Manejo del espacio restringido con Algoritmos Genéticos para la descomposición en Suma de Minkowski

María Teresa Taranilla (1)
Edilma Olinda Gagliardi(1)
Mario Guillermo Leguizamón(2)

Departamento de Informática
Facultad de Ciencias Físico, Matemáticas y Naturales
Universidad Nacional de San Luis, Argentina
{tarani, oli, legui}@unsl.edu.ar
Fax: 54-2652-430224

Gregorio Hernández Peñalver(1)

Departamento de Matemática Aplicada
Facultad de Informática
Universidad Politécnica de Madrid, España
gregorio@fi.upm.es
Fax: 34-91-3367426

Resumen:
En esta presentación damos aspectos relevantes a la Suma de Minkowski, los antecedentes relacionados a nuestra investigación y al estado del arte del mismo, exponiendo el problema actualmente en estudio. El mismo se refiere al problema inverso al resuelto por la suma de Minkowski: dado un polígono S, ¿existen polígonos P y Q tales que S es la suma de Minkowski de P y Q, es decir, $S = P \oplus Q$?. Para ello describimos los enfoques utilizados en su resolución y planteamos los problemas surgidos colateralmente, merecedores de un estudio y análisis en particular.

1. Introducción

Nuestro trabajo se desarrolla dentro de la línea *Geometría Computacional y Bases de Datos* del *Proyecto Tecnologías Avanzadas de Bases de Datos* 22/F314, con el apoyo de integrantes del grupo LIDIC, y en colaboración con docentes de la Universidad Politécnica de Madrid.

En esta línea de trabajo, uno de los temas de investigación se ha centrado principalmente en el estudio de las sumas de Minkowski. Hemos estudiado sus propiedades geométricas y aplicaciones más destacadas, presentando los aspectos teóricos y prácticos relevantes, como así también hemos desarrollado una herramienta que implementa la suma de Minkowski entre distintos tipos de polígonos [3], [7], [8], [9]. También realizamos una propuesta para mejorar el cálculo de la suma de Minkowski de polígonos haciendo énfasis en el rendimiento de los algoritmos que la calculan basándonos en técnicas de paralelismo [11].

Actualmente estamos trabajando en el problema inverso al resuelto por la suma de Minkowski, el cual se refiere a la descomposición de polígonos en sumas de Minkowski [10]. Este problema se puede resolver con un algoritmo de complejidad exponencial. Debido a la complejidad inherente del mismo, propusimos un enfoque evolutivo utilizando Algoritmos Genéticos para su resolución. La propuesta incluyó la definición del problema, denominado $SMINK^{-1}$, en términos de una función objetivo, el diseño e implementación de un algoritmo genético y su aplicación a un conjunto de instancias del problema [12], [13].

(1) Proyecto Tecnologías Avanzadas de Bases de Datos 22/F314, Departamento de Informática, UNSL.
Proyecto AL05_PF_0042 Geometría Computacional, UPM.
(2) Laboratorio de Investigación y Desarrollo en Inteligencia Computacional (LIDIC), Departamento de Informática, UNSL.

Este artículo está organizado de la siguiente manera, en la sección 2 explicamos brevemente el problema de la descomposición de polígonos en Suma de Minkowski. Seguidamente, en la sección 3 se presenta una solución al problema usando algoritmos genéticos y planteamos los problemas surgidos colateralmente. Finalmente, consideramos las conclusiones y propuestas de trabajos futuros.

2. Problema de la descomposición de polígonos en sumas de Minkowski

Dados dos conjuntos P y $Q \subset \mathrm{R}^2$ la suma de Minkowski de P y Q, denotada por $P \oplus Q$ se define como $P \oplus Q = \{p + q : p \in P, q \in Q\}$ donde p+q es el vector suma de los vectores p y q.

Estamos estudiando el problema inverso al resuelto por la suma de Minkowski, que denominamos $SMINK^{-1}$. Dado un polígono S de n lados, queremos encontrar dos polígonos P y Q de k y k' lados respectivamente, tales que S sea la suma de Minkowski de P y Q, es decir, S=$P \oplus Q$.

Para el caso de que el polígono S dado es un polígono convexo, los posibles sumandos P y Q también deben ser convexos, entonces después de un análisis de las propiedades geométricas de los conjuntos convexos y de la suma de Minkowski caracterizamos cuando un polígono S admite un sumando de Minkowski. El algoritmo que detecta si un polígono convexo S de n lados, admite un polígono convexo de m lados como sumando de Minkowski tiene una complejidad de $O(n^m)$. En cambio, para saber si el polígono S admite un sumando de Minkowski de número no precisado de lados, la complejidad de un posible algoritmo es de orden exponencial [10],[12].

Debido a la complejidad del algoritmo que resuelve este problema trabajamos sobre una propuesta para resolverlo utilizando Algoritmos Genéticos y un análisis de posibles situaciones que podían ocurrir en la evaluación de una solución. Así, en [13] presentamos resultados preliminares sobre un conjunto pequeño de instancias generadas para probar la aplicabilidad del algoritmo genético.

3. Solución para SMINK^{-1} usando un algoritmo genético

La idea en general del algoritmo genético es la siguiente, elegimos cierta cantidad de lados de S en orden y armamos un polígono P. Luego, el polígono Q se obtiene con los lados restantes de S. Calculamos $P \oplus Q$, obteniendo S'. Luego debemos comparar S con S', para saber cuánto se aproxima la solución obtenida a S. Una vez obtenidos los posibles candidatos P y Q, y luego de calcular $P \oplus Q$, comparamos cuánto se aproxima esta solución a S. Para ello determinamos una medida de la diferencia entre $P \oplus Q$ y S. La medida elegida es el área de la diferencia simétrica entre ambos polígonos, denotada Δ, y es la función objetivo a minimizar.

Más formalmente, sea S un polígono convexo de n lados. Sea $\mathcal{P}$ el conjunto de todos los posibles polígonos de k lados, con $2 <= k <= n-2$. El problema consiste en:

$$Min\ f(P) = Area((P \oplus Q) \Delta S)$$

donde P y $Q \in \mathcal{P}$ y Q se construye con los lados de S que no forman parte del polígono P.

Para representar un polígono P usamos un string binario de n bits. Un 1 en el gen i significa que el lado i de S forma parte del polígono P, y un 0 que no forma parte, con la restricción de que en el cromosoma hay entre 2 y n-2 bits con valor 1.

Los resultados preliminares mostrados en [13] indicaron que el problema SMINK^{-1} no es un problema trivial en el sentido que el espacio de búsqueda, dada la representación elegida para las soluciones, está constituido por un reducido porcentaje de soluciones factibles.

Por lo tanto continuamos trabajando con un análisis del espacio de búsqueda de $SMINK^{-1}$, y aumentamos el tamaño del espacio de soluciones factibles. En el proceso de decodificación original propuesto en [13] una cadena binaria puede dar lugar a una solución no factible, es decir, un polígono que no sea cerrado, o que no sea convexo o que no sea simple. Esta situación se puede evitar si realizamos una descodificación extendida de manera tal que el polígono que se obtenga siempre tenga las características de factibilidad requeridas.

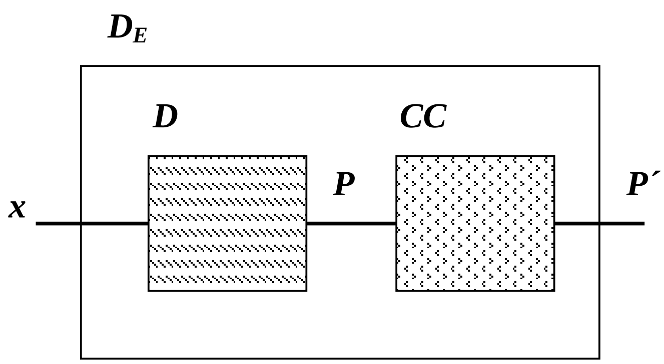

Figura 1: Proceso de descodificación extendido

En la figura 1 mostramos el proceso de descodificación extendido D_E. Para una cadena binaria $x \in \{0,1\}^n$, se aplica un proceso de descodificación *D* obteniendo una representación geométrica para un polígono *P*, que puede no cumplir con los requerimientos de factibilidad establecidos para una solución. A continuación aplicamos un proceso de ajuste a *P*, para obtener un polígono *P´* que es una aproximación (por ejemplo, cierre convexo) al polígono P que cumple con todas las condiciones de factibilidad requeridas.

Por otro lado, en el desarrollo y prueba de este tipo de algoritmos es importante contar con un adecuado conjunto de instancias de variado tamaño y complejidad, generadas aleatoriamente para prueba y/o verificación del algoritmo. La generación de objetos geométricos en forma aleatoria, además de ser un problema de interés teórico, tiene aplicaciones que incluyen el testeo y verificación de la complejidad temporal de algoritmos de la geometría computacional [1] [14]. En nuestro problema de descomposición estudiamos la generación aleatoria de polígonos, tanto generales como convexos y actualmente estamos trabajando en el desarrollo de un generador aleatorio de polígonos convexos.

4. Conclusiones

Este trabajo se enmarca en el *Proyecto Tecnologías Avanzadas de Bases de Datos* 22/F314 dentro de la línea de trabajo en Geometría Computacional y Bases de Datos, esta parcialmente subvencionado por el Proyecto AL05_PF_0042 Geometría Computacional, de la Universidad Politécnica de Madrid y con el apoyo de integrantes del grupo LIDIC, específicamente de la línea Metaheurísticas.

En este artículo mostramos el uso de una descodificación extendida a fin de considerar soluciones no factibles como factibles y de este modo ampliar el espacio de soluciones del Algoritmo Genético. Asimismo, proponemos la generación de aleatoria de polígonos convexos que serán necesarios para el estudio experimental. Actualmente, continuamos trabajando en el Algoritmo Genético y un estudio experimental más exhaustivo.

5. Referencias

[1] Auer T., Held M.; *RPG - Heuristics for the Generation of Random Polygons; Proc*. 8th Canad. Conf. Comput. Geom., Ottawa, pp 38-44, 1996.

[2] de Berg, M; Kreveld, Overmars, M; Schwarzkopf. *Computational Geometry: algorithms and applications*, Springer Verlag, 1997

[3] Gagliardi, E.; Taranilla, M.T; Berón, M.; Hernández Peñalver, G., *La Geometría Computacional a nuestro alrededor*. WICC 2002. Bahía Blanca, 2002.

[4] Michalewicz, Zbigniew. *Genetic algorithms + data structures = evolution programs,* Springer Verlag, 1997

[5] Latombe, J.C. *Robot Motion Planning*, Kluwer Academic Publisher, Boston, MA, 1991.

[6] Preparata,F.; Shamos,M. *Computational Geometry: an Introduction*, Springer Verlag, NY 1985.

[7] Taranilla, M.T, Kavka, G.; *Implementación de una herramienta para el cálculo y visualización de sumas de Minkowski*. UNSL, 2002.

[8] Taranilla, M.T.; Kavka, G.; Gagliardi , E.; Hernández Peñalver, G., *Una herramienta para el cálculo y visualización de Sumas de Minkowski.* Workshop de Tecnología Informática Aplicada en Educación (CACIC 2002), 2002

[9] Taranilla, M.T; Kavka, G., Gagliardi, E.; Hernández Peñalver, G., *Una operación entre polígonos: Sumas de Minkowski*, CACIC 2002, Buenos Aires, 2002.

[10] Taranilla, M.T; Hernández Peñalver, G., *Descomposición en Sumas de Minkowski*, WICC 2003, Tandil, Buenos Aires, 2003.

[11] Taranilla, M. T.; Printista M.; Gagliardi E.; *Una Propuesta para mejorar el calculo de Sumas de Minkowski entre polígonos*, IX Congreso Argentino de Ciencias de la Computación (CACIC 2003), 2003.

[12] Taranillla, M. T.; Leguizamón, M.G.; Gagliardi, E. O.; Hernández Peñalver, G.; *Algoritmos genéticos para la descomposición en Sumas de Minkowski*, publicado en los anales del Workshop de Investigadores en Ciencias de la Computación (WICC'2004), Pag. 264-268, Neuquén, 2004.

[13] Taranillla, M. T.; Leguizamón, M.G.; Gagliardi, E. O.; Hernández Peñalver, G.; *Estudio de la aplicabilidad de un enfoque evolutivo para la descomposición en Suma de Minkowski* publicado en los anales del X Congreso Argentino de Ciencias de la Computación (CACIC 2004), La Matanza, Bs.As, 2004.

[14] Zhu C., Sundaram G., Snoeyink J., Mitchell J.: *Generating Random Polygons with Given Vertices*. Comput. Geom. 6, pp 277-290,1996.