

Medición de la Dimensión Fractal Local en Superficies

Andrea Silvetti y Claudio Delrieux¹

Depto. Ing. Eléctrica y Computadoras — Universidad Nacional del Sur, Av. Alem 1253

¹Autor para contacto claudio@acm.org (Parcialmente financiado por SECyT-UNS)

1. Introduction

La dimensión fractal local en superficies ha demostrado ser una técnica cuantitativa muy poderosa en el procesamiento de imágenes. Su utilización como descriptor local para diferentes propósitos de procesamiento es bastante extensa, y se destaca por ser un estimador notablemente robusto frente a los defectos y alteraciones presentes en la mayor parte de las tecnologías de adquisición de imágenes. Podemos mencionar aplicaciones de los estimadores fractales como descriptores locales para segmentación en imágenes de sensado remoto (satélites ópticos y SAR), imágenes médicas (PET, CAT, ultrasonido), visión robótica e industrial, etc. [7, 1, 3].

La dimensión fractal en general es un exponente que relaciona la autoinvariancia afín o autosimilitud estadística frente a cambios de escala [2, 4]. En funciones o conjuntos no definidos determinísticamente, su medición se realiza usualmente por medio del ajuste por regresión, en un espacio logarítmico, de magnitudes directas (perímetro, área, variancia) o indirectas (ocupación, amplitud espectral) respecto a la escala de medición de dichas magnitudes [6, 5].

La dimensión fractal local requiere realizar dicha regresión en un entorno reducido. En imágenes este entorno típicamente incluye una *ventana* centrada en el pixel cuya estimación se desea realizar. El tamaño de la ventana es uno de los parámetros computacionales que determina la posible precisión de la estimación. Mayores ventanas implican mejores precisiones, con un costo computacional más alto. Por otro lado, la precisión del método no está siempre relacionada con la *exactitud*. Para algunos propósitos, una evaluación predeciblemente diferenciada de la dimensión fractal local es suficiente, aunque los valores exactos no se conozcan.

Los métodos más usuales para evaluar la DF local son la DF box, el exponente de autocorrelación de Hurst, o la transformada de Fourier. Todos estos métodos son en

realidad generalizaciones de métodos en una dimensión, aplicados a dimensiones mayores. La DF box se basa en estimar la correlación de la cantidad de discos de radio r visitados por el conjunto, cuando r tiende a cero. Este método es el más sencillo de implementar computacionalmente, pero aplicado a imágenes requiere una binarización previa, lo cual altera los resultados a obtener. Además, como se trata de una dimensión de ocupación, los valores finales están entre 0 (punto) y 2 (plano), lo cual no es adecuado para caracterizar funciones 2D.

El exponente de autocorrelación de Hurst H caracteriza a una función de acuerdo a cómo se puede estimar su variancia ΔV dentro de entornos r de tamaño decreciente, de manera de obtener un ajuste de la forma $\Delta V = \Delta r^H$. Es posible mostrar que la dimensión fractal de la función es $D = 2 - H$ con $0 \leq H \leq 1$. Si bien este exponente es sencillo de calcular, para estimaciones locales se requieren entornos muy grandes para evitar la inestabilidad numérica del método.

La estimación espectral de la dimensión fractal se basa en ajustar el espectro logarítmico de Fourier de la función con una regresión lineal de forma $E(F) = \frac{1}{F^\beta}$. Es posible mostrar que la dimensión fractal de la función es $D = \frac{5-\beta}{2}$ con $1 \leq \beta \leq 3$. Este método es computacionalmente muy costoso, y es muy sensible a la presencia de ruido espectralmente uniforme (blanco o rosa). Para estimaciones locales de la dimensión fractal es prohibitivo dado que para obtener resultados significativos se requieren ventanas locales de tamaño mucho mayor que en los otros métodos.

En este trabajo desarrollamos una variante del método basado en el exponente de Hurst, pero adaptado a superficies. Comparamos nuestro método con respecto al método de Hurst tradicional, obteniendo una estimación local de la dimensión fractal mucho más precisa y exacta, la cual es además robusta con respecto al tamaño de la ventana local.

2. Descripción del método

El método desarrollado en este trabajo se basa en la determinación del exponente de autocorrelación de la luminancia en imágenes $H = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\log(\Delta V)}{\log(r)}$, donde ΔV representa la variancia de la luminancia dentro de un disco de radio r . La manera en la que se computa tradicionalmente este método en imágenes consiste en tomar discos de radios decrecientes, y evaluar la regresión del ΔV dentro del disco, en función del radio r . Es fácil observar que ésta es una relación unidimensional (un incremento Δr del radio involucra agregar al entorno un grupo de $2\pi\Delta r$ pixels), y que varía en forma inversamente proporcional a la dimensión fractal (dado que el exponente para la dimensión fractal se computa con la regresión de $\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\log(\Delta V)}{\log(\frac{1}{r})}$). Por dicha razón es que por definición la relación entre la dimensión fractal de la función de luminancia de una imagen, y su coeficiente de autocorrelación es $D = 3 - H$, dado que H varía inversamente con la variancia de la función.

Nuestra idea consiste en desarrollar un método que sea genuinamente 2D. Básicamente, la diferencia consiste en que nuestro método considera la regresión entre ΔV y r para todos los pixels que están a una distancia r dentro de la ventana. El método desplaza una ventana de $n \times n$, con n impar, sobre cada píxel de la imagen para calcular la DF local del mismo. Busca la máxima variación de luminancia $\Delta V = |L_i - L_j|$ entre dos pixels i, j dentro la ventana tales, que i y j están a distancia r . En este caso en particular, usamos distancia norma uno, y por lo tanto hacemos la regresión entre ΔV y r , para valores de r entre 1 y $2n - 2$ que es la máxima distancia norma uno entre dos pixels cualesquiera de la ventana.

Es importante destacar que, si bien nuestro método se deriva del exponente de autocorrelación, tiene dos grandes diferencias respecto al mismo, las cuales explican las ventajas comparativas que podemos exhibir. La primera diferencia es que el método tradicional utiliza norma Euclídea, y por lo tanto al crecer r se van incorporando a la medición los pixels que están a distancia r del pixel central de la ventana (aquel cuya DF estamos midiendo). Por lo tanto, dentro de una ventana cuadrada de $n \times n$, el método puede considerar solo pixels que están a $\sqrt{2}n$ como máximo, mientras que nuestro método permite considerar pixels que están a $2n - 2$. Por lo tanto, a igual tamaño de ventana, nuestro método tiene muchas más entradas en la tabla para calcular el exponente por regresión.

Por otro lado, en nuestro método la cantidad de pares de pixels a considerar crece cuadráticamente con el tamaño de la ventana, haciendo mucho más robusta la medición, mientras que en el método tradicional solo se agrega una circunsferencia de $2\pi r$ nuevos pixels. Por lo tanto nuestro método es genuinamente 2D y no la extensión de un método 1D por rotación. Nuestro coeficiente de autocorrelación relaciona la variancia de la luminancia con respecto al cuadrado de la distancia entre pixels.

$$H' = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\log(\Delta V)}{\log(r^2)} = \frac{1}{2} \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\log(\Delta V)}{\log(r)} = \frac{1}{2} H.$$

3. Resultados obtenidos

Para comparar nuestro método con los métodos tradicionales de cómputo de la DF local, utilizamos una imagen sintética compuesta por 9 regiones, cada una de las cuales fue generada con el algoritmo de desplazamiento aleatorio del punto medio, con una DF diferente entre 2 y 3 (ver Fig 1). A dicha imagen se le aplicó la medición local de la DF, y el resultado se muestra en falso color.

En la Fig. 2 se aprecian los resultados de aplicar la dimensión fractal local utilizando nuestro método, y el método tradicional de Hurst (tal cual es descrito por ejemplo en [5]). Esta medición se realizó para diferentes tamaños de ventanas desde 3×3 hasta 9×9 . La dimensión fractal local se muestra en falso color, cuya escala varía entre $D=2$ (verde) y $D=3$ (rojo).

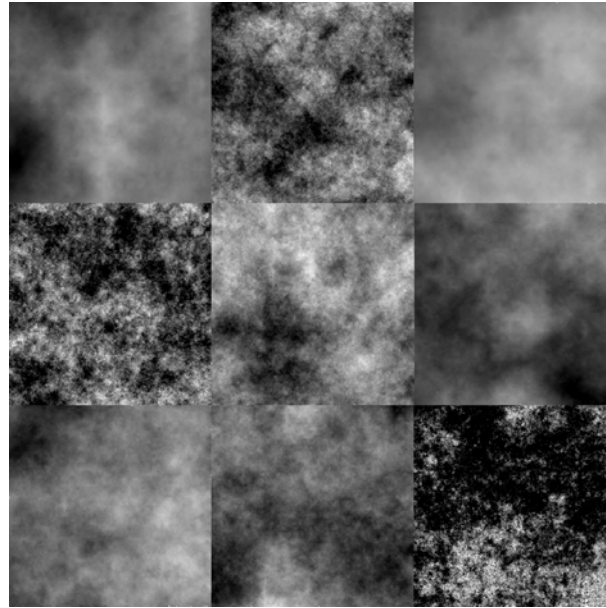


Figura 1: Imagen de prueba. Cada una de las 9 regiones tiene una dimensión fractal entre 2.1 y 2.9.

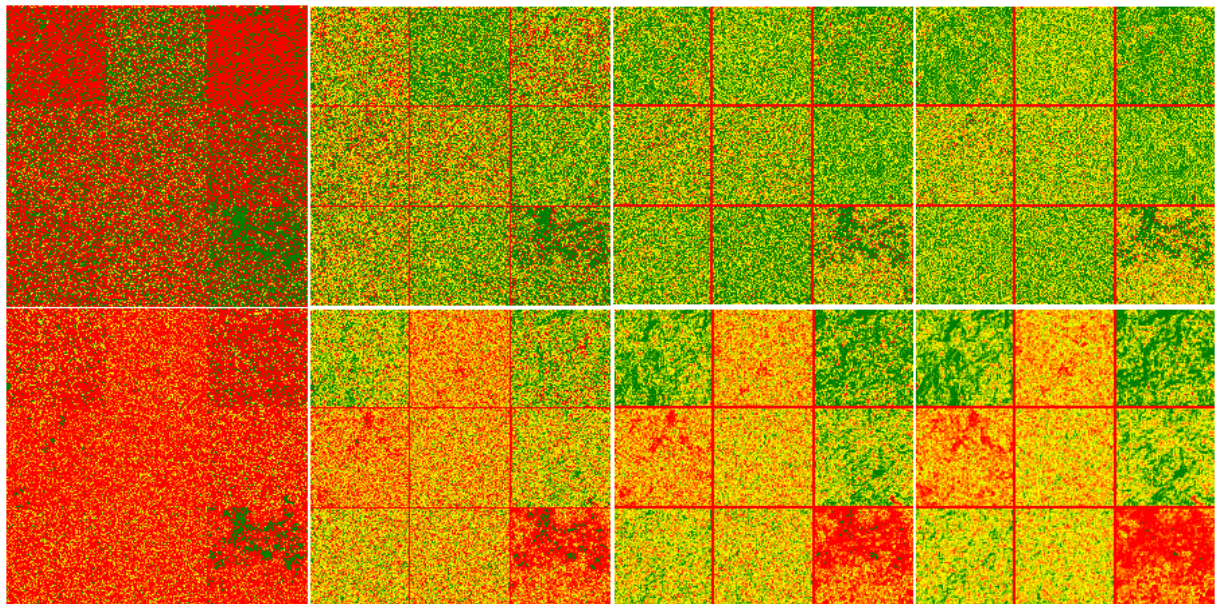


Figura 2: Dimensión fractal local en la imagen de la Fig. 1. Fila superior: el método de Hurst tradicional para ventanas de 3×3 a 9×9 . Fila inferior: el método presentado aquí con idénticos tamaños de ventana. La escala de color varía de $D=2$ (verde) a $D=3$ (rojo).

Para establecer una comparación en la precisión y exactitud de ambos métodos, en la Tabla 1 se consignan los resultados obtenidos en los dos grupos de mediciones, promediando la dimensión fractal local en el cada uno de los nueve sectores. Es posible observar que el método presentado en este trabajo se ajusta muy adecuadamente a la dimensión fractal original de cada uno de los sectores.

Sector		Método Tradicional				Nuestro Método			
Ubicación	D. F.	3×3	5×5	7×7	9×9	3×3	5×5	7×7	9×9
sup. izq.	2.2	2.45454	2.25136	2.11118	2.12723	2.795	2.4121	2.2466	2.2364
sup. ctro.	2.7	2.23018	2.2949	2.26722	2.32922	2.8707	2.6786	2.6208	2.6338
sup. der.	2.1	2.58144	2.28328	2.10751	2.11289	2.73	2.3822	2.1968	2.1842
med. izq.	2.8	2.20419	2.27694	2.26315	2.33324	2.8534	2.7214	2.6877	2.7077
med. ctro.	2.6	2.24103	2.28944	2.24601	2.29766	2.8677	2.6405	2.5645	2.5713
med. der.	2.3	2.36003	2.2474	2.14693	2.17638	2.8239	2.4878	2.3482	2.3427
inf. izq.	2.4	2.29048	2.27389	2.19373	2.23275	2.8505	2.5566	2.4416	2.4401
inf. ctro.	2.5	2.26432	2.28044	2.21889	2.26572	2.8599	2.5984	2.5017	2.5033
inf. der.	2.9	2.05513	2.0544	2.02414	2.10867	2.6035	2.7484	2.825	2.8739

Referencias

- [1] C. Delrieux and R. Katz. Image Segmentation Through Automatic Fractal Dimension Classification. In *Argentine Symposium on Computing Technology*, Buenos Aires, 2003. 32 JAIIO, Jornadas Argentinas de Informática e Investigación Operativa,.
- [2] B. Mandelbrot. *The Fractal Geometry of Nature*. W. H. Freeman, New York, 1983.
- [3] Yamashiro P. Fractal Analysis of MRI. Technical Report Medical Sciences Lab., University of Washington, Seattle, 1997.
- [4] H.-O. Peitgen and D. Saupe. *The Science of Fractal Images*. Springer-Verlag, New York, 1986.
- [5] J. C. Russ. *Fractal Images*. Plenum Press, 1993.
- [6] J. C. Russ. *The Image Processing Handbook*. CRC Press, Boca Raton, FL, third edition, 1999.
- [7] T. Wang, D. Li, C. Q. Zheng, and Y. Zheng. Segmentation of medical ultrasonic image using fractal. In J. Zhou, A. K. Jain, T. Zhang, Y. Zhu, M. Ding, and J. Liu, editors, *Proc. SPIE Vol. 3545, p. 496-499, International Symposium on Multispectral Image Processing (ISMIP'98), Ji Zhou; Anil K. Jain; Tianxu Zhang; Yaoting Zhu; Mingyue Ding; Jianguo Liu; Eds.*, pages 496–499, September 1998.