Sobre la representación de S4.3.

Eduardo Bonelli   Matías Menni

Sobre la representación de S4.3.

Eduardo Bonelli Matías Menni

Trabajo de grado presentado al Departamento de Informática de la Universidad Nacional de La Plata como parte de los requisitos para obtener el título de Licenciado en Informática.

Directora: Dra. María Claudia Meré.
Co-Director: Prof. Gabriel Baum.

Departamento de Informática,
Facultad de Ciencias Exactas, UNLP.

La Plata, 23 de Septiembre de 1996.

Resumen

En 1935 Gerhard Gentzen introdujo un formalismo sintáctico para representar lógicas llamado Cálculo de Secuentes. El mismo es adecuado para analizar propiedades de la lógica, facilita un conocimiento más profundo del comportamiento individual de cada uno de los operadores de la misma y en muchos casos se puede usar para implementar un demostrador de teoremas para la misma, todo esto a través del estudio de las pruebas que en ese sistema deductivo pueden construirse.

Una de las reglas de inferencia del Cálculo de Secuentes es de particular importancia en el estudio de propiedades metalógicas, la regla de Corte. Esta incorpora dentro del cálculo el uso de lemas. Los lemas son útiles para demostrar nuevos teoremas rápidamente, pero desde un punto de vista metalógico estamos interesados en estudiar pruebas sin elementos redundantes. Es fundamental entonces que un cálculo permita la construcción de una prueba sin aplicaciones de la regla de Corte para cada teorema. Esta propiedad se conoce como Propiedad de Eliminación de la Regla de Corte y trae como corolario propiedades tan importantes como consistencia, decidibilidad, interpolación, etc.

Así, cualquier estudio relativo a una lógica tiene en cuenta la formulación de un Cálculo de Secuentes asociado como metodología básica para la comprensión de la misma. Las lógicas modales no constituyen una excepción. En este trabajo analizamos el Cálculo de Secuentes de S4.3, una lógica modal particular. Esta lógica también es una lógica temporal en el sentido que puede usarse para razonar sobre aserciones basadas en el tiempo, lineal y contínuo.

En la literatura encontramos un solo Cálculo de Secuentes (al estilo Gentzen, o *a la* Gentzen) para S4.3. Este cálculo presenta ciertas diferencias significativas respecto a aquellos formulados originalmente por Gentzen (llámense *representaciones standard*). Específicamente, una de las reglas de inferencia correspondiente al operador *necesidad* es complicada y su escritura en el formalismo resulta intrincada.

Sin embargo, es importante destacar que esta representación goza de la Propiedad de Eliminación de la Regla de Corte.

Surge entonces la siguiente pregunta. ¿ Habrá una representación standard para S4.3 que goce de la Propiedad de Eliminación de la Regla de Corte ? Formalizando la noción de representación standard dentro de las representaciones *a la* Gentzen, veremos que si aceptamos cierta conjetura que se expone en el capítulo 3, tal cálculo es imposible de obtener.

Esto nos lleva a estudiar un formalismo alternativo para representar lógicas modales que altera la definición de secuente en el sentido que incorpora la noción de verdad relativa dentro de las reglas. Este formalismo fue originalmente definido para representar lógicas modales *intuicionistas* de modo que debemos alterar las definiciones básicas de forma de poder trabajar en un marco *clásico*.

Usando este formalismo obtenemos un cálculo para S4.3 que goza de la Propiedad de Eliminación de la Regla de Corte y cuyas reglas son intuitivamente sencillas. Es importante notar que la demostración de la Propiedad de eliminación de la Regla de Corte es *sintáctica*. Además, el formalismo tiene otras ventajas. El uso del cálculo es ameno y natural, en numerosos ejemplos se verá que la construcción de pruebas en el cálculo es muy sencilla e intuitiva. Además se logra una independencia de las reglas de introducción de los operadores modales. De hecho, de el cálculo para S4.3 se puede extraer un cálculo para S4 sin modificar las reglas de introducción para los operadores modales. Sencillamente se quita del cálculo una regla que "exige" la propiedad de conexión sobre la relación de accesibilidad de los modelos de Kripke de la lógica.

Contenidos.

Lista de Figuras.

Capítulo 1

Objetivos y organización.

1.1 Introducción.

La Teoría de la Prueba consiste en formalizar las pruebas matemáticas y estudiar la estructura de las mismas como método de estudio de la matemática. Tiene en común con la Teoría de la Computación el análisis de procesos simbólicos. En este sentido la Teoría de la Computación ha contribuido al desarrollo y fomento del estudio de las Pruebas como entes sintácticos. La automatización de inferencias lógicas y la demostración automática de teoremas dentro de la lógica matemática tiene sus raices en esta simbiosis. La Teoría de la Computación ha logrado que el campo de estudio de la lógica matemática cobre un nuevo auge.

Los formalismos del área de Teoría de la Prueba con que trataremos son sistemas *a la* Hilbert y Cálculo de Secuentes. Es importante destacar que estamos interesados en cálculos de secuentes que tengan la propiedad de *eliminación de corte*. La eliminación de corte garantiza que el uso de lemas dentro del sistema deductivo es redundante y además permite el estudio de pruebas normales. Esto último es de extrema utilidad en el área de deducción automatizada.

La Lógica Modal intenta formalizar los conceptos de *necesidad* y *posibilidad*. Hasta fines de la década de los '50 no se había determinado una noción apropiada de semántica para ella. Con los modelos de Kripke la Lógica Modal reactivó la investigación en esta área. La correspondencia entre los modelos de Kripke y los Sistemas de Transición etiquetados hizo que la Teoría de Computación tomara parte activa en este proceso de reactivación.

Como bien es sabido, en lógica clásica la implicación $A \supset B$, llamada *implicación material*, es equivalente a la disyunción $\neg A \vee B$. En efecto, podemos verificar que las funciones de verdad asociadas a ambas fórmulas coinciden. De hecho, la validez de $A \supset B$ no precisa que haya alguna relación entre A y B. Podemos ilustrar con un ejemplo sencillo.

los monos vuelan implica materialmente a *1+1=3*

Algunas personas consideran a esto como una paradoja, una de ellas es Clarence Irving Lewis ([13]). Según Lewis en la aserción "si A entonces B" interviene el concepto de imposibilidad, esto es, "es imposible que A sea verdadera y que B sea falsa". Consecuentemente, Lewis uso un operador para denotar *posibilidad*, a saber, $\Diamond$. Ahora podemos interpretar a la última aserción como $\neg\Diamond(A \wedge \neg B)$ (A *implica estrictamente* a B).

Con la introducción del operador de *necesidad* $\Box$ y la equivalencia clásica entre $\Box$ y $\neg\Diamond\neg$ podemos reescribir a "A implica estrictamente a B" como $\Box(A \supset B)$ (también denotado aveces como $A \prec B$).

Seguidamente comienza el estudio por parte de Lewis (y Langford ([14])) de lógicas proposicionales modales, introduciendo los sistemas llamados por ellos como S1, S2, S3, S4 y S5.

Curry ([5]) parece haber sido el primero en formular cálculos de secuentes y de deducción natural para S4.

Respecto de S4.3, Zeman ([26]) da un sistema de tableau libre de corte para S4.3 y un cálculo de secuentes para la misma lógica sin eliminación de corte. Goré ([10]) en su tesis demuestra eliminación de corte semántica para el calculo de secuentes asociado al sistema de tableau de Zeman de S4.3. Shimura ([22]) presenta una prueba de eliminación de corte sintáctica para la misma formulación en secuentes de S4.3. Este cálculo tiene un número variable de premisas[1].

1.2 Objetivos.

En 1935 Gerhard Gentzen introdujo un formalismo sintáctico para representar lógicas llamado Cálculo de Secuentes. El mismo es adecuado para analizar propiedades de la lógica, facilita un conocimiento más profundo del comportamiento individual de cada uno de los operadores de la misma y en muchos casos se puede usar para implementar un demostrador de teoremas para la misma, todo esto a través del estudio de las pruebas que en ese sistema deductivo pueden construirse.

Una de las reglas de inferencia del Cálculo de Secuentes es de particular importancia en el estudio de propiedades metalógicas, la regla de Corte. Esta incorpora dentro del cálculo el uso de lemas. Los lemas son útiles para demostrar nuevos teoremas rápidamente, pero desde un punto de vista metalógico estamos interesados en estudiar pruebas sin elementos redundantes. Es fundamental entonces que un cálculo permita la construcción de una prueba sin aplicaciones de la regla de Corte para cada teorema. Esta propiedad se conoce como Propiedad de Eliminación de la Regla de Corte y trae como corolario propiedades tan importantes como consistencia, decidibilidad, interpolación, etc.

Así, cualquier estudio relativo a una lógica tiene en cuenta la formulación de un Cálculo de Secuentes asociado como metodología básica para la comprensión de la misma. Las lógicas modales no constituyen una excepción. En este trabajo analizamos el Cálculo de Secuentes de S4.3, una lógica modal particular. Esta lógica también es una lógica temporal en el sentido que puede usarse para razonar sobre aserciones basadas en el tiempo, lineal y contínuo.

En la literatura encontramos un solo Cálculo de Secuentes (al estilo Gentzen, o *a la* Gentzen) para S4.3. Este cálculo presenta ciertas diferencias significativas respecto a aquellos formulados originalmente por Gentzen (llámense *representaciones standard*). Específicamente, una de las reglas de inferencia correspondiente al operador *necesidad* es complicada y su escritura en el formalismo resulta intrincada.

Sin embargo, es importante destacar que esta representación goza de la Propiedad de Eliminación de la Regla de Corte.

Surge entonces la siguiente pregunta. ¿ Habrá una representación standard para S4.3 que goce de la Propiedad de Eliminación de la Regla de Corte ? Formalizando la noción de representación standard dentro de las representaciones *a la* Gentzen, veremos que si aceptamos cierta conjetura que se expone en el capítulo 3, tal cálculo es imposible de obtener.

Esto nos lleva a estudiar un formalismo alternativo para representar lógicas modales que altera la definición de secuente en el sentido que incorpora la noción de verdad relativa dentro de las reglas. Este formalismo fue originalmente definido para representar lógicas modales *intuicionistas* de modo que debemos alterar las definiciones básicas de forma de poder trabajar en un marco *clásico*.

Usando este formalismo obtenemos un cálculo para S4.3 que goza de la Propiedad de Eliminación de la Regla de Corte y cuyas reglas son intuitivamente sencillas. Es importante notar que la demostración de la Propiedad de eliminación de la Regla de Corte es *sintáctica*. Además, el

[1] Los trabajos citados en esta sección no han sido leídos por los autores. Esta breve reseña constituye una síntesis de aquellas presentadas en los trabajos de ([10]), ([24]) y ([19]).

formalismo tiene otras ventajas. El uso del cálculo es ameno y natural, en numerosos ejemplos se verá que la construcción de pruebas en el cálculo es muy sencilla e intuitiva. Además se logra una independencia de las reglas de introducción de los operadores modales. De hecho, de el cálculo para S4.3 se puede extraer un cálculo para S4 sin modificar las reglas de introducción para los operadores modales. Sencillamente se quita del cálculo una regla que "exige" la propiedad de conexión sobre la relación de accesibilidad de los modelos de Kripke de la lógica.

1.3 Organización.

El trabajo consiste en 4 capítulos adicionales cuyos contenidos se esquematizan a continuación.

El capítulo 2 introduce las nociones básicas de relaciónes de consecuencia, cálculo de secuentes y lógica modal. Las lógicas modales que se describen son S4 y S4.3. Para cada una de ellas se provee una axiomatización *a la* Hilbert, cálculo de secuentes y caracterización semántica.

El tercer capítulo presenta un marco de trabajo para describir cálculos de secuentes y formaliza la noción de *representación pura* o *standard*. También se formula una conjetura y se demuestra que si esta es válida entonces S4.3 no puede representarse con un número finito de reglas. Finalmente, para soportar la conjetura, se demuestra una versión débil de esta.

El penúltimo capítulo presenta una representación para S4.3 usando un nuevo formalismo basado en una adaptación del trabajo hecho por Simpson ([24]) sobre la Teoría de Pruebas y la semántica de lógicas modales intuicionistas. Se prueba la correctitud y completitud del cálculo y se demuestra eliminación sintáctica de la regla de corte.

El capítulo 5 concluye y comenta sobre trabajo futuro.

Capítulo 2

Teoría de Pruebas y Lógicas Modales.

2.1 Introducción.

Este trabajo es, a grandes rasgos, un trabajo sobre lógica. La lógica como rama de la ciencia o la filosofía ha atacado una gran variedad de temas relacionados con el razonamiento y la deducción y ha desarrollado muchas areas de estudio e investigación. Esta diversidad da lugar a numerosas visiones o enfoques que se pueden dar a "la lógica". De modo que es necesario establecer cual es el enfoque que se utilizará en este trabajo.

Este capítulo puede verse, entonces, como nuestra respuesta a las preguntas:

* ¿Qué es *la* lógica?
* ¿Qué es *una* lógica?

Más precisamente, la tesis trata sobre la representación de ciertas lógicas modales particulares interesantes para las ciencias de la computación. Por este motivo también tratamos de responder:

* ¿Qué es una lógica modal?
* ¿Qué tienen de interesante?
* ¿Qué es una representación de una lógica?
* ¿Por qué son importantes para las ciencias de la computación?

La organización del capítulo es la siguiente. La primera sección trata las *relaciones de consecuencia* que son el concepto que vamos a considerar fundamental en *la* lógica. Dentro de esta sección se estudiarán los sistemas de valuación y los sistemas de prueba como formas alternativas de definir relaciones de consecuencia. La segunda sección trata en detalle los sistemas de prueba *a la* Gentzen. Se presentan algunos ejemplos de su utilización para representar lógicas, se explica la importancia de la regla de corte y de su eliminación y se destaca la importancia de este tipo de sistemas en las ciencias de la computación. Por último se definen los conceptos básicos de lógica modal, su sintaxis y semántica y se presentan ejemplos particulares enunciando en cada caso teoremas de caracterización.

2.2 Relaciones de consecuencia.

La lógica trata sobre la "verdad" de "enunciados". Estos enunciados serán formulados en algún "lenguaje". De modo que antes que nada debemos definir qué será un lenguaje para nosotros.

Definición 2.2.1 Un *lenguaje proposicional* L es un par (P, O) donde P es un conjunto numerable (que representa las variables proposicionales) y O es un conjunto de operadores cada uno con su correspondiente aridad. ■

El conjunto de *sentencias o fórmulas* de un lenguaje proposicional L es el menor conjunto que contiene a P y que esta clausurado por la aplicación de los operadores en O. Vamos a denotar con L ya sea al lenguaje o a las sentencias del lenguaje.

Podríamos definir una lógica sencillamente como un subconjunto de las fórmulas bien formadas de un lenguaje dado. La intuición de esta definición es que debido a algún criterio nosotros consideramos las fórmulas de la lógica como *verdaderas*. Sin embargo esta definición de lógica no parece ser lo suficientemente rica como para modelar nuestra noción de *verdad*. Por ejemplo, no refleja la posibilidad de considerar varios valores posibles de verdad. Tampoco permite observar cómo se relaciona la forma en que estan construídas las fórmulas de nuestro lenguaje y el valor de verdad que las fórmulas poseen. De modo que podríamos tratar de encontrar una definición diferente de lógica cuyas nociones primitivas sean las de valores de verdad y su comportamiento frente a los constructores del lenguaje. Esta visión de la lógica es la llamada *basada en satisfacción* ([21]).

Por otro lado, un conjunto de fórmulas (una lógica) puede estar definido de forma tal que si nos encontramos con una fórmula cualquiera no podamos determinar inmediatamente su pertenencia al conjunto. Si por algún motivo resulta necesario conocer el estado de pertenencia de esta fórmula a la lógica, debemos encontrar una forma de *demostrar* su situación. Esto da lugar a la noción de *prueba*. Esta noción también puede considerarse como fundamental y de esta forma, definir una lógica como las fórmulas que son demostrables. Esta visión es la llamada *basada en pruebas*.

A continuación veremos las definiciones que hacen precisas estas dos visiones alternativas sobre la lógica. Más adelante veremos que podemos definir una noción más abstracta que nos permitirá tratar todos estos aspectos de la lógica en forma más satisfactoria.

2.2.1 Sistemas de valuación.

Los sistemas de valuación consideran fundamentales los diferentes *valores de verdad* que las fórmulas pueden tener e interpretan los operadores del lenguaje como operaciones sobre estos valores.

Definición 2.2.2 Un *sistema de valuación* **M** para un lenguaje proposicional L es una terna (M, D, F) donde:

1. M es un conjunto con al menos dos valores; los valores de verdad.
2. D es un subconjunto no vacío de M; los valores de verdad designados.
3. F = $\{f_{op_1}, \ldots, f_{op_n}\}$ es un conjunto de funciones. Una para cada operador en O = $\{op_1, \ldots, op_n\}$ tales que f_{op_i}:$M^{aridad(op_i)} \longrightarrow M$. Decimos que f_{op} interpreta a *op*. ■

Definición 2.2.3 Una *asignación a* relativa a un sistema de valuación **M** = (M, D, F) para un lenguaje L = (P, O) es una función a:P $\longrightarrow$ M. ■

Cada asignación a relativa a un sistema de valuación **M** induce una *interpretación* v_a definida por:

1. v_a (p) = a(p), para p $\in$ P
2. v_a (op(A$_1$, ..., A$_n$)) = f_{op}(v_a (A$_1$), ..., v_a (A$_n$)), donde n es la aridad de *op* y f_{op} interpreta a *op*.

Con esta maquinaria podemos dar una definición más rica para aquellas fórmulas que nosotros considerábamos "verdaderas" y a las que llamábamos lógica.

Definición 2.2.4 Una fórmula A es *válida* en un sistema de valuación M si para toda asignación a relativa a M, $v_a(\mathrm{A}) \in \mathrm{D}$. ■

Como ejemplo puede considerarse la lógica clásica proposicional con el lenguaje usual y las tablas de verdad; en este caso, las fórmulas válidas son las tautologías. En la sección de lógicas modales se verán ejemplos menos triviales.

2.2.2 Sistemas de prueba.

Un sistema de pruebas es como una fábrica que nos permite producir objetos sintácticos compuestos por fórmulas que llamaremos *pruebas*. Las pruebas tienen un objeto destacado que es su *conclusión*. Las conclusiones de las pruebas son las que se corresponden con la austera definición de lógica que presentamos al principio.

Existen varios tipos o estilos de sistemas de prueba: sistemas *a la* Hilbert, *a la* Gentzen, sistemas de deducción natural y otros. En esta sección presentaremos los sistemas *a la* Hilbert como ejemplo y dejaremos los sistemas *a la* Gentzen para una sección posterior donde se tratarán en detalle.

Una presentación *a la* Hilbert consta de un conjunto de sentencias llamadas axiomas y un conjunto finito de reglas de inferencia.

Una *prueba* de A a partir del conjunto de premisas Γ es una secuencia finita de fórmulas que termina en A y tal que cada fórmula es:

1. uno de los axiomas o
2. una de las fórmulas en Γ o
3. es derivable a partir de fórmulas anteriores en la secuencia usando una de las reglas de inferencia.

Decimos que una sentencia A es un *teorema* si existe una prueba de A a partir de $\emptyset$. Los teoremas del sistema de pruebas son lo que originalmente llamábamos lógica.

Nuevamente, a modo de ejemplo, consideramos la axiomatización de la lógica clásica proposicional.

Los axiomas son los dados por los siguientes esquemas:

1. $\mathrm{A} \supset (\mathrm{B} \supset \mathrm{A})$
2. $(\mathrm{A} \supset (\mathrm{B} \supset \mathrm{C})) \supset ((\mathrm{A} \supset \mathrm{B}) \supset (\mathrm{A} \supset \mathrm{C}))$
3. $(\neg\mathrm{A} \supset \neg\mathrm{B}) \supset (\mathrm{B} \supset \mathrm{A})$

El sistema tiene una única regla de inferencia:

$$\frac{A \quad A \supset B}{B}$$

Otros ejemplos de sistemas *a la* Hilbert se verán en la sección de lógica modal.

2.2.3 Relaciones de consecuencia.

Las relaciones de consecuencia surgen al identificar y aislar ciertas propiedades comunes a los conjuntos de fórmulas determinados por los sistemas de valuación y los sistemas de prueba. Estas propiedades tomadas como una definición permiten capturar las relaciones entre fórmulas que se comportan como uno espera que toda lógica se comporte.

Más adelante vamos a considerar conjuntos finitos de fórmulas. Para facilitar la notación, convengamos en lo siguiente:

* Si estamos considerando un conjunto unitario, vamos a olvidarnos de las llaves. O sea, cuando queramos denotar el conjunto $\{A\}$ vamos a escribirlo: A.

* Si queremos destacar una de las fórmulas de un conjunto lo haremos de la siguiente forma: escribiremos Γ, A para denotar $\Gamma \cup \{A\}$.

Consideremos a L como el conjunto de fórmulas de un lenguaje proposicional.

Definición 2.2.5 Una *relación de consecuencia*[1] es una relación $\vdash \subseteq \wp_{Fin}(L) \times \wp_{Fin}(L)$ que satisface:

1. Reflexividad: $A \vdash A$
2. Transitividad o Cut: $\Gamma_1 \vdash \Delta_1, A$ y $A, \Gamma_2 \vdash \Delta_2$ implica $\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash \Delta_1, \Delta_2$.

■

Claramente, las relaciones de consecuencia son de naturaleza más abstracta que los sistemas de valuación o que los sistemas de prueba. Además, ambos tipos de sistemas dan lugar a relaciones de consecuencia. Por este motivo podemos afirmar que estas últimas generalizan estas visiones dadas por los sistemas de valuación y los sistemas de prueba.

Veamos ahora de que forma los sistemas de valuación dan lugar a relaciones de consecuencia. Supongamos que tenemos un lenguaje proposicional fijo L y un sistema de valuación M con valores de verdad en M y valores designados en D.

Definición 2.2.6 Γ *designa* Δ en M si para toda asignación a tal que $v_a(B) \in D$ para toda $B \in \Gamma$, entonces $v_a(A) \in D$ para alguna $A \in \Delta$. ■

En ([21]) se demuestra que la relación *designa* es una relación de consecuencia[2].

Los sistemas de prueba *a la* Hilbert dan lugar a una relación de consecuencia en forma más directa: $\Gamma \vdash \Delta$ sii existe una prueba a partir de Γ de una de las fórmulas en Δ.

De modo que a partir de los sistemas de valuación y de los sistemas de prueba podemos obtener relaciones de consecuencia. En este sentido podemos decir que las relaciones de consecuencia generalizan las otras dos formas de ver la lógica. Además, la definición de relación de consecuencia no restringe de ninguna manera la forma en que estas puedan definirse; no necesariamente debe provenir de un sistema de valuación o de un sistema de prueba.

Con esto pretendemos mostrar que las relaciones de consecuencia parecen ser el concepto fundamental en lógica. Los sistemas de valuación y los sistemas de prueba pueden verse como formas útiles de *presentar* relaciones de consecuencia. Los sistemas de valuación son útiles porque dan una semántica clara de los operadores de la lógica y los sistemas de prueba son sumamente importantes porque proveen un representación concreta de las relaciones de consecuencia y en algunos casos proveen procedimientos de decisión para determinar si una fórmula es o no teorema.

Así es que podemos decir que *la* lógica es la rama de la filosofía que estudia las relaciones de consecuencia, sistemas de valuación y sistemas de prueba. En el resto del trabajo y del mismo modo que en la mayor parte de la literatura, vamos a usar la palabra "lógica" para denotar a conjuntos de fórmulas arbitrarios. Usamos este nombre dado que estas *lógicas* siempre puden ser vistas como: $\{A \mid \emptyset \vdash A\}$ para alguna relación de consecuencia $\vdash$. Finalmente usaremos la palabra "representación" como sinónimo de "sistema de prueba" y distinguiremos entre representaciones *a la* Hilbert y representaciones *a la* Gentzen.

---

[1] Cabe aclarar que esta definición no es la más general ([2]).

[2] En realidad hace esto para una noción levemente distinta de relación de consecuencia, pero su razonamiento se aplica perfectamente a esta definición.

2.3 Cálculo de secuentes.

El Cálculo de Secuentes fue introducido por Gentzen en 1935 ([8]) como un sistema deductivo para presentar la lógica clásica. Este sistema deductivo manipula secuentes. Un secuente es un par (Γ,Δ) donde Γ (el antecedente) y Δ (el consecuente) denotan secuencias (posiblemente vacías) de fórmulas (lo anotaremos como $\Gamma\Rightarrow\Delta$). El significado intuitivo de un secuente (Γ,Δ) es que la conjunción de las fórmulas del antecedente implican la disyunción de las fórmulas del consecuente. Si Δ es vacío se dice que Γ es inconsistente. Cuando Γ y Δ son vacíos estamos ante la proposición falsa.

Si reemplazamos el "$\Rightarrow$" por "$\vdash$", el Cálculo de Secuentes puede verse como una relación de consecuencia. Se puede verificar que las propiedades de reflexividad y transitividad requeridas por la definición de relación de consecuencia se cumplen.

Dada la interpretación intuitiva asociada a un secuente, las reglas del cálculo que manipulan secuentes pueden verse en realidad como declaraciones de meta-nivel sobre probabilidad (en el sentido de probar).

2.3.1 Generalidades.

El Cálculo de Secuentes se origina a partir de la Deducción Natural (también debido a Gentzen [8]) como una formulación de la lógica de primer orden más adecuada para su teorema de normalización (conocido como Hauptsatz). Vale la pena mencionar que en su tesis ([19]) Prawitz definió una noción de reducción entre derivaciones en Deducción Natural y mostró que, usando estas reducciones, toda derivación puede llevarse a una forma normal. Esta noción de reducción en Deducción Natural se relaciona estrechamente con el proceso de eliminación de corte en el Cálculo de Secuentes ([27], [18]). En la Fig. 2.1 presentamos un Cálculo de Secuentes (el original formulado por Gentzen) para la lógica proposicional (clásica) al que nos referiremos como LKP.

El secuente $A\Rightarrow A$ de la regla (Id) se conoce como secuente básico. Las reglas de weakening, permutación y contracción son llamadas reglas estructurales. Se pueden interpretar de la siguiente manera: el orden de las fórmulas no es importante (permutación), una hipótesis o conclusion puede usarse tantas veces como se quiera (contracción) y finalmente, se pueden tener hipótesis y conclusiones superfluas (weakening). La regla de corte ocupa una posición particular dentro del cálculo por lo que la sección siguiente la tratará en más detalle. Cabe mencionar que la fórmula denotada por A en la misma se llama *fórmula de corte*. El resto de las reglas son llamadas *operacionales* y permiten introducir los operadores en el antecedente y en el consecuente, construyendo fórmulas más complejas.

Gentzen demostró que este cálculo es equivalente a la presentación *a la* Hilbert de la misma lógica.

Los cálculos de secuentes para las lógicas modales se obtendrán anexando al cálculo de arriba reglas para introducir en el antecedente y el consecuente los operadores modales.

La lógica proposicional intuicionista se obtiene de LKP restringiendo los consecuentes a tamaño uno como máximo. Esto implica que las reglas $(\Rightarrow Cont)$ y $(\Rightarrow Perm)$ ya no estarán en el cálculo.

Quizás uno de los logros más importantes de Gentzen al introducir su cálculo de secuentes fue resolver el problema de la negación. La ley del medio excluído no podía ser integrado a su cálculo de deducción natural NJ (intuicionista) sin quebrar el esquema de introducción-eliminación. En el formalismo de secuentes, la lógica clásica se obtiene permitiendo un número variable de fórmulas en el consecuente; el esquema de introducción-eliminación (o bien, introducción en el antecedente-introducción en el consecuente) queda intacto.

$$\frac{}{A\Rightarrow A}\,(Id) \qquad \frac{\Gamma\Rightarrow\Delta}{A,\Gamma\Rightarrow\Delta}\,(Weak\Rightarrow) \qquad \frac{\Gamma\Rightarrow\Delta}{\Gamma\Rightarrow\Delta,A}\,(\Rightarrow Weak)$$

$$\frac{A,A,\Gamma\Rightarrow\Delta}{A,\Gamma\Rightarrow\Delta}\,(Cont\Rightarrow) \qquad \frac{\Gamma\Rightarrow\Delta,A,A}{\Gamma\Rightarrow\Delta,A}\,(\Rightarrow Cont)$$

$$\frac{\Gamma,A,B,\Delta\Rightarrow\Theta}{\Gamma,B,A,\Delta\Rightarrow\Theta}\,(Perm\Rightarrow) \qquad \frac{\Gamma\Rightarrow\Delta,A,B,\Theta}{\Gamma\Rightarrow\Delta,B,A,\Theta}\,(\Rightarrow Perm)$$

$$\frac{\Gamma\Rightarrow\Phi,A \quad A,\Delta\Rightarrow\Theta}{\Gamma,\Delta\Rightarrow\Phi,\Theta}\,(Cut)$$

$$\frac{\Gamma\Rightarrow\Delta,A \quad \Gamma\Rightarrow\Delta,B}{\Gamma\Rightarrow\Delta,A\wedge B}\,(\Rightarrow\wedge) \qquad \frac{A,\Gamma\Rightarrow\Delta}{A\wedge B,\Gamma\Rightarrow\Delta}\,(\wedge\Rightarrow_1) \qquad \frac{B,\Gamma\Rightarrow\Delta}{A\wedge B,\Gamma\Rightarrow\Delta}\,(\wedge\Rightarrow_2)$$

$$\frac{\Gamma\Rightarrow\Delta,A}{\Gamma\Rightarrow\Delta,A\vee B}\,(\Rightarrow\vee_1) \qquad \frac{\Gamma\Rightarrow\Delta,B}{\Gamma\Rightarrow\Delta,A\vee B}\,(\Rightarrow\vee_2) \qquad \frac{A,\Gamma\Rightarrow\Delta \quad B,\Gamma\Rightarrow\Delta}{A\vee B,\Gamma\Rightarrow\Delta}\,(\vee\Rightarrow)$$

$$\frac{A,\Gamma\Rightarrow\Delta,B}{\Gamma\Rightarrow\Delta,A\supset B}\,(\Rightarrow\supset) \qquad \frac{\Gamma\Rightarrow\Phi,A \quad B,\Delta\Rightarrow\Theta}{A\supset B,\Gamma,\Delta\Rightarrow\Phi,\Theta}\,(\supset\Rightarrow)$$

$$\frac{A,\Gamma\Rightarrow\Delta}{\Gamma\Rightarrow\Delta,\neg A}\,(\Rightarrow\neg) \qquad \frac{\Gamma\Rightarrow A,\Delta}{\neg A,\Gamma\Rightarrow\Delta}\,(\neg\Rightarrow)$$

Figura 2.1: Cálculo de secuentes para la lógica clásica proposicional.

2.3.2 La regla de corte.

La regla de corte es de particular importancia.

Por un lado, formaliza la noción del uso de "lemas" dentro del cálculo. Bien puede decirse que una derivación que usa la regla de corte no va directamente a su objetivo (en algún momento se introdujo la fórmula de corte para luego ser eliminada).

Por otro lado, puede observarse que es la única regla de LKP que no cumple con la siguiente Propiedad de Subfórmula: toda fórmula en los secuentes superiores es subfórmula de alguna fórmula del secuente inferior (o conclusión). Por lo tanto, toda derivación de un secuente $\Gamma\Rightarrow\Delta$ que no hace uso de la regla de corte se caracteriza por la siguiente propiedad: toda fórmula que ocurre en algún secuente de la derivación es subfórmula de alguna fórmula de Γ o Δ.

La Propiedad de Subfórmula tiene importantes consecuencias. En ciertos casos, como ser el de LKP y LJP, se pueden demostrar la consistencia del cálculo y su decidibilidad.

Será de sumo interés entonces, poder mostrar que la regla de corte es una regla derivada en el cálculo. El teorema de eliminación de corte de Gentzen asegura justamente esto: toda derivación de $\Gamma\Rightarrow\Delta$ en LKP puede ser transformada en otra del mismo secuente pero en el que no aparecen aplicaciones de la regla de corte. Esta prueba, que puede hallarse en ([8]), se destaca en dos aspectos. Por un lado, Gentzen en realidad elimina una regla llamada Mix que es equivalente a Cut y que le soluciona un problema técnico que le presenta la regla de permutación. Por otro lado, cabe mencionar la naturaleza constructiva de la prueba. Podría escribirse un programa en una computadora que realice el procedimiento ahí descripto.

Ahora bien, hay en realidad dos formas básicas de demostrar que un cálculo es libre de corte:

i.Semántica: Se muestra que el cálculo sin la regla de corte es correcto y completo con respecto a la semántica que se esté considerando.

ii.Sintáctica: Se da un procedimiento mediante el cual una derivación con alguna aplicación de corte se transforma en otra del mismo secuente donde esa aplicación de corte fue eliminada, o bien, fue reemplazada por otra "menor" en algún sentido. La aplicación repetida de este proceso nos va a permitir eliminar sucesivamente todas las aplicaciones de corte. La prueba de Gentzen cae dentro de esta categoría.

Lograr una prueba de eliminación sintáctica es, en general, más difícil que la semántica. Esto último quizás obedece al carácter constructivo de la versión sintáctica. En muchos casos, antes de encarar una prueba de eliminación de corte sintáctica se prueba la versión semántica, garantizando así la existencia de alguna derivación sin corte para todos los teoremas de la lógica en cuestión y preparando el camino para la versión sintáctica. Otra ventaja de la versión sintáctica digna de mención es que es significativamente más rica desde un punto de vista computacional. El isomorfismo de Curry-Howard[3] junto con la prueba sintáctica de eliminación de corte nos brinda una relación de reducción o conversión entre los términos asociados a la derivaciones que se transforman en el cálculo.

2.3.3 El cálculo de secuentes y deducción automatizada.

El cálculo de secuentes tiene aplicaciones en el área de la demostración automática de teoremas o deducción automatizada. Puede ser usado para testear la validez de una fórmula[4]. Supongamos que queremos ver si $\Rightarrow A$ es teorema de una lógica L. La idea es usar las reglas al reverso (proceso llamado reducción), empezando por $\Rightarrow A$ como secuente final y tratando de llegar a algún árbol de prueba donde las hojas son secuentes básicos. De este modo, un cálculo de secuentes induce un espacio de búsqueda pues generalmente más de una regla es aplicable en un momento dado del proceso de reducción. En este momento se plantean numerosos interrogantes.

En relación con nuestra discusión sobre la regla de corte, usarla como reducción es semejante a adivinar la fórmula que fue cortada (pues no tiene ninguna relación con las fórmulas de la conclusión). Por lo tanto, esta regla es indeseable para nuestra búsqueda de pruebas ¿Podemos ignorarla durante nuestro proceso de búsqueda? El teorema de eliminacion de corte nos responde que sí.

En lo que resta y para ser más ilustrativos vamos a suponer que la lógica en cuestión es la lógica proposicional clásica y el cálculo de secuentes es LKP. Dado un secuente cualquiera en cualquier momento durante nuestro proceso de búsqueda podría reducirse usando la regla de contracción indefinidamente. De hecho, las reglas de contracción y permutación nos dicen que las secuencias de fórmulas se comportan como conjuntos. Consideremos ahora la regla de weakening. Vista como reducción nos dice que podemos eliminar fórmulas supérfluas ¿Pero cómo saber cuales son? No queda otra alternativa que probar todas las combinaciones, esto amplía sensiblemente nuestro espacio de búsqueda.

Estas consideraciones han llevado a la formulación del cálculo de secuentes presentado en la Fig. 2.2 para la lógica clásica proposicional. Los Γ y Δ son ahora conjuntos de fórmulas. Además A,Γ y Δ,A representan los conjuntos $\Gamma \cup \{A\}$ y $\Delta \cup \{A\}$.

Una característica fundamental del cálculo para que este proceso de búsqueda de pruebas sea exitoso es la *analicidad* ([10]). La idea es que para poder usar una regla de inferencia en sentido inverso las fórmulas de la/s premisa/s deben poder determinarse en forma predefinida o analítica. Es interesante observar que la Propiedad de Subfórmula nos garantiza la analicidad pero no es

[3]Originalmente formulado como un isomorfismo entre derivaciones en deducción natural de la lógica intuicionista proposicional y términos del λ-Cálculo tipado.

[4]Para lógicas decidibles.

$$\frac{}{\Gamma, A \Rightarrow A, \Delta}\ (Id)$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \quad \Gamma \Rightarrow \Delta, B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \wedge B}\ (\Rightarrow \wedge) \qquad \frac{A, B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A \wedge B, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ (\wedge \Rightarrow)$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A, B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \vee B}\ (\Rightarrow \vee) \qquad \frac{A, \Gamma \Rightarrow \Delta \quad B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A \vee B, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ (\vee \Rightarrow)$$

$$\frac{A, \Gamma \Rightarrow \Delta, B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \supset B}\ (\Rightarrow \supset) \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \quad B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A \supset B, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ (\supset \Rightarrow)$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow A, \Delta}{\neg A, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ (\neg \Rightarrow) \qquad \frac{A, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \neg A}\ (\Rightarrow \neg)$$

Figura 2.2: Presentación de LKP basada en conjuntos.

necesaria. Es posible que un cálculo no tenga la Propiedad de Subfórmula y sin embargo sea analítico[5].

Una particularidad de este cálculo es que dado que los Γ y Δ son conjuntos, al introducir un operador, dos fórmulas iguales podrían colapsarse. Veamos un ejemplo.

$$\frac{A \Rightarrow A, B, A \supset B}{\Rightarrow A, A \supset B}\ (\Rightarrow \supset)$$

La pregunta que inmediatamente surge es: Si las reglas se usan en el sentido inverso ¿Cómo podemos saber si se colapsó o no una fórmula?

Para el cálculo proposicional clásico puede mostrarse que sin duplicar fórmulas se retiene la completitud.

Para el cálculo clásico de primer orden esto no es así. Las reglas tradicionales:

$$\frac{\Gamma, A[t/x] \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \forall x A \Rightarrow \Delta}\ (\forall \Rightarrow) \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow A[t/x], \Delta}{\Gamma \Rightarrow \exists x A, \Delta}\ (\Rightarrow \exists)$$

deben reemplazarse por:

$$\frac{\Gamma, \forall x A, A[t/x] \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \forall x A \Rightarrow \Delta}\ (\forall \Rightarrow) \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \exists x A, A[t/x], \Delta}{\Gamma \Rightarrow \exists x A, \Delta}\ (\Rightarrow \exists)$$

De este modo, podemos asegurar que no hace falta duplicaciones de fórmulas salvo aquellas indicadas explícitamente por estas dos últimas reglas.

2.4 Lógicas modales y temporales.

[5]En ([10]), R.Goré presenta cálculos que no son libres de corte; sin embargo la regla de corte que él usa es analítica.

La Lógica Modal ([7, 3, 11, 12]) proviene originalmente de la rama de filosofía donde los filósofos estudiaban los diferentes "modos" de verdad, tales "modos" incluyen posibilidad, necesidad, obligación, conocimiento, creencia y percepción.

En una nota histórica en ([9]) se menciona a Aristóteles como uno de los iniciadores de la lógica modal debido a estudios que realizó sobre los conceptos de *necesidad* y *posibilidad*. Pero, como ya hemos mencionado, C. I. Lewis es considerado como el responsable del análisis contemporáneo de la lógica modal. El definió "A *implica estrictamente* B" como I(A∧¬ B) donde I es un operador primitivo de *imposibilidad*. Más tarde la definición fue expresada como $\neg\Diamond(A\wedge\neg B)$ donde $\Diamond$ es el operador de *posibilidad*. Basándose en la implicación estricta, Lewis definió 5 sistemas: S1 a S5.

La Lógica Temporal es un tipo especial de Lógica Modal que provee un sistema formal para razonar sobre cómo el valor de verdad de las aserciones varía con el tiempo. Entre otras características el tiempo puede considerarse lineal o ramificado, discreto o contínuo.

La Lógica Modal (en particular, la Lógica Temporal) es ampliamente usada en numerosas aplicaciones de las Ciencias de la Computación: verificación de propiedades de Sistemas Reactivos (respuesta eventual, accesibilidad garantizada, ausencia de respuesta no solicitada) ([15]), especificación de propiedades navegacionales de Sistemas de Hipermedia ([20]), verificación de programas concurrentes (ausencia de deadlock, fairness) ([17]), etc.

Hoy en día, las lógicas modales proposicionales se presentan agregando al lenguaje de las fórmulas los operadores $\Box$ y $\Diamond$ y extendiendo la formulación usual de lógica proposicional con axiomas y reglas para los nuevos operadores.

El lenguaje de fórmulas modales esta definido por la siguiente gramática BNF:
Fórmulas atómicas: p ∈ **VarProps**
Fórmulas: A ∈ Fma(**VarProps**)
$A ::= p \mid \bot \mid A \supset A \mid A \wedge A \mid A \vee A \mid \neg A \mid \Box A \mid \Diamond A$

En cuanto a la semántica de estos nuevos operadores, en ([9]) se discuten varias interpretaciones intuitivas. Podemos pensar en un conjunto de mundos donde valen, en cada uno de ellos determinadas "verdades". En este marco, $\Box$A significa que A vale en todos los mundos posibles, "A es necesariamente cierta". En cambio, $\Diamond$A significa que existe algún mundo donde vale A; es decir, "A es posible". Pueden considerarse varios tipos de necesidad, por ejemplo: necesidad *física*. En todos los mundos valen las leyes de la física. Por lo tanto, $\Box(E=m*c^2)$. En lógica temporal, nuestros mundos son instantes en el tiempo. En este caso, $\Box$A significa que *siempre* vale A mientras que $\Diamond$A significa que *en algún momento* A será verdad. Una interpretación más cercana al ámbito de la computación es la siguiente: nuestros mundos son los estados finales de determinado programa no determinístico y de esta forma $\Box$A significa que cada vez que el programa termina, vale A; $\Diamond$A quiere decir, en cambio, que existe alguna ejecución del programa que termina haciendo valer A. Entre finales de la década del '50 y principios de la del '60 Kripke y otros desarrollaron una semántica precisa e intuitiva para la lógica modal. La semántica de Kripke permitió aplicar la lógica modal a otras ramas de las matemáticas y a las ciencias de la computación; esto último debido a su estrecha relación con los sistemas de transición. A continuación definimos las nociones de modelo y validez.

Definición 2.4.1 Un *Frame* es un par F = (S, R), donde S es un conjunto no vacío y R una relación binaria en S. Informalmente S puede verse como un conjunto de mundos y R representa la relación de accesibilidad entre ellos. ■

Definición 2.4.2 Un *Modelo* sobre un frame es una terna M = (S, R, V) con V una función que a cada variable proposicional le asigna un subconjunto de S. Informalmente si p es una variable proposicional, V(p) se puede ver como el conjunto de mundos donde p es verdadera. ■

Definición 2.4.3 La relación "la fórmula A vale en el mundo s del modelo M", denotado $M\models_s A$, se define inductivamente sobre la estructura de A de la siguiente manera:

$M\models_s p$	sii $s \in V(p)$
$M\not\models_s \bot$	
$M\models_s (A_1 \supset A_2)$	sii $M\models_s A_1$ implica $M\models_s A_2$
$M\models_s (A_1 \wedge A_2)$	sii $M\models_s A_1$ y $M\models_s A_2$
$M\models_s (A_1 \vee A_2)$	sii $M\models_s A_1$ o $M\models_s A_2$
$M\models_s \neg A$	sii $M\not\models_s A$
$M\models_s \Box A$	sii para todo $t \in S$, sRt implica $M\models_t A$
$M\models_s \Diamond A$	sii existe $t \in S$ tal que sRt y $M\models_t A$

■

Definición 2.4.4 Una fórmula A es *verdadera en un modelo M*, denotado $M\models A$ si para todo $t \in S$, $M\models_t A$. ■

Definición 2.4.5 Una fórmula A es *válida en F=(S,R)*, denotado $F\models A$, si $M\models A$ para todos los modelos M basados en F. ■

Definición 2.4.6 Un conjunto de fórmulas S se dice *caracterizado o determinado* por una clase de frames C sii toda fórmula de S es válida en todo frame de C y toda fórmula válida en todo frame de C está en S. ■

Definición 2.4.7 Una *lógica proposicional modal normal* L es un conjunto de fórmulas modales que incluye a las fórmulas de la lógica clásica proposicional y esta cerrado por substitución, modus ponens y la regla de necesidad: si $A \in L$ entonces $\Box A \in L$. ■

En esta sección, una lógica será para nosotros una lógica proposicional modal normal.

Definición 2.4.8 Un *sistema axiomático modal normal* para L es un sistema axiomático cuyo conjunto de axiomas incluye a los axiomas para la lógica proposicional clásica y al axioma $K = \Box(A \supset B) \supset (\Box A \supset \Box B)$ y cuyas reglas son:

(Sust) Si $A \in L$ entonces cualquier A' instancia por sustitución de fórmulas en variables proposicionales también pertenece a L.

(Modus ponens) Si $A \in L$ y $(A \supset B) \in L$ entonces $B \in L$.

(Necesidad) Si $A \in L$ entonces $\Box A \in L$. ■

El axioma K es así nombrado en honor de Saul Kripke y caracteriza a todos los frames.

Axiomas modales adicionales caracterizan conjuntos de frames más restringidos. Es muy interesante observar la relación que existe entre una fórmula modal y las relaciones de accesibilidad de los frames donde tal fórmula es válida ([12], [9]).

Teorema 2.4.9 Sea F = (S, R) un frame. R satisface alguna de las siguientes propiedades:

1. Reflexiva: $(\forall s)(sRs)$
2. Simétrica: $(\forall s)((\forall t)(sRt \supset tRs))$
3. Serial: $(\forall s)((\exists t)(sRt))$
4. Transitiva: $(\forall s)((\forall t)((\forall u)(sRt \wedge tRu \supset sRu)))$
5. Euclideana: $(\forall s)((\forall t)((\forall u)(sRt \wedge sRu \supset tRu)))$
6. Parcialmente funcional: $(\forall s)((\forall t)((\forall u)(sRt \wedge sRu \supset t = u)))$
7. Funcional: $(\forall s)((\exists! t)(sRt))$
8. Débilmente densa: $(\forall s)((\forall t)(sRt \supset (\exists u)(sRu \wedge uRt)))$
9. Débilmente conectada: $(\forall s)((\forall t)((\forall u)(sRt \wedge sRu \supset tRu \vee t = u \vee uRt)))$
10. Débilmente dirigida: $(\forall s)((\forall t)((\forall u)(sRt \wedge sRu \supset (\exists v)(tRv \wedge uRv))))$

si y solo si la correspondiente fórmula es válida en F:

1. $\Box A \supset A$
2. $A \supset \Box\Diamond A$
3. $\Box A \supset \Diamond A$
4. $\Box A \supset \Box\Box A$
5. $\Diamond A \supset \Box\Diamond A$
6. $\Diamond A \supset \Box A$
7. $(\Diamond A \supset \Box A) \wedge (\Box A \supset \Diamond A)$
8. $\Box\Box A \supset \Box A$
9. $\Box(A \wedge \Box A \supset B) \vee \Box(B \wedge \Box B \supset A)$
10. $\Diamond\Box A \supset \Box\Diamond A$

Dem. Ver ([9]). ∎

Podríamos preguntarnos si cualquier propiedad sobre R puede ser expresada en lenguaje modal. La respuesta es NO. Las siguientes propiedades de R no se corresponden con la validez de ningún esquema modal.

1. Irreflexividad: $(\forall s)(\neg sRs)$
2. Antisimetría: $(\forall s)((\forall t)(sRt \wedge tRs \supset s = t))$
3. Asimetría: $(\forall s)((\forall t)(sRt \supset \neg tRs))$
4. Intransitividad: $(\forall s)((\forall t)((\forall u)(sRt \wedge tRu \supset \neg sRu)))$
5. Conexión: $(\forall s)((\forall t)(sRt \vee t = s \vee tRs))$

Podríamos preguntarnos entonces si toda clase de frames caracterizada por un esquema modal también lo esta por algún conjunto de fórmulas de primer orden. La respuesta es nuevamente NO. Las clases de frames que caracterizan los siguientes esquemas no esta definida por ningún conjunto de sentencias de primer orden:

1. $\Box(\Box A \supset A) \supset \Box A$
2. $\Box\Diamond A \supset \Diamond\Box A$

Lo que sucede es que la lógica modal proposicional se corresponde con un fragmento de la lógica de segundo orden ([9]).

2.4.1 La propiedad de modelo finito.

Una lógica L es finitamente axiomatizable si existe un sistema axiomático modal normal para L cuyo conjunto de axiomas es finito.

Si existe un procedimiento efectivo para verificar si una fórmula es o no teorema de una lógica, decimos que esa lógica es *decidible*.

Definición 2.4.10 Una lógica modal normal L tiene la propiedad de modelo finito si y solo si para cada fórmula A que no es teorema de L existe un modelo (W, R, V) de L tal que W es finito y existe un w ∈ W tal que $\not\models_w A$. ∎

La propiedad de modelo finito esta muy relacionada con la decidibilidad de una lógica.

Teorema 2.4.11 Si L es modal normal, finitamente axiomatizable y tiene la propiedad de modelo finito entonces es decidible.

Dem. Ver ([12]). ∎

Sin embargo existen lógicas modales normales con la propiedad de modelo finito que son indecidibles. También existen lógicas normales finitamente axiomatizables y decidibles que no tiene la propiedad de modelo finito y lógicas que son normales y decidibles pero que no tienen la propiedad de modelo finito.

2.4.2 La lógica modal S4.

La presentación *a la* Hilbert para esta lógica esta dada por el sistema axiomático presentado en la Fig. 2.3.

(Taut)	Tautologías de la lógica clásica
(K)	$\Box(A\supset B)\supset(\Box A\supset\Box B)$
(T)	$\Box A\supset A$
(4)	$\Box A\supset\Box\Box A$

Figura 2.3: Axiomatización de S4.

En ([22]) se presenta un cálculo de secuentes para el fragmento de S4 sin operador de posibilidad que consiste en agregarle a LKP las reglas:

$$\frac{\Gamma, A\Rightarrow\Delta}{\Gamma, \Box A\Rightarrow\Delta}(\Box\Rightarrow) \qquad \frac{\Box\Gamma\Rightarrow A}{\Box\Gamma\Rightarrow\Box A}(\Rightarrow\Box)_{S4}$$

El cálculo de secuentes para S4 (con operador de posibilidad) se presenta anexando a LKP las reglas:

$$\frac{\Gamma, A\Rightarrow\Delta}{\Gamma, \Box A\Rightarrow\Delta}(\Box\Rightarrow) \qquad \frac{\Box\Gamma\Rightarrow A, \Diamond\Delta}{\Box\Gamma\Rightarrow\Box A, \Diamond\Delta}(\Rightarrow\Box)$$

$$\frac{\Box\Gamma, A\Rightarrow\Diamond\Delta}{\Box\Gamma, \Diamond A\Rightarrow\Diamond\Delta}(\Diamond\Rightarrow) \qquad \frac{\Gamma\Rightarrow A, \Delta}{\Gamma\Rightarrow\Diamond A, \Delta}(\Rightarrow\Diamond)$$

Ambos cálculos gozan de eliminación de corte.

La clase de frames que caracteriza a esta lógica son aquellos cuya relación de accesibilidad es reflexiva y transitiva ([9], [12]).

Un aspecto interesante de esta lógica es que es decidible. En ([12]) se muestra que S4 tiene la propiedad de modelo finito. Dado que además es finitamente axiomatizable podemos concluir que es decidible.

Otro aspecto interesante de S4 es que vía una transformación muy sencilla podemos reducir el problema de verificar si una fórmula es o no teorema de la lógica intuicionista proposicional al problema de verificar si una traducción de esa fórmula es teorema en S4. Esto nos da un nuevo procedimiento de decisión para la lógica intuicionista proposicional.

Sea T la función definida por las siguientes ecuaciones con dominio en las fórmulas proposicionales y codominio en las fórmulas modales proposicionales (debida a Gödel):

T(p) = □p (para p atómico)
T(A ∧ B) = T(A) ∧ T(B)
T(A ∨ B) = T(A) ∨ T(B)
T(A ⊃ B) = □(T(A) ⊃ T(B))
T(¬A) = □¬T(A)

Denotamos con T(Γ) al conjunto de aplicaciones de T a cada una de las fórmulas de Γ.

Teorema 2.4.12 Γ⇒A es demostrable en LJ si y solo si T(Γ)⇒T(A) lo es en S4.

Dem. Ver ([21]). ■

2.4.3 La lógica modal S4.3.

Con respecto a S4.3 se observó en ([11]), ([12]) y ([9]) que existen diferentes versiones. Las tres versiones analizadas se obtienen extendiendo S4 con uno de los siguientes axiomas:

([11]) □(□A⊃□B)∨□(□B⊃□A)

([12]) □(□A⊃B)∨□(□B⊃A)

([9]) □(A∧□A⊃B)∨□(B∧□B⊃A)

Proposición 2.4.13 Todas las formulaciones de S4.3 son equivalentes.

Dem.

([12]) → ([11])

(1) $(SUST)$([12]) $\Box(\Box\Box p \supset \Box q) \vee \Box(\Box\Box q \supset \Box p)$
(2) (EQ) $\Box(\Box p \supset \Box q) \vee \Box(\Box q \supset \Box p)$

Notar que $(\Box\Box r \equiv \Box r)$ es un teorema de S4.

([11]) → ([9])

En esta prueba hacemos uso del siguiente resultado:

$(p \vee q) \equiv (\sim p \supset q)$

(1)	([11])	$\sim \Box(\Box p \supset \Box q) \supset \Box(\Box q \supset \Box p)$
(2)	(ass)	$\Box q \supset \Box p$
(3)	(Nec)	$\Box(\Box q \supset \Box p)$
(4)	(K)	$\Box(\Box q \supset \Box p) \supset (\Box\Box q \supset \Box\Box p)$
(5)	$(MP3,4)$	$\Box\Box q \supset \Box\Box p$
(6)	(T)	$\Box\Box p \supset \Box p$
(7)	(Sil)	$\Box\Box q \supset \Box p$
(8)	(T)	$\Box p \supset p$
(9)	(Sil)	$\Box\Box q \supset p$
(10)	(4)	$\Box q \supset \Box\Box q$
(11)	(Sil)	$\Box q \supset p$
(12)	$(Monot)$	$q \wedge \Box q \supset p$
(13)	(Nec)	$\Box(q \wedge \Box q \supset p)$
(14)	$(Ded2)$	$\Box(\Box q \supset \Box p) \supset \Box(q \wedge \Box q \supset p)$
(15)	$(Sil1,14)$	$\sim \Box(\Box p \supset \Box q) \supset \Box(q \wedge \Box q \supset p)$
(16)	(ass)	$\Box p \supset \Box q$
(17)	(T)	$\Box q \supset q$
(18)	$(Sil16,17)$	$\Box p \supset q$
(19)	$(Monot)$	$p \wedge \Box p \supset q$
(20)	(Nec)	$\Box(p \wedge \Box p \supset q)$
(21)	$(Ded16)$	$\Box(\Box p \supset \Box q) \supset \Box(p \wedge \Box p \supset q)$
(22)	$(Contra)$	$\sim \Box(p \wedge \Box p \supset q) \supset \sim \Box(\Box p \supset \Box q)$
(23)	$(Sil15,22)$	$\sim \Box(p \wedge \Box p \supset q) \supset \Box(q \wedge \Box q \supset p)$

([9]) $\rightarrow$ ([12])

(1)	([9])	$\Box(p \wedge \Box p \supset q) \vee \Box(q \wedge \Box q \supset p)$
(2)	(T)	$\Box q \supset q$
(3)	$(Taut)$	$\Box q \supset \Box q$
(4)	$(Triv)$	$\Box q \supset q \wedge \Box q$
(5)	(ass)	$q \wedge \Box q \supset p$
(6)	$(Sil4,5)$	$\Box q \supset p$
(7)	(Nec)	$\Box(\Box q \supset p)$
(8)	$(Ded5)$	$\Box(q \wedge \Box q \supset p) \supset \Box(\Box q \supset p)$
(9)	$(Triv)$	$\Box(q \wedge \Box q \supset p) \supset (\Box(\Box p \supset q) \vee \Box(\Box q \supset p))$

De forma análoga obtenemos:

(10)	$(Triv)$	$\Box(p \wedge \Box p \supset q) \supset (\Box(\Box p \supset q) \vee \Box(\Box q \supset p))$

Luego:

(11)	$(Triv)$	$(\Box(p \wedge \Box p \supset q) \vee \Box(q \wedge \Box q \supset p)) \supset (\Box(\Box p \supset q) \vee \Box(\Box q \supset p))$
(12)	$(MP1,11)$	$\Box(\Box p \supset q) \vee \Box(\Box q \supset p)$

∎

Una primera aproximación para obtener un cálculo de secuentes para S4.3 es anexar al cálculo de secuentes de S4 el nuevo axioma $\Rightarrow\Box(\Box A\supset\Box B)\vee\Box(\Box B\supset\Box A)$. Sea SS4.3 el cálculo resultante. La idea es que para construir pruebas uno comienza no solamente con secuentes básicos sino que dispone también del axioma antes mencionado. Es sencillo verificar que SS4.3 es correcto y completo respecto de la lógica S4.3. Sin embargo, SS4.3 no es apropiado ya que no goza de eliminación de corte.

En ([22]) se presenta un cálculo de secuentes para S4.3 que se obtiene extendiendo LKP con los siguientes esquemas de introducción:

$$\frac{\Gamma, A \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \Box A \Rightarrow \Delta}\,(\Box\Rightarrow)$$

$$\frac{\Box\Gamma \Rightarrow A, \Box\Delta - \Box A \quad , \ \textit{Para todo } A \in \Delta}{\Box\Gamma \Rightarrow \Box\Delta}\,(\Rightarrow\Box)$$

Notar que el esquema de introducción a la derecha del operador de necesidad tiene un número variable de secuentes superiores. Este cálculo tiene la propiedad de eliminación de corte ([22]).

Veamos un ejemplo. Supongamos que $\Box\Gamma$ es la secuencia $\Box A, \Box B, \Box C$ y que $\Box\Delta$ es la secuencia $\Box D, \Box E$. En este caso la instancia correspondiente es:

$$\frac{\Box A, \Box B, \Box C \Rightarrow D, \Box E \quad \Box A, \Box B, \Box C \Rightarrow \Box D, E}{\Box A, \Box B, \Box C \Rightarrow \Box D, \Box E}\,(\Rightarrow\Box)$$

Sea $(Shim_2)$ la restricción de $(\Rightarrow\Box)$ con Δ de cardinalidad 2. Es decir, la siguiente regla:

$$\frac{\Box\Gamma \Rightarrow A, \Box B \quad \Box\Gamma \Rightarrow \Box A, B}{\Box\Gamma \Rightarrow \Box A, \Box B}\,(Shim_2)$$

Podemos verificar entonces que el cálculo S4.3' = LKP + $\{(Shim_2), (\Box\Rightarrow)\}$ es equivalente (es decir, prueba las mismas fórmulas) a la representación Hilbert usual de S4.3.

Proposición 2.4.14 SS4.3 y S4.3' son equivalentes.

Dem.

a) SS4.3 $\subseteq$ S4.3'

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$A \Rightarrow A$}
\RightLabel{$(\Box\Rightarrow)$}
\UnaryInfC{$\Box A \Rightarrow A$}
\RightLabel{$(Weak)$}
\UnaryInfC{$\Box B, \Box A \Rightarrow A$}
\RightLabel{$(\Rightarrow\supset)$}
\UnaryInfC{$\Box A \Rightarrow \Box B \supset A$}
\RightLabel{$(Weak)$}
\UnaryInfC{$\Box A \Rightarrow \Box B \supset A, \Box(\Box B \supset A)$}
\AxiomC{$A \Rightarrow A$}
\RightLabel{$(\Box\Rightarrow)$}
\UnaryInfC{$\Box A \Rightarrow A$}
\RightLabel{$(Weak)$}
\UnaryInfC{$\Box B, \Box A \Rightarrow A$}
\RightLabel{$(\Rightarrow\supset)$}
\UnaryInfC{$\Box A \Rightarrow \Box B \supset A$}
\RightLabel{$(Weak)$}
\UnaryInfC{$\Box A \Rightarrow \Box(\Box B \supset A), \Box B \supset A$}
\RightLabel{$(Shim_2)$}
\BinaryInfC{$\Box A \Rightarrow \Box(\Box B \supset A), \Box(\Box B \supset A)$}
\RightLabel{$(\Rightarrow Cont)$}
\UnaryInfC{$\Box A \Rightarrow \Box(\Box B \supset A)$}
\RightLabel{$(Weak)$}
\UnaryInfC{$\Box A \Rightarrow \Box(\Box B \supset A), B$}
\RightLabel{$(\Rightarrow\supset)$}
\UnaryInfC{$\Rightarrow \Box(\Box B \supset A), \Box A \supset B$}
\AxiomC{\textit{Prueba similar}}
\RightLabel{$(\Rightarrow\supset)$}
\UnaryInfC{$\Rightarrow \Box(\Box A \supset B), \Box B \supset A$}
\RightLabel{$(Shim_2)$}
\BinaryInfC{$\Rightarrow \Box(\Box A \supset B), \Box(\Box B \supset A)$}
\end{prooftree}
$$

b) S4.3' $\subseteq$ SS4.3

Vamos a ver que $(Shim_2)$ es derivada en SS4.3. Para esto, suponemos que se pueden probar los secuentes: $\Box\Gamma \Rightarrow \Box A, B$ y $\Box\Gamma \Rightarrow A, \Box B$.

Ahora:

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$\Box B \Rightarrow \Box B \quad A \Rightarrow A$}
\RightLabel{$(\supset\Rightarrow)$}
\UnaryInfC{$\Box B, \Box B \supset A \Rightarrow A$}
\RightLabel{$(\Box\Rightarrow)$}
\UnaryInfC{$\Box B, \Box(\Box B \supset A) \Rightarrow A$}
\end{prooftree}
$$

Y análogamente: $\Box A, \Box(\Box A \supset B) \Rightarrow B$.

Entonces:

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma\Rightarrow A,B \qquad A,\ (A\supset B)\Rightarrow B}{\Gamma,\ (A\supset B)\Rightarrow B}\,(Cut)}{\Gamma,\ (A\supset B)\Rightarrow\ B}\,(\Rightarrow\ )_{S4} \qquad \text{y} \qquad \dfrac{\dfrac{\Gamma\Rightarrow B,A \qquad B,\ (B\supset A)\Rightarrow A}{\Gamma,\ (B\supset A)\Rightarrow A}\,(Cut)}{\Gamma,\ (B\supset A)\Rightarrow\ A}\,(\Rightarrow\ )_{S4}$$

Finalmente:

$$\dfrac{\dfrac{\Rightarrow\ (A\supset B),\ (B\supset A) \qquad \Gamma,\ (A\supset B)\Rightarrow\ B}{\Gamma\Rightarrow\ B,\ (B\supset A)}\,(Cut) \qquad \Gamma,\ (B\supset A)\Rightarrow\ A}{\Gamma\Rightarrow\ A,\ B}\,(Cut)$$

■

Sin embargo, S4.3' no goza de eliminación de corte.

Por ejemplo, la siguiente aplicación de (Cut) (donde la fórmula de corte es $\Box$A) no se puede eliminar.

$$\dfrac{\dfrac{\Box\Omega\Rightarrow\Box A, B \quad \Box\Omega\Rightarrow A,\Box B}{\Box\Omega\Rightarrow\Box A,\Box B}\,(Shim_2) \qquad \dfrac{\Box\Gamma\Rightarrow\Box C, D \quad \Box\Gamma\Rightarrow C,\Box D}{\Box\Gamma\Rightarrow\Box C,\Box D}\,(Shim_2)}{\Box\Omega,\Box\Gamma_{\Box B}\Rightarrow\Box A,\Box C,\Box D}\,(Cut)$$

Según el procedimiento de eliminación de corte de Gentzen, primero trataríamos de construir los antecedentes de $(Shim_2)$ con aplicaciones de (Cut) de rango menor para luego aplicar $(Shim_2)$. Sin embargo este último paso no parece ser posible:

$$\dfrac{\Box\Omega\Rightarrow\Box A,\Box B \quad \Box\Gamma\Rightarrow\Box C, D}{\Box\Omega,\Box\Gamma_{\Box B}\Rightarrow\Box A,\Box C, D}\,(Cut)$$

$$\dfrac{\Box\Omega\Rightarrow\Box A,\Box B \quad \Box\Gamma\Rightarrow C,\Box D}{\Box\Omega,\Box\Gamma_{\Box B}\Rightarrow\Box A, C,\Box D}\,(Cut)$$

$$\dfrac{\Box\Omega\Rightarrow A,\Box B \quad \Box\Gamma\Rightarrow\Box C,\Box D}{\Box\Omega,\Box\Gamma_{\Box B}\Rightarrow A,\Box C,\Box D}\,(Cut)$$

Una vez aplicadas estas instancias de (Cut), vemos que no es posible aplicar $(Shim_2)$. El problema parece ser que no podemos restringir el número de fórmulas modales de necesidad en el consecuente del los secuentes superiores de $(\Rightarrow\Box)$. Necesitaríamos $(\Rightarrow\Box)$ para el caso n=3.

Puede dudarse de la existencia de este caso de (Cut) en la prueba de algún teorema de S4.3, pero como el siguiente ejemplo muestra, efectivamente existen pruebas en este cálculo que usan instancias de este caso de corte.

Sea Π_1 la prueba:

$$\dfrac{\dfrac{Trivial}{\Rightarrow\ (A\supset C),\ (C\supset A)} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{Trivial}{\Gamma\Rightarrow A,B,\ C} \quad \dfrac{Trivial}{A,\ (A\supset C)\Rightarrow\ C}}{\Gamma,\ (A\supset C)\Rightarrow B,\ C}\,(Cut) \qquad \dfrac{\dfrac{Trivial}{\Gamma\Rightarrow\ A,\ B,C} \quad \dfrac{Trivial}{A,\ (A\supset C)\Rightarrow C}}{\Gamma,\ (A\supset C)\Rightarrow\ B,C}\,(Cut)}{\Gamma,\ (A\supset C)\Rightarrow\ B,\ C}\,(Shim_2)}{\Gamma\Rightarrow\ (C\supset A),\ B,\ C}\,(Cut)$$

Sea Π_2 la prueba:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{Trivial}{\Box\Gamma\Rightarrow A,\Box B,\Box C} \quad \dfrac{Trivial}{\Box C,\Box(\Box C\supset A)\Rightarrow A}}{\Box\Gamma,\Box(\Box C\supset A)\Rightarrow A,\Box B}(Cut) \quad \dfrac{\dfrac{Trivial}{\Box\Gamma\Rightarrow\Box A,B,\Box C} \quad \dfrac{Trivial}{\Box C,\Box(\Box C\supset A)\Rightarrow\Box A}}{\Box\Gamma,\Box(\Box C\supset A)\Rightarrow\Box A,B}(Cut)}{\Box\Gamma,\Box(\Box C\supset A)\Rightarrow\Box B,\Box A}(Shim_2)$$

De esta forma, obtenemos:

$$\dfrac{\dfrac{\Pi_1 \quad \Pi_2}{\Box\Gamma,\Box\Gamma\Rightarrow\Box B,\Box C,\Box B,\Box A}(Cut)}{\Box\Gamma\Rightarrow\Box A,\Box B,\Box C}$$

Mirando cada uno de los casos presentados anteriormente vemos que el problema parece ser la imposibilidad de tener un contexto de fórmulas modales de necesidad en la introducción a la derecha del operador de necesidad. Shimura observó que una situación similar se da en S4. Efectivamente, basta tener los siguientes esquemas en el cálculo (además de LKP)

$$\frac{\Rightarrow B}{\Rightarrow\Box B} \quad \frac{\Box A\Rightarrow B}{\Box A\Rightarrow\Box B} \quad \frac{\Box A_1,\Box A_2\Rightarrow B}{\Box A_1,\Box A_2\Rightarrow\Box B} \quad \frac{A,\Gamma\Rightarrow\Delta}{\Box A,\Gamma\Rightarrow\Delta}$$

para probar la equivalencia con la presentación de Hilbert de S4. Sin embargo, observar que el siguiente corte no se podría eliminar:

$$\dfrac{\dfrac{\Box A_1,\Box A_2\Rightarrow B}{\Box A_1,\Box A_2\Rightarrow\Box B}(\Rightarrow\Box) \qquad \dfrac{\Box B,\Box A_3\Rightarrow C}{\Box B,\Box A_3\Rightarrow\Box C}(\Rightarrow\Box)}{\Box A_1,\Box A_2,\Box A_3\Rightarrow\Box C}(Cut)$$

Pero si permitimos un contexto de fórmulas modales (de necesidad) en el antecedente de la regla de introducción del operador $\Box$, el problema se resuelve[6].

Una situación similar se da en el cálculo LK presentado originalmente por Gentzen ([8]). El aclara en su seccioń 2.2 que si el Hauptsatz no fuera de importancia el cálculo se podría simplificar en varios aspectos.

Por lo tanto, dado que la foŕmula

$$\Box(A_1\vee\Box A_2...\vee\Box A_k)\wedge\ ...\ \wedge\Box(\Box A_1\vee...\vee\Box A_{k-1}\vee A_k)\supset\Box A_1\vee\Box A_2\vee...\Box A_k$$

es un teorema de S4.3, cualquier cálculo de S4.3 que deba gozar de eliminación de corte (ya sea con todos los esquemas teniendo un número fijo de secuentes superiores o no) debe poder probar este secuente sin corte.

Para la caracterización de S4.3 necesitamos las siguientes definiciones.

Definición 2.4.15 Un frame (W,R) es débilmente lineal si R es reflexiva, transitiva y totalmente conexa (w, w'$\in$ W $\Rightarrow$ wRw' o w'Rw). ∎

[6]Desde ya que si se incorpora este contexto al consecuente de las reglas presentadas, para resolver nuestro problema del mismo modo, ya no se corresponderán con S4.3.

Definición 2.4.16 Un frame (W,R) es lineal si (W,R) es débilmente lineal y además R es antisimétrica. ■

Definición 2.4.17 Un intervalo abierto a derecha de un conjunto ordenado (P,$\leq$) es un subconjunto de P de la forma [r,q)=$\{p\in P : r\leq p<q\}$ o (r,q)=$\{p\in P : r<p<q\}$. ■

En la Fig. 2.4 presentamos un cuadro que resume variadas caracterizaciones de S4.3.

tipo de frame	cita bibliográfica
débilmente lineales	([12])
lineales	([12]), ([9])
(I,$\leq$) donde I es un intervalo abierto a derecha de los reales o los racionales	([9])

Figura 2.4: Caracterizaciones de S4.3.

Notar que si interpretamos a los elementos de I como instantes en el tiempo bien podemos decir que esta lógica permite una interpretación temporal. Debido a esto, S4.3 ha sido de gran interés para el área de Computación.

S4.3 también es decidible, de hecho, S4.3 esta caracterizada por la clase de todos los modelos débilmente lineales finitos ([12]). Un resultado importante de la metateoría de las lógicas modales proposicionales dice que no solamente S4.3 tiene la Propiedad de Modelo Finito sino que toda extensión normal de S4.3 también la tiene ([9]). Además se probó que toda extensión normal de S4.3 es finitamente axiomatizable ([12] pág. 163). Bien podemos concluir entonces que toda extensión normal de S4.3 es decidible.

2.5 Conclusiones.

En este capítulo introdujimos los conceptos básicos necesarios para leer el resto del trabajo. Presentamos los sistemas de valuación, los sistemas de prueba, las relaciones de consecuencia y describimos la relación que existe entre ellos.

Estudiamos los cálculos de secuentes como casos particulares de sistemas de prueba y remarcamos la importancia de la eliminación de la regla de corte y la aplicación de este tipo de sistemas a la deducción automatizada.

Finalmente introdujimos las nociones básicas de lógica modal, destacando a la lógica temporal como caso particular y haciendo énfasis en su relación con las ciencias de la computación. Con respecto a esto último, en el aspecto práctico mencionamos algunas aplicaciones y en el aspecto teórico discutimos la propiedad de modelo finito. Como ejemplos presentamos las lógicas S4 y S4.3 con teoremas de caracterización en modelos de Kripke y expusimos sus respectivas representaciones *a la* Hilbert y *a la* Gentzen. De hecho, estudiamos en detalle la regla de introducción de $\Box$ a la derecha para S4.3 y explicamos por qué su "aspecto" peculiar era esencial para poder demostrar eliminación de corte.

Capítulo 3

Sobre la Impureza de S4.3.

3.1 Introducción.

Hay una distinción clara entre una relación de consecuencia y su representación. Además, las representaciones llamadas *puras* son consideradas de gran importancia. Por este motivo, en ([2]) se considera importante la identificación de las formas más usuales de impureza. También se describen tres formas particulares en las cuales una representación puede ser *impura*. Si bien la descripción es clara, no es precisa.

En este capítulo vamos a definir un marco de trabajo (*framework* de ahora en adelante) para construir representaciones *a la* Gentzen para relaciones de consecuencia. Creemos que este framework formaliza las ideas de los niveles de impureza 1 y 2 descriptos en ([2]) en el siguiente sentido. Si, dada una relación de consecuencia, no existe una representación finita para esta dentro del framework entonces cualquier representación para la relación deberá tener niveles de impureza mas altos que 1 y 2, sea lo que sean.

Dentro de este framework podemos representar fácil y finitamente la lógica clásica y S4 con eliminación de corte. También podemos representar S4.3 finitamente e infinitamente. La representación finita no tiene eliminación de corte pero la infinita si. Por último, damos evidencia fuerte para conjeturar que no existe una representación finita para S4.3 (dentro de este framework) que goce de eliminación de corte.

3.2 El metanivel.

En esta sección introducimos una "sintáxis" para construir reglas. Estas reglas serán clasificadas de acuerdo a su "apariencia" y en particular definiremos lo que usualmente son llamadas reglas de introducción. Finalmente definiremos qué es un cálculo para nosotros.

Consideremos un lenguaje con las siguientes categorías sintácticas:

Operadores: $\wedge$, $\vee$, $\neg$, $\supset$, $\Box$, etc.

Variables de fórmula (FV): X, Y, Z.

Variables de contexto (CV): Γ, Δ, Γ', Δ'.

Variables proposicionales (PV): A, B, C,...

Cada operador tiene designada una aridad. Las variables de fórmula también son llamadas variables *side*. MForm denotará el conjunto de fórmulas construido con los operadores y las variables de fórmula; las llamaremos metafórmulas. Además, Form denotará el conjunto de fórmulas construido con los operadores y las variables proposicionales.

MForm(op) denotará el conjunto de metafórmulas construidas con aplicaciones del operador op solamente. Cabe aclarar que las variables de fórmula como tales no pertenecen a MForm(op).

Llamaremos a las fórmulas en MForm(op), *restricciones de fórmula.*

Definición 3.2.1 Una *restricción de contexto* es un par (F, Γ) donde F $\in$ MForm, las variables (de fórmula) utilizadas en F son nuevas. Decimos que F es el *tipo* de la restricción de contexto. ■

CRestr(op) denotará el conjunto de restricciones de contexto tales que F $\in$ MForm(op).

Intuitivamente una restricción (F, Γ) significa que toda fórmula en una instancia de Γ debe "matchear" con F. Por ejemplo, (X, Γ) es sencillamente Γ y ($\Box$X, Γ) se abrevia usualmente como $\Box\Gamma$.

Definición 3.2.2 Un *metasecuente* es un par (S_1,S_2) tal que S_1,$S_2$$\subseteq$(FV $\cup$ CRestr $\cup$ MForm). Usualmente escribimos $S_1 \Rightarrow S_2$. ■

Decimos que una variable de fórmula ocurre *como tal* en un metasecuente S si ocurre en S como miembro de FV y no como subfórmula de una metafórmula.

Definición 3.2.3 Una *regla* es un par (U, L) donde U es un conjunto de metasecuentes y L es un metasecuente. ■

Sea R = ({U_1,...,U_n}, L) una regla. Usualmente la escribiremos como:

$$\frac{U_1 \quad \dots \quad U_n}{L}\,(R)$$

Definición 3.2.4 Un *axioma* es una regla ($\emptyset$,S) donde S es un metasecuente. ■

Definición 3.2.5 Una *regla estructural* es una regla ({S_1}, S_2) tal que los símbolos que ocurren en S_1 y S_2 estan en FV $\cup$ CV. ■

Notar que weakening es un ejemplo trivial.

Veamos la definición de reglas de introducción de operadores.

Definición 3.2.6 Una *regla derecha para un operador op de aridad n* es una regla (U, L) donde U es un conjunto de metasecuentes y L es un metasecuente, tal que se satisfacen las siguientes condiciones:

* las variables de fórmula, las variables de contexto y las restricciones de fórmula que ocurren en U estan en FV, CRestr(op) y MForm(op) respectivamente. Además, las restricciones de fórmula están construidas a partir de las variables en FV que ocurren como tales en la regla.

* En cada metasecuente en U al menos una variable de fórmula aparece como tal.

* L es de la forma: $S_1 \Rightarrow F_1,\dots,F_k,S_2$ donde S_1 y S_2 son conjuntos de restricciones de contexto y restricciones de fórmula; $F_1,\dots,F_k$ $\in$ MForm son de la forma op($X_1,\dots,X_n$) donde $X_1,\dots,X_n$ $\in$ FV; estas F son llamadas *fórmulas principales.*

* Todas las variables de fórmula que ocurren en los secuentes superiores también ocurren en las fórmulas principales.

■

Las reglas izquierdas se definen en forma similar.

Todas las reglas de introducción de LKP son reglas en este sentido. También lo son las reglas de introducción de $\Box$ en la representación de S4.

Pero también lo son las siguientes:

$$\frac{\Gamma \Rightarrow X, \Delta}{\Delta \Rightarrow \odot X, \Gamma} (\Rightarrow \odot)$$

Esta regla altera el lado en el que aparecen las restricciones de contexto.

$$\frac{\Gamma \Rightarrow X, \Delta \quad \Rightarrow Y, \Gamma}{\Gamma \Rightarrow Y \otimes X, \Delta} (\Rightarrow \otimes)$$

Esta regla tiene la misma restricción de contexto en lados distintos de los secuentes superiores.

$$\frac{\Gamma, X \Rightarrow \Delta}{\Rightarrow \oplus X, \Delta} (\Rightarrow \oplus)$$

Esta hace desaparecer una de las restricciones de contexto.

$$\frac{\Gamma \Rightarrow X \quad Y \Rightarrow Y \oslash X, \Delta}{\Gamma, Y \oslash X \Rightarrow X \oslash Y, \Delta} (\Rightarrow \oslash)$$

En este ejemplo, la restricción de fórmula que aparece en el metasecuente superior de la derecha cambia de lado en el metasecuente inferior.

Intuitivamente preferimos que las restricciones de fórmula y las restricciones de contexto sean objetos más "estáticos". Para reflejar esto introducimos la siguiente definición:

Definición 3.2.7 Una regla de introducción se dice *estable* si satisface las siguientes condiciones:

* Para cada tipo de restricción de contexto (incluso la vacía) como máximo dos variables de contexto son utilizadas (una para los lados izquierdos de los metasecuentes y otra para los derechos)

* Si una variable de contexto ocurre a un lado de un metasecuente entonces no puede ocurrir del otro lado en ningún metasecuente.

* Todas y solo las restricciones de fórmula y restricciones de contexto que aparecen en las premisas ocurren en la conclusión y lo hacen del mismo lado en el que aparecen en las premisas.

■

Observar que ninguno de los ejemplos anteriores es una regla estable, sin embargo sí lo son las reglas de introducción de las representaciones para la lógica clásica proposicional y para S4.

Además, notar que en presencia de weakening es suficiente con tener dos restricciones de contexto para cada tipo de restricción.

Definición 3.2.8 Dado un conjunto de operadores, definimos un *cálculo* como un conjunto de reglas:

* el axioma: (∅,X⇒X)

* posiblemente reglas estructurales y axiomas adicionales.

* la siguiente regla de corte:

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Phi, X \quad X, \Delta \Rightarrow \Theta}{\Gamma, \Delta \Rightarrow \Phi, \Theta} (Cut)$$

* para cada operador, un conjunto no vacío de reglas izquierdas.

* para cada operador, un conjunto no vacío de reglas derechas.

■

Decimos que un cálculo es *finito* si tiene un conjunto finito de reglas. Si no, decimos que es *infinito*.

Un cálculo es sencillamente una representación *a la* Gentzen formalizada y restringida.

Definición 3.2.9 Un *cálculo estable* es un cálculo en el cual toda regla de introducción es estable y el único axioma es (∅,X⇒X). ■

En la Fig. 3.1 presentamos un cálculo para la lógica clásica proposicional; lo llamaremos LKP sin temor a confundirlo con el presentado en el capítulo anterior. De ahora en adelante LKP denotará el cálculo que definimos a continuación. Observar que dado que los (meta)secuentes son ahora pares de conjuntos de (meta)fórmulas las reglas de intercambio (Perm) y las de contracción (Cont) ya no hacen falta.

$$\frac{}{X \Rightarrow X}\,(Id) \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma, X \Rightarrow \Delta}\,(Weak \Rightarrow) \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow X, \Delta}\,(\Rightarrow Weak)$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Phi, X \quad X, \Delta \Rightarrow \Theta}{\Gamma, \Delta \Rightarrow \Phi, \Theta}\,(Cut)$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow X, \Delta \quad \Gamma \Rightarrow Y, \Delta}{\Gamma \Rightarrow X \wedge Y, \Delta}\,(\Rightarrow \wedge) \qquad \frac{\Gamma, X, Y \Rightarrow \Delta}{\Gamma, X \wedge Y \Rightarrow \Delta}\,(\wedge \Rightarrow)$$

$$\frac{\Gamma, X \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \neg X, \Delta}\,(\Rightarrow \neg) \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow X, \Delta}{\Gamma, \neg X \Rightarrow \Delta}\,(\neg \Rightarrow)$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow X, Y, \Delta}{\Gamma \Rightarrow X \vee Y, \Delta}\,(\Rightarrow \vee) \qquad \frac{\Gamma, X \Rightarrow \Delta \quad \Gamma, Y \Rightarrow \Delta}{\Gamma, X \vee Y \Rightarrow \Delta}\,(\vee \Rightarrow)$$

$$\frac{\Gamma, X \Rightarrow Y, \Delta}{\Gamma \Rightarrow X \supset Y, \Delta}\,(\Rightarrow \supset) \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow X, \Delta \quad \Gamma, Y \Rightarrow \Delta}{\Gamma, X \supset Y \Rightarrow \Delta}\,(\supset \Rightarrow)$$

Figura 3.1: Representación para la lógica clásica proposicional.

S4 puede ser representada agregando las reglas de la Fig. 3.2 a LKP.

$$\frac{\Gamma, X \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \Box X \Rightarrow \Delta}\,(\Box \Rightarrow) \qquad \frac{\Box\Gamma \Rightarrow X}{\Box\Gamma \Rightarrow \Box X}\,(\Rightarrow \Box)$$

Figura 3.2: Reglas para representar S4.

3.3 El nivel concreto.

Queda claro que un framework para definir cálculos sería inutil si no se pudiera usar para construir pruebas. Esta sección describe como se puede realizar esto. Antes que nada vamos a definir como instanciar metasecuentes en pares de conjuntos de fórmulas proposicionales que llamaremos "secuentes". Luego explicamos como organizar estos secuentes para construir pruebas.

Definición 3.3.1 Un *secuente* es un par (S_1, S_2) tal que S_1, $S_2 \in \wp_{Fin}$(Form). ∎

Definición 3.3.2 Un *generador de instancia* es un par de funciones $\sigma = (\sigma_1,\ \sigma_2)$ donde:
σ_1: CV $\longrightarrow \wp_{Fin}$(Form) y respeta el tipo de las restricciones.
σ_2: FV $\longrightarrow$ Form. ∎

Definición 3.3.3 Sea σ un generador de instancia y S un metasecuete. La *instancia de S via σ* es el secuente que se obtiene reemplazando los $\Gamma \in$ CV que aparecen en S por $\sigma_1(\Gamma)$ y las X $\in$ FV que aparecen en S por σ_2(X). ∎

Análogamente, podemos definir la *instancia de una regla R via σ*.

Definición 3.3.4 Dado un cálculo C, una *prueba en C* es una árbol de pares (S, R) donde S es un secuente y R una regla del cálculo tal que:
* toda hoja (S, R) es tal que R es un axioma y S una instancia de R, y
* el par formado por el secuente S de un nodo (S, R) y el conjunto de secuentes de sus hijos es una instancia de R. ∎

Decimos que una prueba es *libre de corte* si en ella no ocurren instancias de la regla de corte.

Definición 3.3.5 Una cálculo C es *libre de corte* si para toda prueba en C hay una prueba libre de corte en C con la misma raiz. ∎

3.4 Un cálculo finito, estable y libre de corte para S4.3.

En esta sección tratamos la posibilidad de definir un cálculo finito, estable y libre de corte para S4.3 que sea una extensión de LKP. En realidad nos preguntamos si podemos hallar un número finito de reglas de introducción para el operador unario $\Box$ de tal manera que junto con el cálculo para la lógica proposicional clásica conforman un cálculo para S4.3.

Notar que es posible obtener una representación infinita y libre de corte para S4.3 dentro de este framework. En efecto, LKPShim se obtiene extendiendo LKP+$\{(\Box \Rightarrow)\}$ con las siguientes reglas:

para k $\geq$ 1:

$$\frac{\Box\Gamma \Rightarrow X_1, \Box X_2, \ldots, \Box X_k \quad \ldots \quad \Box\Gamma \Rightarrow \Box X_1, \ldots, \Box X_{k-1}, X_k}{\Box\Gamma \Rightarrow \Box X_1, \ldots, \Box X_k}\ Shim_k$$

Por ejemplo:

$$\frac{\Box\Gamma \Rightarrow X_1}{\Box\Gamma \Rightarrow \Box X_1}\ Shim_1 \qquad \frac{\Box\Gamma \Rightarrow X_1, \Box X_2 \quad \Box\Gamma \Rightarrow \Box X_1, X_2}{\Box\Gamma \Rightarrow \Box X_1, \Box X_2}\ Shim_2$$

Este cálculo es libre de corte. La demostración de eliminación de corte que se presenta en ([22]) funciona también para este cálculo.

Observar que en cada uno de los metasecuentes superiores de cualquier $Shim_k$ una única variable de fórmula aparece como tal. Podemos modificar cualquiera de estos metasecuentes agregándole a la derecha la restricción de fórmula □X donde X es la variable de fórmula que aparece como tal. Si modificamos algunos de los metasecuentes superiores de cualquier $Shim_k$ de esta manera obtenemos una regla correcta. Llamaremos a las reglas obtenidas de esta manera *símiles* de $Shim_k$.

Sabiendo entonces que el framework permite representar S4.3 en forma infinita y libre de corte nos proponemos analizar si existe una representación finita (y estable) libre de corte para esa lógica.

Primero discutiremos algunas suposiciones que podemos hacer al tratar con un cálculo para S4.3 y obtendremos algunas definiciones de utilidad. Luego probaremos que la regla usual de introducción a izquierda de □ es, en algún sentido, la más general. Esto nos deja con la tarea de hallar las reglas de introducción a derecha.

Creemos que no es posible hallar un número finito de ellas. Desafortunadamente no hemos podido probar el resultado completo. Sin embargo, creemos haber planteado la esencia del problema en forma de conjetura. En lo que sigue, esta conjetura se usará como lema para probar que una representación finita, estable y libre de corte para S4.3 no existe. Finalmente, presentamos evidencia para soportar esta conjetura.

3.4.1 Preliminares.

Para poder cumplir con los resultados mencionados tendremos que considerar reglas y conjuntos de secuentes arbitrarios, sin embargo, por motivos que se verán más adelante, no vamos a considerarlos todos. De hecho, solo vamos a considerar reglas de introducción para □ cuyas restricciones de fórmula son de la forma □X. Además las únicas restricciones de contexto que vamos a considerar son las de tipo X (la vacía) y □X. Con respecto a esto observar que $\Box X \supset \Box\Box X$ y $\Box\Box X \supset \Box X$ son teoremas de S4.3. Por lo tanto la única restricción interesante en una regla es □X. De todos modos, en principio no sabemos cómo puede afectar la forma de las restricciones a la propiedad de eliminación de corte. Sin embargo para el argumento que usaremos alcanza con considerar las restricciones que mencionamos.

Dado que vamos a considerar reglas estables y debido a que □ es un operador unario, podemos asumir que en una regla de introducción a derecha para el mismo no hay restricciones side (o sea, no hay ningún □X) en el antecedente. Si hubiera, aparacerían en el antecedente del metasecuente inferior porque la regla es estable. Pero X debería también aparecer como tal en algún metasecuente superior. Ahora, dado que la regla es de introducción a derecha, el □X debe aparecer en el consecuente. Finalmente, el metasecuente inferior quedaría: ..., $\Box X \Rightarrow \Box X$, ...; que es trivial. Dualmente podemos asumir que en una regla de introducción a la izquierda para □, no hay restricciones side en el consecuente. Observar más adelante la definición de *regla con poder de inferencia*.

Las reglas para operadores unarios tienen una propiedad interesante. Para poder enunciarla necesitamos las siguientes definiciones:

Definición 3.4.1 Sean R y R' reglas de introducción del mismo operador en un cálculo C. Decimos que R *es derivada en* C *por* R' si toda aplicación de R en una prueba puede ser reemplazada por aplicaciones de R', reglas estructurales de C y corte. ∎

Definición 3.4.2 Sean R y R' reglas y C un cálculo. R y R' son *equivalentes en* C si R es derivada en C por R' y viceversa. ∎

Con esta noción de equivalencia podemos enunciar la siguiente proposición:

Proposición 3.4.3 Sea R una regla de introducción de un operador unario. Sea R' la regla que se obtiene a partir de R eliminando todas las metafórmulas del metasecuente inferior construídas con metavariables que no aparecen en los metasecuentes superiores. Entonces en un cálculo con weakening R es equivalente a R'.

Dem. Es evidente que cualquier aplicación de R en una prueba puede ser reemplazada por una de R' seguida de weakenings.

Veamos ahora como reemplazar una aplicación de R'. Sea X una fórmula side que aparece tanto en algún metasecuente superior como en el metasecuente inferior de R. Cualquier aplicación de R' dado por el generador de instancias σ puede ser reemplazado por uno de R via el generador de instancias σ extendido con las asignaciones [Y -> σ(X)] para toda variable side Y de R que solo aparece en el metasecuente inferior. De este modo, las instancias de las metafórmulas de R construídas con variables que no aparecen en las premisas se colapsan con la instancia de una de las metafórmulas construída con una variable que sí aparece en las premisas. Recordar que Y debe aparecer en una fórmula principal y por lo tanto aparece en la metafórmula op(Y) (donde op es el operador que la regla introduce).

Es importante observar que en el reemplazo no se utilizaron aplicaciones de corte. ∎

Por lo tanto, podemos asumir que todas las reglas de introducción para un operador unario tienen la siguiente propiedad: todas las variables side que aparecen en el metasecuente inferior aparecen en alguno superior. Por ejemplo, no vamos a considerar la regla:

$$\frac{\Gamma \Rightarrow X, \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Box X, \Box Y, \Delta}$$

debido a que es equivalente a:

$$\frac{\Gamma \Rightarrow X, \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Box X, \Delta}$$

Y además el hecho de no considerarla como alternativa para cierto cálculo no influirá en la propiedad de eliminación corte.

Observar también que para operadores de mayor aridad esta propiedad no es cierta:

$$\frac{\Gamma \Rightarrow X, \Delta}{\Gamma \Rightarrow X \vee Y, \Delta}$$

En esta regla Y aparece en el metasecuente inferior y no en el superior. Sin embargo, no podemos eliminar de esta regla la metafórmula donde aparece Y.

Al considerar conjuntos de secuentes o metasecuentes asumiremos que ninguno de ellos puede ser obtenido agregando fórmulas o restricciones de cualquier tipo a otro. Esto se debe a la presencia de weakening en los cálculos que trataremos.

Precisaremos la siguiente definición:

Definición 3.4.4 Sean R y R' reglas estables. Diremos que *R incluye a R'* si alterando un subconjunto de los metasecuentes superiores de R de alguna de las siguientes maneras podemos obtener los metasecuentes superiores de R':

* Agregando restricciones de contexto.

* Agregando restricciones de variables.

∎

La estabilidad nos asegura que la consecuencia (o metasecuente inferior) de R' se puede obtener agregando restricciones (de contexto o side) a la consecuencia de R.

También, decimos que un conjunto de secuentes incluye a Shim_k para algún k o símil de esta si agregando fórmulas a algunos de los secuentes podemos obtener una instancia de los secuentes superiores de Shim_k o símil de esta. Observar que si un conjunto de secuentes no incluye a ningún $Shim_k$ entonces tampoco podemos obtener una instancia de cualquiera de los símiles de $Shim_k$ con el mismo procedimiento.

En lo que resta probaremos que algunas reglas son incorrectas para S4.3. Para esto daremos explícitamente un modelo sobre un frame que caracteriza a S4.3 y mostraremos que el modelo valida todos los secuentes superiores de la regla pero que la consecuencia de la regla no es válida en el modelo.

3.4.2 La regla de introducción a izquierda para □.

En esta sección mostraremos que la regla:

$$\frac{\Gamma, X \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \Box X \Rightarrow \Delta} (\Box\Rightarrow)$$

es, en un sentido, la más general. Por este motivo vamos a elegirla como *la* regla de introducción a izquierda para □ en las pruebas concernientes a S4.3.

Lema 3.4.5 Sea C un cálculo con $(\Box\Rightarrow)$ y weakening. Sea R una regla izquierda estable para □ en C tal que tiene un metasecuente superior sin variables side a la derecha. Si existe una prueba de un secuente S entonces existe una prueba de S sin aplicaciones de R.

Dem. Trivial. Para cualquier nodo (S, R) podemos elegir el nodo (hijo de (S, R)) que es instancia de un metasecuente superior de R sin metavariables a la derecha junto con la prueba que lo precede. Aplicamos $(\Box\Rightarrow)$ y el resto es weakening. La estabilidad asegura que las instancias de los contextos se comportan bien. Podemos hacer esto hasta que no quede ninguna aplicación de R. ∎

Observar que en la nueva prueba no se agregan aplicaciones de corte.

Lema 3.4.6 Sea R una regla izquierda estable para □ tal que todos los metasecuentes superiores tienen una variable side a la derecha. Entonces R es unsound para S4.3.

Dem. Primero, observar que el modelo V sobre $(Q^+, \leq)$ que asigna todos los mundos a todas las variables valida cualquier conjunto de secuentes cuyos lados derechos son no vacíos.

Ahora, sea σ un generador de instancias que le asigna vacío a todas las restricciones de contexto. Si aplicamos σ a los secuentes superiores de R obtenemos un conjunto de secuentes con los lados derechos no vacíos. Si A_1, ..., A_k son las variables proposicionales que σ le asigna a las variables side entonces el consecuente de R via σ es $\Box A_1, \ldots, \Box A_k \Rightarrow$. Pero V hace falso este secuente. Por lo tanto R es unsound. ∎

Entonces cada regla sound es derivable con $(\Box\Rightarrow)$. De ahora en adelante cuando tratemos con un cálculo para S4.3 vamos a asumir que $(\Box\Rightarrow)$ es la única regla de introducción a izquierda para □.

3.4.3 $Contra_k$: rol y propiedades.

En esta sección aislamos un conjunto de secuentes que será de gran importancia en las demostraciones que involucran los cálculos para S4.3. Lo que haremos será demostrar que para probar cada uno de estos secuentes sería necesaria una regla distinta. Como este conjunto es infinito, cualquier cálculo libre de corte debe ser infinito. De modo que en algún sentido, estos secuentes son "la razón" por la cual S4.3 es impura.

Los secuentes son:

$$\text{para } k \geq 1:$$
$$\text{Contra}_k = \Box(A_1 \vee \Box A_2 \vee ... \vee \Box A_k), \, ..., \, \Box(\Box A_1 \vee ... \vee \Box A_{k-1} \vee A_k) \Rightarrow \Box A_1, ..., \Box A_k$$

Ahora damos unas definiciones útiles y demostramos algunas propiedades de estos secuentes. Primero un comentario sobre la notación: $\overset{\Box}{F}$ denota la fórmula que es F o □F.

Definición 3.4.7 Una fórmula F es *recursivamente libre de □ (□-RecFree)* si es una variable proposicional o F=op(F_1,...,F_k) y op no es □ y además alguna F_i es □-RecFree. ∎

Sea $Contra_k$L el antecedente de $Contra_k$ y $Contra_k$R su consecuente.

Lema 3.4.8 El secuente

$$\text{RF}, Contra_k\text{L} \Rightarrow Contra_k\text{R} - \Box A_i$$

donde RF es un conjunto de subfórmulas □-RecFree de las fórmulas en $Contra_k$L, no es válido.

Dem. Podemos construir el siguiente contraejemplo basado en el frame (Q^+, $\leq$):

$V(A_i)=Q^+$

$V(A_j)=\{0\}$ for j in {1,...,m}-{i}

En el origen $F_1, ..., F_m$,$Contra_k$L es verdadero sin embargo para cualquier q>0, A_j es falsa para todo j en {1,...,m}-{i}. ∎

Lema 3.4.9 El secuente

$$\text{RF}, Contra_k\text{L} \Rightarrow \overset{\Box}{A}_1, ..., \overset{\Box}{A}_{i-1}, \overset{\Box}{A}_{i+1}, ..., \overset{\Box}{A}_k$$

donde RF es un subconjunto de {A_1,..., A_k} y tal que si una de las variables proposicionales aparece como tal a la derecha entonces no aparece como tal a la izquierda, no es válido.

Dem. Supongamos que todas las variables proposicionales a la derecha aparecen como argumento de □. En este caso podemos aplicar Lema 3.4.8.

Ahora sean A_{i_1},...,A_{i_p} todas las variables que aparecen como tales a la derecha. Por hipótesis ninguna de ellas aparece en RF. Entonces podemos construir el siguiente modelo:

$V(A_i)=Q^+$

$V(A_j)=\{0\}$ for j in {1,...,k}-{i_1, ..., i_p}

El resto de las variables son falsas en todos lados.

Todas las fórmulas en $Contra_k$L son verdaderas en el mundo 0 porque vale □A_i, todas las variables en RF son verdaderas en 0 porque construimos el modelo para que así fuera, sin embargo ninguna de las fórmulas a la derecha es verdadera en 0.

∎

Ahora enunciamos la versión del Lema 3.4.9 que contempla el caso en el que a la derecha puede aparecer una variable A y la fórmula □A y a la izquierda aparece un subconjunto de $Contra_k$L.

Lema 3.4.10 No es válido el secuente

$$\text{RF}, \text{IZQ} \Rightarrow \text{DER}$$

donde IZQ es un subconjunto de $Contra_k$L, DER es un conjunto de fórmulas de la forma A_i y $\Box A_i$ para $1 \leq i \leq k$ tal que para algún índice j ni A_j ni $\Box A_j$ aparecen y RF es un subconjunto de $\{A_1,...,A_k\}$ y tal que si una de las variables proposicionales aparece como tal a la derecha entonces no aparece como tal a la izquierda.

Dem. La demostración es similar a la del Lema 3.4.9. ■

Lema 3.4.11 El secuente

$$RF, Contra_k L - \Box(\Box A_1 \vee ... \vee A_i \vee ... \vee \Box A_k), \Box A_1 \vee ... \vee A_i \vee ... \vee \Box A_k \Rightarrow Contra_k R$$

donde RF es un conjunto de subfórmulas $\Box$-RecFree de las fórmulas en $Contra_k$L, no es válido.

Dem. El siguiente modelo es suficiente para demostrarlo:

Para todo j en {1,...,k} - {i}:

0 ——————> p ——————> q ——————>

[A_j y A_i)[A_j y $\neg A_i$)[A_i y $\neg A_j$

Notar que para cualquier mundo en [0, p) el antecedente del secuente de arriba es verdadero sin embargo su consecuente no lo es. ■

Lema 3.4.12 El secuente RF,$Contra_k$L - $\Box(\Box A_1 \vee ... \vee A_i \vee ... \vee \Box A_k) \Rightarrow Contra_k$R donde RF es un conjunto de subfórmulas $\Box$-RecFree de $Contra_k$L, no es válido.

Dem. Inmediato por Lema 3.4.11 ya que se puede utilizar el mismo modelo. ■

3.4.4 Una conjetura y sus consecuencias.

En esta sección vamos a presentar una conjetura relacionando las $Shim_k$ y los modelos de un frame que caracteriza a los teoremas de S4.3. Esta conjetura tendrá como consecuencia la imposibilidad de nuestro framework de representar S4.3 finitamente y libre de corte.

Para poder enunciar la conjetura y probar algunos resultados más, vamos a definir la clausura de los metasecuentes superiores de una regla de introducción a la derecha estable para $\Box$. Puede que haya una definición más general pero esta es suficiente para nuestro propósito, además de ser clara.

Un comentario respecto de la notación: un conjunto de restricciones de contexto entre "[" y "]" significa que no necesariamente aparecen. En la siguiente definición el metasecuente denotado por la expresión a la izquierda del "|" tendrá las restricciones de contexto que aparecen en los metasecuentes denotados por las expresiones a la derecha del "|".

Definición 3.4.13 Sea R = (U, L) una regla derecha estable para $\Box$. Denotamos con $\overline{U}$ *(la clausura de U)* al conjunto de metasecuentes construidos como sigue:

Para cualquier conjunto S de metasecuentes superiores de una regla de introducción a derecha de $\Box$, sea

S^{Cut} = {[Γ', □Γ], S_1, $S_2 \Rightarrow S_3$, S_4, [Δ, □Δ'] | F es una variable side o una restricción side y [Γ', □Γ], $S_1 \Rightarrow S_3$, F, [Δ, □Δ'] y [Γ', □Γ], F, $S_2 \Rightarrow S_4$, [Δ, □Δ'] estan en S}

$S^{\Box}$ = {[Γ', □Γ], $S_1 \Rightarrow S_2$, X_i, [Δ, □Δ'] | [Γ', □Γ], $S_1 \Rightarrow S_2$, $\Box X_i$, [Δ, □Δ'] esta en S}

S^{Weak} = {[Γ', □Γ], S_1, S_2⇒S_3, S_4, [Δ, □Δ'] | [Γ', □Γ], S_1⇒S_3, [Δ, □Δ'] esta en S y S_2 y S_4 son conjuntos de metafórmulas tal que o bien son variables side, o bien son restricciones side en R}

S' = $S^{Cut} \cup S^{\Box} \cup S^{Weak}$

Ahora definiremos $\overline{U}$ como el supremo de la siguiente secuencia de conjuntos:
$U_0 = U$
$U_1 = U_0 \cup U_0'$

.

$U_{n+1} = U_n \cup U_n'$

Finalmente: $\overline{U} = \bigcup U_i$

■

Estamos interesados en identificar las reglas correctas que son *interesantes*. Para esto debemos saber primero qué es un regla interesante. Queda claro que si el metasecuente inferior se puede obtener mediante algunos "weakenings" y "cuts" entre los metasecuentes superiores la regla es correcta. Pero no es nada interesante. Obtenemos entonces la siguiente definición: diremos que *una regla R tiene poder de inferencia* si el metasecuente inferior no esta en la clausura de sus metasecuentes superiores.

Sabemos que las reglas $Shim_k$ para todo k son correctas. También sabemos que una regla como:

$$\frac{\Box\Gamma \Rightarrow X, W \quad W \Rightarrow \Box Y \quad \Rightarrow \Box X, \Box Z, V \quad V \Rightarrow Y, \Box X \quad \Rightarrow Z, \Box Y}{\Box\Gamma \Rightarrow \Box V, \Box W, \Box X, \Box Y, \Box Z}$$

también es correcta ya que es derivada en LKP + $\{Shim_3\}$. Observar que el conjunto formado por los secuentes:

$$\Box\Gamma \Rightarrow X, \Box Y, \Box Z \qquad \Rightarrow \Box X, Y, \Box Z \qquad \Rightarrow \Box X, \Box Y, Z$$

esta en la clausura de los metasecuentes superiores de la regla anterior.
En general cualquier regla derivada de $Shim_k$ para algún k será sound. Nuestra conjetura es que solamente son estas. En forma precisa:

Conjetura: Sea R = (U, L) una regla derecha estable para □ con poder de inferencia. Entonces ocurre una de las siguientes cosas:
* Los metasecuentes superiores de $Shim_k$ para algún k o de un símil de esta se pueden obtener de $\overline{U}$ agregando restricciones de contexto.
* R es incorrecta.

Desafortunadamente no hemos tenido éxito en probar esta conjetura. Sin embargo lo usaremos como lema en nuestra búsqueda de reglas interesantes. En una sección posterior daremos algo de evidencia para soportar la veracidad de esta conjetura.
En la siguiente proposición utilizaremos Γ' para denotar una restricción de contexto vacía a la izquierda de cualquier metasecuente, Δ para denotar una restricción de contexto vacía a la derecha y □Δ' para una restricción de contexto de tipo □X a la derecha.

Proposición 3.4.14 Sea R = (U, L) una regla derecha para $\Box$ con poder de inferencia. R es correcta si y solo si existe un subconjuto S de U (sin Γ', Δ ni $\Box$Δ') tal que los metasecuentes superiores de $Shim_k$ para algún k o de un símil de esta se pueden obtener de $\overline{S}$ agregando restricciones de contexto.

Dem. (si) Trivial.

(solo si) Como R tiene poder de inferencia y dada la conjetura los metasecuentes superiores de $Shim_m$ para algún m o símil de esta pueden obtenerse agregando $\Box\Gamma$ en el antecedente de algunos de los metasecuentes de $\overline{U}$.

Sea T el conjunto mínimo de metasecuentes en $\overline{U}$ a partir del cual $Shim_m$ puede obtenerse.

La restricción de contexto Γ' no aparece en T. Si lo hiciera, $Shim_m$ no podría obtenerse.

Las restricciones de contexto Δ o $\Box$Δ' no pueden aparecer tampoco debido a las mismas razones.

Si ninguna de estas restricciones aparecen en T entonces en la construcción de los secuentes en T, debido al procedimiento de clausura, metasecuentes con Γ' o Δ o $\Box\Delta'$ no fueron utilizados.

Luego existe un subconjunto S de U sin restricciones de contexto o solamente con $\Box\Gamma$ en el antecedente tal que los metasecuentes superiores de $Shim_m$ pueden obtenerse de $\overline{S}$.

IMPORTANTE: Observar que en S debe haber un metasecuente sin variables side en el antecedente. Si todos tuvieran variables side en el antecedente todos los metasecuentes en $\overline{S}$ también lo tendrían. ■

Ahora que hemos identificado las reglas correctas interesantes, vamos a mostrar que precisaremos un conjunto infinito de estas reglas para poder obtener un cálculo libre de corte para S4.3.

Lema 3.4.15 Sea Π una prueba del secuente RF,$Contra_k$L⇒$\Box A_1,\ldots,\Box A_k$ donde $Contra_k$L es el antecedente de $Contra_k$ y RF es un conjunto de $\Box$-RecFree subfórmulas de fórmulas en $Contra_k$L. Si la última regla aplicada R en Π es una regla de introducción a derecha de $\Box$(correcta respecto de S4.3) entonces R tiene al menos k variables side.

Dem. En principio, R puede tener restricciones de contexto en el consecuente de algún metasecuente superior. Por esto, algunos de los $\Box A_i$ pueden ser simplemente instancias de restricciones de contexto y no de variables side.

Debido a Prop. 3.4.14, existe un subconjunto S de los metasecuentes superiores de R tal que los metasecuentes superiores de $Shim_m$ para algún m o símil de esta puede obtenerse de $\overline{S}$.

También, los metasecuentes en S no tienen restricciones de contexto vacías en el antecedente. Por lo tanto, las fórmulas RF no pueden aparecer en las instancias de los metasecuentes de S.

Luego, cada metasecuente en S puede tener a $Contra_k$L en el antecedente junto con las variables proposicionales que son instancias de las variables side que podrían estar en el antecedente del metasecuente.

En particular, aquel metasecuente que no tiene variables side en el antecedente debe tener $\Box\Gamma$ en el mismo. Si no, sus instancias en la prueba no serían correctas porque serían un conjunto de fórmulas de la forma $\Box A_i$ o A_i en el consecuente. Claramente, esto último no es teorema de S4.3.

Por lo tanto, por Lema 3.4.10 las instancias de ese metasecuente debe tener todas las k variables side en el consecuente para que la instancia sea correcta (obviamente suponemos que la prueba pertenece a un cálculo que es correcto respecto de S4.3).

Pero entonces, como ese metasecuente no tiene restricciones de contexto en el consecuente, debe tener al menos k variables side de los cuales $A_1,\ldots,A_k$ son instancia.

Luego la regla tiene al menos k variables side. ■

La siguiente proposición centraliza y muestra la utilidad de los lemas demostrados en la sección donde introducimos los $Contra_k$.

Proposición 3.4.16 Sea Π una prueba libre de corte del secuente RF, $Contra_k$L$\Rightarrow$$Contra_k$R donde RF es un conjunto de subfórmulas $\Box$-RecFree de fórmulas en $Contra_k$L. Entonces la última regla aplicada no fue:

a) ($\Rightarrow$Weak)

b) (Weak$\Rightarrow$) de una fórmula en $Contra_k$L.

c) ($\Box\Rightarrow$) tal que la fórmula introducida no es colapsada.

Dem. La proposición vale porque la instancia del metasecuente superior de la regla sería unsound. Para cada caso el resultado se deduce de:

a) Lema 3.4.8

b) Lema 3.4.12

c) Lema 3.4.11

■

Proposición 3.4.17 Sea Π una prueba libre de corte del secuente RF, $Contra_k$L$\Rightarrow$$Contra_k$R donde RF es un conjunto de subfórmulas $\Box$-RecFree de fórmulas en $Contra_k$L. Entonces la última regla aplicada R fue una regla derecha para $\Box$ con al menos k variables side o la instancia de uno de los metasecuentes de R es RF', $Contra_k$L$\Rightarrow$$Contra_k$R donde RF' también es un conjunto de subfórmulas $\Box$-RecFree de fórmulas en $Contra_k$L.

Dem. Si R fue una introducción de $\Box$ a la derecha entonces por Lema 3.4.15, R tiene al menos k variables side.

Por Lema 3.4.16 y el hecho de que todas las fórmulas consideradas estan construidas solo con $\Box$ y $\vee$ solo debemos considerar los siguientes casos para R:

a) (Weak$\Rightarrow$) de una de las fórmulas en RF. En este caso la instancia del metasecuente superior es como se enuncia.

b) ($\Box\Rightarrow$) tal que la fórmula introducida es colapsada. Esto es, la fórmula introducida esta en $Contra_k$L. Entonces la instancia del metasecuente superior es: F, RF, $Contra_k$L$\Rightarrow$$Contra_k$R donde F es una de las fórmulas de $Contra_k$L sin el $\Box$ de más afuera.

c) ($\vee\Rightarrow$) colapsando fórmula o no. En este caso la prueba es como sigue:

$$\frac{G_1, [G_1 \vee G_2], RF_1, Contra_k L \Rightarrow Contra_k R \quad G_2, [G_1 \vee G_2], RF_1, Contra_k L \Rightarrow Contra_k R}{G_1 \vee G_2, RF_1, Contra_k L \Rightarrow Contra_k R}(\vee\Rightarrow)$$

$G_1 \vee G_2$ esta en RF, entonces es $\Box$-RecFree. Por lo tanto, o G_1 o G_2 es $\Box$-RecFree. Entonces uno de los secuentes superiores es como enunciamos.

■

Proposición 3.4.18 Sea Π una prueba libre de corte del secuente RF, $Contra_k$L$\Rightarrow$$Contra_k$R donde RF es un conjunto de subfórmulas $\Box$-RecFree de $Contra_k$L. Entonces en Π se aplicó una regla de introducción a la derecha con al menos k variables de fórmula.

Dem. A partir del secuente final podemos "trepar" por la prueba siempre eligiendo la rama determinada por el secuente dado por Prop. 3.4.17.

Como Π es finita, no podemos "trepar" para siempre, entonces debemos alcanzar eventualmente un secuente S que es resultado de una regla de introducción a la derecha de $\Box$. Pero por la forma en que "trepamos", S debe tener la forma RF', $Contra_k$L$\Rightarrow$$Contra_k$R.

Entonces, por Lema 3.4.15 la regla aplicada tiene al menos k variables side.

■

Observar que en esta sección hemos hablado de reglas de introducción a la derecha para $\Box$ asumiendo en forma implícita que solo considerábamos restricciones de tipo $\Box$X. Puede parecer entonces que estamos olvidando tratar algunos casos. Sin embargo, observar que dado que estamos tratando con reglas estables, ninguna regla con restricciones de fórmula distintas de $\Box$X para algún X se pudo haber usado para demostrar $Contra_k$ sin aplicaciones de Cut.

Como corolario de Prop. 3.4.18 tenemos que todo cálculo estable y libre de corte para S4.3 es infinito. Supongamos que no lo fuera, entonces debería existir un k tal que para toda regla de introducción de $\Box$ a la derecha R, R tiene menos de k variables side. Entonces en este cálculo $Contra_k$ no puede ser probado sin la regla de corte. Absurdo.

3.5 Evidencia para soportar la conjetura.

Aquí consideramos una clase importante de reglas derechas para $\Box$ definibles en este framework y mostramos que las únicas reglas sound en esta clase son las dadas por la representación infinita dada en una sección anterior.

Para optimizar la notación digamos que la regla R *incluye* ShimSim_k cuando incluye $Shim_k$ o un símil de él.

Lema 3.5.1 Sea R un conjunto finito no vacío de secuentes de la forma:

$$\Rightarrow A_1, \ldots, A_i, \Box B_1, \ldots, \Box B_j \text{ con } i \geq 1, j \geq 0$$

tal que para todo i y para todo j $A_i \neq A_j$ y no incluye $Shim_k$ para ningún k. Sea P cualquier intervalo $[r, \infty) \subseteq Q^+$. Entonces existe un modelo V sobre $(P, \leq)$ tal que valida todos los secuentes de R y además, para todas las variables $A \in \text{Vars}(R)$, existe $x \in P$ tal que $x \notin V(A)$.

Dem. Por inducción sobre la cardinalidad de R. Tomemos $r < q \in P$.

Caso base: $|R| = 1$.

Debemos considerar dos casos:

i) $R = \{ \Rightarrow A_1, \Box B_1, \ldots, \Box B_j \}$ con $j \geq 1$.

ii) $R = \{ \Rightarrow A_1, A_2, \ldots, A_i, \Box B_1, \ldots, \Box B_j \}$ con $i \geq 2$ y $j \geq 0$.

Observar que no consideramos el caso $R = \{ \Rightarrow A \}$ porque incluye a Shim_1.

Para el caso i) definimos V como sigue:

$V(A_1)=[r, q)$

$V(B_1)=[q, \infty)$

Para cualquier otra variable C, $V(C) = \emptyset$.

Es fácil ver que el secuente es válido en todos los mundos y sin embargo ninguna variable es verdadera en todos los mundos.

El caso ii) se trata en forma similar. Ahora consideremos el paso inductivo.

Antes de construir el modelo, observamos que como R no incluye ningun $Shim_k$ para ningún k, entonces existe una variable $A \in \text{Vars}(R)$ tal que:

i) no aparece como tal en nigún secuente o

ii) todo secuente en al cual aparece tiene la forma: $\Rightarrow A, B, \ldots$.

Notar que si esta variable no existiera entonces R incluiría $Shim_k$ para algún k.

Construiremos el modelo en tres pasos:

1) Primero elegimos un subconjunto propio $\text{Var}_0 \subset \text{Vars}(R)$ tal que para todo secuente S en R, alguna variable en Var_0 aparece como tal en S. Notar que por el comentario anterior existe un conjunto con tales propiedades. A saber: $\text{Vars}(R) - \{A\}$, donde A es la variable destacada en el comentario.

2) Ahora construimos parte del modelo.
$V(B) \supseteq [r, q)$ para toda $B \in Var_0$.
$V(C) = [q, \infty)$ para toda $C \in (Vars(R) - Var_0)$.
Es decir, todas las variables en Var_0 son verdaderas en el intervalo $[r, q)$ y el resto de las variables son verdaderas solo en q y en los mundos posteriores. De modo que solo queda por determinar el valor de verdad de las variables en Var_0 en el intervalo $[q, \infty)$.

Esto puede ilustrarse de la siguiente forma:

```
r ——————————————> q ——————————————>
[       Var0        )[   ????
[  ¬(Vars(R) - Var0)  )[ (Vars(R) - Var0)
```

3) Sea BadSeqs el conjunto de secuentes de R que no han sido validados por el modelo P. Sabemos que todos los secuentes en R son válidos en $[r, q)$. Ahora, $\Box C$ es valida en $[q, \infty)$ para toda $C \in (Vars(R) - Var_0)$, entonces cualquier secuente que contenga a C o a $\Box C$ es válido en $[q, \infty)$. Entonces, BadSeqs es el conjunto de secuentes que solo tienen variables en Var_0.

Como $Var_0 \subset Vars(R)$, $|BadSeqs| < |R|$. BadSeqs no incluye $Shim_k$ para ningún k porque si así fuera entonces R también lo haría. El intervalo $[q, \infty)$ esta incluido en Q^+. Entonces podemos usar la hipótesis inductiva sobre $([q, \infty), \leq)$ para obtener un modelo V'. Con este modelo podemos completar la definición de V que gráficamente luce como:

```
r ——————————————> q ——————————————>
[       Var0        )[   V'
[  ¬(Vars(R) - Var0)  )[  (Vars(R) - Var0)
```

Es fácil ver que para todas las variables existe un mundo donde es falsa. Por construcción, todos los secuentes son válidos. Esto completa nuestra demostración.

■

Ahora enunciamos la variación del Lema 3.5.1 que contempla el caso donde a la derecha de uno de los secuentes pueden aparecer A y $\Box A$.

Lema 3.5.2 Sea R un conjunto finito no vacío de secuentes de la forma:

$$\Rightarrow A_1, \ldots, A_i, \Box B_1, \ldots, \Box B_j \text{ con } i \geq 1, j \geq 0$$

tal que no incluye $Shim_k$ para ningún k o símil de esta. Sea P cualquier intervalo $[r, \infty) \subseteq Q^+$. Entonces existe un modelo V sobre $(P, \leq)$ tal que valida todos los secuentes de R y además, para todas las variables $A \in Vars(R)$, existe $x \in P$ tal que $x \notin V(A)$.

Dem. Para cada uno de los secuentes de R podemos sacar las fórmulas $\Box A$ tales que A aparece como tal en el mismo secuente. De esta forma obtenemos un R' al cual podemos aplicar el Lema 3.5.1. El modelo obtenido también valida todos los secuentes de R. ■

Proposición 3.5.3 Sea R una regla que no incluye $ShimSim_k$ para ningún k y tal que solo tiene variables side a la derecha. Entonces R es incorrecta para S4.3.

Dem. Supongamos que R no tiene ninguna restricción de contexto. Entonces si interpretamos las variables side como variables proposicionales, los secuentes superiores de R pueden verse como un conjunto de secuentes a los cuales podemos aplicar Lema 3.5.2. Como el metasecuente inferior de R debe ser $\Rightarrow \Box A_1, \ldots, \Box A_j$ para algún j, vemos que la regla es unsound.

Cualquier regla obtenida a partir de tal R agregando restricciones de contexto también es unsound. Esto se debe a que podemos obtener la instancia de R dada por el contraejemplo anterior asignando el conjunto vacío a todos los contextos.

Entonces podemos asumir que la regla que se obtiene a partir de R quitándole las restricciones de contexto incluye ShimSim_k para algún k.

Para cualquier k, $Shim_k$ o símil de esta no tiene ninguna restricción de contexto a la derecha y tiene la restricción $\Box\Gamma$ a la izquierda. Por hipótesis, R no incluye ShimSim_k para ningún k entonces R debe tener restricciones de contexto vacías a la izquierda o alguna restricción de contexto a la derecha. Si no fuera así, R incluiría ShimSim_k para algún k.

Supongamos que tiene restricciones de contexto vacías a la izquierda. Construiremos una instancia de los secuentes superiores y un modelo que los valida que juntos muestran que R no es correcta. Otra vez vamos a considerar las variables side como variables proposicionales.

$R_1 = \{\Rightarrow S \mid \Box\Gamma\Rightarrow S \text{ o } \Rightarrow S$ es un metasecuente superior de $R\}$.

$R_2 = \{C\Rightarrow S \mid \Gamma', \Box\Gamma\Rightarrow S \text{ o } \Gamma'\Rightarrow S$ es un metasecuente superior de $R\}$ donde C es una variable proposicional nueva.

$R' = R_1 \cup R_2$.

El modelo V esta definido como sigue. Sea $0 < q$, $V(C) = [0, q)$ y además para toda variables $A \in Vars(R)$, $[0, q) \subseteq V(A)$.

Es claro que todo secuente en R_2 es válido. Si aplicamos Lema 3.5.2 en R_1 y el frame $([q, \infty), \leq)$ obtenemos un modelo V' que nos dará los mundos en $[q, \infty)$ donde las variables de R_1 son verdaderas.

Gráficamente:

```
0 ————————————————> q ————————————————————————>
[      Vars(R) y C       )[ ¬C y V' para Vars(R₁) y ¬A para toda A en Vars(R) - Vars(R₁)
```

R' y V muestran que la regla es unsound. Esto se debe a que la instancia del secuente inferior de R es: $C\Rightarrow\Box A_1, \ldots, \Box A_j$, el cual no es válido en $[0, q)$.

Queda por considerar el caso cuando R puede ser obtenida a partir de algún $Shim_k$ o símil agregando restricciones de tipo X y $\Box$X a la derecha de los metasecuentes.

El razonamiento es similar. Sean:

$R_1 = \{\Rightarrow S \mid \Box\Gamma\Rightarrow S \text{ o } \Rightarrow S$ es un metasecuente superior de $R\}$.

$R_2 = \{\Rightarrow S, \Box C \mid \Box\Gamma\Rightarrow S, \Delta \text{ o } \Rightarrow S, \Delta$ es un metasecuente superior de $R\}$.

$R' = R_1 \cup R_2$.

Lema 3.5.2 es otra vez aplicable a R', entonces, la instancia del metasecuente inferior de R: $\Rightarrow\Box A_1, \ldots, \Box A_j, \Box C$; no es válida.

∎

Esperamos que esto sirva como disculpas por la conjetura que queda sin demostrar.

3.5.1 Una nota sobre la impureza de extensiones de S4.3.

En esta sección discutiremos brevemente como afecta la conjetura presentada en este capítulo la representación de extensiones de S4.3.

La conjetura no solamente restringe la capacidad del framework para representar finitamente S4.3 sino que también restringe su capacidad para representar en forma pura (finita o infinitamente) cualquier extensión de S4.3. El motivo es muy sencillo. Esencialmente, la conjetura es que las únicas reglas de introducción de $\Box$ correctas con respecto a S4.3 son las $Shim_k$ para todo k. Ahora bien, para representar una extensión de S4.3 se necesitaría un cálculo con al menos una regla de introducción de $\Box$ que no pudiera ser derivada con ninguna $Shim_k$. Pero si la conjetura es cierta entonces esta regla sería incorrecta con respecto a S4.3. Entonces la relación de consecuencia representada con este cálculo no sería una extensión de S4.3.

Lo que estamos diciendo es entonces que en este framework no existen representaciones puras (ni finitas ni infinitas) para ninguna extensión de S4.3.

De hecho, los cálculos que conocemos para algunas extensiones de S4.3 son "raros". Para finalizar esta sección presentamos dos ejemplos de reglas para representar ciertas extensiones de S4.3. Observar que estas reglas no pueden escribirse dentro del framework.

La lógica modal S4.3Grz se obtiene extendiendo la representación *a la* Hilbert de S4.3 con el siguiente axioma:

$$\Box(\Box(A \supset \Box A) \supset A) \supset \Box A$$

En ([22]) se demuestra que el cálculo obtenido al agregar la siguiente regla a LKP + $\{(\Box\Rightarrow)\}$ es una representación libre de corte para S4.3Grz.

$$\frac{\ldots \quad \Box\Gamma, \Box(A \supset \Box A) \Rightarrow \Box\Delta - \Box A, A \quad \ldots \quad , \textit{para todas las ocurrencias } A \textit{ en } \Delta}{\Box\Gamma \Rightarrow \Box\Delta}$$

La lógica modal S4.3.1 se obtiene extendiendo la representación *a la* Hilbert de S4.3 con el axioma:

$$\Box(\Box(A \supset \Box A) \supset A) \supset (\Diamond\Box A \supset \Box A)$$

En ([10]) se presenta la siguiente regla de introducción a derecha para representar S4.3.1:

$$\frac{S_1 \quad S_2 \quad \ldots \quad S_k \quad S_{k+1} \quad S_{k+2} \quad \ldots \quad S_{2k}}{\Sigma, \Box\Gamma \Rightarrow \Box A_1, \ldots, \Box A_k}$$

donde para $1 \leq i \leq k$:
$Y = \{A_1, \ldots, A_k\}$
$Y_i = Y - \{A_i\}$
$S_i = \Sigma, \Box\Gamma \Rightarrow \Diamond\Box A_i, \Box Y_i, \Delta$
$S_{k+i} = \Box\Gamma, \Box(A_i \supset \Box A_i) \Rightarrow A_i, \Box Y_i$

3.6 Conclusiones.

En este capítulo definimos un framework para construir representaciones *a la* Gentzen. Vimos que podíamos construir representaciones finitas para la lógica clásica proposicional y para la lógica modal proposicional S4. También vimos que cada instancia de la regla de introducción para S4.3 presentada en el capítulo anterior se puede describir dentro del framework. Luego presentamos una conjetura cuya consecuencia inmediata es que las únicas reglas de introducción de $\Box$ describibles en el framework correctas con respecto a S4.3 son las denominadas $Shim_k$. Una vez aceptado este hecho demostramos que dentro de este framework no existe una representación finita para S4.3. Finalmente presentamos evidencia para soportar la conjetura.

Podemos decir entonces que no parece ser posible obtener una representación para S4.3 utilizando sólo las herramientas que Gentzen utilizó para definir sus cálculos o "simplificando" la representación de Shimura. De hecho, la literatura actual exhibe una variada gama de formalismos para representar lógicas modales tal como los 2-Secuentes ([16]), calculos que se basan en la noción de verdad relativa ([24]) o secuentes multi-level ([6]).

Los resultados de este capítulo proveen entonces motivos suficientes para alterar el formalismo de secuentes en forma radical como medio para obtener una representación más satisfactoria para S4.3.

Capítulo 4

Una representación no convencional para S4.3.

4.1 Introducción.

Debido a los problemas tratados en las secciones previas surge la siguiente pregunta: ¿Es adecuado un formalismo *a la* Gentzen como aquel que hemos formalizado para representar lógicas modales proposicionales? ¿Habrá presentaciones más adecuadas de S4.3 en algún otro formalismo? La variedad de presentaciones que existen en la literatura para lógicas modales responden por sí mismas: 2-secuentes en ([1]), secuentes de alto nivel en ([6]) y secuentes que incorporan la interpretación de mundos posibles en ([24]). En este último trabajo se describe como construir cálculos de secuentes para varias lógicas modales intuicionistas y se prueba eliminación semántica de corte para los mismos.

Aquí modificaremos la definición de secuente para poder tratar a la lógica clásica y presentar un cálculo para la lógica modal S4.3. Esta presentación resulta mucho más sencilla que las que hemos visto. También demostraremos eliminación sintáctica de la regla de corte. De hecho, esta misma prueba puede ser fácilmente modificada para tratar la versión intuicionista de S4.3 que se define en ([24]).

4.1.1 Preliminares.

El cálculo para S4.3 que presentaremos hace uso de fórmulas prefijas y grafos.

Supongamos que disponemos de un conjunto denumerable infinito de variables $x, y, z, \ldots$. Entonces, si A es una fórmula, x:A es una *fórmula prefija* y x es el prefijo. Intuitivamente x:A significa que A es verdadero en el mundo x.

Un *grafo* es una par (X,R) donde X es un conjunto no-vacío de variables (representando mundos) y R es una relación binaria sobre X. Usaremos letras G,H,... para denotar grafos. τ_X denota el grafo trivial (X,$\emptyset$). G_y denota el grafo (X$\cup\{y\}$,R) donde G=(X,R). Un *morfismo de grafos* de G=(X,R) en H=(X',R') es una función f:X$\rightarrow$X' tal que xRy en G implica f(x)R'f(y) en H. Sea M=(W,R) un frame (es decir, W es un conjunto de mundos y R es una relación binaria sobre W) y G un grafo. Una *G-interpretación* en M es un morfismo de grafos de G en (W,R).

Un *secuente* es una entidad $G;\Gamma\Rightarrow\Delta$ donde G es un grafo finito, Γ y Δ son conjuntos finitos de fórmulas prefijas y todos los prefijos en $\Gamma\cup\Delta$ estan en G. Además, en un secuente, si G=(X,R) y H=(X',R') son grafos, usaremos G,H para denotar el grafo $(X \cup X', R \cup R')$. Del mismo modo, G,xRy denota el grafo G'=(X,R $\cup$ (x, y)) donde G=(X,R); por ende, esto solo tiene sentido cuando $x, y \in$ X. A veces omitiremos el grafo trivial en un secuente. Decimos que un prefijo y no ocurre en un secuente $(X, R); \Gamma \Rightarrow \Delta$ si y no aparece como primer o segundo componente de un par en R (notar que puede aparecer en X) e y no es prefijo de alguna fórmula prefija en $\Gamma \cup \Delta$.

4.1.2 El Cálculo.

En la Fig. 4.1 presentamos el cálculo para S4.3 al que nos referiremos sencillamente como **Simp4.3**.

$$\tau_{\{x\}}; x : A \Rightarrow x : A \qquad \frac{G; \Gamma \Rightarrow x : A, \Delta \quad H; \Theta, x : A \Rightarrow \Phi}{G, H; \Gamma, \Theta \Rightarrow \Delta, \Phi}\,(cut)$$

$$\frac{G; \Gamma \Rightarrow \Delta}{G'; \Gamma' \Rightarrow \Delta}\,(weak\Rightarrow) \qquad \frac{G; \Gamma \Rightarrow \Delta}{G_x; \Gamma \Rightarrow \Delta, x : A}\,(\Rightarrow weak)$$

$$\frac{G, xRx; \Gamma \Rightarrow \Delta}{G; \Gamma \Rightarrow \Delta}\,(refl) \qquad \frac{G, xRz; \Gamma \Rightarrow \Delta}{G_y, xRy, yRz; \Gamma \Rightarrow \Delta}\,(trans)$$

$$\frac{G, yRz; \Gamma \Rightarrow \Delta \quad G, zRy; \Gamma \Rightarrow \Delta}{G_x, xRy, xRz; \Gamma \Rightarrow \Delta}\,(conn)$$

$$\frac{G; \Gamma, x : A, x : B \Rightarrow \Delta}{G; \Gamma, x : A \wedge B \Rightarrow \Delta}\,(\wedge\Rightarrow) \qquad \frac{G; \Gamma \Rightarrow x : A, \Delta \quad G; \Gamma \Rightarrow x : B, \Delta}{G; \Gamma \Rightarrow x : A \wedge B, \Delta}\,(\Rightarrow\wedge)$$

$$\frac{G; \Gamma, x : A \Rightarrow \Delta \quad G; \Gamma, x : B \Rightarrow \Delta}{G; \Gamma, x : A \vee B \Rightarrow \Delta}\,(\vee\Rightarrow)$$

$$\frac{G; \Gamma \Rightarrow x : A, \Delta}{G; \Gamma \Rightarrow x : A \vee B, \Delta}\,(\Rightarrow\vee_1) \qquad \frac{G; \Gamma \Rightarrow x : B, \Delta}{G; \Gamma \Rightarrow x : A \vee B, \Delta}\,(\Rightarrow\vee_2)$$

$$\frac{G; \Gamma \Rightarrow x : A, \Delta}{G; \Gamma, x : \neg A \Rightarrow \Delta}\,(\neg\Rightarrow) \qquad \frac{G; \Gamma, x : A \Rightarrow \Delta}{G; \Gamma \Rightarrow x : \neg A, \Delta}\,(\Rightarrow\neg)$$

$$\frac{G; \Gamma \Rightarrow x : A, \Delta \quad G; \Gamma, x : B \Rightarrow \Delta}{G; \Gamma, x : A \supset B \Rightarrow \Delta}\,(\supset\Rightarrow) \qquad \frac{G; \Gamma, x : A \Rightarrow x : B, \Delta}{G; \Gamma \Rightarrow x : A \supset B, \Delta}\,(\Rightarrow\supset)$$

$$\frac{G, xRy; \Gamma, y : A \Rightarrow \Delta}{G; \Gamma, x : \Diamond A \Rightarrow \Delta}\,(\Diamond\Rightarrow) \qquad \frac{G; \Gamma \Rightarrow y : A, \Delta}{G_x, xRy; \Gamma \Rightarrow x : \Diamond A, \Delta}\,(\Rightarrow\Diamond)$$

$$\frac{G; \Gamma, y : A \Rightarrow \Delta}{G_x, xRy; \Gamma, x : \Box A \Rightarrow \Delta}\,(\Box\Rightarrow) \qquad \frac{G, xRy; \Gamma \Rightarrow y : A, \Delta}{G; \Gamma \Rightarrow x : \Box A, \Delta}\,(\Rightarrow\Box)$$

Figura 4.1: Cálculo de Secuentes para S4.3.

Algunas de las reglas tienen restricciones que detallamos en la Fig. 4.2.

Las reglas $(weak\Rightarrow)$ y $(\Rightarrow weak)$ son reglas estructurales; (refl) , (trans) y (conn) corresponden a reflexividad, transitividad y conexión de la relación de accesibilidad; las reglas para $\wedge, \vee, \neg, \supset$ son las reglas correspondientes a los operadores de verdad funcionales y finalmente, las reglas para

regla	restricción
$(weak\Rightarrow)$	$G \subseteq G', \Gamma \subseteq \Gamma'$ y todo prefijo en Γ' esta en G'
$(\Diamond\Rightarrow)$	y no debe ocurrir en $G; \Gamma, x : \Diamond A \Rightarrow \Delta$
$(\Rightarrow\Box)$	y no debe ocurrir en $G; \Gamma \Rightarrow x : \Box A, \Delta$

Figura 4.2: Restricciones sobre las reglas de **Simp4.3**.

$\Box$ y $\Diamond$ son las reglas de los operadores modales. El prefijo y en las reglas $(\Diamond\Rightarrow)$ y $(\Rightarrow\Box)$ es la eigenvariable.

Debajo presentamos ejemplos de derivaciones en **Simp4.3**.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\tau_{\{z\}}; z : A \Rightarrow z : A}{\tau_{\{x,z\}}, xRz; x : \Box A \Rightarrow z : A}(\Box\Rightarrow)}{\tau_{\{x,z\}}, xRz; x : \Box A, z : \neg A \Rightarrow}(\neg\Rightarrow)}{\tau_{\{x,z\}}; x : \Box A, x : \Diamond\neg A \Rightarrow}(\Diamond\Rightarrow)}{\tau_{\{x,z\}}; x : \Box A \Rightarrow x : \neg\Diamond\neg A}(\Rightarrow\neg)}{\tau_{\{x,z\}}; \Rightarrow x : \Box A \supset \neg\Diamond\neg A}(\Rightarrow\supset)
\qquad
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\tau_{\{z\}}; z : A \Rightarrow z : A}{\tau_{\{z\}}; \Rightarrow z : A, z : \neg A}(\Rightarrow\neg)}{\tau_{\{x,z\}}, xRz; \Rightarrow z : A, x : \Diamond\neg A}(\Rightarrow\Diamond)}{\tau_{\{x,z\}}; \Rightarrow x : \Box A, x : \Diamond\neg A}(\Rightarrow\Box)}{\tau_{\{x,z\}}; x : \neg\Diamond\neg A \Rightarrow x : \Box A}(\neg\Rightarrow)}{\tau_{\{x,z\}}; \Rightarrow x : \neg\Diamond\neg A \supset \Box A}(\Rightarrow\supset)$$

Definición 4.1.1 Una fórmula A es un *teorema* de **Simp4.3** si hay un conjunto finito de prefijos X y una derivación con secuente final $\tau_X; \Rightarrow x : A$ para algún prefijo x en X. ∎

4.2 Correctitud de Simp4.3.

Como ya hemos mencionado, S4.3 esta caracterizada por la clase de los frames reflexivos, transitivos y conexos. En esta sección probaremos que el cálculo es correcto respecto de la familia de modelos inducidos por esta clase.

En la siguiente prueba, si G es un grafo, M=(W,R,V) un modelo de Kripke, ρ una G-interpret. en M, y $\Delta = \{x_1 : A_1, \ldots, x_n : A_n\}$ entonces escribiremos $\amalg_\rho\Delta$ queriendo decir $\rho(x_1) \models_M A_1$ o ... o $\rho(x_n) \models_M A_n$.

Teorema 4.2.1 Si $G; \Gamma \Rightarrow x_1 : A_1, \ldots, x_n : A_n$ es derivable en **Simp4.3** entonces para cualquier modelo M=(W,R,V) tal que R es reflexiva, transitiva y conexa, para cualquier G-interpretación ρ en M, si para todo z:B $\in \Gamma$ $\rho(z) \models_M B$ entonces $\rho(x_1) \models_M A_1$ o ... o $\rho(x_n) \models_M A_n$.

Dem.

Por inducción sobre el número de reglas aplicadas. Tanto el caso base como los casos correspondientes a las reglas de los operadores de verdad funcionales y las reglas estructurales no presentan problemas. Analicemos los casos en los que la última regla aplicada corresponde a los operadores modales.

Caso $(\Box\Rightarrow)$

Supongamos que $\forall$ G-int ρ si $\forall z : B \in \Gamma \cup \{y : A\}$, $\rho(z) \models_M B$ entonces $\amalg_\rho\Delta$. Ahora supongamos también que existe una G_x,xRy-int ρ' tal que $\forall z : B \in \Gamma \cup \{x : \Box A\}$, $\rho'(z) \models_M B$ pero no $\amalg_{\rho'}\Delta$. Luego como $\rho'(x) \models_M \Box A$ y $\rho'(x)$R$\rho'(y)$, debe suceder que $\rho'(y) \models_M A$. Pero entonces $\amalg_{\rho'}\Delta$ resultando así una contradicción.

Caso ($\Rightarrow\Box$)
Supongamos que $\forall$ G,xRy-int ρ' si $\forall z : B \in \Gamma$, $\rho'(z) \models_M B$ entonces $\rho'(y) \models_M A$ o $\amalg_{\rho'}\Delta$. Ahora supongamos que existe una G-int ρ tal que $\forall z : B \in \Gamma$, $\rho(z) \models_M B$ pero no $\rho(x) \models_M \Box A$ ni $\amalg_\rho\Delta$. Como $\rho(x) \not\models_M \Box A$ debe haber un $w \in$W tal que $\rho(x)$Rw y $w \not\models_M A$. Entonces podemos construir la siguiente G,xRy-int ρ',
$\rho'(x) = \rho(x)$, si $x \neq y$,
$\rho'(x) = w$, caso contrario.
Ahora ρ' es una G-int. Además, como y no ocurre en el secuente inferior, tenemos que $\forall z$: $B \in \Gamma$, $\rho'(z) \models_M B$ pero no $\rho'(y) \models_M A$ ni $\amalg_{\rho'}\Delta$. Pero todo esto junto con la hipótesis nos lleva a una contradicción.

Caso ($\Diamond\Rightarrow$)
Supongamos que $\forall$ G,xRy-int ρ' si $\forall z : B \in \Gamma \cup \{y : A\}$, $\rho'(z) \models_M B$ entonces $\amalg_{\rho'}\Delta$. Ahora supongamos que existe una G-int ρ tal que $\forall z : B \in \Gamma \cup \{x : \Diamond A\}$, $\rho(z) \models_M B$ pero no $\amalg_\rho\Delta$. Como $\rho(x) \models_M \Diamond A$ debe haber una $w \in$W tal que $\rho(x)$Rw y $w \models_M A$. Entonces podemos construir la siguiente G,xRy-int ρ',
$\rho'(x) = \rho(x)$, si $x \neq y$,
$\rho'(x) = w$, caso contrario.
De manera similar al caso previo, esto nos conduce a una contradicción.

Caso ($\Rightarrow\Diamond$)
Supongamos que $\forall$ G-int ρ si $\forall z : B \in \Gamma$, $\rho(z) \models_M B$ entonces $\rho(y) \models_M A$ o $\amalg_\rho\Delta$. Ahora supongamos que ρ' es cualquier G$_x$,xRy-int tal que $\forall z : B \in \Gamma$, $\rho'(z) \models_M B$. Entonces sabemos que $\rho'(y) \models_M A$ o $\amalg_{\rho'}\Delta$ (pues una G$_x$,xRy-int es una G-int). Luego como xRy, tenemos $\rho'(x)R\rho'(y)$, y consecuentemente $\rho'(x) \models_M \Diamond A$ o $\amalg_{\rho'}\Delta$.

Supongamos que la última regla aplicada es:

Caso (refl),(trans)
Sencillo pues R (en el modelo) es reflexiva y transitiva.

Caso (conn)
Supongamos que $\forall$ G,yRz-int ρ' si $\forall z : B \in \Gamma$, $\rho'(z) \models_M B$ entonces $\amalg_{\rho'}\Delta$. Además supongamos que $\forall$ G,zRy-int ρ'' si $\forall z : B \in \Gamma$, $\rho''(z) \models_M B$ entonces $\amalg_{\rho''}\Delta$. Ahora sea ρ una G,xRy,xRz-int. Entonces como R (en el modelo) es conexa debemos considerar dos subcasos:
i. $\rho(y)R\rho(z)$, en cuyo caso por la hipótesis tenemos que $\amalg_\rho\Delta$.
ii. $\rho(z)R\rho(y)$, en cuyo caso por la hipótesis tenemos que $\amalg_\rho\Delta$. ∎

4.3 Completitud de Simp4.3.

En esta sección probaremos completitud de **Simp4.3**. Esto se hará eligiendo una axiomatización *a la* Hilbert y probando que todos los axiomas se pueden derivar como teoremas del cálculo y que además el conjunto de teoremas del cálculo es cerrado bajo Modus Ponens y Necesidad.
Trabajaremos con el sistema axiomático modal normal para S4.3 de la Fig. 4.3.

Nuestra prueba de completitud hará uso de el siguiente lema de sustitución de variables en derivaciones de **Simp4.3** por variables nuevas. Notar que la variable y en $\Pi(y)$,G(y) y $\Gamma(y)$ hace referencia a una posible ocurrencia de y en la derivación Π, el grafo G y la secuencia de fórmulas Γ respectivamente.

(T)	$\Box A \supset A$
(4)	$\Box A \supset \Box\Box A$
(H)	$\Box(\Box A \supset B) \vee \Box(\Box B \supset A)$
(Cl)	$\Box A \leftrightarrow \neg\Diamond\neg A$

Figura 4.3: Axiomas para S4.3 con $\Diamond$.

Lema 4.3.1 Sea $\Pi(y)$ una derivación del secuente $G(y); \Gamma(y) \Rightarrow \Delta(y)$ en **Simp4.3**. Sea x una variable (o sea, prefijo) que no ocurre en $\Pi(y)$. Entonces la derivación resultante de reemplazar el prefijo y en $\Pi(y)$ por x es una derivación válida del secuente $G(x); \Gamma(x) \Rightarrow \Delta(x)$

Dem.

Usaremos inducción sobre la longitud de la derivación.

Caso base. De $\tau_{\{y\}}, y : A \Rightarrow y : A$ podemos obtener la derivación válida $\tau_{\{x\}}, x : A \Rightarrow x : A$

Caso inductivo. Solamente consideraremos los casos en los que la última regla aplicada es $(\Rightarrow weak)$ (una regla estructural), $(\Rightarrow\wedge)$ (una regla de operador de verdad funcional) y $(\Rightarrow\Box)$ (una regla de operador modal). El resto de los casos se trata de manera similar.

Supongamos que la última regla aplicada fue $(\Rightarrow weak)$, entonces tenemos:

$$\dfrac{\begin{matrix}\vdots\, \Pi \\ G(y); \Gamma(y) \Rightarrow \Delta(y)\end{matrix}}{G_y(y); \Gamma(y) \Rightarrow \Delta(y), y : A}\,(\Rightarrow \text{weak})$$

Podemos aplicar la Hipótesis Inductiva a Π que nos proveerá con la derivación válida Π' donde todo y en Π ha sido reemplazado por x. Podemos entonces construir la siguiente derivación:

$$\dfrac{\begin{matrix}\vdots\, \Pi' \\ G(x); \Gamma(x) \Rightarrow \Delta(x)\end{matrix}}{G_x(x); \Gamma(x) \Rightarrow \Delta(x), x : A}\,(\Rightarrow \text{weak})$$

Notar que si la fórmula prefija introducida por weakening en Π no tiene prefijo y entonces podemos tratarlo de manera similar.

Si la última regla aplicada fue $(\Rightarrow\wedge)$ entonces la derivación tiene la forma:

$$\dfrac{\begin{matrix}\vdots\, \Pi_1 \\ G(y); \Gamma(y) \Rightarrow y : A, \Delta(y)\end{matrix} \quad \begin{matrix}\vdots\, \Pi_2 \\ G(y); \Gamma(y) \Rightarrow y : B, \Delta(y)\end{matrix}}{G(y); \Gamma(y) \Rightarrow y : A \wedge B, \Delta(y)}\,(\Rightarrow\wedge)$$

Podemos aplicar la Hipótesis Inductiva a las derivaciones Π_1 y Π_2 obteniendo Π_1' y Π_2' respectivamente. Podemos entonces construir la derivación válida:

$$\dfrac{\begin{matrix}\vdots\, \Pi_1' \\ G(x); \Gamma(x) \Rightarrow x : A, \Delta(x)\end{matrix} \quad \begin{matrix}\vdots\, \Pi_2' \\ G(x); \Gamma(x) \Rightarrow x : B, \Delta(x)\end{matrix}}{G(x); \Gamma(x) \Rightarrow x : A \wedge B, \Delta(x)}\,(\Rightarrow\wedge)$$

En el caso en que el prefijo de A (y por lo tanto de B) es distinto de y se trata de manera similar.

Si la última regla aplicada fue $(\Rightarrow\Box)$ entonces tenemos dos subcasos a tener en cuenta. El primero de ellos corresponde al caso donde y es la eigenvariable, el segundo al caso en que no lo es. Dado que el segundo caso es muy similar al primero trabajaremos directamente con el primero.

$$\begin{array}{c} \vdots\,\Pi \\ \dfrac{G(y), zRy; \Gamma \Rightarrow y : A, \Delta}{G(y); \Gamma \Rightarrow z : \Box A, \Delta}\,(\Rightarrow\Box) \end{array}$$

Como y no ocurre en $G(y); \Gamma \Rightarrow z : \Box A, \Delta$[1] la Hipótesis Inductiva aplicada a Π nos proveerá con una derivación Π' del secuente $G(x), zRx; \Gamma \Rightarrow x : A, \Delta$ y podemos entonces construir la derivación válida siguiente:

$$\begin{array}{c} \vdots\,\Pi' \\ \dfrac{G(x), zRx; \Gamma \Rightarrow x : A, \Delta}{G(x); \Gamma \Rightarrow z : \Box A, \Delta}\,(\Rightarrow\Box) \end{array}$$

Observar que si z fuera y no habría ningún problema pues igualmente podríamos obtener una derivación válida siguiendo el procedimiento descripto arriba. ∎

Si Π es una derivación que usa el prefijo (o variable) y entonces usamos $\Pi' = \Pi[y \leftarrow x]$ para denotar la derivación resultante de aplicar el Lema 4.3.1 a Π (reemplazando y por x).

Teorema 4.3.2 Si una fórmula A es teorema de S4.3 entonces hay una derivación en **Simp4.3** del secuente $\tau_X; \Rightarrow x : A$ para algún conjunto finito de prefijos X que incluye a x.

Dem.

A continuación presentamos derivaciones (simplificadas) en **Simp4.3** de los axiomas mencionados anteriormente. Las derivaciones correspondientes al axioma (Cl) fueron dados ya como derivaciones ejemplos en la subsección de introducción al cálculo.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{y : A \Rightarrow y : A}{y : A \Rightarrow y : A, y : B}\,(\Rightarrow weak) \qquad \dfrac{y : B \Rightarrow y : B}{y : A, y : B \Rightarrow y : B}\,(weak\Rightarrow)}{y : A \supset B, y : A \Rightarrow y : B}\,(\supset\Rightarrow)}{xRy; x : \Box(A \supset B), y : A \Rightarrow y : B}\,(\Box\Rightarrow)}{xRy; x : \Box(A \supset B), x : \Box A \Rightarrow y : B}\,(\Box\Rightarrow)}{x : \Box(A \supset B), x : \Box A \Rightarrow x : \Box B}\,(\Rightarrow\Box)}{x : \Box(A \supset B) \Rightarrow x : \Box A \supset \Box B}\,(\Rightarrow\supset)}{\Rightarrow x : \Box(A \supset B) \supset (\Box A \supset \Box B)}\,(\Rightarrow\supset)$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{x : A \Rightarrow x : A}{xRx; x : \Box A \Rightarrow x : A}\,(\Box\Rightarrow)}{x : \Box A \Rightarrow x : A}\,(refl)}{\Rightarrow x : \Box A \supset A}\,(\Rightarrow\supset) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{y : A \Rightarrow y : A}{xRy; x : \Box A \Rightarrow y : A}\,(\Box\Rightarrow)}{xRz, zRy; x : \Box A \Rightarrow y : A}\,(trans)}{xRz; x : \Box A \Rightarrow z : \Box A}\,(\Rightarrow\Box)}{x : \Box A \Rightarrow x : \Box\Box A}\,(\Rightarrow\Box)}{\Rightarrow x : \Box A \supset \Box\Box A}\,(\Rightarrow\supset)$$

[1] Esto puede parecer contradictorio a primera vista pero recordar que la definición de ocurrencia de un prefijo en un secuente solamente considera la relación de accesibilidad del correspondiente grafo y no su conjunto de nodos.

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$z : A \Rightarrow z : A$}
\RightLabel{$(\Box\Rightarrow)$}
\UnaryInfC{$yRz; y : \Box A \Rightarrow z : A$}
\RightLabel{$(weak\Rightarrow)$}
\UnaryInfC{$yRz; z : \Box B, y : \Box A \Rightarrow z : A$}
\RightLabel{$(\Rightarrow\supset)$}
\UnaryInfC{$yRz; y : \Box A \Rightarrow z : \Box B \supset A$}
\RightLabel{$(\Rightarrow weak)$}
\UnaryInfC{$yRz; y : \Box A \Rightarrow z : \Box B \supset A, y : B$}
\RightLabel{$(\Rightarrow\supset)$}
\UnaryInfC{$yRz; \Rightarrow z : \Box B \supset A, y : \Box A \supset B$}
\AxiomC{$y : A \Rightarrow y : A$}
\RightLabel{$(\Box\Rightarrow)$}
\UnaryInfC{$zRy; z : \Box B \Rightarrow y : B$}
\RightLabel{$(weak\Rightarrow)$}
\UnaryInfC{$zRy; z : \Box B, y : \Box A \Rightarrow y : B$}
\RightLabel{$(\Rightarrow\supset)$}
\UnaryInfC{$zRy; z : \Box B \Rightarrow y : \Box A \supset B$}
\RightLabel{$(\Rightarrow weak)$}
\UnaryInfC{$zRy; z : \Box B \Rightarrow z : A, y : \Box A \supset B$}
\RightLabel{$(\Rightarrow\supset)$}
\UnaryInfC{$zRy; \Rightarrow z : \Box B \supset A, y : \Box A \supset B$}
\RightLabel{$(conn)$}
\BinaryInfC{$xRy, xRz; \Rightarrow z : \Box B \supset A, y : \Box A \supset B$}
\RightLabel{$(\Rightarrow\Box)$}
\UnaryInfC{$xRz \Rightarrow z : \Box B \supset A, x : \Box(\Box A \supset B)$}
\RightLabel{$(\Rightarrow\Box)$}
\UnaryInfC{$\Rightarrow x : \Box(\Box B \supset A), x : \Box(\Box A \supset B)$}
\RightLabel{$(\Rightarrow\vee_1)$}
\UnaryInfC{$\Rightarrow x : \Box(\Box B \supset A), x : \Box(\Box A \supset B) \vee \Box(\Box B \supset A)$}
\RightLabel{$(\Rightarrow\vee_2)$}
\UnaryInfC{$\Rightarrow x : \Box(\Box A \supset B) \vee \Box(\Box B \supset A)$}
\end{prooftree}
$$

Resta mostrar que Modus Ponens y Necesidad son reglas derivadas en **Simp4.3**.

Supongamos que tenemos:

$$
\begin{array}{c} \vdots\ \Pi \\ \tau_X; \Rightarrow x : A \supset B \end{array}
\qquad
\begin{array}{c} \vdots\ \Pi' \\ \tau_Y; \Rightarrow y : A \end{array}
$$

Podemos entonces construir la siguiente derivación:

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$\vdots\ \Pi''$}
\noLine
\UnaryInfC{$\tau_{Y'}; \Rightarrow x : A$}
\AxiomC{$\vdots\ \Pi$}
\noLine
\UnaryInfC{$\tau_X; \Rightarrow x : A \supset B$}
\AxiomC{$\tau_{\{x\}}; x : A \Rightarrow x : A$}
\RightLabel{$(\Rightarrow weak)$}
\UnaryInfC{$\tau_{\{x\}}; x : A \Rightarrow x : A, x : B$}
\AxiomC{$\tau_{\{x\}}; x : B \Rightarrow x : B$}
\RightLabel{$(weak\Rightarrow)$}
\UnaryInfC{$\tau_{\{x\}}; x : A, x : B \Rightarrow x : B$}
\RightLabel{$(\supset\Rightarrow)$}
\BinaryInfC{$\tau_{\{x\}}; x : A \supset B, x : A \Rightarrow x : B$}
\RightLabel{(Cut)}
\BinaryInfC{$\tau_X; x : A \Rightarrow x : B$}
\RightLabel{(Cut)}
\BinaryInfC{$\tau_{Y' \cup X}; \Rightarrow x : B$}
\end{prooftree}
$$

donde

$$
\begin{array}{c} \vdots\ \Pi'' \\ \tau_{Y'}; \Rightarrow x : A \end{array}
$$

se obtiene aplicando (a lo sumo dos veces) el Lema 4.3.1 a Π'.
En lo que refiere a Necesidad, tenemos

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$\vdots\ \Pi$}
\noLine
\UnaryInfC{$\tau_X; \Rightarrow x : A$}
\RightLabel{$(weak\Rightarrow)$}
\UnaryInfC{$\tau_{X \cup \{y\}}, yRx; \Rightarrow x : A$}
\RightLabel{$(\Rightarrow\Box)$}
\UnaryInfC{$\tau_{X \cup \{y\}}; \Rightarrow y : \Box A$}
\end{prooftree}
$$

■

4.4 Eliminación de corte para Simp4.3.

En esta sección probaremos el teorema de eliminación de la regla de corte para **Simp4.3**. La prueba es de carácter sintáctico.

Definición 4.4.1 Una derivación se dice *regular* ([25]) si las siguientes dos condiciones valen:
* todas las eigenvariables son distintas.
* si una variable x ocurre como eigenvariable en un secuente S de una derivación, entonces x ocurre solamente en secuentes por encima de S.

■

La prueba de que para cualquier LK-derivación (LK es el nombre del calculo de secuentes para la logica clásica de primer orden introducido por Gentzen en ([8])) de un LK-secuente existe una LK-derivación regular (tal como aparece en ([25])) puede adaptarse a nuestro formalismo como sigue.

Lema 4.4.2 Para cualquier derivación Π en **Simp4.3** hay una derivación regular con el mismo secuente final.

Dem.

Por inducción sobre el número de aplicaciones de $(\Rightarrow\Box)$ y $(\Diamond\Rightarrow)$, digamos n, en Π.

Caso $n = 0$. En este caso tomamos la misma derivación Π.

Caso $n > k$. Supongamos que el lema vale para $n \leq k$. Π tiene la siguiente forma:

$$\begin{array}{c} \Pi_1 \; ... \; \Pi_k \\ \vdots\, \Xi \\ S \end{array}$$

donde la última regla aplicada en Π_i es r_i:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\, \Pi_i \\ G_i, z_iRx_i; \Gamma_i \Rightarrow x_i : A, \Delta_i\end{array}}{G_i; \Gamma_i \Rightarrow z_i : \Box A, \Delta_i}\,(\Rightarrow\Box) \quad \text{or} \quad \dfrac{\begin{array}{c}\vdots\, \Pi_i \\ G_i, z_iRx_i; \Gamma, x_i : A \Rightarrow \Delta_i\end{array}}{G_i; \Gamma_i, z_i : \Diamond A \Rightarrow \Delta_i}\,(\Diamond\Rightarrow)$$

Además, no hay aplicaciones de $(\Rightarrow\Box)$ y $(\Diamond\Rightarrow)$ en la parte de Π denotada por Ξ.

Supongamos que r_i es $(\Rightarrow\Box)$ (el otro caso se trata de manera similar). Entonces podemos aplicar la Hipótesis Inductiva a Π_i y de esta forma obtener la derivación regular Π_i' con secuente final $G_i, z_iRx_i; \Gamma_i \Rightarrow x_i : A, \Delta_i$

Observar que ninguno de los prefijos que ocurren en el secuente menciondo arriba ocurren como eigenvariable de Π_i' (pues sino la derivación no sería regular).

Por lo tanto, cada Π_i' es regular, pero para que Π sea regular debemos asegurarnos que:
* ninguna eigenvariable en Π_i' ocurre en Π_j' para $i \neq j$.
* ninguna de las eigenvariables en Π_i' para cualquier $1 \leq i \leq k$ ocurre en Ξ.

El primer punto se trata de la siguiente manera. Sean $a_1, ..., a_m$ todas las eigenvariables usadas en todas las Π_i''s. Reemplazarlas con variables nuevas $b_1, ..., b_m$ usando Lema 4.3.1. De esta manera obtenemos derivaciones (regulares) Π_i''.

En lo que respecta al segundo punto, si b_i occurre en Π debajo de $G_i; \Gamma_i \Rightarrow z_i : \Box A, \Delta_i$ entonces aplicamos el Lema 4.3.1 a Π_i'' reemplazando b_i por b_{m+i} y obteniendo Π_i'''

Finalmente obtenemos la derivación Π':

$$\begin{array}{c} \Pi_1''' \; ... \; \Pi_k''' \\ \vdots\, \Xi \\ S \end{array}$$

donde eventualmente algunas $\Pi_i''' = \Pi_i''$.

∎

Podemos entonces asumir en lo que resta del trabajo que las derivaciones son regulares.

Antes de tratar el teorema de eliminación de corte propiamente dicho haremos unos breves comentarios sobre ocurrencias activas e inactivas de fórmula de corte. Supongamos que tenemos la siguiente aplicación de la regla de corte.

$$\dfrac{\begin{matrix}\vdots\,\Pi_1\\ G;\Gamma\Rightarrow\Phi, x:A\end{matrix} \quad \begin{matrix}\vdots\,\Pi_2\\ H;x:A,\Delta\Rightarrow\Theta\end{matrix}}{G,H;\Gamma,\Delta\Rightarrow\Phi,\Theta}\,(Cut)$$

Además sea r la última regla aplicada en Π_1 y s la última aplicada en Π_2. La fórmula de corte A en una aplicación de la regla de corte puede ocurrir activa o inactiva. La fórmula de corte A en el consecuente (antecedente) de $G;\Gamma\Rightarrow\Phi, x:A$ $(H;x:A,\Delta\Rightarrow\Theta)$ se dice que ocurre activa si fue introducida por r (s). Sino se dice que ocurre inactiva.

Teorema 4.4.3 Sea Π una derivación regular en **Simp4.3** donde la última regla aplicada es Cut y tal que no tiene otras aplicaciones de Cut. Entonces hay una derivación Π' del mismo secuente final que no tiene aplicaciones de Cut.

Dem.

1) Cortes triviales:

$$\dfrac{\begin{matrix}\vdots\,\Pi\\ G;\Gamma\Rightarrow x:A,\Delta\end{matrix} \quad \tau_{\{x\}};x:A\Rightarrow x:A}{G,\tau_{\{x\}};\Gamma\Rightarrow\Delta, x:A}\,(Cut)$$

$$\dfrac{\tau_{\{x\}};x:A\Rightarrow x:A \quad \begin{matrix}\vdots\,\Pi\\ G;\Gamma,x:A\Rightarrow\Delta\end{matrix}}{G,\tau_{\{x\}};x:A,\Gamma\Rightarrow\Delta}\,(Cut)$$

Como x esta en el grafo G: G, $\tau_{\{x\}}$ es sencillamente G. En el primer (segundo) caso nos quedamos con la derivación superior izquierda (derecha).

2) La fórmula de corte ocurre inactiva en una de las premisas.

2.a) La fórmula de corte en la premisa izquierda ocurre inactiva.

$$\dfrac{\dfrac{}{G;\Gamma\Rightarrow x:A,\Delta}\,r \quad H;\Theta,x:A\Rightarrow\Psi}{G,H;\Gamma,\Theta\Rightarrow\Delta,\Psi}\,(Cut)$$

donde r puede ser cualquier regla que no introduce x:A; o sea, r puede ser weakening (pero no de x:A), (refl), (trans), (conn), introducción en el antecedente o introducción en el consecuente (pero no de x:A).

Si r es weakening, (refl), (trans) o (conn) entonces se ve fácilmente que la regla de corte puede ser subida. Analicemos algunos casos donde r es una regla de introducción. Consideremos primeramente $(\supset\Rightarrow)$.

$$\dfrac{\dfrac{G;\Gamma\Rightarrow x:A,\Delta \quad G;\Gamma,x:B\Rightarrow z:C,\Delta}{G;\Gamma,x:A\supset B\Rightarrow z:C,\Delta} \quad H;\Theta,z:C\Rightarrow\Psi}{G,H;\Gamma,x:A\supset B,\Theta\Rightarrow\Delta,\Psi}\,(Cut)$$

Podemos subir el corte de la siguiente manera:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{G;\Gamma\Rightarrow x:A,\Delta}{G,H;\Gamma,\Theta\Rightarrow x:A,\Delta}\,(weak\Rightarrow)}{G,H;\Gamma,\Theta\Rightarrow x:A,\Delta,\Psi}\,(\Rightarrow weak) \qquad \dfrac{G;\Gamma,x:B\Rightarrow z:C,\Delta \quad H;\Theta,z:C\Rightarrow\Psi}{G,H;\Gamma,x:B,\Theta\Rightarrow\Delta,\Psi}\,(Cut)}{G,H;\Gamma,x:A\supset B,\Theta\Rightarrow\Delta,\Psi}\,(\supset\Rightarrow)$$

Los casos correspondientes a $(\Box\Rightarrow)$ y $(\Diamond\Rightarrow)$ se tratan acordemente. Consideremos ahora $(\Rightarrow\Box)$

$$\dfrac{\dfrac{G,xRy;\Gamma\Rightarrow y:A,z:B,\Delta}{G;\Gamma\Rightarrow x:\Box A,z:B,\Delta}\,(\Rightarrow\Box) \qquad H;\Theta,z:B\Rightarrow\Psi}{G,H;\Gamma,\Theta\Rightarrow x:\Box A,\Delta,\Psi}\,(Cut)$$

Podemos subir el corte así:

$$\dfrac{\dfrac{G,xRy;\Gamma\Rightarrow y:A,z:B,\Delta \quad H;\Theta,z:B\Rightarrow\Psi}{G,xRy,H;\Gamma,\Theta\Rightarrow y:A,\Delta,\Psi}\,(Cut)}{G,H;\Gamma,\Theta\Rightarrow x:\Box A,\Delta,\Psi}\,(\Rightarrow\Box)$$

Observar que la aplicación de $(\Rightarrow\Box)$ no viola las restricciones de la regla porque la derivación es regular y porque y no ocurre en $G;\Gamma\Rightarrow x:\Box A,z:B,\Delta$.

Analicemos ahora el caso en que r es una aplicación de $(\Rightarrow\Diamond)$:

$$\dfrac{\dfrac{G;\Gamma\Rightarrow y:B,z:A,\Delta}{G_x,xRy;\Gamma\Rightarrow x:\Diamond B,z:A,\Delta}\,(\Rightarrow\Diamond) \qquad H;\Theta,z:A\Rightarrow\Psi}{G_x,xRy,H;\Gamma,\Theta\Rightarrow x:\Diamond B,\Delta,\Psi}\,(Cut)$$

Nuevamente, podemos subir la aplicación del corte.

$$\dfrac{\dfrac{G;\Gamma\Rightarrow y:B,z:A,\Delta \quad H;\Theta,z:A\Rightarrow\Psi}{G,H;\Gamma,\Theta\Rightarrow y:B,\Delta,\Psi}\,(Cut)}{G_x,H,xRy;\Gamma,\Theta\Rightarrow x:\Diamond B,\Delta,\Psi}\,(\Rightarrow\Diamond)$$

Los casos correspondientes al operador $\neg$ se verifican de manera similar.

2.b) La fórmula de corte en la premisa derecha ocurre inactiva. Todos los casos son similares a aquellos desarrollados anteriormente.

3) La fórmula de corte ocurre activa en ambas premisas.
3.a) Weakening fue usada en la premisa izquierda:

$$\dfrac{\dfrac{G;\Gamma\Rightarrow\Delta}{G_x;\Gamma\Rightarrow\Delta,x:A}\,(\Rightarrow weak) \qquad H;x:A,\Theta\Rightarrow\Psi}{G,H;\Gamma,\Theta\Rightarrow\Delta,\Psi}\,(Cut)$$

Observar que H ya incluye al prefijo x con lo que G_x,H y G,H son idénticos.
Podemos eliminar la aplicación de corte de la siguiente manera:

$$\dfrac{G;\Gamma\Rightarrow\Delta}{G,H;\Gamma,\Theta\Rightarrow\Delta,\Psi}\,(weak)$$

Si weakening fue usada en la premisa derecha entonces podemos eliminar la aplicación de la regla de corte análogamente.

3.b) La fórmula de corte fue introducida en ambas premisas por reglas lógicas.
Supongamos que fue introducción de $\wedge$:

$$\dfrac{\dfrac{G;\Gamma\Rightarrow x:A,\Delta \quad G;\Gamma\Rightarrow x:B,\Delta}{G;\Gamma\Rightarrow x:A\wedge B,\Delta}\,(\Rightarrow\wedge) \quad \dfrac{H;\Theta,x:A,x:B\Rightarrow\Psi}{H;\Theta,x:A\wedge B\Rightarrow\Psi}\,(\wedge\Rightarrow)}{G,H;\Gamma,\Theta\Rightarrow\Delta,\Psi}\,(Cut)$$

Podemos construir una derivación del mismo secuente final al que le podemos aplicar la Hipótesis Inductiva:

$$\dfrac{G;\Gamma\Rightarrow x:B,\Delta \quad \dfrac{G;\Gamma\Rightarrow x:A,\Delta \quad H;\Theta,x:A,x:B\Rightarrow\Psi}{G,H;\Gamma,\Theta,x:B\Rightarrow\Delta,\Psi}\,(Cut)}{G,H;\Gamma,\Theta\Rightarrow\Delta,\Psi}\,(Cut)$$

Analicemos los casos en que la fórmula de corte fue introducida por las reglas correspondientes al operador $\vee$:

$$\dfrac{\dfrac{G;\Gamma\Rightarrow x:A,\Delta}{G;\Gamma\Rightarrow x:A\vee B,\Delta}\,(\Rightarrow\vee_1) \quad \dfrac{H;\Theta,x:A\Rightarrow\Psi \quad H;\Theta,x:B\Rightarrow\Psi}{H;\Theta,x:A\vee B\Rightarrow\Psi}\,(\vee\Rightarrow)}{G,H;\Gamma,\Theta\Rightarrow\Delta,\Psi}\,(Cut)$$

Podemos reducir el grado del corte de la siguiente manera:

$$\dfrac{G;\Gamma\Rightarrow x:A,\Delta \quad H;\Theta,x:A\Rightarrow\Psi}{G,H;\Gamma,\Theta\Rightarrow\Delta,\Psi}\,(Cut)$$

El caso en el que la premisa izquierda es $(\Rightarrow\vee_2)$ se trata análogamente.

A continuación consideraremos el caso en el que la fórmula de corte fue introducida por las reglas asociadas al operador $\neg$:

$$\dfrac{\dfrac{G;\Gamma,x:A\Rightarrow\Delta}{G;\Gamma\Rightarrow x:\neg A,\Delta}\,(\Rightarrow\neg) \quad \dfrac{H;\Theta\Rightarrow\Psi,x:A}{H;\Theta,x:\neg A\Rightarrow\Psi}\,(\neg\Rightarrow)}{G,H;\Gamma,\Theta\Rightarrow\Delta,\Psi}\,(Cut)$$

Podemos reducir el grado del corte de la siguiente manera:

$$\frac{H;\Theta\Rightarrow\Psi, x:A \quad G;\Gamma, x:A\Rightarrow\Delta}{G,H;\Gamma,\Theta\Rightarrow\Delta,\Psi}\,(Cut)$$

Ahora consideraremos el caso en el que la fórmula de corte fue introducida por las reglas de $\supset$:

$$\frac{\dfrac{G;x:A,\Gamma\Rightarrow x:B,\Delta}{G;\Gamma\Rightarrow x:A\supset B,\Delta}\,(\Rightarrow\supset) \quad \dfrac{H;\Theta\Rightarrow x:A,\Psi \quad H;\Theta,x:B\Rightarrow\Psi}{H;\Theta,x:A\supset B\Rightarrow\Psi}\,(\supset\Rightarrow)}{G,H;\Gamma,\Theta\Rightarrow\Delta,\Psi}\,(Cut)$$

Podemos reducir el grado del corte de la siguiente manera:

$$\frac{\dfrac{H;\Theta\Rightarrow x:A,\Psi \quad G;x:A,\Gamma\Rightarrow x:B,\Delta}{H,G;\Theta,\Gamma\Rightarrow\Psi,x:B,\Delta}\,(Cut) \quad H;\Theta,x:B\Rightarrow\Psi}{G,H;\Theta,\Gamma\Rightarrow\Psi,\Delta}\,(Cut)$$

Analicemos ahora el caso en el que la fórmula de corte fue introducida por las $\Diamond$-reglas:

$$\frac{\dfrac{G;\Gamma\Rightarrow y:A,\Delta}{G_x;xRy;\Gamma\Rightarrow x:\Diamond A,\Delta}\,(\Rightarrow\Diamond) \quad \dfrac{\vdots\,\Pi \atop H,xRw;\Theta,w:A\Rightarrow\Phi}{H;\Theta,x:\Diamond A\Rightarrow\Phi}\,(\Diamond\Rightarrow)}{G_x;xRy,H;\Gamma,\Theta\Rightarrow\Delta,\Phi}\,(Cut)$$

Podemos reducir el grado del corte así:

$$\frac{G;\Gamma\Rightarrow y:A,\Delta \quad {\vdots\,\Pi' \atop H,xRy;\Theta,y:A\Rightarrow\Phi}}{G,H,xRy;\Gamma,\Theta\Rightarrow\Delta,\Phi}\,(Cut) \qquad \text{where } \Pi' = \Pi[w \leftarrow y]$$

Observar que dado que H ya incluye al prefijo x, ambos secuentes finales son idénticos.

Veamos el caso en el que la fórmula de corte fue introducida por las $\Box$-reglas:

$$\frac{\dfrac{\vdots\,\Pi \atop G,xRw;\Gamma\Rightarrow w:A,\Delta}{G;\Gamma\Rightarrow x:\Box A,\Delta}\,(\Rightarrow\Box) \quad \dfrac{H;\Theta,y:A\Rightarrow\Phi}{H_x,xRy;\Theta,x:\Box A\Rightarrow\Phi}\,(\Box\Rightarrow)}{G;H_x;xRy;\Gamma,\Theta\Rightarrow\Delta,\Phi}\,(Cut)$$

Una vez más, podemos reducir el grado del corte de la forma siguiente:

$$\frac{{\vdots\,\Pi' \atop G,xRy;\Gamma\Rightarrow y:A,\Delta} \quad H;\Theta,y:A\Rightarrow\Phi}{G,H,xRy;\Gamma,\Theta\Rightarrow\Delta,\Phi}\,(Cut) \qquad \text{donde } \Pi' = \Pi[w \leftarrow y]$$

Observar que dado que G ya incluye al prefijo x, ambos secuentes finales son idénticos.

■

Como corolario inmediato obtenemos,

Corolario 4.4.4 Sea Π una derivación en **Simp4.3** entonces hay una derivación Π' del mismo secuente final que no usa la regla Cut.

4.5 Conclusiones sobre Simp4.3.

El cálculo para S4.3 presentado en este capítulo se destaca por su sencillez. Las reglas reflejan de manera precisa la semántica de los operadores modales y las pruebas son concisas.

Por otro lado, notar que sacando la regla (Conn) de **Simp4.3** obtenemos un cálculo para S4. Dado que S4.3 es una extensión de S4[2], las pruebas de correctitud y de completitud son aplicables a este cálculo tal cual las hemos expuesto. Cabe notar que la regla que introduce el operador de necesidad y la que corresponde al operador de posibilidad no precisan ser alteradas de manera alguna. Análogamente, si eliminamos la regla (Trans) del cálculo obtenemos un cálculo para T ([12]). Se logra así una cierta independencia entre estas reglas y las propiedades adicionales que deba cumplir la relación de acccesibilidad.

Por otro lado, notar que los cálculos de secuentes representables en este formalismo no son apropiados para la búsqueda de pruebas. En realidad, los que traen problemas son aquellos que incorporan la regla (Conn) como los cálculos para S4 y S4.3. Simpson ([24]) hace notar este inconveniente. Observar que con un cálculo de secuentes convencional *a la* Gentzen, se puede obtener casi inmediatamente un procedimiento de decisión para S4 por ejemplo.

¿Qué relación tiene el cálculo **Simp4.3** con las impurezas descriptas en el capítulo anterior? Para poder responder debemos mencionar que al cambiar la noción de secuente la correspondiente noción intuitiva de impureza muda acordemente. No hemos formalizado esta para este nuevo formalismo, pero queda claro por lo expuesto anteriormente que **Simp4.3** es en algún sentido más puro que aquel formulado en el capítulo anterior.

Podemos concluir que de hecho no es S4.3 el que es impuro sino que en todo caso el formalismo "a la Gentzen" formalizado antes no es apropiado para formular lógicas modales y que otros formalismos son mucho más adecuados.

Respecto de la posibilidad de formular un cálculo de secuentes en este formalismo para S4.3.1 no hemos hallado (si es que existe) una fórmula de primer orden que se corresponda con alguno de los axiomas que se anexan a S4.3 para obtener S4.3.1. Aun si existiera tal fórmula, sería necesario que se puediera expresar como secuente geométrico ([24]).

[2]En el sentido en que todas los teoremas de S4 son teoremas de S4.3.

Capítulo 5

Conclusiones.

En este trabajo hemos definido un framework para representar relaciones de consecuencia (proposicionales). Nuestro principal objetivo era mostrar la imposibilidad de representar S4.3 en el mismo, destacando así la debilidad del mismo para obtener un cálculo estable, finito y libre de corte para S4.3. Desafortunadamente hemos alcanzado nuestra meta en forma parcial: tuvimos que basarnos en una conjetura. Como evidencia para sostener la conjetura demostramos que de una clase importante de reglas de introducción a derecha para el operador de necesidad, las únicas correctas son las $Shim_k$ y sus símiles (para todo k). Además, si las reglas de introducción para el operador de necesidad son $Shim_k$, precisamos todas para que el cálculo pueda gozar de eliminación de la regla de corte.

Este trabajo se basó en ([22]). Luego de leer su artículo y de varios intentos fallidos con cálculos propios llegamos a la conclusión que un cálculo más sencillo era altamente improbable de obtener. Para poder formalizar esto requeríamos una noción precisa de lo que un cálculo "sencillo" o "puro" constituye. Asumiendo que un cálculo es "puro" si es definible dentro del framework descripto, hemos presentado argumentos formales que indican que una representación de S4.3 que quiera gozar de eliminación de corte debe ser "impuro".

El framework en la cual se definen la clase importante de reglas antes mencionadas también permite la representación de Lógica Proposicional Clásica y S4 con eliminación de corte. Además incorporando la noción de Restricciones de Contexto Unitarias se puede representar la Lógica Proposicional Intuicionista y S4 Intuicionista (sin el operador de Posibilidad) sin alterar los resultados principales.

Este trabajo también provee evidencia para suponer que el formalismo de secuentes standard *a la Gentzen* no es apropiado para representar lógicas modales. La literatura actual exhibe una variada gama de formalismos para representar lógicas modales tal como los 2-Secuentes ([16]), cálculos que se basan en la noción de verdad relativa ([24]) o secuentes multi-level ([6]). Esto constituye quizás una respuesta más sólida a la suposición antes mencionada.

Una vez convencidos de esta situación y ante la necesidad de obtener un cálculo para S4.3 decidimos atacar el problema con algunos de estos nuevos formalismos. El más exitoso resultó ser el presentado en ([24]). Como ya hemos observado, una de las ventajas más notables del formalismo antes mencionado es la sorprendente independencia que se logra entre las propiedades adicionales requeridas sobre la relación de accesibilidad y las reglas asociadas a los operadores modales. Estas últimas no se ven afectadas. Por otro lado, las derivaciones en este cálculo se construyen de manera natural debido a la incorporación de la semántica intuitiva de los operadores dentro de las reglas. Esto último siempre es una característica deseable de cualquier cálculo.

Ahora podríamos preguntarnos sobre la "pureza" de este cálculo. Claramente no podemos usar la definición de pureza que utilizamos para estudiar los problemas de los cálculos de secuentes convencionales. Tampoco hemos definido una noción de pureza para este formalismo, de modo que cualquier discusión al respecto será necesariamente imprecisa. Sin embargo es importante notar que **Simp4.3** tiene una "apariencia finita" mucho más transparente que la regla de Shimura vista como una sola regla con un número variable de secuentes superiores. Claramente esto es una apreciación subjetiva pero no resulta difícil imaginarse una marco formal para definir reglas *a la* Simpson donde **Simp4.3** encaje naturalmente.

Los resultados de este trabajo pueden resumirse de la siguiente forma. En primer lugar identificamos un problema referido a la representación de S4.3. Luego presentamos evidencia para sugerir la necesidad de alteraciones radicales sobre la definición usual de los formalismos *a la* Gentzen. Finalmente definimos un formalismo alternativo y solucionamos el problema original dentro de este formalismo.

Bibliografía

[1] *2-Sequent calculus: Classical Modal Logic.* A. Masini. TR-13/91, Universita degli Studi di Pisa.

[2] *Simple Consequence Relations.* A. Avron. Information and Computation 92, pp 105-139, 1991.

[3] *Modal Logic: An Introduction.* B. Chellas. Cambridge University Press, (reprinted) 1984.

[4] *Lógicas Relevantes: formalismo e semañtica.* M. C. Mere. Ph.D. Thesis, PUC-Rio, 1993.

[5] *A theory of formal deducibility.* H.B. Curry. Technical Report Number 6, University of Notre Dame, USA, 1950.

[6] *Sequent-Systems for modal logic.* K. Dosen. The Journal of Symbolic Logic, Vol 50 No 1, pp 149-167, 1985.

[7] *Temporal and modal logic.* E. A. Emerson, Handbook of theoretical computer science: Formal models and semantics, vol. B, 1990.

[8] *The Collected Papers of Gerhard Gentzen.* M.E. Szabo (ed.), North Holland, 1969.

[9] *Logics of Time and Computation.* R. Goldblatt. CSLI Lecture Notes N.7, second ed., 1992.

[10] *Cut-free Sequent and Tableau Systems for Propositional Normal Modal Logics.* R.P.Goré. Tesis de Doctorado. Technical Report No. 257, Computer Laboratory, University of Cambridge, 1992.

[11] *An introduction to modal logic.* G.E. Hughes and M.J. Cresswell. Methuen, (reimpreso en 1972 con correcciones).

[12] *A Companion to Modal Logic.* G.E. Hughes and M.J. Cresswell. Methuen, 1984.

[13] *Strict Implication: An emendation.* The Journal of Philosophy 17, pp 300-302, 1920.

[14] *Symbolic Logic.* C.I.Lewis y C.H.Langford, New York, 1932.

[15] *Temporal verification of reactive systems.* Z. Manna y A. Pnueli. Vols. 1, 2 y 3. Springer-Verlag, 1995.

[16] *2-sequent calculus: a proof theory of modalities* A. Masini. Annals of pure and applied logic 58, pp. 229-246, 1992.

[17] *The temporal semantics of concurrent programs.* A. Pnueli. Theoret. Comput. Sci. 13,pp. 45-46, 1981.

[18] *Normalization as a homomorphic image of cut-elimination.* G. Pottinger. Technical report.

[19] *Natural Deduction: A proof theoretical study.* D. Prawitz. Almqvisty and Wiksell, Stockholm, 1965.

[20] *A temporal logic framework for representing knowledge about navigation in hypermedia applications.* G. Rossi y M. C. Meré. Proc. 4o. Eurographics Series, Springer-Verlag, 1996.

[21] *Valuation Systems and Consequence Relations.* M. Ryan and M. Sadler. Handbook of Logic in Computer Science, Vol. 1, Clarendon Press, Oxford, 1992.

[22] *Cut-free systems for the Modal Logic S4.3 and S4.3Grz.* T. Shimura, Reports on Mathematical Logic, n.25, 1991.

[23] *Cut-free systems for some Modal Logics containing S4.* T. Shimura, Reports on Mathematical Logic, n.26, 1992.

[24] *The proof theory and semantics of intuitionistic modal logic.* Alex K. Simpson, Phd Thesis, University of Edinburgh, 1994.

[25] *Proof Theory.* G. Takeuti. Studies in Logic and the Foundations of Mathematics. vol.81, North Holland, 1975.

[26] *Modal Logic: The Lewis-Modal Systems.* J.J.Zeman. Oxford University Press, 1973.

[27] *The correspondance between cut-elimination and normalization.* J. Zucker. Annals of Mathematical Logic, 7:1-112, 1974.