q$ si y sólo si los lados de P son paralelos a los de S y la longitud de cada uno de ellos es menor o igual que la del correspondiente lado de S.*"

En 1987, Iwano y Steiglitz [6], estudiando problemas de aciclicidad en grafos infinitos, consideran descomposiciones de polígonos convexos en las que no se admiten sumandos que tengan lados paralelos, Este tipo de descomposición se denomina descomposición fuerte y su caracterización es la siguiente:

"*Un polígono S es fuertemente descomponible si admite una descomposición en sumandos tales que ninguna arista de un sumando es paralela a una arista del otro sumando*"

Un polígono puede tener más de una descomposición fuerte, según muestra en el ejemplo de la figura 2, donde el polígono *S* de vértices {(0,0), (1,0), (2,1), (2,2), (1,2), (0,1)} se descompone en suma de los segmentos {(0,0), (1,1)}, {(0,0),(0,1)} y {(0,0), (1,0)} o de los triángulos rectángulos *T*={(0,0), (1,1), (0,1)} y *T'* ={(0,0), (1,0), (1,1)}

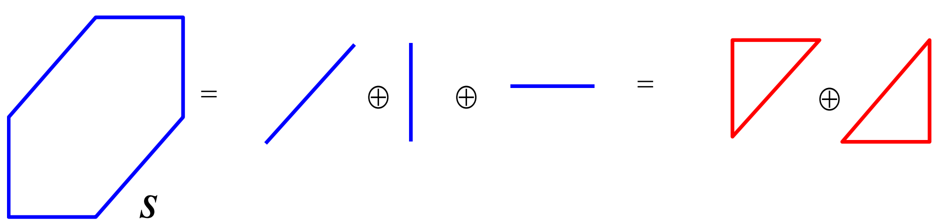


Figura 2: Un polígono con dos descomposiciones fuertes

Debemos observar que aquí un polígono está definido por una sucesión de vectores $e_1, e_2, \ldots, e_n$ con la condición $\sum e_i = 0$, por lo que las aristas de un polígono se consideran orientadas. Con esto los triángulos *T* y *T'* del ejemplo anterior no tienen aristas paralelas.

En [6] los autores demostraron que el problema de determinar si un polígono es fuertemente descomponible es NP-completo.

El tercer tipo de descomposición que consideramos tiene su origen en 1921. En dicho año, Ostrowski [10], observó que la factorización de un polinomio en *n* variables estaba relacionada con la descomposición de cierto politopo en $\mathbf{R}^n$, llamado *politopo de Newton* y demostró que si un polinomio *f* factoriza en el producto $g \cdot h$ entonces el politopo de Newton de *f* se descompone en la suma de los politopos de Newton correspondientes a *g* y h, es decir, $S(f) = S(g) \oplus S(h)$.

Las coordenadas de los vértices de los politopos de Newton son números enteros por lo que se denominan politopos *integrales*. Así resulta de interés estudiar la *descomposición integral* de politopos, introducida en 2001 por Gao y Lauder [5], para caracterizar la irreducibilidad de polinomios. La caracterización de la descomposición integral es la siguiente:

*"Un politopo integral es integralmente descomponible si puede descomponerse en suma de Minkowski de dos politopos integrales, cada uno de ellos con más de un punto"*

Gao y Lauder en [5] demuestran que el problema de decidir la existencia de una descomposición integral es NP-completo.

De estos tres tipos de descomposiciones estamos particularmente interesados en la descomposición fuerte, que es la más apropiada para nuestro problema del robot. Este problema es NP-completo y no hemos encontrado referencias al uso de algoritmos heurísticos en la búsqueda de la solución. Nuestra propuesta que se expone en la siguiente sección y consiste en un enfoque evolutivo para resolver el problema de descomposición de polígonos.

## 4 Nuestra propuesta

En [15] realizamos una propuesta general para encarar el problema de descomposición de polígonos convexos en suma de Minkowski utilizando Algoritmos Genéticos. A continuación presentamos un resumen de la misma, comenzando con la formulación del problema. El problema de descomposición de polígonos, denominado $SMINK^{-1}$ se define de la siguiente manera:

PROBLEMA $SMINK^{-1}$: *Sea S un polígono convexo de n lados y sea P un polígono convexo obtenido eligiendo k de lados de S. Sea Q un polígono convexo obtenido con los lados restantes de S que no forman parte de P. Se calcula* $P \oplus Q$ *y se mide el área de la diferencia simétrica entre* $((P \oplus Q)\ \Delta\ S$. *El problema consiste en encontrar un polígono P que minimice el valor de* $f(P) = \text{Área}\ ((P \oplus Q)\ \Delta\ S)$.

Con respecto a la característica del polígono $S$, puede suceder que no existan polígonos $P$ y $Q$ que cumplan que $P \oplus Q$ sea exactamente igual a $S$. Sin embargo, se pueden obtener polígonos $P$ y $Q$ tales que $S' = P \oplus Q$ y $S'$ sea lo más aproximada a $S$ desde el punto de vista morfológico. A medida que el área de la diferencia simétrica tiende a cero, mayor es el parecido morfológico entre $S$ y $S'$.

La representación para un polígono $P$ es una cadena binaria de $n$ bits donde un 1 en la posición $i$ significa que el lado $i$ de $S$ forma parte del polígono $P$, y un 0 que no forma parte, con la restricción de que en la cadena hay entre 2 y $n$-2 bits con valor 1.

Cuando el polígono $S$ es convexo, los sumandos $P$ y $Q$ también deben ser polígonos convexos. Con la representación elegida, puede ocurrir que con la sucesión de lados elegidos para armar el polígono $P$ (o $Q$), al descodificar se obtenga un polígono que no sea simple, que no sea convexo o que no sea cerrado, en ese caso $P$ (o $Q$) es considerado una solución no factible. Se trabajó en el análisis del espacio de soluciones del problema, y en [16] se formuló una propuesta para el tratamiento las soluciones no factibles del problema $SMINK^{-1}$. Esta propuesta incluye la modificación del proceso de descodificación original, en el cual una cadena binaria da lugar a una solución no factible, de manera tal que siempre se obtenga un polígono que cumpla con las características de factibilidad requeridas, de modo que soluciones no factibles siempre se puedan evaluar como factibles. Este nuevo proceso de descodificación incluido en el algoritmo genético fue validado a través de un conjunto de instancias de distinto tipo de los problemas $SMINK^{-1}$. Los resultados de este estudio preliminar fueron presentados en [16].

Actualmente, continuamos trabajando en el estudio experimental sobre un conjunto de instancias de variado tamaño y complejidad generadas aleatoriamente para experimentación, prueba y verificación del algoritmo genético que resuelve el problema $SMINK^{-1}$. Cabe aclarar que las instancias de prueba son generadas por un generador aleatorio de polígonos convexos desarrollado para este fin.

## 5 Conclusiones

El objetivo general de nuestro trabajo es proponer una solución alternativa para un problema de tipo geométrico para el cual debido a su complejidad no se ha encontrado un algoritmo eficiente que lo solucione. Específicamente, para el problema de descomposición de polígonos en suma de Minkowski, se propone su resolución aproximada utilizando Algoritmos Genéticos. Asimismo, como propuesta futura se pretende atacar este problema usando otro tipo de metaheurísticas, para realizar una comparación con la propuesta actualmente presentada.

Este trabajo se enmarca en la Línea de Investigación Geometría Computacional y Bases de Datos Espacio-Temporales, perteneciente al Proyecto Tecnologías Avanzadas de Bases de Datos 22/F314, Departamento de Informática, Universidad Nacional de San Luis; en el Proyecto AL07-PAC-027 Geometría Computacional, subvencionado por la Universidad Politécnica de Madrid; y en el marco de la Red Iberoamericana de Tecnologías del Software (RITOS2), subvencionado por CYTED. Además, cuenta con el apoyo de integrantes de la línea Metaheurísticas del grupo LIDIC.

## Referencias

[1 ] de Berg, M., van Kreveld, M., Overmars, M., Schwarzkopf O. *Computational Geometry: Algorithms and Applications*. Springer-Verlag, Heidelberg, 1997.

[2 ] Emiris I. and Tsigaridas E. *Minkowski decomposition of convex lattice Polygons,* Algebraic and geometric modeling ,Springer 2005

[3 ] Flato, E., *Robust and efficient construction of planar Minkowski sums*, M.Sc. thesis, School of Computer Science, Tel Aviv University, 2000.

[4 ] Gale, D. Irreductible convex sets, Proc. Intern. Congr. Math ,Vol.2, 217-218 Amsterdam, 1954

[5 ] Gao S., Lauder A. *Decomposition of Polytopes and Polynomials*, Discrete & Computational Geometry",26-1-pp.89-104, 2001.

[6 ] Iwano, K; Steiglitz, K. *Testing for cycles in infinite graphs with periodic structures*; Proc. 19th ACM Sympos. on Theory of Computing, p 46-55 , 1987

[7 ] Michalewicz, Z. *Genetic algorithms + data structures = evolution programs,* Springer Verlag, 1997

[8 ] Mount, D; Silverman, R; *Combinatorial and Computational aspects of Minkowski Decompositions,* Contemporary Mathematics, Vol.119, 107-124, 1991

[9 ] Latombe, J.C. *Robot Motion Planning*, Kluwer Academic Publisher, Boston, MA, 1991.

[10 ] Ostrowski, A. Uber die Bedeutung der Theorie der konvexen Polyeder fur die formale Algebra, Jahresbericht e Deutsch e Math. Verein 30, 98-99, 1921

[11 ] Shepard, G. *Decomposable convex polytopes,* Matematika10, 89-95 , 1963

[12 ] Taranilla, M.T., Kavka,G., Gagliardi, E., Hernández Peñalver, G. *Una herramienta para el cálculo y visualización de Sumas de Minkowski.* Workshop de Tecnología Informática Aplicada en Educación, X Congreso Argentino de Ciencias de la Computación (CACIC 2002)

[13 ] Taranilla, M.T, Kavka, G., Gagliardi, E., Hernández Peñalver, G. *Una operación entre polígonos: Sumas de Minkowski*, X Congreso Argentino de Ciencias de la Computación (CACIC 2002)

[14 ] Taranilla, M. T., Printista M., Gagliardi E. *Una Propuesta para mejorar el calculo de Sumas de Minkowski entre polígonos,* IX Congreso Argentino de Ciencias de la Computación, (CACIC 2003)

[15 ] Taranillla, M.T.; Leguizamón, M.G.; Gagliardi, E.; Hernández Peñalver, G.; *Estudio de la aplicabilidad de un enfoque evolutivo para la descomposición en Suma de Minkowski*. (CACIC 2004)

[16 ] Taranilla, M.T.; Leguizamon, M.G.; Gagliardi, E.O.; Hernández Peñalver, G.. Tratamiento de soluciones no factibles para el problema SMINK$^{-1}$. XII Congreso Argentino de Ciencias de la Computación (CACIC 2006).