

Capítulo 1

Magnetotelúrica

En este capítulo hacemos una reseña del método magnetotelúrico, una de las varias técnicas electromagnéticas de prospección geofísica, mostrando ejemplos de su aplicación a algunas estructuras simples. A continuación describimos algunos de los métodos numéricos comúnmente utilizados para modelar la respuesta de la Tierra cuando una onda electromagnética incide sobre su superficie.

1.1 Introducción

En el método magnetotelúrico (MT), que surgió como tal a partir de los trabajos pioneros de Tikhonov (1950) y Cagniard (1953), se utilizan medidas de campos electromagnéticos naturales para estudiar la estructura de la conductividad del subsuelo terrestre. El interés en este conocimiento no es sólo académico; es sabido (Katz y Thompson, 1987) que a través de la relación entre la conductividad y la porosidad de las rocas es posible determinar la presencia de petróleo y el método magnetotelúrico es adecuado para tal fin en ambientes protegidos o en áreas volcánicas, donde otros métodos de prospección -como sísmica de reflexión- son inviables debido a los daños ambientales que generan, o fallan por las características morfológicas del subsuelo. Las fuentes naturales de campos MT con frecuencias por sobre 1 Hz

son las tormentas eléctricas alrededor del planeta, en las cuales los relámpagos radían campos que se propagan a grandes distancias. A frecuencias menores que 1 Hz, la mayor contribución proviene de corrientes generadas en la magnetósfera por su interacción con el viento solar. En ambos casos en modelado magnetotelúrico se asume que los campos electromagnéticos en la superficie terrestre pueden ser tratados como ondas planas (Madden y Nelson, 1986). La mayor parte de la energía de estas ondas incidentes es reflejada, pero un pequeño porcentaje se propaga hacia el interior de la Tierra. El campo eléctrico incidente, debido a la conductividad no nula del subsuelo, induce corrientes eléctricas, fuentes de campo magnético. Por su parte, la variación temporal del campo magnético genera un campo eléctrico a través de la ley de Faraday. La idea fundamental del método es que estos campos electromagnéticos, respuesta de la Tierra a los campos incidentes, proveen información indirecta sobre las propiedades eléctricas de la misma a profundidades entre decenas de metros y varios cientos de kilómetros (Spies, 1989), pues dependen de la distribución de conductividades del subsuelo.

En la superficie los campos medidos contienen también la contribución de los campos incidentes, lo que presenta un problema, puesto que en principio se ignora su magnitud. Es posible, sin embargo, de la información completa de los campos en superficie definir una cantidad denominada impedancia Z , que detallaremos en la sección 1.4, que depende de las propiedades del subsuelo y nos libera en parte de este inconveniente.

Los equipos para llevar a cabo las mediciones son pares de electrodos en contacto con la Tierra, ubicados perpendicularmente entre sí con los que se miden caídas de potencial, a partir del cual se obtiene el campo eléctrico, y magnetómetros para medir las componentes del campo magnético. Como las señales a medir son de muy baja intensidad, el proceso de adquisición de datos no es una tarea sencilla. Los datos adquiridos son procesados e interpretados en término de la distribución espacial de conductividades eléctricas, para lo cual se utilizan modelos numéricos uni-, bi- y tridimensionales. Como en general la información no es completa, es usual utilizar datos provenientes

de otros métodos para ayudar en este proceso, realizando la llamada inversión conjunta.

En la descripción del método MT detallaremos el modelo, las fuentes y la interacción entre los campos y el subsuelo. Cada uno de esos tópicos es suficientemente complejo como para ser discutido separadamente. En particular, el interés de esta Tesis se centra en los métodos numéricos utilizados para modelar la respuesta de la Tierra; en la última sección se describen algunos frecuentemente usados, y en el próximo capítulo introducimos los que implementaremos.

1.2 El Modelo

Recordemos que los fenómenos electromagnéticos están descritos por las ecuaciones de Maxwell (Stratton, 1941)

$$\nabla \times \mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \mathbf{J}, \quad (1.1a)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0, \quad (1.1b)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho, \quad (1.1c)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (1.1d)$$

donde

\mathbf{E} = intensidad de campo eléctrico (V/m)

\mathbf{D} = desplazamiento eléctrico (C/m²)

\mathbf{H} = intensidad de campo magnético (A/m)

\mathbf{B} = inducción magnética (Wb/m)

\mathbf{J} = densidad de corriente eléctrica (A/m²)

ρ = densidad de carga eléctrica (C/m³)

Juntamente con las Ecs. (1.1) debemos considerar la ecuación de continuidad

$$\nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0, \quad (1.2)$$

que establece la ley de conservación de la carga eléctrica. Sólo tres de estas cinco ecuaciones son independientes, de modo tal que para hacer al sistema definido debemos introducir las relaciones constitutivas que pueden ser escritas, siempre que la magnitud de los campos \mathbf{E} y \mathbf{H} y la de sus derivadas temporales no sean muy grandes -como es nuestro caso- como:

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}, \quad (1.3a)$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}, \quad (1.3b)$$

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}. \quad (1.3c)$$

A través de las Ecs. (1.3) el medio es caracterizado desde el punto de vista electromagnético por la permitividad eléctrica ε (F/m), la permeabilidad magnética μ (H/m) y la conductividad eléctrica σ (S/m); estas cantidades son tensores en caso de ser el medio anisótropo, y escalares en caso de isotropía.

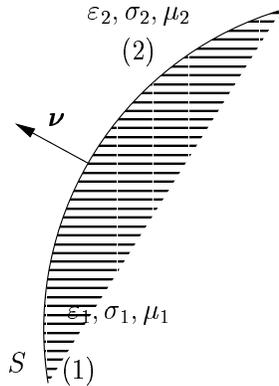


Figura 1.1: El vector normal ν es positivo de (1) a (2).

Finalmente, las condiciones de borde que determinan la relación de los campos electromagnéticos en la interfase de medios con diferentes valores de los parámetros ε , σ , μ , ver Fig.1.1, son las siguientes:

$$\begin{aligned} \nu \cdot (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) &= 0, & \nu \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) &= \mathbf{J}_s, \\ \nu \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) &= 0, & \nu \cdot (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) &= q_s, \\ \nu \cdot (\mathbf{J}_2 - \mathbf{J}_1) &= -\frac{\partial q_s}{\partial t} \end{aligned}$$

donde q_s la densidad superficial de carga y \mathbf{J}_s es la densidad superficial de corriente, que es nula cuando la conductividad en ambos medios

es finita.

Podemos enumerar ahora una serie de suposiciones que suelen hacerse al utilizar el método magnetotelúrico, que permiten simplificar las ecuaciones que hemos escrito hasta aquí :

- La permeabilidad magnética del suelo es del orden de la del vacío en la

mayoría de los casos, se considera entonces $\mu = \mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ H/m, excepto en presencia de magnetitas donde esta hipótesis no es válida (Keller, 1987).

- Por simplicidad, los medios se consideran isótropos, pero no necesariamente homogéneos.
- Se asume una dependencia temporal armónica de los campos, puesto que siendo las ecuaciones a resolver lineales, toda otra dependencia temporal puede considerarse como una superposición de ondas armónicas.
- En el rango de conductividades encontradas en la Tierra, de 10^{-3} a 1 S/m, y considerando que las frecuencias de interés varían entre 10^{-3} y 10^4 Hz, vale siempre que

$$\frac{\omega\varepsilon}{\sigma} \ll 1,$$

con lo que podemos desprestigiar las corrientes de desplazamiento frente a las de conducción y el problema que nos ocupa ya no es de propagación de ondas en el subsuelo, sino de su difusión al interior de la Tierra.

- Por nuestra parte consideramos por simplicidad ε y σ reales e independientes de la frecuencia.

Con estas suposiciones, y asumiendo además que en la región del subsuelo considerada no hay inicialmente cargas libres ni fuente alguna, las Ecs. (1.1) se reducen a las de Maxwell armónicas

$$\nabla \times \mathbf{H} = \sigma \mathbf{E}, \quad (1.4a)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -i\omega\mu\mathbf{H}, \quad (1.4b)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0, \quad (1.4c)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0. \quad (1.4d)$$

Siendo las dos últimas ecuaciones consecuencia de las dos primeras, en nuestro análisis numérico nos ocuparemos, como es usual (Ward y Hohmann, 1987) de las Ecs. (1.4a) y (1.4b). La onda plana incidente en superficie es considerada como una condición de borde en los casos más simples o bien, en los casos más complejos, todo el problema puede ser reformulado como veremos en el Capítulo 3.

1.3 Fuentes

Las señales electromagnéticas naturales provienen de una enorme variedad de procesos, originándose ya sea en el centro de la Tierra o en distantes galaxias. En el rango de interés del método MT, hay sólo dos fuentes importantes, la atmósfera y la magnetósfera. Las tormentas eléctricas en la parte baja de la primera son la causa dominante de campos con frecuencias entre 1 y 10 kHz. Un rayo generalmente consiste de una secuencia de descargas, llamada “flash”. La primer descarga en esta secuencia es nube-nube, se llama “líder” y abre el camino para otras 2 o 3 descargas del mismo tipo; finalmente se produce la descarga a tierra, que es la mayor fuente de energía electromagnética. Los campos \mathbf{E} y \mathbf{B} generados decaen con la distancia de forma muy similar a los de un dipolo eléctrico, hasta unos 50 km de producidos. Más allá de esta distancia, la forma de decaimiento de las señales, llamadas “atmosféricas”, depende de la frecuencia, siendo las componentes de mayor frecuencia atenuadas y las de menor preservadas por un efecto de guía de onda entre la superficie de la Tierra y las capas de aire ionizadas en la ionósfera (Vozoff, 1991).

Los campos con frecuencias por debajo de 1 Hz son originados primordialmente en la compleja interacción entre el campo magnético permanente de la Tierra y el flujo de plasma solar que tiene lugar en la magnetósfera (Kaufman y Keller, 1981). El campo magnético terrestre varía muy lentamente en el tiempo con relación al período de las fuentes consideradas, así que no es importante en aplicaciones magnetotelúricas. Pero su existencia causa fluctuaciones moderadamente rápidas en un campo magnético secundario: cuando las partículas que componen el viento solar encuentran a su paso al campo magnético terrestre los electrones y protones son desviados en direcciones opuestas, dando lugar a un efecto de corriente eléctrica e induciendo un campo magnético. En su viaje hacia la Tierra desde la magnetósfera estos campos atraviesan la ionósfera dando origen a ondas hidromagnéticas (Orr, 1984). Al ser observadas en la superficie son clasificadas como *micropulsaciones* según su período e intensidad. Las de frecuencias ultra bajas

(ULF) son las utilizadas como fuente en el método MT, suponiendo que se comportan como ondas planas (Madden y Nelson, 1986; Vozoff, 1991). Esta simplificación es generalmente aceptada y con ella trabajaremos en esta Tesis, pero se han reportado casos (Häkkinen y Pirjola, 1986) en los que no es válida.

1.4 Interacción con la Tierra

Para ver por qué los campos MT transportan información sobre la distribución espacial de conductividad eléctrica de la Tierra tenemos que observar la forma en que los campos interactúan con el suelo.

Comencemos con el caso más simple, unidimensional, donde una onda plana con amplitud para el campo eléctrico A y frecuencia angular ω incide sobre un semiespacio de conductividad σ , ver Fig. 1.2.

La solución de las Ecs. (1.4a) y (1.4b) es $E_x = Ae^{-ikz}$, $H_y = A\frac{k}{\omega\mu}e^{-ikz}$, donde $k = (-i\omega\mu\sigma)^{\frac{1}{2}} = \frac{(1-i)}{\delta}$.

La cantidad

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}} \quad (1.5)$$

es la *longitud de penetración* de la onda, que disminuye al aumentar la frecuencia de la onda incidente y la conductividad del medio. Para desprendernos de la dependencia con la amplitud del campo incidente, definimos la *impedancia* Z como

$$Z_{xy} = \frac{E_x}{H_y} = (1+i)\sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma}}, \quad (1.6)$$

o de forma equivalente para puede definirse la *resistividad* ρ

$$\rho_{xy} = \frac{Z_{xy}\bar{Z}_{xy}}{\omega\mu}, \quad (1.7)$$

donde la barra indica complejo conjugado. Para el presente ejemplo ρ_{xy} se reduce a la relación $\rho = 1/\sigma$.

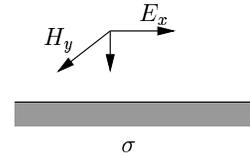


Figura 1.2: Onda plana incidente sobre una Tierra homogénea. El eje z es positivo hacia abajo.

En general las medidas de los campos en superficie se interpretan en términos de la resistividad y de la fase γ de Z , que es la diferencia de fases entre \mathbf{E} y \mathbf{H} . En medios no homogéneos no es posible desprenderse totalmente de la dependencia con el campo incidente y la resistividad, que se denomina ahora *resistividad aparente* ρ^a dependerá de la frecuencia del mismo.

En nuestro ejemplo, de la Ec. (1.6) se ve que la fase γ es $\frac{\pi}{4}$. Si el campo eléctrico está en el eje y y el magnético en el eje x , obtenemos para ρ_{yx} igual comportamiento que para ρ_{xy} , con la diferencia que la fase de Z_{yx} difiere de la de Z_{xy} en π . Puede también observarse de la misma ecuación que la fase γ es constante para el caso del semiespacio homogéneo, mientras que el módulo de la impedancia decrece con la conductividad y aumenta con la frecuencia. Esto es claro si lo pensamos en término de los campos, ya que al ser éstos cuasi-estacionarios, el campo magnético es originado por corrientes eléctricas y aumenta al aumentar σ ; el campo eléctrico tiene carácter rotacional, surgiendo como resultado de la variación temporal de la intensidad del campo magnético. A causa de esto, el campo eléctrico disminuye al disminuir la frecuencia.

Consideramos ahora, como segundo ejemplo de la interacción de los campos con la Tierra, que ésta está constituida por capas horizontales de distintos espesores y conductividades. En cada capa tenemos para los campos \mathbf{E} y \mathbf{H} , resolviendo Ecs. las (1.4), expresiones de la forma

$$Ae^{ikz} + Be^{-ikz} \quad (1.8)$$

donde el primer término es para la energía ascendente y el segundo para la descendente. La capa más profunda en este modelo es siempre infinita, de modo que en ella el coeficiente A es nulo. Veamos algunos casos particulares para comprender intuitivamente el comportamiento de la resistividad aparente ρ^a y la fase γ . Comencemos con los modelos de la Fig. (1.3). La capa superior es la misma en ambos modelos, pero $\sigma_2 = \frac{1}{10}\sigma_1$ en el primer caso, y $\sigma_2 = 10\sigma_1$ en el segundo. Vemos que cuando la frecuencia es lo suficientemente grande como para que la profundidad de penetración δ sea mucho menor que el espesor h de la primer capa, $\rho^a = \frac{1}{\sigma_1}$, y cuando la frecuencia

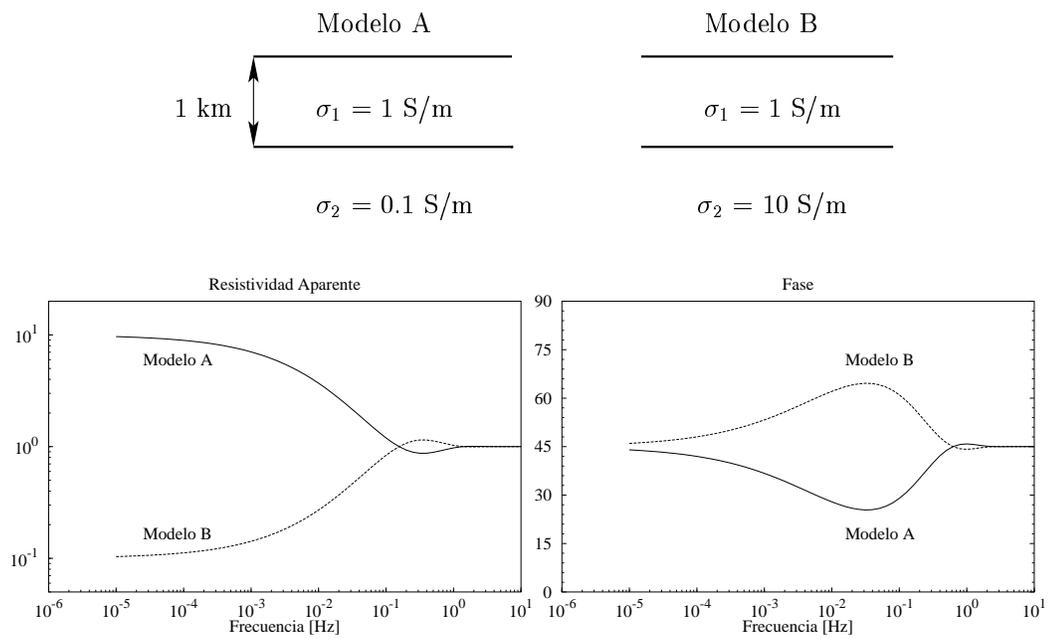


Figura 1.3: Resistividades aparentes en Ohm-m y fases en grados en función de la frecuencia en Hz, para modelos de dos capas. El modelo A corresponde a un basamento resistivo, el modelo B a uno conductivo.

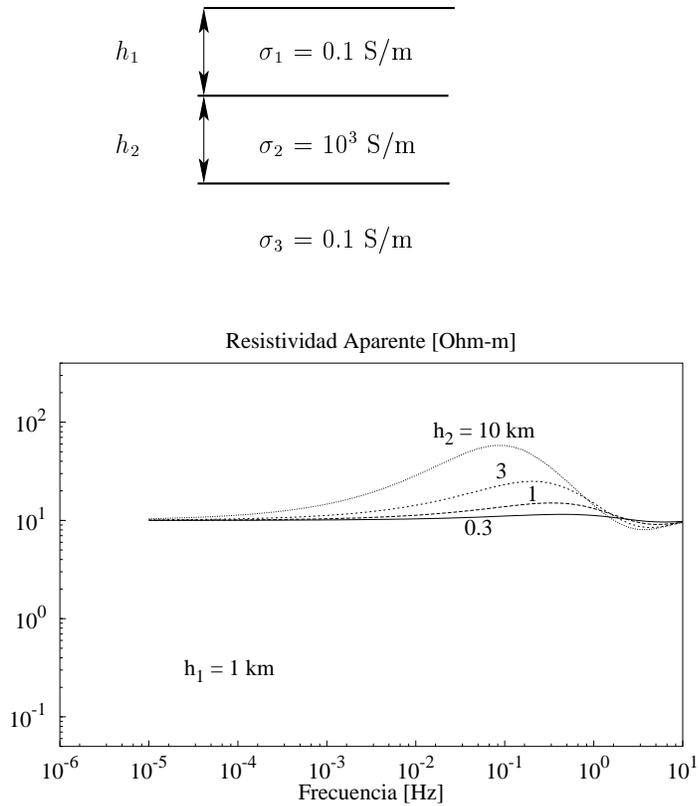


Figura 1.4: Cambios en la respuesta en la resistividad aparente con el espesor de la segunda capa en un modelo de tres.

disminuye al punto que $\delta \gg h$, $\rho^a = \frac{1}{\sigma_2}$, y allí permanece cuando $\omega \rightarrow 0$. Debe notarse que la respuesta en la fase γ se da a mayores frecuencias que la de la resistividad aparente ρ^a , y que tiende a $\frac{\pi}{4}$, la fase del semiespacio homogéneo, tanto para frecuencias altas como bajas.

En ambos modelos, si incrementamos el espesor de la capa superficial, la frecuencia tiene que disminuir de manera que los campos incidentes penetren lo suficiente para que la respuesta en ρ^a involucre a la capa inferior. En un modelo de tres capas, ver Fig.1.4, $\rho^a \rightarrow \frac{1}{\sigma_1}$ a frecuencias altas, pero $\rho^a \rightarrow \frac{1}{\sigma_3}$ para frecuencias bajas. Para valores de frecuencia intermedios se acerca a $\frac{1}{\sigma_2}$. Cuán cerca llega a estar depende de los espesores y conductividades de las capas 1 y 2. Es claro que la capacidad de inferir la presencia de distintas capas depende de sus conductividades, espesores y del rango de frecuencias

presente.

Consideremos ahora el modelo bidimensional de la Fig.1.5, llamado *contacto*, que representa un semiespacio con dos conductividades diferentes σ_1 y σ_2 . Este problema es soluble analíticamente (d'Erceville y Kunetz, 1962); el análisis de geometrías de esta clase es importante puesto que, a diferencia de los modelos anteriores, en este caso se presentan discontinuidades en los campos al atravesar la interfase.

Sea en este ejemplo $\sigma_1 > \sigma_2$ y la dirección de simetría el eje y . Analicemos en primer término el modo TM , de modo que el campo magnético de la onda plana incidente apunta en la dirección de simetría. A distancias del orden de dos veces la longitud de penetración δ en ambas direcciones desde el contacto en $z = 0$ la presencia del contacto no es distinguible, el campo magnético H_y es constante y toma el mismo valor, ya que el problema es esencialmente unidimensional y puede mostrarse que en este caso el campo magnético en la superficie es independiente de la conductividad del medio (Kaufman y Keller, 1981).

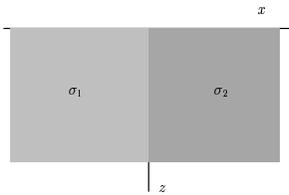


Figura 1.5: Modelo de contacto de longitud infinita.

Más aún, el requerimiento de continuidad de la componente normal de corriente eléctrica J_x implica, debido a la ley de Ampère, que el campo H_y es constante a través del contacto. De esta manera, medir esta componente en superficie no es útil para detectar la presencia de la inhomogeneidad.

Por el contrario, el campo eléctrico E_x varía a través del contacto, ya que suficientemente alejados de él en cada región vale $Z^{1,2} = \frac{E_x^{1,2}}{H_y^{1,2}} = \frac{(1+i)}{\delta^{1,2}}$ respectivamente, estando suficientemente alejados del contacto, pero $H_y^1 = H_y^2$ siempre. Además, como la densidad de corriente J_x no es función de x (McNeill y Labson, 1991), y a cada lado de la interfase la conductividad σ es constante, debe ser el campo eléctrico E_x también independiente de x . También debe verificarse que $\sigma_1 E_x^1 = \sigma_2 E_x^2$, de modo que el campo eléctrico varía de modo discontinuo. Esta situación se origina en la acumulación de cargas en la interfase. En

el ejemplo que tomamos, donde $\sigma_1 > \sigma_2$, inmediatamente a la izquierda del contacto, E_x disminuye por la presencia de estas cargas, mientras que a su derecha aumenta. La impedancia, y por ende la resistividad aparente tienen el mismo comportamiento, haciendo que el medio conductor lo parezca aún más, y que la región de menor conductividad se observe aún más resistiva, como se ve en la Fig.1.6. También podemos observar que al alejarnos de la discontinuidad, la resistividad aparente toma los valores del semi-espacio homogéneo. La fase tiene una variación relativamente pequeña sobre $x = 0$; pero requiere distancias mayores a ambos lados para tomar el valor del semi-espacio homogéneo.

Analicemos ahora el modo TE , considerando que es el campo eléctrico de la onda plana incidente el que apunta en dirección y . La condición de borde requiere que E_y sea continua en $x = 0$, y así en el pasaje de la región conductora a la resistiva el campo eléctrico aumentará su magnitud y profundidad de penetración, no presentándose en este caso acumulación de cargas en la interfase. Para analizar el comportamiento del campo magnético H_x es necesario primero ver qué sucede con J_y , que varía discontinuamente al pasar de una región a la otra. Adyacente al contacto, del lado resistivo, la disminución del campo eléctrico hace que localmente la densidad de corriente disminuya. En el lado conductivo, en las inmediaciones del borde se va a ver bruscamente aumentada por un mayor coeficiente de conductividad. Entonces, H_x aumenta en la cercanía del contacto del lado conductivo, y disminuye del lado resistivo. Sin embargo, este comportamiento se ve parcialmente compensado ya que del lado resistivo la profundidad de penetración de la corriente es mayor que en conductivo, de modo que a distancias suficientemente grandes H_x es el mismo a ambos lados del contacto. La variación en x de la densidad de corriente J_y establece una componente en la dirección del eje z del campo magnético H_z , que tiende a cero al alejarnos del borde, y lo hace más rápidamente del lado conductivo, porque allí las corrientes decaen antes. El comportamiento descrito para los campos se ve reflejado en la resistividad aparente y su fase, como puede observarse en la Fig.1.6. Finalmente, agre-

gamos que es usual en tareas de interpretación de datos, utilizar la relación $H_z = T_x H_x + T_y H_y$, donde las T_i son cantidades complejas, para ayudar a determinar la existencia de una dirección de simetría. Dada una estructura bidimensional en la que x' es la dirección de simetría, la relación anterior en este sistema se reduce a $H_z = T_{y'} H_{y'}$. Si el modelo que estamos tratando

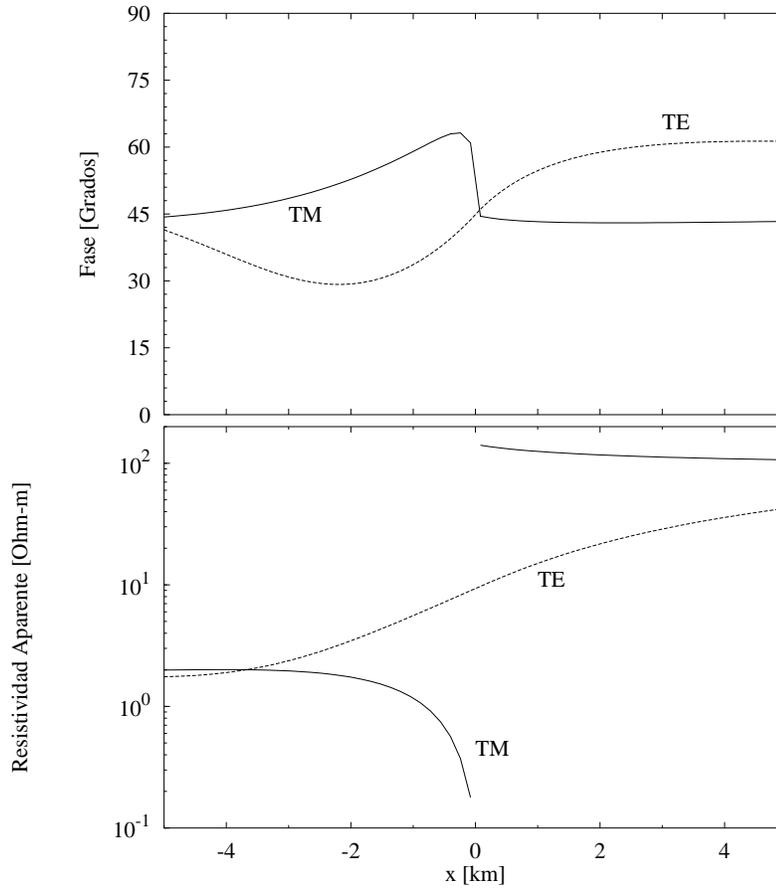


Figura 1.6: Comportamiento de la resistividad aparente y fase a través del contacto -situado en $x = 0$ - mostrado en la Fig. 1.5, para el caso en que $\sigma_1 = 0.5$, $\sigma_2 = 10^{-2}$, y la frecuencia es 0.1 Hz, para los modos TM y TE .

está cubierto por una capa homogénea, denominada *sobrecarga*, sus efectos se ven suavizados en alguna medida. Cuán importante es este proceso depende del espesor y conductividad de la capa, y de la frecuencia a la que se mide.

Para frecuencias suficientemente grandes, la profundidad de penetración es menor que el espesor de la carga en cuestión, y el contacto no será detectado, mientras que si las frecuencias son bajas, la capa es casi invisible.

Existen otros ejemplos de modelos bidimensionales resueltos analíticamente, como el de una secuencia de dos contactos, geometría denominada dique (Rankin, 1962) o cilindros de sección transversal circular o elíptica inmersos en semiespacios homogéneos (Kaufman y Keller, 1981). Posteriormente fueron presentadas soluciones (Weaver et al., 1985; Weaver et al., 1986) con modelos que extendían los de Rankin; que se utilizan frecuentemente como control de los métodos numéricos en sus aplicaciones bidimensionales. No existen al presente soluciones analíticas a problemas tridimensionales, lo que hace evidente la necesidad de contar con métodos computacionales capaces de resolver problemas de modo aproximado, si se desean modelar cabalmente las respuestas generadas por las diversas y complejas estructuras del subsuelo. En la próxima sección haremos un breve repaso sobre los distintos algoritmos que existen en la literatura para modelado bi- y tridimensional.

1.5 Métodos numéricos en magnetotelúrica

La bibliografía existente en el campo del modelado numérico de problemas electromagnéticos es muy amplia, ya que existen distintos métodos de resolución -cada uno de ellos con variantes- y es posible escribir las ecuaciones que modelan el problema geofísico de varias maneras. Brevemente, podemos agrupar los diferentes métodos en tres clases. Por un lado tenemos métodos de ecuaciones integrales (IE), que incluyen a su vez métodos de ecuaciones integrales de volumen y de superficie; y por otro existen métodos que parten del tratamiento de las ecuaciones en forma diferencial, como son los métodos de diferencias finitas (DE) y métodos de elementos finitos (FE). Hay actualmente un acuerdo generalizado en que los IE son adecuados para calcular la respuesta de unos pocos cuerpos, mientras que los DE tuvieron en principio mucha aceptación, y la siguen teniendo en el modelado en el dominio del

tiempo por su simplicidad en la implementación, pero tienen la desventaja de necesitar el uso de grillas rígidas. Por su parte, los FE tienen mucha aceptación por su versatilidad para modelar estructuras complejas, pero en general han tenido problemas por los requerimientos de memoria y almacenamiento.

Ciertamente, las referencias enumeradas abajo no engloban la totalidad de la literatura disponible acerca de métodos numéricos en magnetotelúrica. Existen además métodos que siendo variantes de algunos de los mencionados, permiten tratar problemas con fuentes modeladas por dipolos eléctricos y/o magnéticos entre otros, tanto en el dominio del tiempo como de las frecuencias, y son utilizados en los distintos métodos de prospección electromagnética en geofísica.

Las primeras soluciones numéricas a problemas de magnetotelúrica bidimensionales en el dominio de la frecuencia aparecieron a comienzos de los años setenta. Jones y Price (1971) presentaron una solución de diferencias finitas, y en el mismo año Coggon (1971) discutió una solución de elementos finitos usando una formulación variacional. Por su parte Hohmann (1971) y Parry y Ward (1971) desarrollaron soluciones de ecuaciones integrales de volumen y superficie respectivamente. Posteriormente Rodi (1976) introdujo una versión de elementos finitos para resolver las ecuaciones de Maxwell como ecuaciones de segundo orden, hallando el campo paralelo a la dirección de simetría, y a partir de éste, utilizando un esquema de diferenciación numérica, el campo transversal. En el mismo año (Brewitt-Taylor y Weaver, 1976) fue también introducida una técnica de diferencias finitas para resolver el problema bidimensional en magnetotelúrica, siendo las condiciones de borde utilizadas mejoradas en un trabajo posterior (Brewitt-Taylor y Weaver, 1978) para el caso particular del modo TM. En un trabajo clásico (Wannamaker et al., 1987) las ecuaciones de Maxwell fueron tratadas, como usualmente, como ecuaciones elípticas de segundo orden, pero planteadas en esta ocasión en término de los campos secundarios, lo que mejoró la exactitud de la aproximación. Dos años más tarde, Travis y Chave (1989) presentaron

un algoritmo de elementos finitos adaptivo para atacar el problema bidimensional. Ya en los '90, Pu et al. (1993) y Weaver et al. (1996) utilizaron diferencias finitas para obtener el campo magnético en el modo TM, una aproximación no muy frecuente, ya que en general se obtiene la única componente del campo eléctrico, y a partir de ésta, las del campo magnético. Posteriormente, también utilizando DE, se incluyó el efecto de la topografía (Aprea et al., 1997), es decir, la interfase Tierra-aire considerada en este caso no es una línea horizontal.

Finalmente mencionamos que Everett y Schultz (1996) y Martinec (1997) utilizaron FE para atacar el problema considerando la Tierra esférica con simetría azimutal, y no plana con simetría en una dirección como es usual.

El problema tridimensional comenzó a ser tratado numéricamente a-posteriori del problema bidimensional. Wannamaker y otros (1984a; 1984b; 1991) modelaron inhomogeneidades tridimensionales en una Tierra estratificada horizontalmente y resolvieron el problema utilizando ecuaciones integrales. Existen también otras contribuciones realizadas con variantes del mismo método (Weidelt, 1975; Ting y Hohmann, 1981; Xiong, 1992a; Zhdanov y Fang, 1996a), las diferencias entre las distintas contribuciones en general radican en la forma de aproximar el tensor de Green que aparece en las ecuaciones.

Entre los aportes desde las diferencias finitas, podemos mencionar a Zhdanov et al. (1982), quien utilizó condiciones de borde asintóticas, y a Mackie et al. (1993), quienes discretizaron la versión integral de las ecuaciones de Maxwell sobre una grilla uniforme, haciendo transformaciones de coordenadas para pasar a una irregular. En sendos trabajos, Torquil Smith (1996a; 1996b) presentó un algoritmo de DE sobre grillas desplazadas para el campo eléctrico y magnético, resolviendo el sistema lineal resultante con un método de gradiente biconjugado con preconditionamiento. Posteriormente Weaver et al. (1999) extendieron su trabajo previo (Weaver et al., 1996) a tres dimensiones. Finalmente mencionamos los FE, que hasta ahora no han sido muy difundidos, precisamente porque tratar a los modelos tridimensionales en la forma

clásica implica demandas gigantescas de memoria y almacenamiento, como mencionamos más arriba. El primer aporte en esta clase lo realizaron Reddy et al. (1977) discretizando el campo eléctrico total, luego Mogi (1996) utilizó elementos hexaédricos isoparamétricos con ocho nodos para discretizar las ecuaciones de segundo orden para el campo eléctrico secundario, y usó también condiciones de borde asintóticas. Debe notarse aquí que el uso de este tipo de elementos impide el modelado de contrastes importantes de conductividades puesto que implican la continuidad de las componentes tangenciales y normales de los campos, u obligan a introducir expresiones explícitas de las componentes normales discontinuas (Rätz, 1999). Sólo recientemente se han dado a conocer trabajos en la dirección de esta Tesis. Sugeng (1999) presentó un método que utiliza los llamados “elementos de borde”, donde sólo es requerida la continuidad de las componentes tangenciales de los campos.

