Descomposición en Sumas de Minkowski ♦

María Teresa Taranilla

Departamento de Informática
Facultad de Ciencias Físico, Matemáticas y Naturales
Universidad Nacional de San Luis, Argentina
tarani@unsl.edu.ar
Fax: 54-2652-430224

Gregorio Hernández Peñalver

Departamento de Matemática Aplicada
Facultad de Informática
Universidad Politécnica de Madrid, España
gregorio@fi.upm.es
Fax: 34-91-3367426

Resumen:
La suma de Minkowski es utilizada en las más diversas áreas, tales como robótica, diseño y fabricación asistida por computadora (CAD/CAM), procesamiento de imágenes, sistemas de información geográfica y ubicación / marcado de moldes, entre otras.
En este artículo presentamos nuestra línea actual de trabajo referida a la descomposición de polígonos en sumas de Minkowski.

Palabras claves: Sumas de Minkowski. Geometría Computacional.

1. Introducción

La Geometría Computacional es una disciplina que brinda un marco teórico y formal para el diseño de estructuras y algoritmos requeridos para dar soluciones a problemas de tipo geométrico que surgen en las más diversas áreas de la Informática. Actualmente ha cobrado un gran interés debido a las numerosas aplicaciones que tiene en distintas líneas de investigación.

Dentro de la Geometría Computacional, el tema particular de nuestra investigación se ha centrado principalmente en el estudio de las sumas de Minkowski, su contexto teórico, propiedades geométricas y aplicaciones más destacadas. En tal sentido, hemos realizado un estudio que muestra el estado del arte del tema presentando los aspectos teóricos y prácticos más relevantes y además se desarrolló de una herramienta que implementa la suma de Minkowski entre distintos tipos de polígonos [5], [8], [9], [15].

En el presente artículo, introducimos el concepto de sumas de Minkowski y describimos algunas de sus posibles aplicaciones. Luego, presentamos el problema actualmente en estudio, la descomposición de polígonos en sumas de Minkowski.

2. Suma de Minkowski y sus aplicaciones.

Dados dos conjuntos P y $Q \subset \mathbf{R}^2$, la suma de Minkowski de P y Q, denotada por $P \oplus Q$ se define como $P \oplus Q = \{ p + q : p \in P, q \in Q \}$ donde p + q es el vector suma de los vectores p y q. Es decir que dados los puntos $p = (p_x, p_y)$ y $q = (q_x, q_y)$, tenemos que $p + q = (p_x + q_x, p_y + q_y)$.

Las áreas de aplicación de las sumas de Minkowski son de las más diversas, en el campo de la robótica, específicamente en el área de planificación de movimientos de robots, la suma de

♦ Este artículo es parcialmente subvencionado por el Proyecto AL2003-1010-2.55, de la Universidad Politécnica de Madrid, España.

Minkowski se utiliza para describir el espacio prohibido en el cálculo de un camino libre de colisiones para un robot [3], [10].

Consideremos un obstáculo P y un robot R que se mueve por el plano mediante sucesivas traslaciones. La ubicación del robot en el plano viene determinada por un punto interior r que sirve como punto de referencia del robot. Si tomamos dicho punto interior r como origen de coordenadas y construimos R', figura simétrica de R respecto del origen, se puede demostrar que $P \oplus R'$ es el conjunto de ubicaciones del punto de referencia de R tales que $P \cap R \neq \emptyset$. Esta suma se denomina *espacio de configuración del obstáculo* o *C-obstáculo*, ya que cuando el punto de referencia de R está contenido en $P \oplus R'$ significa que el robot R chocará con P, es decir el espacio de obstáculos es el conjunto de puntos en los cuales está prohibido colocar el robot, pues colisionaría con el obstáculo P.

En la figura 1 se observa a la izquierda un robot R y un obstáculo P y a la derecha el C-obstáculo correspondiente a P y ubicaciones posibles y prohibidas para el robot R Las ubicaciones posibles de R son aquellas donde el punto de referencia no se ubica dentro de C(P).

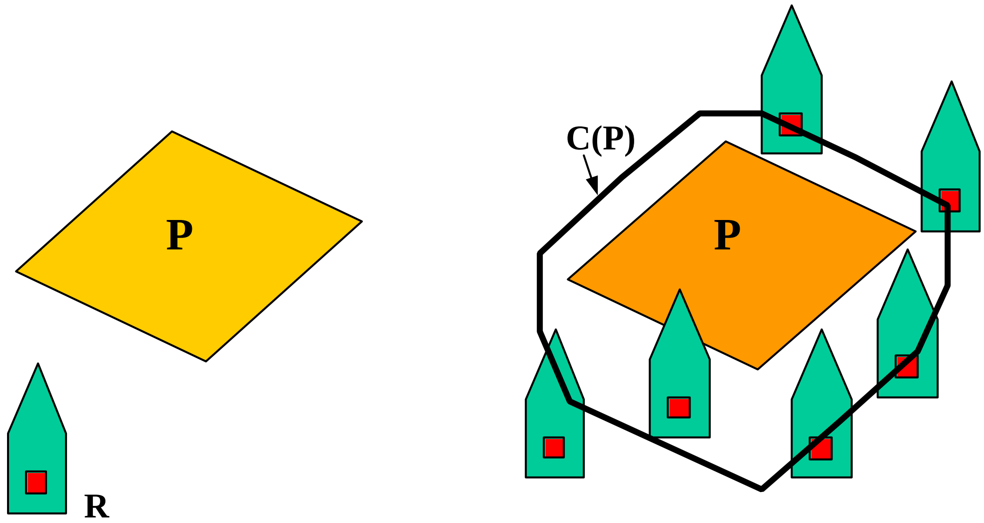

Figura 1

En el área de planificación de ensamblajes la suma de Minkowski también es de utilidad. Un ensamblaje es un conjunto de partes rígidas que no se solapan entre sí. El problema de particionar un ensamblaje es el siguiente: dado un ensamblaje, identificar un subensamblaje, es decir un subconjunto de partes que puedan ser removidas sin que en dicho proceso colisionen con el resto de ensamblaje.

En una instancia simple del problema las partes dadas, P_1, P_2, … P_n, son polígonos en el plano y se pretende encontrar un paso de remoción de dos traslaciones consecutivas que separen un subconjunto de las partes del resto de ellas.

En este problema se utiliza la suma de Minkowski para calcular el espacio de configuración de obstáculos, $P_{ij} = P_i \oplus P_j$ para cada par ordenado de partes, usando el origen de coordenadas como punto de referencia común para todas las partes. Para un punto q en el plano, si $q \in P_{ij}$ entonces P_j con su punto de referencia ubicado en q chocará con P_i. Por lo tanto, un paso a través de q no podrá ser usado para separar un conjunto de partes que contenga a P_j pero no P_i [6].

La suma de Minkowski es también una herramienta útil en el área del procesamiento de imágenes [14],[15], en los Sistemas de Información Geográfica (GIS) [7], se usa para resolver problemas de intersección e inclusión de polígonos [11] y en el problema del cálculo de la mínima separación entre polígonos [4].

3. Descomposición de polígonos en suma de Minkowski

En el caso de la planificación de movimientos de robots, supongamos que conocemos el C-obstáculo de cada uno de los obstáculos con el robot, pero por algún motivo no conocemos la forma original del robot. Sabemos que cada C-obstáculo es la suma de Minkowski de uno de los obstáculos con el robot, por lo tanto estamos interesados en descomponer cada uno de los C-obstáculos, para detectar la forma original del robot.

En la figura 2 observamos el espacio de configuración de obstáculos y un camino libre de obstáculos para el robot.

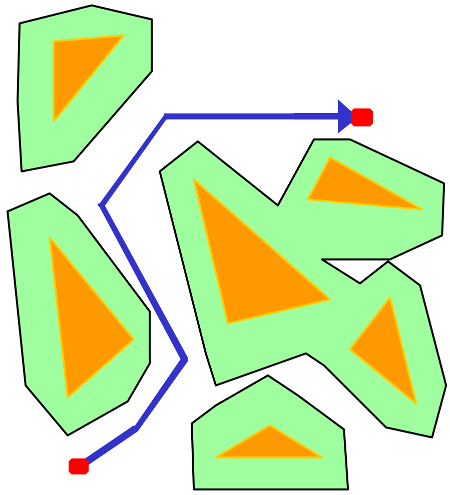

Figura 2

En general nos planteamos el problema inverso al resuelto por la suma de Minkowski. Dado un polígono *S*, ¿existen polígonos *P* y *Q* tales que *S* es la suma de Minkowski de *P* y *Q*, es decir, $S = P \oplus Q$?

También es interesante plantearse si todos los polígonos de una cierta familia $S_1, S_2, \ldots, S_n$, admiten un sumando común, es decir, si existe un polígono *P* tal que $S_k = P \oplus Q_k$ para k=1, ... , n

Hasta el momento hemos analizado el caso convexo. Si el polígono *S* dado es un polígono convexo, los posibles sumandos *P* y *Q* también deben ser convexos, es decir, que dado *S* un polígono convexo , nos preguntamos si existen *P* y *Q* polígonos convexos tales que $S = P \oplus Q$.

Analizando las propiedades geométricas de los conjuntos convexos y de la suma de Minkowski caracterizamos cuando un polígono *S* admite un sumando de Minkowski. Esta caracterización conduce a un algoritmo que detecta si un polígono *S*, de *n* lados, admite un polígono de *m* lados como sumando de Minkowski en tiempo $O(n^m)$. Si la pregunta sobre el polígono *S* es si admite un sumando de Minkowski de número no precisado de lados, entonces la complejidad del algoritmo es exponencial. Actualmente estamos trabajando en un algoritmo que nos permita rebajar esta complejidad.

4. Conclusiones

Este trabajo forma parte de un proyecto iniciado por el grupo de interés en Geometría Computacional de la Universidad Nacional de San Luis conjuntamente con docentes de la Universidad Politécnica de Madrid.

En nuestro trabajo nos proponemos el estudio de la Suma de Minkowski, recopilación y estudio de sus aplicaciones, el planteo y resolución de problemas relacionados, la construcción de algoritmos eficientes que resuelvan problemas presentados, además de la propuesta de campos específicos donde estos algoritmos son de utilidad.

Referencias

[1] Aho, A.V.; Hopcroft, J. E.; Ullman, J. *The design and analysis of computer algorithms*, Addison-Wesley Series in Computer Science and Information Processing, 1974.

[2] Agarwal, P.K.; Flato, E.; Halperin, D., *Polygon Descomposition for efficient construction of Minkowski sums*, Computational Geometry: Theory and applications Nº 21, (39-61), 2001.

[3] de Berg, M; Kreveld, Overmars, M; Schwarzkopf. *Computational Geometry: algorithms and applications*, Springer Verlag, 1997

[4] Flato, E., *Robust and efficient construction of planar Minkowski sums*, Tesis doctoral, Tel-Aviv University, 2000.

[5] Gagliardi, E.; Taranilla, M.T; Berón, M.; Hernandez Peñalver, G., *La Geometría Computacional a nuestro alrededor*. WICC 2002. Bahía Blanca, 2002.

[6] Halperin D.; Wilson R. H. *Assembly partitioning along simple paths: the case of multiple translations.* Advanced Robotics, 11:127--145, 1997

[7] Heywood I., Cornelius S., Carver S., *Geographical Information Systems*, Addison-Wesley Longman, New York, 1998.

[8] Kavka, G.; Taranilla, M.T.; Gagliardi , E.; Hernández Peñalver, G., *Una herramienta para el cálculo y visualización de Sumas de Minkowski* Workshop de Tecnología Informática Aplicada en Educación (CACIC 2002), 2002

[9] Kavka, G.; Taranilla, M.T, *Implementación de una herramienta para el cálculo y visualización de sumas de Minkowski.* UNSL, 2002.

[10] Latombe, J.C. *Robot Motion Planning*, Kluwer Academic Publisher, Boston, MA, 1991.

[11] Li, Zhenyu *Compation Algorithms for Non-Convex Polygons and their Applications*, tesis doctoral, Universidad de Harvard, 1994

[12] Preparata,F.; Shamos,M. *Computational Geometry: an Introduction*, Springer Verlag, NY 1985.

[13] Serra J., *Image Analysis and Mathematical Morphology*, Academic Press, New York, 1982.

[14] Serra J., *Image Analysis and Mathematical Morphology, Vol II: Theorical Advances*, Academic Press, New York, 1988.

[15] Taranilla, M.T; Kavka, G., Gagliardi, E.; Hernandez Peñalver, G., *Una operación entre polígonos: Sumas de Minkowski*, CACIC 2002, 2002.