

Implementación de un Ambiente para el Estudio Experimental de la Dinámica de Poblaciones

Mirta Padín¹, Claudio Delrieux², Julián Dominguez², y Héctor Soto¹

¹Univ. Nacional de la Patagonia Austral, L. de la Torre 1070, (9300) Río Gallegos,

²Universidad Nacional del Sur, Alem 1253, (8000) Bahía Blanca, ARGENTINA.

Voice: (54)(291)4595101 ext. 3381 — Fax: (54)(291)4595154 — e-mail: claudio@acm.org

Palabras Clave: Visualización Científica, Sistemas Dinámicos, Dinámica de Poblaciones.

1 Motivaciones

En este trabajo mostraremos las ventajas de explorar computacionalmente las diferentes características de los modelos de la dinámica de población y de las interacciones entre el predador y la presa, basados en las ecuaciones de Lotka-Volterra [5]. Este trabajo pretende constituirse a futuro en una herramienta dinámica y versátil para la enseñanza y aplicación en sistemas biológicos, incluyendo la posibilidad explorar alternativas que atiendan a realidades particulares de las poblaciones en análisis.

2 Modelo de Lotka-Volterra

En 1920 A. Lotka y V. Volterra proponen un modelo para la dinámica de poblaciones, el cual supone una región cerrada en la cual una función $F(t)$ representa la cantidad de individuos *presa* contenidos en la región en el instante t . Se asume una *tasa de mortalidad "natural"* μ_0 , y que la población produce un número β de nacimientos por unidad de población y de tiempo. En ausencia de predación, la población de presas crece exponencialmente con una *tasa neta de crecimiento* característica $r = \beta - \mu_0$. Para estimar la *tasa de mortalidad* adicional per cápita impuesta en la presa por la predación, asumimos que las presas están aleatoriamente distribuidas dentro de un área geográfica A , y que cada predador s busca su presa en un área A_s por unidad de tiempo [2]. Si una fracción σ de los encuentros predador-presa resulta en que la presa es muerta, entonces cada predador consume un promedio de $\sigma(\frac{A_s}{A})F(t)$ presas por unidad de tiempo. Definimos entonces la *tasa de ataque* $\alpha = \sigma(\frac{A_s}{A})$ y reescribimos la *tasa de actualización* per cápita de un predador como $\alpha F(t)$. Si la región de interés contiene $C(t)$ predadores en el instante t , entonces podemos escribir la *tasa de mortalidad* por predación per cápita experimentada por una presa como $\alpha C(t)$. Así, la tasa neta de crecimiento per cápita de una población de presas explotada por C predadores es $r - \alpha C$, y podemos escribir

$$\dot{F} = (r - \alpha C)F. \quad (1)$$

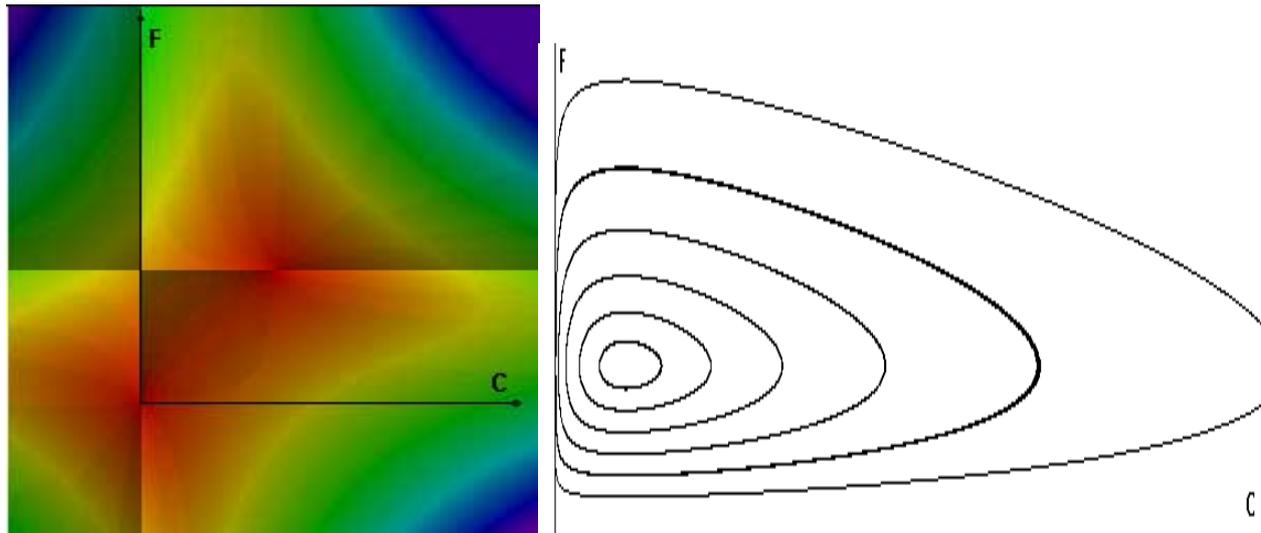


Figura 1: (a) El módulo del Jacobiano del sistema de Lotka-Volterra, representado con una escala de colores, y (b) el diagrama de fases representado por medio de trayectorias.

En la obtención de la ecuación anterior, hemos asumido que cada predador consume $\alpha F(t)$ presas por unidad de tiempo. Si asumimos que cada presa consumida resulta en la producción de ϵ nacimientos, entonces la *fecundidad per cápita* de los predadores en el instante t es $\epsilon\alpha F(t)$. Si los predadores están sujetos a una *tasa de mortalidad per cápita* constante δ , entonces su dinámica poblacional está descrita por

$$\dot{C} = (\epsilon\alpha F - \delta)C. \quad (2)$$

Un punto de equilibrio requiere que las presas experimenten una tasa de mortalidad por predación exactamente balanceada con su tasa de crecimiento neto, y que cada predador consuma exactamente suficientes presas para que sus tasas de reproducción y mortalidad se balanceen. En muchas circunstancias, la solución matemática no es posible, por lo que resulta indispensable considerar como alternativa el estudio del sistema por medio de su representación gráfica. En la Fig. 1(a) podemos observar el espacio de fases del sistema, en el cual hemos representado el módulo del Jacobiano del sistema, empleando una escala de colores, y la fase como intensidad. Se observan los dos puntos donde existen estados estacionarios biológicamente posibles, dada una elección de valores para los parámetros del sistema dinámico, en función del valor de F y C . Una forma conveniente de pensar sobre las consecuencias de lo mencionado hasta aquí es imaginar que en el tiempo t contamos el número de presas y predadores en el sistema (o proponemos un valor hipotético, llamado *semilla*) y graficamos el resultado como un punto en el espacio de fases [4]. Pasado cierto tiempo, recensamos el sistema y graficamos el resultado en el mismo gráfico. Uniendo los puntos en orden temporal definimos la *trayectoria* seguida por el cambio de estado del sistema. El conjunto total de trayectorias encontradas para todas las semillas posibles constituye el *diagrama de fases* del sistema. Algunas de estas trayectorias están representadas en la Fig. 1(b), en las cuales hemos comenzado con seis valores iniciales diferentes de presas F y predadores C . En cada caso es posible observar que las trayectorias producen curvas cerradas. En realidad, este gráfico nos dice que es esperable que el estado del sistema se mueva en un lazo en torno al estacionario, involucrando una sucesión de episodios en los cuales una baja población de predadores nos conduce a una sobreproducción de presas. El tamaño de los ciclos está determinado por la desviación de la condición inicial respecto

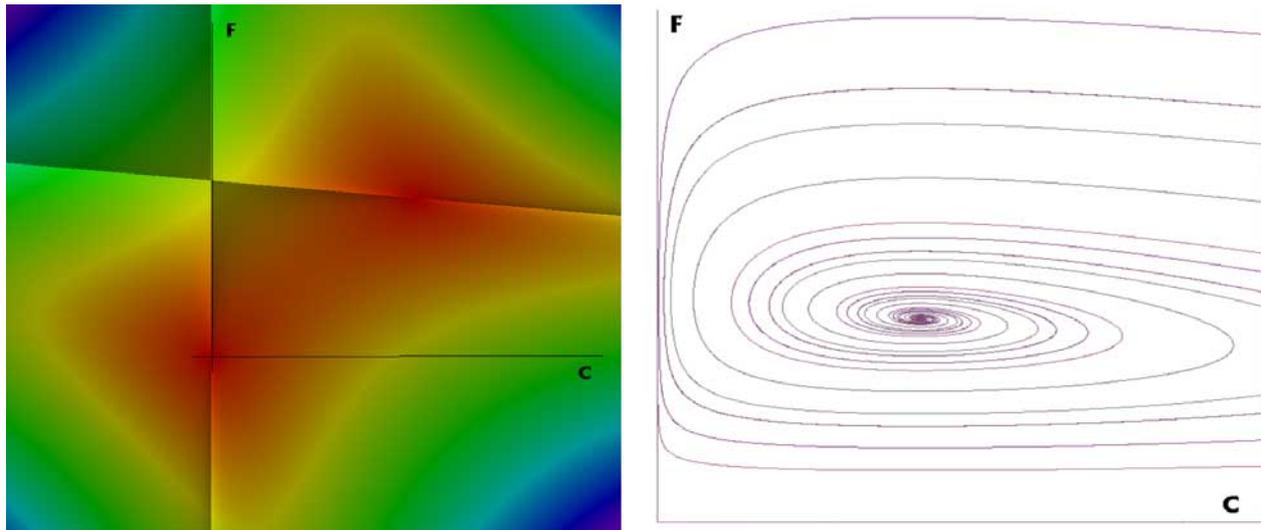


Figura 2: (a) Estados estacionarios del sistema Lotka-Volterra con autolimitación de las presas, y (b) Diagrama de fases de este sistema.

del estado estacionario. El modelo, entonces, implica que la amplitud de cualquier ciclo ecológico, aún en un futuro arbitrario, depende de la condición inicial del sistema en un pasado lejano.

3 Modificaciones al modelo

La ventaja más singular del modelo de Lotka-Volterra es su simplicidad. No obstante, esta simplicidad extrema se obtuvo omitiendo muchas características de los procesos de poblaciones reales, y es necesario saber hasta qué grado tales omisiones han determinado su comportamiento. Por dicha razón agregaremos algunas modificaciones a las ecuaciones, una por vez [5]. La primera es que en ausencia de predación, el crecimiento exponencial de la presa no puede continuar indefinidamente. Para modelar la inevitable limitación del recurso y su efecto en el crecimiento de la población de presas, asumimos que, en ausencia de predación, la presa crecería de acuerdo a la ecuación logística, con *tasa de crecimiento intrínseca* r , hasta alcanzar una población máxima determinada por una *capacidad de carga* K . Reteniendo todas las otras características de la formulación de Lotka-Volterra, nuestro nuevo modelo es ahora

$$\begin{aligned}\dot{F} &= \left[r \left(1 - \frac{F}{K} \right) - \alpha C \right] F, \\ \dot{C} &= (\epsilon \alpha F - \delta) C.\end{aligned}\tag{3}$$

Las simulaciones numéricas de la Ec. 3 muestran que el nuevo modelo se comporta en forma bastante diferente del modelo básico de Lotka-Volterra. En la Fig. 2(b) podemos observar cómo se configuran las trayectorias biológicamente significativas dentro del diagrama de fases de este sistema.

El comportamiento del modelo básico de Lotka-Volterra queda determinado por las condiciones iniciales (conclusión inadecuada desde el punto de vista de la biología), pero la introducción de aún la más mínima autolimitación de la presa hace que el comportamiento a largo término sea independiente de las condiciones iniciales. Para explorar esta restricción

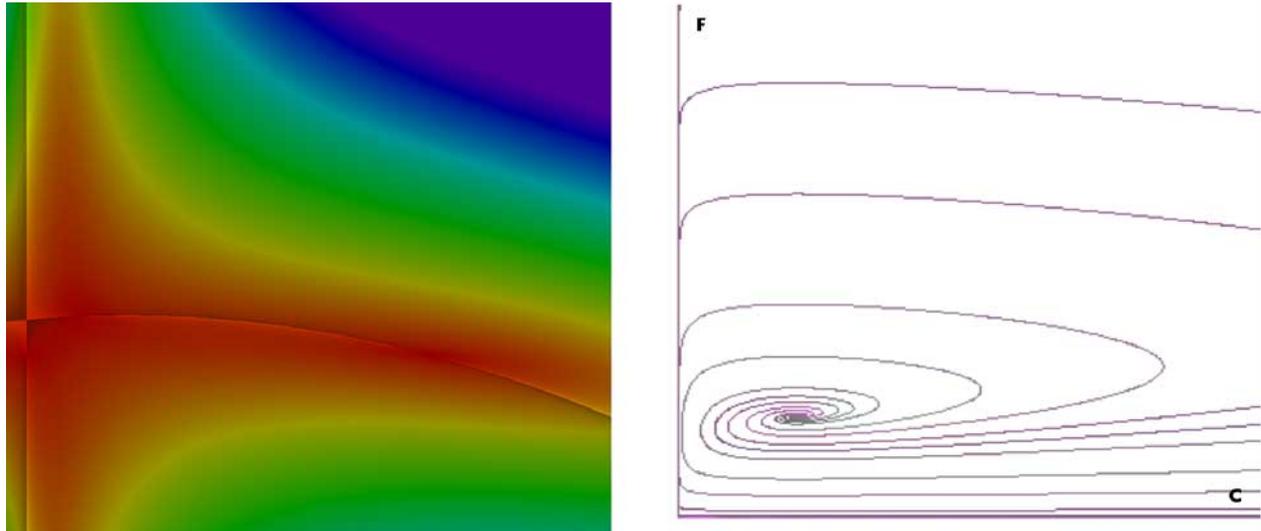


Figura 3: (a) Puntos estables con presas autolimitantes y predadores con saturación, y (b) Diagrama de fases del sistema

al modelo, asumimos que el predador tiene una respuesta funcional de Holling tipo II [6], esto es, la tasa de actualización per cápita $U(F)$ está dada por

$$U(F) = U_m \left[\frac{F}{F + F_h} \right]. \quad (4)$$

Sin cambiar las restantes hipótesis planteadas, pero escribiendo ahora la tasa neta de crecimiento de la presa como $L(F) = rF(1 - \frac{F}{K})$, tenemos que

$$\begin{aligned} \dot{F} &= L(F) - U(F)C, \\ \dot{C} &= (\epsilon U(F) - \delta)C. \end{aligned} \quad (5)$$

El modelo básico siempre predice oscilaciones continuadas predador-presa, pero el modelo con presa autolimitante, aunque frecuentemente muestra un transitorio oscilatorio, es estable en el largo plazo.

4 Un sistema integrado de visualización

Todas las figuras vistas hasta ahora (y una copiosa cantidad no mostrada) fueron generadas con el L-V Workbench, una aplicación computacional especialmente desarrollada por los autores para facilitar la exploración y visualización de las diferentes características del comportamiento dinámico de poblaciones basado en el modelo de Lotka-Volterra y sus variantes. El L-V Workbench permite elegir el sistema dinámico básico o cualquiera de sus variantes, modificar los parámetros de evaluación, y generar representaciones por medio de integración numérica utilizando el algoritmo de Runge-Kutta. La representación visual se realiza por medio de los métodos clásicos de Streamlines y LIC [7, 1], así como otras técnicas intermedias pero más ventajosas desarrolladas por los autores [3]. En el caso de elegir un método basado en texturas, el sistema permite elegir entre un amplio conjunto de texturas base, las cuales se generan dinámicamente por medio de parámetros elegidos por el usuario según sus necesidades de visualización (ver Fig. 4). También es posible representar la evolución temporal de las poblaciones.

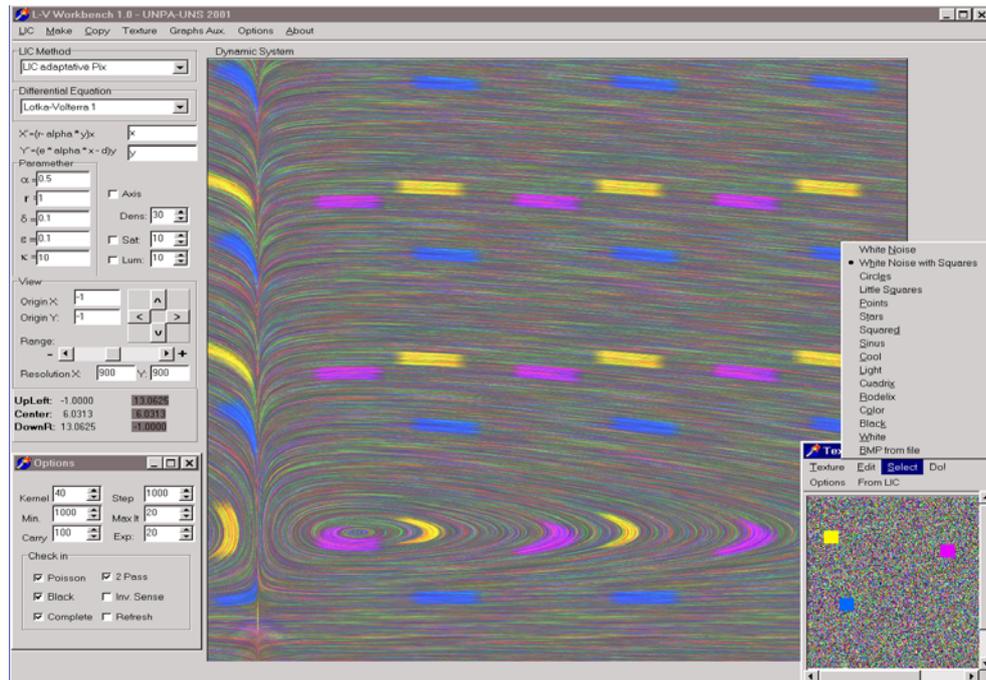


Figura 4: El L-V Workbench en acción.

Referencias

- [1] B. Cabral y L. Leedom. Imaging Vector Fields Using Line Integral Convolution. *ACM Computer Graphics (SIGGRAPH Proceedings)*, 25(3):263–270, 1993.
- [2] T. J. Case. *An Illustrated Guide to Theoretical Ecology*. Oxford University Press, Oxford, 2000.
- [3] Claudio Delrieux, Julián Domínguez, y Andrés Repetto. Towards a CLIC in Vector Field Visualization. In *CISST 2001 Conference*, págs. 695–702, ISBN 1-892512-73-4, 2001.
- [4] Robert Devaney. *A First Course in Chaotic Dynamical Systems*. Addison Wesley, Reading, MA, 1992.
- [5] W. S. Gurney y R.M. Nisbet. *Ecological Dynamics*. Oxford University Press, Oxford, 1998.
- [6] A. P. Gutiérrez. *Applied Population Ecology*. John Wiley & Sons, New York, 1996.
- [7] J. M. Ottino. *The Kinematics of Mixing*. Cambridge University Press, Cambridge, Massachusetts, 1989.