

# Subdivisión de superficies Beta-spline cúbicas

**Diana Salgado**

Dto. de Matemática, Universidad Nacional del Sur  
Bahía Blanca, B8000CPB, Argentina  
dsalgado@uns.edu.ar

**Liliana Castro**

Dto. de Matemática, Universidad Nacional del Sur  
Bahía Blanca, B8000CPB, Argentina  
lcastro@uns.edu.ar

**Silvia Castro**

Dto. de Cs. e Ing. de la Computación, Univ. Nac. del Sur  
Bahía Blanca, B8000CPB, Argentina  
smc@cs.uns.edu.ar

## Abstract

In this paper we present a subdivision technique to generate cubic Beta-spline surfaces. If  $\mathbf{P}$  is the control net, we obtain, by a subdivision algorithm, the polynomial surface of degree  $n$ ,  $\mathbf{B}[\mathbf{P}]$ . The surface  $\mathbf{B}[\mathbf{P}]$  is generated from the left net  $\mathbf{L}$  and the right net  $\mathbf{R}$  through matrix operations. Each one of the nets  $\mathbf{P}$ ,  $\mathbf{L}$ , and  $\mathbf{R}$  represents a set of points in the space. We also analyze the behaviour of the cubic Beta-spline surfaces, with parameters  $\beta_1$  and  $\beta_2$ , and we obtain the subdivision surfaces for different values of these parameters. We present the graphic representation of the subnets obtained in different steps of the subdivision.

**Keywords:** subdivision surfaces, Beta-spline surface, computer graphics

## Resumen

En este trabajo presentamos una técnica de subdivisión que genera superficies Beta-spline cúbicas. Sea  $\mathbf{P}$  la red de control, obtenemos, mediante un algoritmo de subdivisión, la superficie polinómica de grado  $n$ ,  $\mathbf{B}[\mathbf{P}]$ . La superficie  $\mathbf{B}[\mathbf{P}]$  es generada a partir de la red a izquierda  $\mathbf{L}$  y la red a derecha  $\mathbf{R}$  a través de operaciones matriciales. Cada una de las redes  $\mathbf{P}$ ,  $\mathbf{L}$ , y  $\mathbf{R}$  representa un conjunto de puntos en el espacio. En este contexto, analizamos el comportamiento de las superficies Beta-spline cúbicas, con parámetros  $\beta_1$  y  $\beta_2$ , y realizamos la subdivisión para distintos valores de estos parámetros. Adicionalmente, representamos gráficamente las subredes obtenidas en distintos pasos de la subdivisión.

**Palabras claves:** superficie de subdivisión, superficie Beta-spline, computación gráfica

# 1 INTRODUCCIÓN

Una superficie de subdivisión se obtiene mediante un proceso iterativo que, partiendo de una red poligonal y un esquema de refinamiento permite subdividir dicha red para obtener una superficie suave; ésta se logra como el límite de dicho proceso iterativo. Si bien las ideas básicas detrás de la subdivisión son, en realidad, muy antiguas, ha sido sólo recientemente que las superficies de subdivisión han encontrado múltiples aplicaciones en computación gráfica y en diseño geométrico asistido por computadora. Una de las razones para este desarrollo es la importancia de las técnicas de multirresolución que direccionan los desafíos de geometrías cada vez más complejas.

Uno de los métodos que permite generar curvas o superficies de subdivisión es el desarrollado por Goldman y DeRose [4]. Para el caso de curvas, este método permite encontrar polígonos de control  $\mathbf{L}$  (a izquierda) y  $\mathbf{R}$  (a derecha) tales que dividen a la curva  $\mathbf{B}[\mathbf{P}](t)$  en algún valor  $c \in (0, 1)$ . Si suponemos que  $\mathbf{B}[\mathbf{P}]([a, b])$  representa la curva cuando el parámetro varía sobre el intervalo  $[a, b]$ , entonces

$$\mathbf{B}[\mathbf{P}]([0, 1]) = \mathbf{B}[\mathbf{L}]([0, 1]) \cup \mathbf{B}[\mathbf{R}]([0, 1]).$$

Más precisamente,

$$\begin{aligned}\mathbf{B}[\mathbf{L}]([0, 1]) &= \mathbf{B}[\mathbf{P}]([0, c]) \\ \mathbf{B}[\mathbf{R}]([0, 1]) &= \mathbf{B}[\mathbf{P}](c, 1).\end{aligned}$$

Goldman y DeRose [4], desarrollaron un método para hallar las matrices de subdivisión a izquierda y a derecha que se aplican a un determinado polígono de control para obtener así subpolígonos a izquierda y a derecha, considerando para ello el caso de la subdivisión de curvas polinómicas.

Previamente [2] analizamos el comportamiento de la subdivisión para el caso de curvas Beta-spline cúbicas, considerando  $\beta_1 = 1$ ,  $\beta_2$  variable y  $c = 1/2$  para un solo trozo de la curva. Hemos analizado también, el comportamiento de la subdivisión, en primer lugar, para  $\beta_2$  con valor fijo ( $\beta_2 = 0$ ),  $\beta_1$  variable y  $c = 1/2$ , y en segundo lugar, para distintos valores de  $c$  [3]. Dado que, a partir de cuatro puntos de control se genera un solo trozo de la curva, hicimos una extensión a un conjunto con mayor número de puntos de control [3]. Para cada uno de estos casos se detallan las matrices de subdivisión  $\mathbf{L}$  y  $\mathbf{R}$  utilizadas.

En este trabajo desarrollamos este tipo de subdivisión para el caso de superficies Beta-spline cúbicas. Asimismo, analizamos el comportamiento de las superficies para distintos valores de los parámetros y mostramos gráficamente la influencia de los mismos en la subdivisión.

En la próxima sección se describen las superficies polinómicas paramétricas. En la Sección 3 se da una explicación de la técnica de subdivisión desarrollada. En la Sección 4 se presentan los casos de estudio en los que se analiza la subdivisión de superficies Beta-spline cúbicas. Finalmente se detallan las conclusiones y el trabajo futuro.

## 2 SUPERFICIES POLINÓMICAS

Sean  $B_{ij}(t_1, t_2)$ ,  $i, j : 0, \dots, n$ , funciones polinómicas que forman una base para la superficie polinómica  $\mathbf{B}[\mathbf{P}](t_1, t_2)$  de grado  $n$ , para la cual será definido un algoritmo de subdivisión, siendo  $\mathbf{P}$  la red de control determinada por los vértices de control  $P_{ij} \in \mathbb{R}^3$ . Es decir, consideremos

$$\mathbf{B}[\mathbf{P}](t_1, t_2) = \sum_{i,j=0}^n P_{ij} B_{ij}(t_1, t_2) = \sum_{i,j=0}^n (x_{ij} B_{ij}(t_1, t_2), y_{ij} B_{ij}(t_1, t_2), z_{ij} B_{ij}(t_1, t_2)). \quad (1)$$

Es claro que si las funciones  $B_{ij}(t_1, t_2)$  son no nulas sólo en un entorno de  $t_1$  y de  $t_2$ , se puede reescribir  $B_{ij}(t_1, t_2) = B_i(t_1)B_j(t_2)$ , donde  $B_i(t_1), B_j(t_2)$  son funciones de una variable ([1], [5]). Por lo tanto

$$\mathbf{B}[\mathbf{P}](t_1, t_2) = \sum_{r,s=0}^n P_{i+r,j+s} B_{i+r}(t_1) B_{j+s}(t_2). \quad (2)$$

Si consideramos superficies Beta-spline cúbicas, es decir  $n = 3$ , cada trozo o “parche” de la superficie se generará a partir de dieciséis vértices de control, de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{ij}[\mathbf{P}](t_1, t_2) &= \sum_{r=0}^3 \sum_{s=0}^3 P_{i+r,j+s} B_r(t_1) B_s(t_2) \quad (3) \\ &= \sum_{r=0}^n (P_{i+r,j} B_r(t_1) B_0(t_2) + P_{i+r,j+1} B_r(t_1) B_1(t_2) + P_{i+r,j+2} B_r(t_1) B_2(t_2) + \\ &\quad + P_{i+r,j+3} B_r(t_1) B_3(t_2)) \\ &= (B_0(t_2) \ B_1(t_2) \ B_2(t_2) \ B_3(t_2)) * \\ &\quad * \begin{pmatrix} P_{i,j} & P_{i+1,j} & P_{i+2,j} & P_{i+3,j} \\ P_{i,j+1} & P_{i+1,j+1} & P_{i+2,j+1} & P_{i+3,j+1} \\ P_{i,j+2} & P_{i+1,j+2} & P_{i+2,j+2} & P_{i+3,j+2} \\ P_{i,j+3} & P_{i+1,j+3} & P_{i+2,j+3} & P_{i+3,j+3} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} B_0(t_1) \\ B_1(t_1) \\ B_2(t_1) \\ B_3(t_1) \end{pmatrix} \\ &= B(t_2) * \mathbf{P}^t * B(t_1)^t, \quad t_1, t_2 \in [0, 1], \quad (4) \end{aligned}$$

donde  $*$  representa la multiplicación de matrices. Notemos, además, que  $\mathbf{P}$  representa tanto a la red de control como a la matriz formada por todos los vértices pertenecientes a esa red. Recordemos, también, que  $B(t) = (B_0(t), \dots, B_n(t))$  siendo  $B_0(t), \dots, B_n(t)$  funciones que forman una base para una curva polinómica de grado  $n$  [2]. En la ecuación (4),  $B(t)$  representa, a su vez, a una matriz cuyas componentes son las funciones de la base.

### 3 SUBDIVISIÓN DE SUPERFICIES

Dado que  $B(t)$  es una base para el espacio de los polinomios de grado  $n$ , existen matrices  $S_L$  y  $S_R$  [4] que dependen de  $c$ ,  $c \in (0, 1)$  tales que:

$$\begin{cases} B(ct) = B(t) * S_L \\ B(c + (1-c)t) = B(t) * S_R, \end{cases} \quad (5)$$

donde  $S_L$  y  $S_R$  son matrices de subdivisión a izquierda y a derecha respectivamente, que reparametrizan a las funciones  $B_0(t), \dots, B_n(t)$  y, además,  $S_L, S_R \in M_{(n+1) \times (n+1)}(\mathbb{R})$ .

Veamos a continuación cómo se obtienen los puntos en cada paso de la subdivisión. Sea entonces  $\mathbf{P}$  la red de control; buscamos expresiones para  $\mathbf{L}$  y  $\mathbf{R}$  tales que:

$$\begin{cases} \mathbf{B}[\mathbf{L}](t_1, t_2) = \mathbf{B}[\mathbf{P}](ct_1, ct_2) \\ \mathbf{B}[\mathbf{R}](t_1, t_2) = \mathbf{B}[\mathbf{P}](c + (1-c)t_1, c + (1-c)t_2), \end{cases} \quad (6)$$

donde  $\mathbf{L}$  y  $\mathbf{R}$  son las subredes a izquierda y a derecha respectivamente, en las cuales queda dividida la red original  $\mathbf{P}$  [5]. En el caso de la subdivisión en el punto medio, consideramos  $c = \frac{1}{2}$ .

En forma matricial, haciendo uso de (4), podemos escribir (6) de la siguiente manera:

$$B(t_2) * \mathbf{L}^t * B(t_1)^t = B(ct_2) * \mathbf{P}^t * B(ct_1)^t$$

$$(B_0(t_2) \ \cdots \ B_n(t_2)) * (L_{ij})^t * \begin{pmatrix} B_0(t_1) \\ \vdots \\ B_n(t_1) \end{pmatrix} = (B_0(ct_2) \ \cdots \ B_n(ct_2)) * (P_{ij})^t * \begin{pmatrix} B_0(ct_1) \\ \vdots \\ B_n(ct_1) \end{pmatrix}.$$

Sustituyendo por la primera ecuación de (5) obtenemos que

$$B(t_2) * \mathbf{L}^t * B(t_1)^t = (B(t_2) * S_L) * \mathbf{P}^t * (B(t_1) * S_L)^t.$$

Como  $B_0(t), \dots, B_n(t)$  son linealmente independientes, se concluye que

$$\begin{aligned} \mathbf{L}^t * B(t_1)^t &= S_L * \mathbf{P}^t * (B(t_1) * S_L)^t \\ &= S_L * \mathbf{P}^t * S_L^t * B(t_1)^t. \end{aligned} \quad (7)$$

Nuevamente, por la independencia lineal de  $B_0(t), \dots, B_n(t)$ , tenemos que:

$$\mathbf{L}^t = S_L * \mathbf{P}^t * S_L^t. \quad (8)$$

Análogamente obtenemos que:

$$\mathbf{R}^t = S_R * \mathbf{P}^t * S_R^t, \quad (9)$$

siendo  $\mathbf{L}, \mathbf{R}, \mathbf{P} \in M_{(n+1) \times (n+1)}(\mathbb{R})$ .

Por lo tanto, concluimos que para obtener los puntos de las redes a izquierda y a derecha en cada paso de una subdivisión, basta con realizar las operaciones matriciales dadas por (8) y (9). Observamos entonces que las matrices que reparametrizan las funciones de la combinación lineal se utilizan, además, para subdividir las redes de control. Estas matrices pueden determinarse a partir de las matrices de subdivisión de Bézier, como en el caso de cualquier técnica polinomial [4]. El procedimiento para su obtención se encuentra detallado en [2].

Realizar el producto  $S_L * \mathbf{P}^t * S_L^t$  es equivalente a realizar los productos coordenada a coordenada, es decir, es equivalente a calcular:  $S_L * x * S_L^t$ ,  $S_L * y * S_L^t$  y  $S_L * z * S_L^t$ , donde  $x$ ,  $y$  y  $z$  representan matrices con las coordenadas correspondientes a todos los puntos de la red.

## 4 CASOS DE ESTUDIO

Las matrices de subdivisión  $S_L$  y  $S_R$ , que utilizamos en cada uno de los ejemplos que siguen, se detallan en [2] y [3]. Además, debido a que estamos considerando superficies Beta-spline cúbicas, es decir, de grado  $n = 3$ , las matrices de subdivisión son de orden cuatro.

Los gráficos de las superficies y de las subredes de control para distintos pasos de subdivisión se desarrollaron en MATLAB; en todos los casos se consideró  $c = 1/2$ .

### 4.1 Ejemplo 1

Supongamos tener una red de control  $\mathbf{P}$  formada por 16 puntos de control iniciales con coordenadas  $(x, y, z)$ . Más precisamente consideremos las matrices  $\mathbf{P}$ ,  $x$ ,  $y$  y  $z$  siguientes:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} & P_{14} \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} & P_{24} \\ P_{31} & P_{32} & P_{33} & P_{34} \\ P_{41} & P_{42} & P_{43} & P_{44} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1, 1, 1) & (1, 2, 1) & (1, 3, 1) & (1, 4, 1) \\ (2, 1, 0) & (2, 2, 0) & (2, 3, 0) & (2, 4, 0) \\ (3, 1, 1) & (3, 2, 1) & (3, 3, 1) & (3, 4, 1) \\ (4, 1, 0) & (4, 2, 0) & (4, 3, 0) & (4, 4, 0) \end{pmatrix}$$

$$x = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, yz = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Suponiendo  $\beta_1 = 1$  y  $\beta_2 = 0$ , el “parche” de la superficie generada por la red, se observa en la Figura 1(a), y corresponde a una superficie B-spline cúbica. Como en este caso tenemos sólo 16 puntos de control, sólo obtenemos un parche.

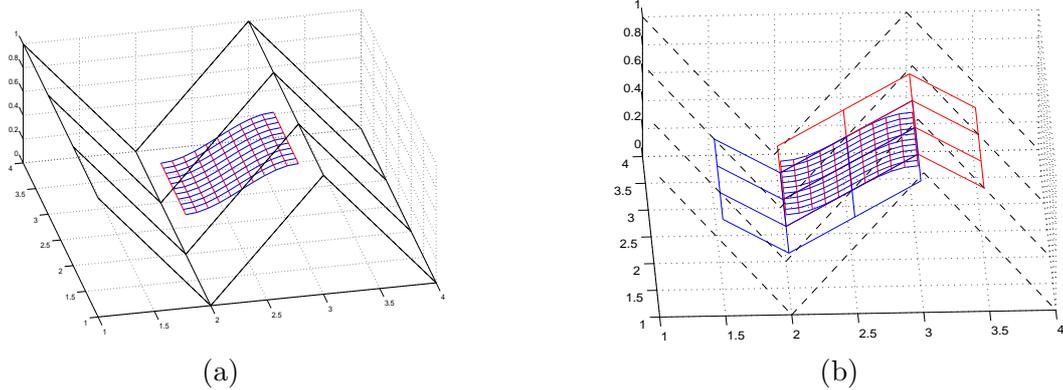


Figura 1: Red de control, superficie B-spline cúbica, red a izquierda y red a derecha

Luego de realizar un paso de subdivisión, obtenemos la red a izquierda (que se destaca en azul) y la red a derecha (en rojo) (Figura 1(b)).

Si realizamos una segunda subdivisión, podemos notar cómo los “parches” y las subredes asociadas se aproximan a la superficie original (ver Figura 2). Esta idea de aproximación o convergencia es la misma que analizamos en [2] y [3].

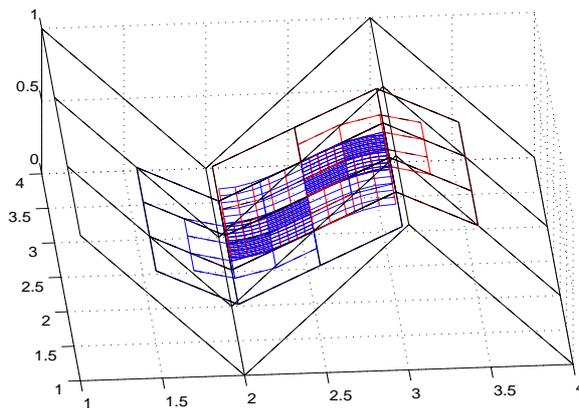


Figura 2: Dos subdivisiones y superficie B-spline cúbica

Dada ahora una red determinada por los mismos 16 puntos, pero con parámetros  $\beta_1 = 1$  y  $\beta_2 = 5$ , notamos cómo varía la superficie generada por esta red con respecto a la del caso anterior (Figura 3).

Luego de realizar una subdivisión, obtenemos las subredes a izquierda y a derecha respectivamente, que se observan en la Figura 4(a). A medida que se aumentan los pasos de subdivisión, estas subredes se aproximan cada vez más a la superficie original.

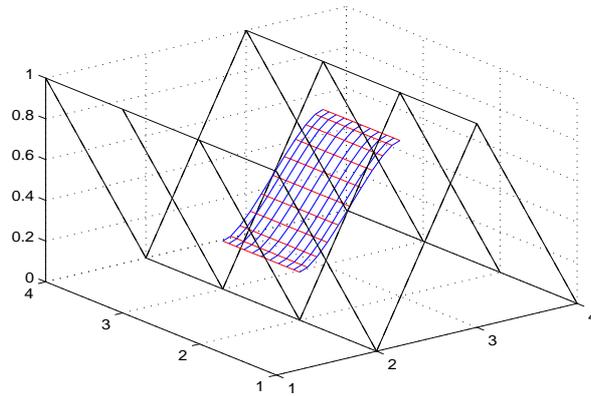


Figura 3: Red de control y superficie B-spline cúbica

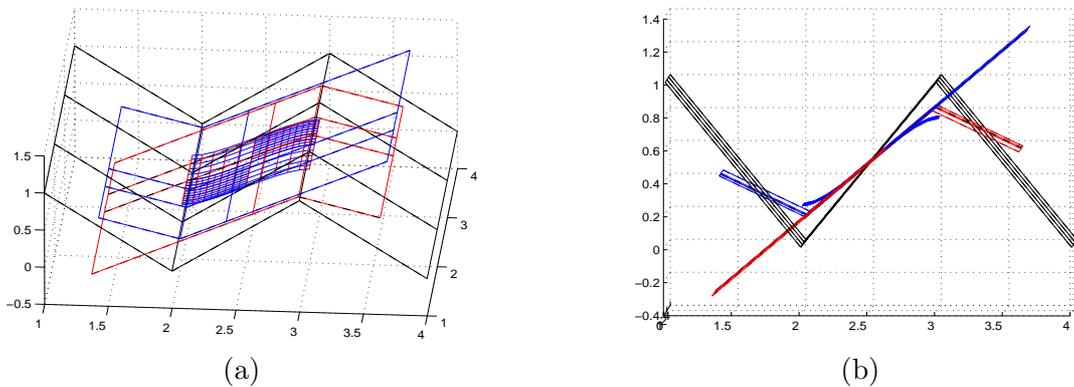


Figura 4: Una subdivisión y superficie Beta-spline cúbica para  $\beta_1 = 1$  y  $\beta_2 = 5$

En la Figura 4(b) se puede ver cómo se realizó la aproximación de una superficie mediante el método de subdivisión desarrollado.

Por último, consideremos la misma red de control, pero con parámetros  $\beta_1 = 1,5$  y  $\beta_2 = 0$ . Podemos observar cómo ha variado la superficie para estos valores de los parámetros (Figura 5(a)). Las subredes a izquierda y a derecha obtenidas en la primera subdivisión se pueden apreciar en la Figura 5(b).

## 4.2 Ejemplo 2

Consideremos una red formada por 42 puntos y parámetros de sesgo y de tensión  $\beta_1 = 1$  y  $\beta_2 = 0$  respectivamente, ver Figura 6(a).

Luego de realizar dos pasos de subdivisión, observamos que los distintos parches se aproximan a la superficie, como se puede apreciar en la Figura 6(b).

## 5 CONCLUSIONES Y TRABAJO FUTURO

En este trabajo presentamos una extensión de un método de subdivisión de curvas al caso de la subdivisión de superficies; en especial, consideramos superficies Beta-spline cúbicas. Mostramos

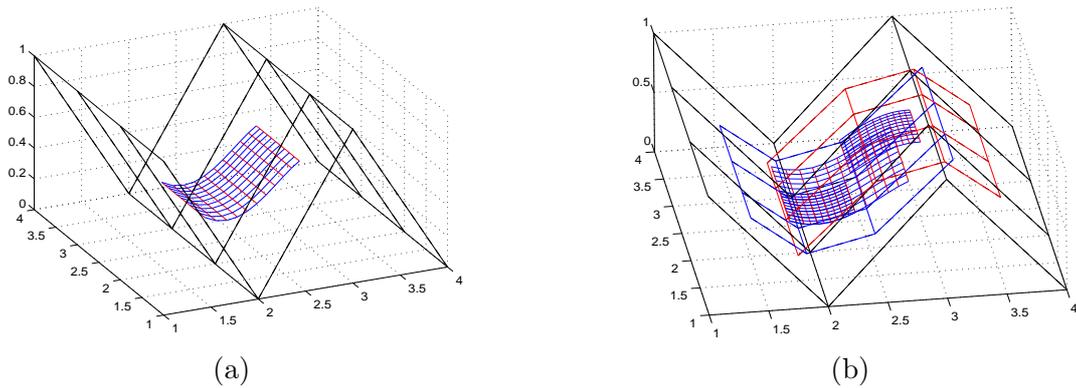


Figura 5: Una subdivisión y superficie Beta-spline cúbica para  $\beta_1 = 1,5$  y  $\beta_2 = 0$

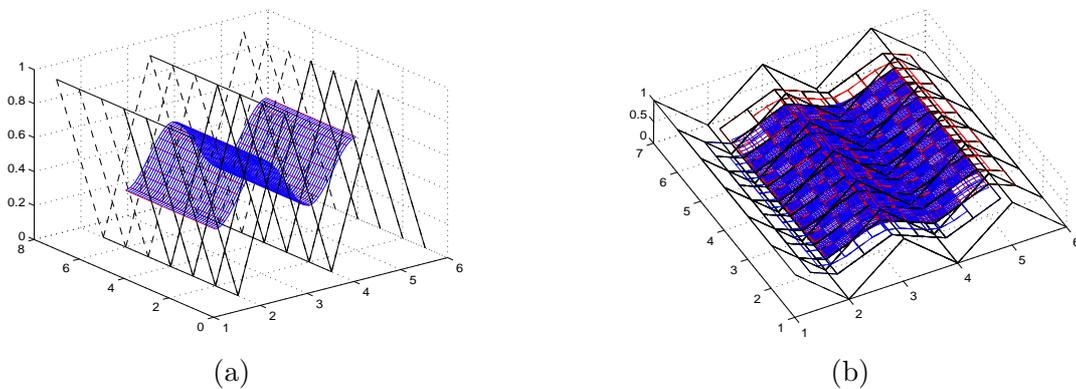


Figura 6: Dos subdivisiones y superficie B-spline cúbica

algunos ejemplos de subdivisión de este tipo de superficies, teniendo en cuenta distintos valores de los parámetros de tensión y de sesgo.

Desarrollamos un algoritmo que genera las matrices de subdivisión para distintos valores de los parámetros y para la subdivisión tanto en el punto medio como en otros casos (ver [2]). Además, obtuvimos un algoritmo que genera los puntos de control de las subredes obtenidas en cada subdivisión y que nos permite graficar tanto las subredes como los parches generados por ellas.

En todos los ejemplos mostrados se trabajó con funciones de la base que son continuas, forman una partición de la unidad y son linealmente independientes, lo cual asegura la convergencia uniforme de las redes de control a la superficie original.

Como trabajo futuro, nos centraremos en la aplicación de este método de subdivisión de superficies Beta-spline cúbicas desarrollado para obtener superficies multirresolución; ésto se llevará a cabo con el objetivo de poder subdividir localmente una superficie dada.

## AGRADECIMIENTOS

Esta trabajo fue parcialmente financiado con fondos del proyecto PGI 24/N020, SECyT, UNS.

## REFERENCIAS

- [1] B.A. Barsky and J.C.Beatty. Local control of bias and tension in Beta-splines. *ACM Transactions on Graphics*, 2(2):109–134, April 1983.
- [2] Liliana Castro, Silvia Castro, Susana Kahnert, and Diana Salgado. Matrices de subdivisión para curvas Beta-spline cúbicas. In *Anales del XIII Congreso Argentino de Ciencias de la Computación*, pages 710–720, October 2007.
- [3] Liliana Castro, Silvia Castro, and Diana Salgado. Subdivisión de curvas Beta-spline cúbicas. In *Anales del XVII Congreso sobre Métodos Numéricos y sus aplicaciones*, to appear, November 2008.
- [4] R.N. Goldman and T. DeRose. Recursive subdivision without the convex hull property. *Computer Aided Geometric Design*, 3(4):247–265, December 1986.
- [5] Diana Salgado. Métodos de subdivisión. Master’s thesis, Universidad Nacional del Sur, Bahía Blanca, 2006.