Wavelets definidas sobre tetraedrizaciones iregulares: resultados preliminares

Liliana Boscardín
Dto. de Matemática, Univ. Nac. del Sur
lboscar@uns.edu.ar
Bahía Blanca, B8000CPB, Argentina

Liliana Castro
Dto. de Matemática, Univ. Nac. del Sur
Bahía Blanca, B8000CPB, Argentina
lcastro@uns.edu.ar

Abstract

This article deals with the problem of multiresolution representation of functions defined on an irregular tetrahedrized domain $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. We have focused our attention to functions that are piecewise constant on the given tetrahedrization.

Keywords: wavelets, irregular tetrahedrizations, multiresolution representation.

Resumen

Este artículo trata el problema de la representación multirresolución de funciones definidas sobre una tetraedrización irregular dada de un dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. Focalizaremos nuestra atención en las funciones constantes por tramos sobre la tetraedrización irregular dada.

Keywords: wavelets, tetraedrizaciones irregulares, representación multirresolución.

1 INTRODUCCIÓN

Este artículo trata la representación multirresolución de funciones constantes por tramos definidas sobre una tetraedrización irregular. Cabe aclarar que el mismo problema para funciones constantes por tramos definidas sobre mallas triangulares irregulares ya fue resuelto en [6].

Para tal fin se usarán métodos basados en la teoría de wavelets. Brevemente, la idea básica de las técnicas wavelets es codificar un conjunto de datos como una aproximación gruesa seguida por una sucesión de coeficientes de detalle que miden el error entre dos aproximaciones sucesivas. Pero estos métodos suponen que la malla sobre la cual están definidos los datos puede alcanzarse por una subdvisión recursiva de una malla base, mwdiante la cual se obtiene una sucesión de mallas anidadas (en términos de la teoría de wavelets esto equivale a obtener un conjunto de espacios anidados). La estructura jerárquica asociada a estos métodos es una estructura de árbol dado que cada padre es subdividido en un conjunto de hijos), [10], [3].

Ahora bien las mallas irregulares no pueden obtenerse por medio de una regla de subdivisión recursiva y por lo tanto la estructura jerárquica que se necesita para trabajar con ellas es más compleja. En el caso de mallas triangulares irregulares, son ejemplo de este tipo de estructura jerárquica las triangulaciones de Delaunay y las mallas progresivas, [4], [8]. Dado que en este caso no es posible aplicar las técnicas waveletes tradicionales, es necesario introducir un nuevo marco de trabajo: el de las wavelets no anidadas.

2 WAVELETS NO ANIDADAS

La teoría clásica de wavelets está basada en una sucesión de espacios funcionales en los cuales se aproximan sucesivamente los datos. Como en este caso los espacios deben ser anidados, esta teoría no puede aplicarse al análisis multirresolución de conjuntos de datos definidos sobre mallas irregulares dado el proceso de subdivisión de tales mallas no conduce a una sucesión de espacios anidados. Por este motivo, se ha introducido otro marco [5] que permite trabajar con sucesiones no anidadas de espacios funcionales y que ya ha sido aplicado al análisis multirresolución de conjuntos de datos definidos sobre mallas triangulares irregulares [2].

3 GENERALIDADES SOBRE WAVELETS DEFINIDAS SOBRE MALLAS TRIANGULARES IRREGULARES

Describiremos brevemente el marco general para construir un análisis multirresolución en el caso que la sucesión de espacios aproximante obtenida es no anidada. Supondremos todos los espacios de dimensión finita. Sea $\{V_n\}$ una sucesión de espacios funcionales tales que:

$$\{V_n\} \text{ es isomorfo a un subespacio } \widetilde{V_n} \text{ de } \{V_{n+1}\}. \tag{1}$$

Sea $\{{\varphi_j}^n\}$ una base de $\{V_n\}$. Si se verificara la condición usual de anidamiento $\{V_n\} \subseteq \{V_{n+1}\}$, la relación entre dos niveles de resolución consecutivos estaría dada por la ecuación de refinamiento que expresa cada función de escala $\{{\varphi_j}^n\}$ en el nivel n como combinación lineal de funciones de escala $\{{\varphi_j}^{n+1}\}$ en un nivel más fino $(n+1)$. En el contexto de los espacios no anidados y debido a la condición (1) existen funciones $\{\widetilde{\varphi_j}^n\}$ que forman una base de $\widetilde{V_n}$ isomorfo a $V_n \subseteq V_{n+1}$. La relación entre los niveles n y $(n+1)$ está dada ahora en dos pasos: primero se aplica el isomorfismo, es decir se reemplazan las funciones $\{{\varphi_j}^n\}$ por las funciones intermedias $\{\widetilde{\varphi_j}^n\}$ y luego se aplica la ecuación de refinamiento que expresa $\{\widetilde{\varphi_j}^n\}$ como combinación lineal de funciones de escala $\{{\varphi_j}^{n+1}\}$:

$$\{{\varphi_j}^n\} \leftrightarrow \{\widetilde{\varphi_j}^n\} = \sum_i {p_{ij}}^n \, {\varphi_j}^{n+1}. \tag{2}$$

La ecuación (2) recibe el nombre de *ecuación de refinamiento aproximada*. La elección de las funciones intermedias $\{\widetilde{\varphi_j}^n\}$ es esencial para el método. Una vez que están elegidas y por lo quedan determinados los espacios $\widetilde{V_n}$, se elige el espacio W_n como un complemento del espacio $\widetilde{V_n}$, en el espacio más fino V_{n+1}, es decir:

$$V_{n+1} = \widetilde{V_n} \oplus W_n. \tag{3}$$

En la literatura de waveletes no anidadas los espacios V_n reciben el nombre de *espacios de aproximación* , los $\widetilde{V_n}$ *espacios intermedios* y los W_n espacios de detalle. Como es usual, las waveletes $\{\psi_j{}^n\}$ son las bases de los espacios W_n y por lo tanto existen coeficientes $q_{ij}{}^n$ tales que:

$$\psi_j{}^n = \sum_i q_{ij}{}^n \varphi_j{}^{n+1}, \tag{4}$$

y coeficientes $a_{ij}{}^n$, $b_{ij}{}^n$ tales que:

$$\varphi_j{}^{n+1} = \sum_i a_{ij}{}^n \widetilde{\varphi_j}{}^n + \sum_i b_{ij}{}^n \psi_i{}^n. \tag{5}$$

Sean A, B, P y Q las matrices con coeficientes $a_{ij}{}^n$, $b_{ij}{}^n$, $p_{ij}{}^n$ y $q_{ij}{}^n$. Dada una aproximación $f_{n+1} = \displaystyle\sum_i x_i{}^{n+1}\varphi_i{}^{n+1}$ en V_{n+1} la aproximación más gruesa siguiente $f_n = \displaystyle\sum_i x_i{}^n \varphi_i{}^n$ y los coeficientes de detalle $g_n = \displaystyle\sum_i y_i{}^n \psi_i{}^n$ son calculados de la siguiente manera:

$$(x_i{}^n) = A(x_i{}^{n+1}) \ \text{ y } \ (y_i{}^n) = B(x_i{}^{n+1}); \tag{6}$$

la transformación inversa está dada por:

$$(x_i{}^{n+1}) = P(x_i{}^n) + Q(y_i{}^n). \tag{7}$$

Tanto la fórmula de análisis (6) como la de reconstrucción (7) son las mismas que se obtienen para el caso anidad pero en este último caso están relacionadas por una aproximación en dos pasos, como sigue:

$$f_{n+1} \quad \overset{\text{aprox.}}{\rightarrow} \quad \widetilde{f}_n = \textstyle\sum_i x_i^n \widetilde{\varphi_i^n} \quad \overset{\text{isom.}}{\leftrightarrow} \quad f_n = \textstyle\sum_i x_i^n \widetilde{\varphi_i^n}.$$

Si bien la elección de las matrices de análisis y síntesis depende de cada aplicación particular, hay algunas condiciones que deben satisfacer estas matrices para asegurar ortogonalidad y aproximación en el sentido de los mínimos cuadrados. Indicaremos a continuación estas condiciones. Sea G_n la matriz de Gram-Schmidt de la base $\varphi_i{}^n$ (es decir la matriz cuyos elementos son $\langle\varphi_i{}^n, \varphi_j{}^n\rangle$). Si queremos que f_n (aproximación en la resolución n) sea la mejor aproximación de f_{n+1} en la norma L_2, entonces la matriz de análisis A debe satisfacer la siguiente condición:

$$A = G_n{}^{-1}(\langle\varphi_i{}^n, \varphi_j{}^{n+1}\rangle). \tag{8}$$

Una vez que se calculó A de (8), la matriz B puede ser elegida ortogonal a A y ortonormal con respecto al produco escalar en la base dual de V_{n+1}:

$$AG_n{}^{-1}B^T = 0, \tag{9}$$

$$BG_{n+1}{}^{-1}B^T = I \tag{10}$$

Las matrices P y Q son elegidas a partir de A y B para asegurar la propiedad de reconstrucción exacta:

$$(P\ Q) = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}^{-1} \tag{11}$$

Las condiciones: (8), (9), (10) y (11) juntas aseguran que f_n es la mejor aproximación en L_2 tanto de f_{n+1} como de la aproximación intermedia $\widetilde{f}_n$, siendo $\widetilde{f}_n$ la aproximación intermedia de $f(n)$ de $\widetilde{V}_n$. En [1] se puede ver un ejemplo de cómo se aplican los resultados anteriores al análisis multirresolución de una función constante por tramos sobre una triangulación esférica irregular dada puede verse . Presentaremos a continuación un marco similar al descripto que nos permitirá representar funciones constantes por tramos definidas sobre una tetraedrización irregular de un dominio $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$. Para ello, en primer lugar, describiremos dos técnicas de simplificación de mallas tetraédricas, sus respectivas operaciones inversas y qué se entiende por poliedro e influencia asociado a estas técnicas. Luego estaremos en condiciones de aplicar la teoría de análisis de multirresolución con espacios no anidados a funciones constantes por tramos definidas sobre una tetraedrización irregular dada. Por último presentaremos un ejemplo que ilustre los resultados teóricos.

4 TÉCNICAS DE SIMPLIFICACIÓN DE MALLAS TETRAÉDRICAS

En general llamaremos *actualización* a una modificación de una malla dada que afecta a dicha malla removiendo o insertando celdas tales como vértices, lados, triángulos y tetraedros. Hay varias técnicas de este tipo para mallas triangulares irregulares que pueden consultarse en ((5) de multiresolution Tetrahedral meshes). Sin embargo son pocas las técnicas para mallas tetraédricas irregulares. Una de ellas es la de los *modelos progresivos*, [7], [9]; otras son el colapsado de *lado completo* y el *colapsado de medio lado* las cuales describiremos a continuación.

Colapsado de lado completo: es un *actualización* local que consiste en contraer un lado e con vértices *v'* y *v"* en un vértice v, a menudo el punto medio de e. La malla alrdedor de e se modifica ya que se reemplazan los vértices *v'* y *v"* por el nuevo vértice v y los tetredros incidentes en *v'* y en *v"* colpsan en triángulos. La operación inversa del colpsado de lado completo es la *expansión completa de vértice* que expande un vértice v en un lado e con extremos *v'* y *v"*. También puede verse el colapsado de lado completo como un *update* que remueve los tetraedros incidentes en *v'* y *v"* y los reemplaza por nuevos tetraedros incidentes en v. Análogamente, la expansión de vértice puede verse como un *actualización* que remueve los tetraedros incidentes en v y los reemplaza por nuevos tetraedros incidentes en *v'* y *v"*. Llamaremos *región de influencia* o *poliedro de influencia* de un *colapsado de lado completo* a la colección de todos los tetraedros que son incidentes en los extremos del lado colapsado.

Colapsado de medio lado: es un *actualización* local que consiste en contraer un lado e de vértices v,w en uno de sus extremos, por ejemplo w. La *actualización* inversa del colapsado de medio lado es la *expansión media de vértice* que consiste en expandir un vértice w en un lado e insertando el otro vértice del segmento e. La *región de influencia* o *poliedro de influencia* del colapsado de medio lado del lado e de vértices v,w en el vértice w es el conjunto de tetraedros incidentes en v.

Una sucesión de colapsados de medio lado o de lado completo transforma una malla dada en una malla simplificada (más gruesa) mientras que la correspondiente sucesión de expansión completa o media de vértices refina la malla original.

5 ANÁLISIS MULTIRRESOLUCIÓN SOBRE MALLAS TETRAÉDRICAS IRREGULARES

Como dijimos en la introducción, nos interesa la representación multirresolución de funciones constantes por tramos definidas sobre mallas tetraédricas irregulares. Para ello necesitaremos un método de simplificación de esta clase de mallas; nosotros elegimos el colapsado de medio lado. También debemos definir los espacios V_n, $\widetilde{V_n}$, W_n y las funciones que los generan para encuadrarnos en la teoría descripta en la Sección .

5.1 Construcción de mallas y espacios de aproximación.

Suponemos dada una tetraedrización inicial T^N de un dominio $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ en el cual están definidos los datos que para nosotros serán funciones de $L^2(\Omega)$. Aplicando sucesivamente la técnica de simplificación elegida, se obtienen las mallas T^i, $i = 0, .., N$. Indicaremos con C^i las funciones constantes por tramos sobre la tetraedrización T^i, con ${T_j}^i$ al tetraedro T_j de la tetraedrización T^i y con $\chi_{{T_j}^i}$ a su función característica. Es claro que estas funciones forman una base ortogonal para el espacio C^i.

Las matrices de Gram-Schmidt G_{i+1} y G_i son las siguientes matrices diagonales:

$$\begin{aligned} G_{i+1} &= diag(vol({T_j}^{n+1})), \\ G_i &= diag(vol({T_j}^i)). \end{aligned}$$

Entonces, a partir de la ecuación (8) se obtiene la siguiente matriz local de análisis:

$$A = \left(\frac{vol({T_j}^{n+1} \cap T_j^i)}{vol({T_j}^i)} \right).$$

5.2 Análisis global y síntesis

El análisis global de una función constante por tramos definida sobre una tetraedrización irregular dada, resulta de la aplicación de las fórmulas locales (6) con las matrices locales de análisis descriptas en la sección anterior.

6 CONCLUSIONES Y TRABAJO FUTURO

En este trabajo hemos presentado wavelets definidas sobre grillas tetraédricas no anidadas, que permiten la representación de funciones constantes a tramos definidas sobre una tetraedrización irregular dada. Es sabido que es posible utilizar este tipo de representaciones en computación gráfica para trabajar con diferentes niveles de detalle.

Por lo tanto, como trabajo futuro inmediato, realizaremos la implementación de este tipo de wavelets para utilizarla en representación de funciones definidas sobre volúmenes.

Al mismo tiempo, estamos estudiando la forma de definir de manera eficiente bases de wavelets lineales a tramos, continuas, definidas sobre mallas tetraédricas iregulares, de manera que sea posible representar funciones continuas definidas sobre volúmenes.

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo fue parcialmente financiado con fondos del proyecto PGI 24/N020, SECyT, UNS.

REFERENCIAS

[1] G. P. Bonneau and A. Gerussi. Hierarchical decomposition of datasets on irregular surface meshes. In *Computer Graphics International Conference Proceedings, IEEE Computer Society Press 1998*, pages 59–63, 1998.

[2] G. P. Bonneau and A. Gerussi. Level of detail visualization of scalar data sets on irregular surface meshes. In *Computer Graphics International Conference Proceedings, IEEE Computer Society Press 1998*, pages 73–77, 1998.

[3] Liliana B. Boscardín. Wavelets definidas sobre volúmenes. Tesis de Magister, 2001.

[4] Leila De Floriani. A pyramidal data structure for triangle-based surface description. *IEEE Computer Graphics and Applications*, 9:67–78, March 1989.

[5] G.Bonneau, S. Hahmann, and G.M. Nielson. B-Lac wavelets: a multiresolution analysis with non nested spaces. *IEEE Visualization'96*, pages 43–48, 1996.

[6] A. Gerussi. *Analyse Multirésolution Non Emboîtée. Applications à la visualisation Scientifique*. PhD thesis, Université Joseph Fourier, Grenoble, France, 2000.

[7] M.H. Gross and O.G Staadt. Progressive tetrahedralizations. In *Proceedings IEEE Visualization '98*, pages 397–402, Research Triangle Park, NC, 1998.

[8] D. Kirkpatrick. Optimal search in planar subdivision. *Siam J Computing*, 12(2):28–35, February 1983.

[9] J. Popovic and H. Hoppe. Progressive simplicial complexes. In *ACM Computer Graphics Proceedings, Annual Conference Series, SIGGRAPH'97*, pages 217–224, 1997.

[10] Peter Schröeder and Wim Sweldens. Spherical wavelets: Efficiently representing functions on the sphere. *ACM Proceedings of SIGGRAPH'95*, pages 161–172, August 1995.