Algoritmos genéticos para la descomposición en Sumas de Minkowski

María Teresa Taranilla [(1)]
Mario Guillermo Leguizamón[(2)]
Edilma Olinda Gagliardi[(1)]

Gregorio Hernández Peñalver[(1)]

Departamento de Informática
Facultad de Ciencias Físico, Matemáticas y Naturales
Universidad Nacional de San Luis, Argentina
{tarani, oli, legui}@unsl.edu.ar
Fax: 54-2652-430224

Departamento de Matemática Aplicada
Facultad de Informática
Universidad Politécnica de Madrid, España
gregorio@fi.upm.es
Fax: 34-91-3367426

Resumen:

La suma de Minkowski es utilizada en las más diversas áreas, tales como robótica, diseño y fabricación asistida por computadora (CAD/CAM), procesamiento de imágenes, sistemas de información geográfica y ubicación / marcado de moldes, entre otras.

Dados dos conjuntos P y Q $\subset R^2$, la suma de Minkowski de P y Q, denotada por $P \oplus Q$ se define como $P \oplus Q = \{ p + q : p \in P, q \in Q \}$ donde p + q es el vector suma de los vectores p y q.

El problema que nos planteamos es el problema inverso al resuelto por la suma de Minkowski. Dado un polígono S, ¿existen polígonos P y Q tales que S es la suma de Minkowski de P y Q, es decir, $S = P \oplus Q$?

En este artículo presentamos nuestra línea actual de trabajo referida a la descomposición de polígonos en sumas de Minkowski.

1. Introducción

Este trabajo forma parte de un proyecto iniciado por el grupo de interés en Geometría Computacional de la Universidad Nacional de San Luis conjuntamente con docentes de la Universidad Politécnica de Madrid y se enmarca dentro de la línea de trabajo en *Geometría Computacional y Bases de Datos*, en la UNSL, aportando nuevos enfoques y técnicas algorítmicas a las líneas de investigación ya establecidas en su Departamento de Informática dentro del *Proyecto Tecnologías Avanzadas de Bases de Datos* 22/F314.

Dentro de la línea de trabajo, el tema particular de nuestra investigación se ha centrado principalmente en el estudio de las sumas de Minkowski. Hemos estudiado su contexto teórico, propiedades geométricas y aplicaciones más destacadas. En tal sentido, hemos realizado un estudio que muestra el estado del arte del tema presentando los aspectos teóricos y prácticos más relevantes y además hemos desarrollado una herramienta que implementa la suma de Minkowski entre distintos tipos de polígonos [2], [6], [7], [8]. También realizamos una propuesta para mejorar el cálculo de la suma de Minkowski de polígonos haciendo énfasis en el rendimiento de los algoritmos que la calculan [10].

Actualmente estamos trabajando en el problema inverso al resuelto por la suma de Minkowski, la descomposición de polígonos convexos en sumas de Minkowski [9]. En el presente artículo, describimos el problema de la descomposición de polígonos convexos en sumas de Minkowski y el enfoque con el cual estamos trabajando para resolverlo, los Algoritmos Genéticos.

(1) Proyecto Tecnologías Avanzadas de Bases de Datos 22/F314, Departamento de Informática, UNSL.
Proyecto AL2002-1010-2.43/ AL2003-1010-2.55/ AL2004-1010-2.53 Geometría Computacional, UPM.
(2) Laboratorio de Investigación y Desarrollo en Inteligencia Computacional, Departamento de Informática, UNSL.

Este artículo está organizado de la siguiente manera, en la sección 2 introducimos el problema de la descomposición de polígonos en sumas de Minkowski, en la sección 3 mostramos la formulación del problema y un breve análisis de posibles situaciones que pueden ocurrir en la evaluación de una solución. Seguidamente, en la sección 4 se presenta una propuesta general para resolverlo utilizando Algoritmos Genéticos. Finalmente, las conclusiones y propuestas de trabajos futuros son consideradas.

2. Descomposición de polígonos en sumas de Minkowski

Dados dos conjuntos P y $Q \subset \mathbf{R}^2$, la suma de Minkowski de P y Q, denotada por $P \oplus Q$ se define como $P \oplus Q = \{ p + q : p \in P, q \in Q \}$ donde p + q es el vector suma de los vectores p y q. Es decir que dados los puntos $p = (p_x, p_y)$ y $q = (q_x, q_y)$, tenemos que $p + q = (p_x + q_x, p_y + q_y)$.

En el campo de la robótica, las sumas de Minkowski son utilizadas en la planificación de movimientos de robots para describir el espacio prohibido en el cálculo de un camino libre de colisiones para un robot [1], [4].

Consideremos un obstáculo P y un robot R que se mueve por el plano mediante sucesivas traslaciones. La ubicación del robot en el plano está determinada por un punto interior r que sirve como punto de referencia del robot. Si tomamos dicho punto interior r como origen de coordenadas y construimos R', figura simétrica de R respecto del origen, $P \oplus R'$ es el conjunto de ubicaciones del punto de referencia de R tales que $P \cap R \neq \emptyset$. Esta suma se denomina *espacio de configuración del obstáculo* o *C-obstáculo,* ya que si el punto de referencia de R está contenido en $P \oplus R'$ significa que el robot R chocará con P, es decir el espacio de obstáculos es el conjunto de puntos en los cuales está prohibido colocar el robot, pues colisionaría con el obstáculo P.

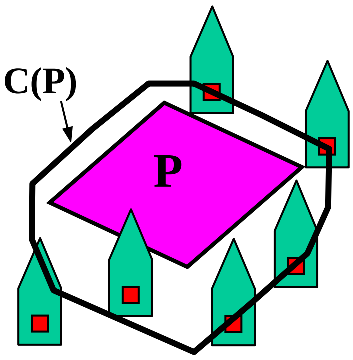

Figura 1: C-obstáculo correspondiente a P, ubicaciones posibles y prohibidas para el robot R.

Supongamos ahora que conocemos el C-obstáculo de cada uno de los obstáculos con el robot, pero por algún motivo no conocemos la forma original del robot. Sabemos que cada C-obstáculo es la suma de Minkowski de uno de los obstáculos con el robot, por lo tanto estamos interesados en descomponer cada uno de los C-obstáculos, para detectar la forma original del robot.

Es decir, en este caso nos preguntamos si todos los polígonos de una cierta familia $S_1, S_2, \ldots, S_n$, admiten un sumando común, es decir, si existe un polígono P tal que $S_k = P \oplus Q_k$ para $k=1, \ldots, n$.

En general planteamos el problema inverso al resuelto por la suma de Minkowski. Dado un polígono S convexo, encontrar polígonos P y Q tales que S es la suma de Minkowski de P y Q, es decir, S = $P \oplus Q$.

El algoritmo que detecta si un polígono convexo S, de n lados, admite un polígono de m lados como sumando de Minkowski toma un tiempo $O(n^m)$. En cambio, si queremos saber si el polígono S admite un sumando de Minkowski de número no precisado de lados, entonces la complejidad del algoritmo es exponencial, como se verá en la formulación del problema.

Debido a la complejidad del algoritmo que resuelve este problema hemos decidido aplicar Algoritmos Genéticos a la resolución de la descomposición de polígonos convexos en sumas de Minkowski.

Los Algoritmos Genéticos son una de las más conocidas y originales técnicas de resolución de problemas dentro de lo que se ha definido como "Algoritmos Evolutivos" (o "Computación Evolutiva"), término que agrupa a los Algoritmos Genéticos, las Estrategias Evolutivas y la Programación Evolutiva. Los Algoritmos Evolutivos son algoritmos de búsqueda inspirados en la genética de las poblaciones naturales. Ellos mantienen una población de individuos que representan las soluciones candidatas. Dicha población evoluciona en el tiempo a través de la competencia entre los individuos y una variación controlada de los mismos. A tal efecto se introduce una función de evaluación de los individuos, que llamaremos función de "fitness" y que está basada en la función objetivo del problema. Igualmente se introduce un mecanismo de selección de manera que los individuos con mejor evaluación sean escogidos para "reproducirse" más a menudo que aquellos de peor calidad [3].

3. Formulación del problema

Dado un polígono convexo S de n lados, queremos encontrar dos polígonos convexos P y Q de k y k' lados respectivamente, tales que S sea la suma de Minkowski de P y Q, es decir, $S=P \oplus Q$.

La idea en general es la siguiente, elegimos cierta cantidad de lados de S en orden y armamos un polígono P que debe ser simple[1] y convexo. Luego, el polígono Q que también deberá ser simple y convexo, se obtiene con los lados restantes de S. Calculamos $P \oplus Q$, obteniendo S'. Luego debemos comparar S con S', para saber cuánto se aproxima la solución obtenida a S. Para ello debemos determinar una medida de la diferencia entre $P \oplus Q$ y S. Una vez obtenidos los posibles candidatos P y Q, debemos comprobar que sean polígonos simples, convexos y cerrados, y luego calcular $P \oplus Q$ y comparar cuánto se aproxima esta solución a S. Para ello debemos determinar una medida de la diferencia entre $P \oplus Q$ y S.
La medida que hemos elegido es el área de la diferencia simétrica entre ambos polígonos, que denotaremos Δ, y ésta será la función objetivo a minimizar.

Dado S un polígono convexo de n lados. Sea $\mathcal{P}$ el conjunto de todos los posibles polígonos de r lados, con $2 <= r <=n-2$ El problema consiste en:

$$Min\ f(P)= Area((P \oplus Q)\Delta S)$$

donde P y $Q \in \mathcal{P}$ y Q se construye con los lados de S que no forman parte del polígono P.

Durante obtención de una solución puede ocurrir que con la sucesión de lados elegidos para armar P o Q, obtengamos un polígono que no sea simple, o que no sea convexo entonces P o Q se consideran soluciones no factibles. También puede suceder que la sucesión de lados elegidos para armar P no formen un polígono cerrado, en ese caso agregamos a P un lado a^* tal que se cumpla que $a_1+a_2+...+a_r+a^*=0$, es decir cerramos a P. Lo mismo puede ocurrir con Q. Por lo tanto, r puede tomar valores entre 2 y n-2.

4. Propuesta para resolver este problema a través de un Algoritmo Genético

Para llevar a la práctica la propuesta anterior y concretarla en un Algoritmo Genético, hay que especificar los siguientes elementos:

- Una representación
- Una medida de evaluación o función objetivo
- Un criterio de selección
- Operadores genéticos

[1] Un polígono es simple cuando ninguno de sus lados se intersecan entre sí.

Previamente diremos que *n*, el número de lados de *S* es el tamaño del problema. Y además, que se puede considerar al espacio de soluciones al conjunto formado por todos los polígonos *P* de *k* lados, tal que $2<=k<=n-2$**.** El polígono *P* sumado a otro polígono *Q*, obtenido como el complemento de *P*, nos permitirá encontrar la solución que más se aproxime a *S*.

A continuación describimos algunos de los componentes del Algoritmo Genético que estamos desarrollando, haciendo énfasis en la representación y en la definición de la función objetivo que se va a minimizar.

Representación

La mayoría de las veces, una codificación correcta es la clave de una buena resolución del problema. Para este problema, en principio vamos a usar un string binario de *n* bits para representar un polígono *P*. Un 1 en el gen *i* significa que el lado *i* de S forma parte del polígono *P*, y un 0 que no forma parte, con la restricción de que en el cromosoma hay entre 2 y *n*-2 bits con valor 1.

Función objetivo

La función objetivo *F* recibe como parámetro el string binario que representa una secuencia de lados que formarán parte de *P*. Se obtiene *Q* como complemento del *C* recibido como parámetro.

Se deben decodificar esos cromosomas obteniendo la representación geométrica del polígono *P* y del polígono *Q*. Posteriormente se debe comprobar la factibilidad de la solución; es decir, comprobar si la secuencia de lados que conforma tanto a *P* como la que conforma a *Q* forman polígonos cerrados, simples y convexos.

En principio debemos comprobar que la secuencia de lados que conforman al polígono *P* sea una cadena cerrada, sino esto no ocurre, la cadena poligonal puede ser completada para que cierre. La misma comprobación debe hacerse para el polígono *Q*.

Luego, comprobamos que los polígonos *P* y *Q* sean simples y convexos. Si alguno de los polígonos no cumple estas condiciones la solución no es factible.

Después, se calcula *S´* como $P \oplus Q$, luego se calcula la diferencia simétrica entre *S* y *S´* y devuelve el área de la diferencia simétrica de *S* y *S´*.

En la figura 3 damos un descripción detallada de los conceptos descriptos previamente.

```
Función F (C: cromosoma)
  Obtener P  a partir de C
  Procesar (P): Si  P no está cerrado  entonces Cerrar(P)
                Si  P no es simple o no es convexo, no es una solución factible.
  Obtener Q a partir de C
  Procesar (Q): Si  Q no está cerrado entonces Cerrar(Q)
                Si Q  no es simple o no es convexo, no es una solución factible.
  Calcular S´ = P ⊕ Q
  Calcular la  diferencia simétrica entre  S y S´
  Calcular el  área de la diferencia simétrica entre S  y S´
  Retornar área de la diferencia simétrica
```

Figura 3: Función objetivo de un individuo de la población.

El resto de los componentes del Algoritmo Genético están vinculados con la implementación en sí y no serán descriptos aquí. Sólo se destaca que para la representación elegida existen varias alternativas de operadores genéticos que se podrían aplicar, aunque será necesario incorporar alguna técnica de manejo de restricciones en el Algoritmo Genético propuesto.

5. Conclusiones

En este artículo proponemos el uso de los Algoritmos Genéticos para resolver el problema de la descomposición de polígonos convexos en sumas de Minkowski. Para ello se realizó la formulación del problema en términos de la minimización de una función objetivo. El Algoritmo Genético que se utilizará es descripto en forma general destacando aquellas componentes que tienen que ver con la representación de las soluciones y su evaluación. Adicionalmente fueron considerados distintos casos de soluciones no factibles.

Actualmente estamos trabajando en la implementación completa del Algoritmo Genético y un estudio experimental. Asimismo, como propuesta futura se pretende atacar este problema usando otro tipo de metaheurísticas.

Nuestro trabajo se desarrolla dentro de la línea de trabajo *Geometría Computacional y Bases de datos*, en colaboración con docentes de la Universidad Politécnica de Madrid, con el apoyo de integrantes del grupo LIDIC, específicamente de la línea Metaheurísticas.

6. Referencias

[1] de Berg, M; Kreveld, Overmars, M; Schwarzkopf. *Computational Geometry: algorithms and applications*, Springer Verlag, 1997

[2] Gagliardi, E.; Taranilla, M.T; Berón, M.; Hernández Peñalver, G., *La Geometría Computacional a nuestro alrededor*. WICC 2002. Bahía Blanca, 2002.

[3] Michalewicz, Zbigniew. *Genetic algorithms + data structures = evolution programs,* Springer Verlag, 1997

[4] Latombe, J.C. *Robot Motion Planning*, Kluwer Academic Publisher, Boston, MA, 1991.

[5] Preparata,F.; Shamos,M. *Computational Geometry: an Introduction*, Springer Verlag, NY 1985.

[6] Taranilla, M.T, Kavka, G.; *Implementación de una herramienta para el cálculo y visualización de sumas de Minkowski*. UNSL, 2002.

[7] Taranilla, M.T.; Kavka, G.; Gagliardi , E.; Hernández Peñalver, G., *Una herramienta para el cálculo y visualización de Sumas de Minkowski.* Workshop de Tecnología Informática Aplicada en Educación (CACIC 2002), 2002

[8] Taranilla, M.T; Kavka, G., Gagliardi, E.; Hernández Peñalver, G., *Una operación entre polígonos: Sumas de Minkowski*, CACIC 2002, Buenos Aires, 2002.

[9] Taranilla, M.T; Hernández Peñalver, G., *Descomposición en Sumas de Minkowski*, WICC 2003, Tandil, Buenos Aires, 2003.

[10] Taranilla, M. T.; Printista M.; Gagliardi E.; *Una Propuesta para mejorar el calculo de Sumas de Minkowski entre polígonos,* IX Congreso Argentino de Ciencias de la Computación (CACIC 2003), 2003.