

Apéndice I

I-1 Formalismo de la Matriz Densidad

Teniendo en cuenta el carácter estadístico del proceso de decaimiento nuclear de un determinado material dopado con una sonda radiactiva y la posible interacción hiperfina entre el núcleo y el campo extranuclear, trabajaremos en el formalismo de la matriz densidad. La idea de este apartado es llegar a una expresión sencilla para el factor de perturbación donde pueda factorizarse la parte que dependa solo del campo extranuclear.

Supongamos que un determinado número de núcleos que están decayendo del estado inicial I_i (con espín I_i) al estado intermedio I (con espín I) están descritos por la matriz densidad ρ_i . El proceso se lleva a cabo luego de emitir cada núcleo radiación γ_1 en la dirección \hat{k}_1 . El estado intermedio I está descrito por la matriz $\rho(\hat{k}_1)$. La transición del estado I al estado final I_f se analiza de la misma forma, entonces la matriz en este estado será $\rho_f(\hat{k}_1, \hat{k}_2)$.

En el estado inicial I_i , se supone que los subestados $|I_i m_i\rangle$ están igualmente poblados debido a que solo consideramos que existe una interacción hiperfina luego de haberse emitido γ_1 . Si H_1 es el hamiltoniano de interacción entre el campo cristalino y el núcleo correspondiente a la transición $I_i \rightarrow I$, entonces, los elementos de matriz de $\rho_a(\hat{k}_1)$ pueden expresarse como (Rentería, trabajo de diploma):

$$\langle m | \rho_a(\hat{k}_1) | m' \rangle = S_1 \sum_{m_i} \langle m | H_1 | m_i \rangle \langle m_i | H_1^+ | m' \rangle \quad (\text{I.1})$$

donde S_1 simboliza sumatoria sobre las propiedades que no se miden en el experimento (espín, polarización de la radiación, etc).

Debido a que existe una interacción entre el GCE y el momento cuadrupolar del núcleo en el estado intermedio, la matriz $\rho_a(\hat{k}_1)$ al final de la primera transición $I_i \rightarrow I$ no es igual a la matriz $\rho_b(\hat{k}_1)$ que describe el estado inicial de la segunda transición $I \rightarrow I_f$. El campo extranuclear causa transiciones entre los subestados m del estado I , este proceso se puede esquematizar como sigue:

$$\rho_a(\hat{k}_1) \quad \rightarrow \quad \rho_b(\hat{k}_1)$$

interacción
hiperfina

Esta interacción transcurre durante el intervalo de tiempo que el núcleo se encuentra en el estado intermedio.

Este cambio puede atribuirse a una transformación unitaria $\Lambda(t)$ que describa la evolución temporal de los subestados $|m\rangle$ en el estado I. Si H_Q es el hamiltoniano de la perturbación extranuclear, entonces, $\Lambda(t)$ cumple:

$$\frac{\partial \hat{\Lambda}(t)}{\partial t} = \frac{-i}{\hbar} \hat{H}_Q \hat{\Lambda}(t) \quad (\text{I.2})$$

De modo que la solución es:

$$\hat{\Lambda}(t) = e^{-\frac{i}{\hbar} \int_0^t \hat{H}_Q(t') dt'} \quad (\text{I.3})$$

Según se han definido $\rho_a(\mathcal{k}_1)$ y $\rho_b(\mathcal{k}_1)$, suponiendo que el núcleo se encuentra un tiempo t en el estado I, se puede escribir $\rho_a(\mathcal{k}_1) = \rho(\mathcal{k}_1)$ y $\rho_b(\mathcal{k}_1) = \rho(\mathcal{k}_1, t)$. De este modo, la matriz densidad que describe el sistema en el estado inicial del segundo proceso se puede expresar en función del operador evolución temporal $\Lambda(t)$ como [Frauenfelder, 1965]:

$$\hat{\rho}(\mathcal{k}_1, t) = \hat{\Lambda}(t) \hat{\rho}(\mathcal{k}_1) \hat{\Lambda}^\dagger(t) \quad (\text{I.4})$$

$$\langle m | \rho(\mathcal{k}_1, t) | m' \rangle = \sum_{m_a, m'_a} \langle m | \Lambda(t) | m_a \rangle \langle m_a | \rho(\mathcal{k}_1) | m'_a \rangle \langle m'_a | \Lambda^\dagger(t) | m' \rangle \quad (\text{I.5})$$

Ahora, si H_2 es el hamiltoniano de la transición $I \rightarrow I_f$ y si $\rho_f(\mathcal{k}_1, \mathcal{k}_2, t)$ es la matriz densidad del sistema luego de haber transcurrido la cascada γ - γ . Entonces, sus elementos de matriz serán [Frauenfelder, 1965]:

$$\langle m | \rho_f(\mathcal{k}_1, \mathcal{k}_2, t) | m' \rangle = \sum_{m_b, m'_b} \langle m | H_2 | m_b \rangle \langle m_b | \rho(\mathcal{k}_1, t) | m'_b \rangle \langle m'_b | H_2^\dagger | m' \rangle \quad (\text{I.6})$$

La función de correlación angular es la traza de la matriz densidad $\rho_f(\mathcal{k}_1, \mathcal{k}_2, t)$ [Darriba, 2004]:

$$W(\mathcal{k}_1, \mathcal{k}_2, t) = \sum_{\substack{m_a, m'_a \\ m_b, m'_b}} \langle m_a | \rho(\mathcal{k}_1) | m'_a \rangle \langle m'_b | \rho(\mathcal{k}_2) | m_b \rangle \langle m_b | \Lambda(t) | m_a \rangle \langle m'_b | \Lambda(t) | m'_a \rangle \quad (\text{I.7})$$

En la última expresión se pueden apreciar todos los procesos involucrados en la cascada γ - γ : los elementos de matriz del operador evolución temporal contienen los efectos de la perturbación extranuclear; los elementos de matriz de las matrices densidad $\rho(k_1^{\nu})$ y $\rho(k_2^{\nu})$ están relacionados con la probabilidad de detectar γ_1 en la dirección k_1^{ν} y γ_2 en la dirección k_2^{ν} , respectivamente.

Si reemplazamos en la ecuación (I.4) la forma explícita de los elementos de matriz de $\rho(k_1^{\nu})$ y $\rho(k_2^{\nu})$ [Rentería, 1987]:

$$\langle m | \rho(k_1^{\nu}) | m' \rangle = \sqrt{4\pi} \sum_{K_1, N_1} (-1)^{I+m} A_{K_1}(\gamma_1) \begin{pmatrix} I & I & K_1 \\ m' & -m & N_1 \end{pmatrix} Y_{K_1}^{N_1} * (\theta_1, \varphi_1) \quad (\text{I.8})$$

$$\langle m | \rho(k_2^{\nu}) | m' \rangle = \sqrt{4\pi} \sum_{K_2, N_2} (-1)^{I+m'} A_{K_2}(\gamma_2) \begin{pmatrix} I & I & K_2 \\ m & -m' & N_2 \end{pmatrix} Y_{K_2}^{N_2} * (\theta_2, \varphi_2) \quad (\text{I.9})$$

La forma explícita para la función de correlación angular queda [Darriba, 2004]:

$$W(k_1^{\nu}, k_2^{\nu}, t) = 4\pi \sum_{K_1, K_2} A_{K_1}(\gamma_1) A_{K_2}(\gamma_2) [(2K_1+1)(2K_2+1)]^{-1/2} \sum_{N_1, N_2} G_{K_1 K_2}^{N_1 N_2}(t) Y_{K_1}^{N_1} * (\theta_1, \varphi_1) Y_{K_2}^{N_2}(\theta_2, \varphi_2) \quad (\text{I.10})$$

donde $G_{K_1 K_2}^{N_1 N_2}(t)$ es lo que se llama factor de perturbación y contiene la información de la interacción hiperfina, que usando (I.5) y (I.6) queda:

$$G_{K_1, K_2}^{N_1, N_2}(t) = \sum_{m_1, m_2} (-1)^{2I+m_1+m_2} [(2K_1+1)(2K_2+1)]^{1/2} \begin{pmatrix} I & I & K_1 \\ m_1' & m_1 & N_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & I & K_2 \\ m_2' & m_2 & N_2 \end{pmatrix} \times \\ \times \langle m_2 | \hat{\Lambda}(t) | m_1 \rangle \langle m_2' | \hat{\Lambda}(t) | m_1' \rangle^* \quad (\text{I.11})$$

donde los símbolos $\begin{pmatrix} I & I & K_1 \\ m_1' & m_1 & N_1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} I & I & K_2 \\ m_2' & m_2 & N_2 \end{pmatrix}$ son los símbolos 3-j de Wigner y

se definen a partir de los coeficientes de Clebsch-Gordan por:

$$\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} = (-1)^{j_1-j_2-j_3} (2j_3+1)^{-1/2} \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | j_3 - m_3 \rangle \quad (\text{I.12})$$

Ahora dadas las autofunciones $\langle \overset{\circ}{K}\sigma | Lm\pi \rangle$, donde $\overset{\circ}{K}$ y σ son la dirección y polarización de una dada emisión y L , m y π son los autovalores de los operadores de momento angular, componente z del momento angular y paridad, respectivamente, definidas respecto de un sistema Z cuyo origen coincide con la fuente de radiación, vamos a relacionarlas con las mismas autofunciones pero en un sistema donde $\overset{\circ}{K} \equiv Z$, y así ver el significado de los coeficientes 3-j de Wigner. Para esto se utilizan las matrices $D_{\mu m}^L(\overset{\circ}{K} \rightarrow \overset{\circ}{Z})$ del grupo de rotación tridimensional en la representación irreducible D^L $2L+1$ dimensional, de este modo:

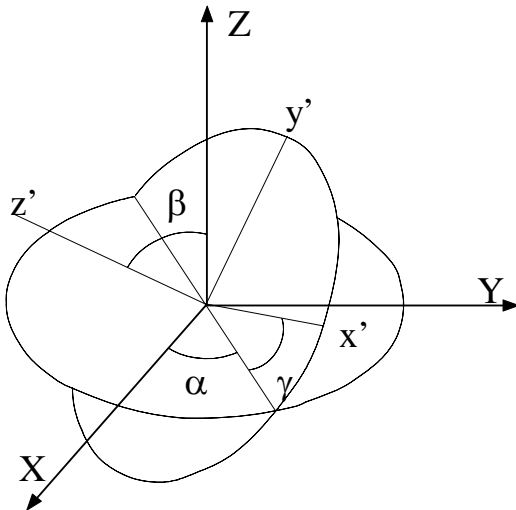
$$\langle \overset{\circ}{K}\sigma | Lm\pi \rangle = \sum \langle 0\sigma | L\mu\pi \rangle D_{\mu m}^L(\overset{\circ}{K} \rightarrow \overset{\circ}{Z}) \quad (\text{I.13})$$

Las matrices D^L del grupo de rotación tridimensional cumplen las siguientes propiedades útiles, de las cuales se deducen las propiedades de los símbolos 3-j:

$$D_{\mu m}^L(\overset{\circ}{K} \rightarrow \overset{\circ}{Z}) = D_{m\mu}^L * (\overset{\circ}{Z} \rightarrow \overset{\circ}{K}) \quad (\text{I.14})$$

$$D_{\mu m}^L D_{\mu' m'}^{L'} = \sum_K \langle L\mu L'\mu' | K\tau \rangle \langle Lm L'm' | KN \rangle D_{\tau N}^K$$

donde K varía desde $|L-L'|$ hasta $L+L'$, $N = m-m'$ y $\tau = \mu-\mu'$. Y la forma explícita para $m = 0$ y $\mu = 0$ es:



$$\begin{aligned} D_{\mu 0}^L(\alpha, \beta, \gamma) &= \left(\frac{4\pi}{2L+1} \right)^{1/2} Y_L^{\mu *}(\alpha, \beta) \\ D_{0 m}^L(\alpha, \beta, \gamma) &= \left(\frac{4\pi}{2L+1} \right)^{1/2} Y_L^{-m}(\alpha, \beta) \end{aligned} \quad (\text{I.15})$$

donde α , β y γ son los ángulos de Euler que definen la rotación de un sistema Z' ($\overset{\circ}{K}$ antes de la rotación) a un sistema Z (ver Figura I.1).

Figura I.1: ángulos de Euler α , β y γ que rota $\overset{\circ}{K}$ al sistema Z .

A partir de las propiedades (I.14) de las matrices D^L , los símbolos 3-j cumplen:

$$\sum_{j_3 m_3} (2j_3 + 1) \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m'_1 & m'_2 & m'_3 \end{pmatrix} = \delta_{m_1 m'_1} \delta_{m_2 m'_2}$$

$$\sum_{m_4 m_2} (2j_3 + 1) \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j'_3 \\ m_1 & m_2 & m'_3 \end{pmatrix} = \delta_{j_3 j'_3} \delta_{m_3 m'_3}$$

(I.16)

$$\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} j_2 & j_3 & j_1 \\ m_2 & m_3 & m_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} j_3 & j_1 & j_2 \\ m_3 & m_1 & m_2 \end{pmatrix}$$

$$(-1)^{j_1 + j_2 + j_3} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} j_2 & j_1 & j_3 \\ m_2 & m_1 & m_3 \end{pmatrix} = K$$