

# Incremento del tamaño del espacio de soluciones factibles para $SMINK^{-1}$ usando algoritmos evolutivos

María Teresa Taranilla <sup>(1)</sup>

Edilma Olinda Gagliardi <sup>(1)</sup>

Mario Guillermo Leguizamón <sup>(2)</sup>

Departamento de Informática

Facultad de Ciencias Físico, Matemáticas y Naturales

Universidad Nacional de San Luis, Argentina

{tarani, oli, legui}@unsl.edu.ar

y

Gregorio Hernández Peñalver <sup>(1)</sup>

Departamento de Matemática Aplicada, Facultad de Informática

Universidad Politécnica de Madrid, España

gregorio@fi.upm.es

## RESUMEN

En este trabajo de investigación estudiamos la suma de Minkowski. Hemos estudiado su contexto teórico, propiedades geométricas y aplicaciones más destacadas. Además, hemos implementado la suma de Minkowski entre distintos tipos de polígonos y hemos propuesto mejoras para su cálculo basadas en técnicas de paralelismo.

Actualmente trabajamos en el problema inverso al resuelto por la suma de Minkowski, el cual se refiere a la descomposición de polígonos en suma de Minkowski. Sin embargo, este problema puede resolverse sólo con un algoritmo de complejidad exponencial. Debido a la complejidad inherente del mismo, propusimos un enfoque evolutivo para su resolución, donde incluimos la definición del problema, denominado  $SMINK^{-1}$ .

En esta presentación damos el marco formal del problema y presentamos avances alcanzados con respecto al análisis del espacio de soluciones del problema, a fin de considerar un conjunto mayor de soluciones.

**Palabras claves:** Suma de Minkowski. Geometría Computacional. Descomposición de Polígonos. Algoritmos genéticos

## 1. Introducción

La suma de Minkowski de dos conjuntos  $P$  y  $Q \subset \mathbb{R}^2$ , denotada por  $P \oplus Q$ , se define como

$P \oplus Q = \{ p + q : p \in P, q \in Q \}$  donde  $p+q$  es el vector suma de los vectores  $p$  y  $q$ . Esta operación es utilizada en un amplio rango de aplicaciones, que incluyen planificación de movimientos de robots, procesamiento de imágenes, planificación de ensamblajes, etc., [2,6]. Con respecto a la suma de Minkowski, hemos estudiado sus propiedades geométricas y aplicaciones más destacadas, y hemos mostrado aspectos teóricos y prácticos relevantes. Desarrollamos una herramienta que implementa y permite la visualización de la suma de Minkowski entre distintos tipos de polígonos y además, realizamos una propuesta que utilizando técnicas de paralelismo permite mejorar el cálculo de la suma de Minkowski entre polígonos [9, 10, 11,12].

El problema inverso a la suma de Minkowski ( $SMINK^{-1}$ ) es el siguiente: dado un polígono  $S$ , ¿existen polígonos  $P$  y  $Q$  tales que  $S$  es la suma de Minkowski de  $P$  y  $Q$ ? Más formalmente, dado un polígono  $S$  de  $n$  lados, buscamos polígonos  $P$  y  $Q$  de  $k$  y  $k'$  lados respectivamente, tales que  $S$  sea la suma de Minkowski de  $P$  y  $Q$ , es decir,  $S=P \oplus Q$ .

El problema de decidir si un polígono convexo admite una descomposición de Minkowski es NP-completo como se demuestra en [4]. Cabe destacar que no hemos encontrado referencias

<sup>(1)</sup> Proyecto Tecnologías Avanzadas de Bases de Datos 22/F314, Departamento de Informática, UNSL.

Proyecto AL2006\_PF\_013 Geometría Computacional, UPM.

<sup>(2)</sup> Laboratorio de Investigación y Desarrollo en Inteligencia Computacional (LIDIC), Departamento de Informática, UNSL.

al uso de algoritmos heurísticos en la búsqueda de la solución a este problema. Por lo tanto, propusimos un enfoque evolutivo para la resolución de  $SMINK^{-1}$ . Implementamos un algoritmo genético, analizamos situaciones que podrían presentarse en la evaluación de una solución y realizamos un estudio preliminar sobre un conjunto pequeño de instancias generadas para probar la aplicabilidad del algoritmo genético [13, 14].

Actualmente, continuamos trabajando en el análisis y administración del espacio de soluciones del problema, a fin de considerar un conjunto mayor de soluciones. En esta presentación damos el marco formal del problema y presentamos los avances alcanzados.

## 2. Problema $SMINK^{-1}$

El problema  $SMINK^{-1}$  formulado en [15] se define de la siguiente manera: Sea  $S$  un polígono convexo de  $n$  lados. Sea  $\mathcal{P}$  el conjunto de todos los posibles polígonos de  $k$  lados, con  $2 \leq k \leq n-2$ . El problema consiste en:

$$\text{Min } f(P) = \text{Area}( (P \oplus Q) \Delta S )$$

donde  $P$  y  $Q \in \mathcal{P}$  y  $Q$  se construye con los lados de  $S$  que no forman parte del polígono  $P$ .

Esto es, dado un polígono convexo  $S$  armamos un polígono  $P$  eligiendo lados de  $S$  en orden. Luego, con los lados restantes de  $S$  que no están en  $P$  armamos el polígono  $Q$ . Así obtenemos los posibles candidatos  $P$  y  $Q$ , calculamos  $P \oplus Q$  y comparamos cuánto se aproxima a  $S$ . Para ello determinamos una medida de la diferencia entre  $P \oplus Q$  y  $S$ . La medida elegida es el área de la diferencia simétrica entre ambos polígonos, denotada  $\Delta$  y esa es la función objetivo a minimizar.

La representación que elegimos para un polígono  $P$  es una cadena binaria de  $n$  bits donde un 1 en la posición  $i$  significa que el lado  $i$  de  $S$  forma parte del polígono  $P$ , y un 0 que no forma parte, con la restricción de que en la cadena hay entre 2 y  $n-2$  bits con valor 1.

Cuando el polígono  $S$  es convexo, los posibles sumandos  $P$  y  $Q$  también deben ser polígonos convexos. Con el uso de esta representación, puede ocurrir que con la sucesión de lados elegidos para armar el polígono  $P$  (o el polígono  $Q$ ), al descodificar se obtenga un

polígono que no sea simple, que no sea convexo o que no sea cerrado, en ese caso  $P$  (o  $Q$ ) es una solución no factible. Los resultados preliminares mostrados en [15] indicaron que, dada la representación elegida para las soluciones, el espacio de búsqueda del problema  $SMINK^{-1}$  está constituido por un reducido porcentaje de soluciones factibles. Por lo tanto, continuamos trabajando en el análisis del espacio de búsqueda de  $SMINK^{-1}$  para aumentar el tamaño del espacio de soluciones factibles. Con este fin, el proceso de descodificación original, en el cual una cadena binaria da lugar a una solución no factible, es modificado de manera tal que se obtenga un polígono que siempre cumpla con las características de factibilidad requeridas. Es importante destacar que esto no implica una reparación de la solución o modificación de la misma.

Más formalmente, a una cadena binaria  $x \in \{0,1\}^n$ , le aplicamos un proceso de descodificación que obtiene una representación geométrica para un polígono  $P$ , que puede no cumplir con los requerimientos de factibilidad establecidos para una solución. Seguidamente, se aplica un proceso de ajuste a  $P$ , que obtiene una aproximación al polígono  $P$ , cumpliendo todas las condiciones de factibilidad requeridas.

El proceso de ajuste elegido es el *cierre convexo* de los vértices del polígono  $P$ . El cierre convexo de un conjunto de puntos, es el menor conjunto convexo que contiene ese conjunto. Por lo tanto, el cierre convexo es una técnica que nos brinda la posibilidad de encontrar en forma eficiente una aproximación geométrica de  $P$ , que siempre cumple con las condiciones requeridas para considerar factible una solución.

Veamos un ejemplo, dado un polígono convexo  $S = \langle s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6 \rangle$ , mostrado en la figura 1.

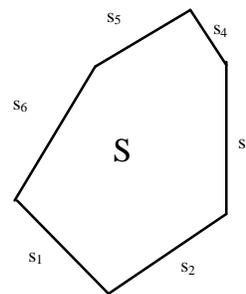


Figura 1: polígono convexo de 6 lados

La cadena C1 (ver figura 2) da lugar a solución que al ser descodificada no es factible, ya que su representación geométrica es un polígono que no es simple. Luego de calcular el cierre convexo al polígono  $P$  se obtiene una representación geométrica aproximada  $P'$ , que cumple las condiciones de factibilidad requeridas, ser convexo, cerrado y simple.

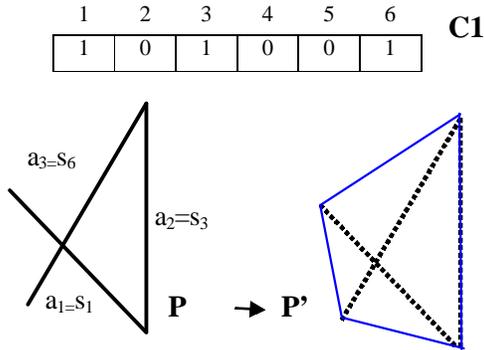


Figura 2: representación geométrica de C1 y su correspondiente representación geométrica aproximada después del aplicar el cierre convexo.

En la figura 3 mostramos otro ejemplo. Al descodificar la solución dada por la cadena C2, se obtiene una cadena poligonal que no es cerrada y es no convexa. Después de calcular el cierre convexo, obtenemos una representación geométrica aproximada que cumple las condiciones de factibilidad pedidas.

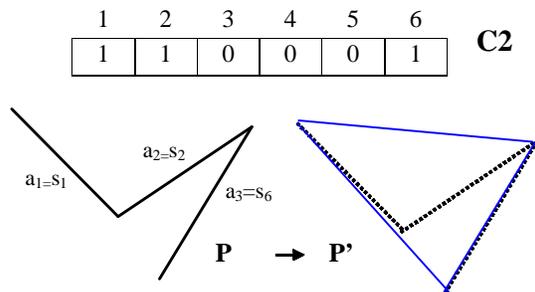


Figura 3: representación geométrica de C2 y su correspondiente representación geométrica aproximada después de aplicar el cierre convexo.

Este proceso de descodificación nos permite ampliar el tamaño del espacio de soluciones del problema  $SMINK^{-1}$ , ya que el polígono obtenido luego de la descodificación siempre cumple con las características de factibilidad requeridas.

### 3. Generación Aleatoria de Polígonos

La generación aleatoria de objetos geométricos es una faceta muy estudiada por los investigadores. Existen numerosos estudios sobre este tema [1, 3, 7, 16] que muestran diferentes técnicas de generación aleatoria de objetos geométricos contrastando ventajas e inconvenientes.

Por otra parte, además de su interés geométrico intrínseco, el problema de la generación aleatoria de objetos geométricos y en particular de polígonos, es de importancia cuando se requiere verificar la correctitud y evaluar el desempeño de algoritmos que realizan tareas sobre polígonos. En este campo se establece la necesidad de generar aleatoriamente instancias o lotes de prueba de diferentes magnitudes; esto es en cantidad de polígonos, en número de vértices de un polígono, en sus formas, etc. En general, los investigadores pretenden verificar el desempeño de un algoritmo sobre un conjunto de entradas lo suficientemente grande, que puede ser de determinadas características, y de relevancia práctica.

En nuestro problema de descomposición estudiamos la generación aleatoria de polígonos, debido a que necesitamos contar con un adecuado conjunto de instancias de variado tamaño y complejidad generadas aleatoriamente para experimentación, prueba y verificación del algoritmo genético que resuelve el problema  $SMINK^{-1}$ . Actualmente, trabajamos en el desarrollo de un generador aleatorio de polígonos convexos, basado en las heurísticas para generar polígonos simples presentadas por Auer y Held [1].

### 4. Conclusiones

En este artículo mostramos una forma alternativa de descodificar las soluciones binarias para atenuar el problema del tamaño del espacio de soluciones no factibles y una propuesta de generación aleatoria de las instancias del problema  $SMINK^{-1}$ , a fin de realizar un estudio experimental exhaustivo.

Este trabajo se enmarca en la Línea de Investigación Geometría Computacional y Bases de Datos Espacio-Temporales, perteneciente al Proyecto Tecnologías Avanzadas de Bases de Datos 22/F314, Departamento de Informática, Universidad

Nacional de San Luis; en el Proyecto AL06\_PF\_013 Geometría Computacional, subvencionado por la Universidad Politécnica de Madrid; y en el marco de la Red Iberoamericana de Tecnologías del Software (RITOS2), subvencionado por CYTED. Además, cuenta con el apoyo de integrantes de la línea Metaheurísticas del grupo LIDIC.

## 5. Referencias

- [1] Auer T.; Held M. *RPG - Heuristics for the Generation of Random Polygons*; Proc. 8th Canad. Conf. Comput. Geom., Ottawa, pp 38-44, 1996.
- [2] de Berg, M., van Kreveld, M., Overmars, M., Schwarzkopf O. *Computational Geometry: Algorithms and Applications*. Springer-Verlag, Heidelberg, 1997.
- [3] Epstein P. *Generating Geometric Objects at Random*. Master's thesis, CS Dept., Carleton University, Ottawa K1S 5B6, Canada, 1992.
- [4] Gao S., Lauder A. *Decomposition of Polytopes and Polynomials*, Discrete & Computational Geometry", 26-1-pp.89-104, 2001.
- [5] Michalewicz, Z. *Genetic algorithms + data structures = evolution programs*, Springer Verlag, 1997
- [6] Latombe, J.C. *Robot Motion Planning*, Kluwer Academic Publisher, Boston, MA, 1991.
- [7] O'Rourke J., Virmani M. *Generating Random Polygons*. Technical Report 011, CS Dept., Smith College, Northampton, MA 01063, 1991.
- [8] Preparata, F., Shamos, M. *Computational Geometry: an Introductio*. Springer Verlag, 1985.
- [9] Taranilla, M.T, Kavka, G.; *Implementación de una herramienta para el cálculo y visualización de sumas de Minkowski*. UNSL, 2002.
- [10] Taranilla, M.T., Kavka,G., Gagliardi, E., Hernández Peñalver, G. *Una herramienta para el cálculo y visualización de Sumas de Minkowski*. Workshop de Tecnología Informática Aplicada en Educación, Congreso Argentino de Ciencias de la Computación, CACIC 2002.
- [11] Taranilla, M.T, Kavka, G., Gagliardi, E., Hernández Peñalver, G. *Una operación entre polígonos: Sumas de Minkowski*, Congreso Argentino de Ciencias de la Computación CACIC 2002.
- [12] Taranilla, M. T., Printista M., Gagliardi E. *Una Propuesta para mejorar el calculo de Sumas de Minkowski entre polígonos*, IX Congreso Argentino de Ciencias de la Computación, CACIC 2003.
- [13] Taranilla, M.T, Hernández Peñalver, G. *Descomposición en Sumas de Minkowski*, Workshop de Investigadores en Ciencias de la Computación, WICC 2003.
- [14] Taranilla, M. T., Leguizamón, G., Gagliardi, E., Hernández Peñalver, G.; *Algoritmos genéticos para la descomposición en Sumas de Minkowski*, Workshop de Investigadores en Ciencias de la Computación, WICC 2004.
- [15] Taranilla, M.T.; Leguizamón, M.G.; Gagliardi, E.O.; Hernández Peñalver, G.; *Estudio de la aplicabilidad de un enfoque evolutivo para la descomposición en Suma de Minkowski*. Congreso Argentino de Ciencias de la Computación, CACIC 2004.
- [16] Zhu C., Sundaram G., Snoeyink J., Mitchell J.; *Generating Random Polygons with Given Vertices*. [Comput. Geom. 6](#), pp 277-290,1996.