

Capítulo 4

Modelado Tridimensional

En este capítulo presentamos la generalización a tres dimensiones del método analizado en el capítulo anterior. Cobra particular importancia en este caso su comportamiento sobre máquinas paralelas, ya que los algoritmos paralelos brindan la única posibilidad de tratar de modo realista datos que requieren interpretación tridimensional (Wilson et al., 1999). Los resultados obtenidos, validados por comparación con los del “Proyecto internacional para la comparación de métodos de modelado para inducción electromagnética - COMMEMI” * (Zhdanov et al., 1997), están parcialmente publicados en los trabajos (Zyserman y Santos, 1998), (Zyserman y Santos, 1999) y (Zyserman y Santos, 2000).

4.1 El modelo diferencial

Nuevamente, comenzamos con las ecuaciones de Maxwell armónicas para una determinada frecuencia angular ω del campo incidente:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \sigma \mathbf{E}, \quad (4.1a)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -i\omega\mu\mathbf{H}, \quad (4.1b)$$

*Este proyecto, de envergadura mundial, contribuyó a la estandarización de resultados para distintos modelos generados por métodos numéricos utilizados en la estimación de parámetros electromagnéticos de la Tierra.

considerándolas en este caso en el dominio tridimensional Ω mostrado en la Fig.4.1. Como antes, la capa superior representa el aire y las demás capas sustratos horizontales con distintas conductividades, en los cuales hay inmerso un número cualquiera de inhomogeneidades de volumen total Ω_s de forma arbitraria. Estas últimas no necesariamente yacen enteramente dentro de un único sustrato. La distribución de conductividades está determinada por:

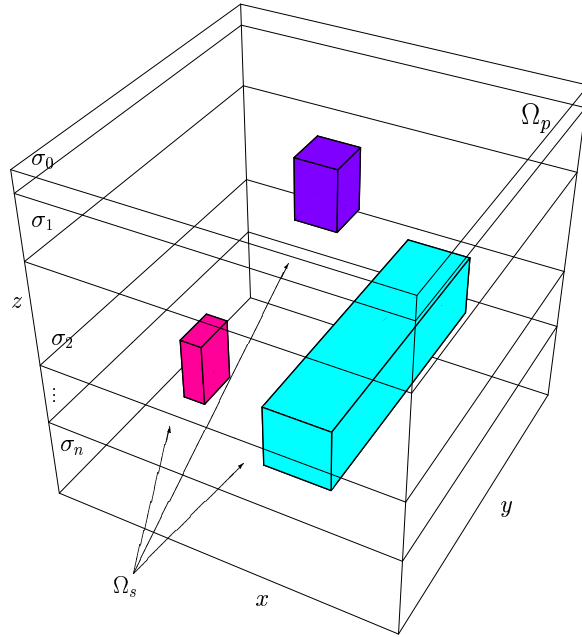


Figura 4.1: Modelo de Tierra tridimensional.

$$\sigma(x, y, z) = \begin{cases} \sigma_p(z) & \text{en } \Omega_p \text{ (capas),} \\ \sigma_p(z) + \sigma_s(x, y, z) & \text{en } \Omega_s \text{ (inhomogeneidades).} \end{cases} \quad (4.2)$$

Formulamos, como en el modelado bidimensional, el modelo diferencial en término de los campos dispersados. Sean \mathbf{E}^p y \mathbf{H}^p las soluciones de las Ecs. (4.1) para el modelo de capas horizontales con $\sigma = \sigma_p(z)$. Luego, sean $\mathbf{E}^t = \mathbf{E}^p + \mathbf{E}^s$ y $\mathbf{H}^t = \mathbf{H}^p + \mathbf{H}^s$ los campos electromagnéticos totales solución de las Ecs. (4.1) en Ω con conductividad σ dada por (4.2), inducidos por una onda plana monocromática de frecuencia ω que incide sobre la superficie terrestre. Reemplazando estas expresiones en las Ecs. (4.1), puede

verse que los campos secundarios \mathbf{E}^s y \mathbf{H}^s debidos a la presencia de las inhomogeneidades, satisfacen las ecuaciones

$$\nabla \times \mathbf{H}^s = -\sigma \mathbf{E}^s - \sigma_s \mathbf{E}^p = \mathbf{F}, \quad (4.3a)$$

$$\nabla \times \mathbf{E}^s = -i\omega\mu\mathbf{H}^s, \quad (4.3b)$$

Para las Ecs. (4.3) utilizamos las condiciones de borde (3.9) que, despreciando las corrientes de desplazamiento, se escriben

$$(1 - i)P_\tau a \mathbf{E}^s + \boldsymbol{\nu} \times \mathbf{H}^s = 0 \quad \text{sobre } \Gamma, \quad (4.4)$$

donde $a = \left(\frac{\sigma}{2\omega\mu}\right)^{\frac{1}{2}}$. A partir de ahora, para simplificar la notación, dejamos de lado los superíndices que denotan los campos secundarios.

Como para el modelado bidimensional, también aquí es usual (Mogi, 1996; Rätz, 1999; Sugeng et al., 1999) manipular las Ecs. (4.3) para obtener una ecuación diferencial de segundo orden. Como dijimos anteriormente, esto trae aparejado mayor complejidad numérica, de modo tal que nos inclinamos por la resolución del sistema de ecuaciones (4.3)-(4.4). En el Capítulo 2 mostramos un método de elementos finitos con descomposición de dominio adecuado para tratar este problema, cuya forma final está dada por las Ecs. (2.38). Determinamos ahora el problema algebraico al que nos conduce.

4.2 Implementación numérica

Utilizando la misma grilla para la partición de elementos finitos y la descomposición de dominio, dividimos la región Ω , como se ve en la Fig. 4.2, en un conjunto de prismas rectangulares no superpuestos entre sí y no necesariamente de iguales dimensiones, de volumen $h_j \cdot h_k \cdot h_l$, $j = 1 \dots n_x$, $k = 1 \dots n_y$, $l = 1 \dots n_z$. Como antes, tomamos $h_j = x_{j+1} - x_j$, $h_k = y_{k+1} - y_k$ y $h_l = z_{l+1} - z_l$ y denotamos Γ_{jkl} la frontera del subdominio Ω_{jkl} conformada por el conjunto de seis rectángulos $G = \{\mathcal{F}, \mathcal{B}, \mathcal{W}, \mathcal{E}, \mathcal{N}, \mathcal{S}\}$.

En cada celda Ω_{jkl} aproximamos los campos eléctrico y magnético respectivamente, de acuerdo al método descrito en el Capítulo 2 mediante la

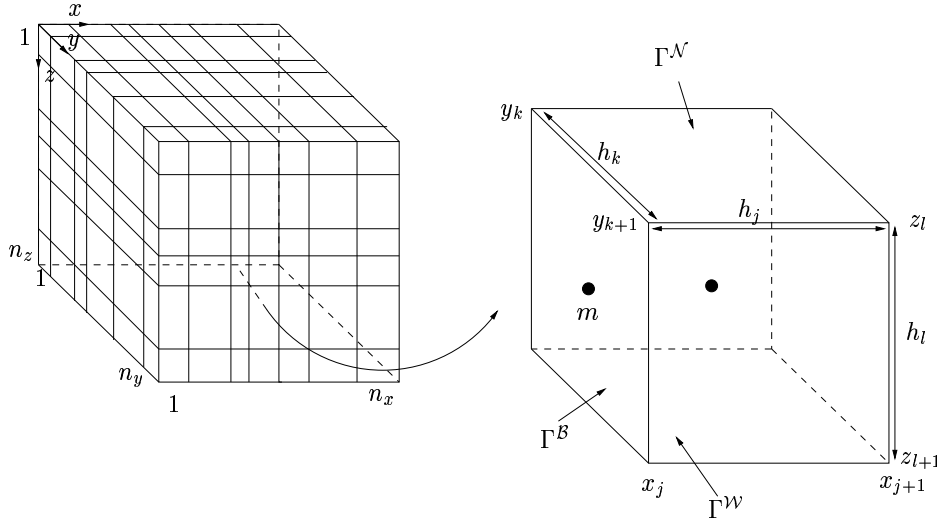


Figura 4.2: a) Una posible grilla para discretizar nuestro problema. b) Detalle del subdominio Ω_{jkl} . A los puntos medios de las caras m están asociados los multiplicadores de Lagrange λ , y los correspondientes coeficientes de \mathbf{E} , mientras que al centro del dominio asociamos -arbitrariamente- los coeficientes de \mathbf{H} .

superposición lineal:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{jkl}^{n+1} &= \sum_{\alpha} \mathbf{e}_{jkl}^{\alpha, n+1} \psi^{\alpha}(x', y', z'), \\ \mathbf{H}_{jkl}^{n+1} &= \sum_{\eta} \mathbf{h}_{jkl}^{\eta, n+1} \varphi^{\eta}(x', y', z'), \end{aligned} \quad (4.5a)$$

donde los índices α y η corren sobre todas las funciones base de los respectivos espacios aproximantes definidas en la Tabla 2.2 y los coeficientes complejos $\mathbf{e}_{jkl}^{\alpha, n+1}$ y $\mathbf{h}_{jkl}^{\eta, n+1}$ son los determinados en la iteración $n + 1$. De esta manera, en cada subdominio utilizamos doce funciones base para aproximar al campo eléctrico, y nueve para hacer lo propio con el campo magnético. Las variables de las funciones base se encuentran ajustadas de manera que éstas se mantengan dentro del cubo de referencia. Así $x' = \frac{2x}{h_j} - 1$, y de igual manera para y' y z' .

Estas aproximaciones para los campos se introducen en las Ecs. (2.38) que establecen nuestro algoritmo DDFE. Como las Ecs. (2.38a) y (2.38b) deben

cumplirse para toda la función de prueba ψ y φ de los espacios de elementos finitos Y_j^h y Z_j^h , requerimos que estas ecuaciones se cumplan para cada una de las funciones base de los respectivos espacios ψ^α y φ^η . Por lo tanto reemplazamos estas funciones, referidas al dominio Ω_{jkl} , por las enumeradas en la Tabla 2.2. Con estas consideraciones, suponiendo que la conductividad se considera constante en cada subdominio, y aproximando las integrales de superficie por la regla del punto medio [†] reducimos el sistema de ecuaciones (2.38) a un sistema lineal de 21 incógnitas en cada subdominio y para cada iteración. Sin embargo, la dimensión de este problema puede ser reducida, ya que con la elección realizada de las funciones base del campo magnético el primer término de la Ec. (2.38b) resulta diagonal, lo que permite obtener los coeficientes $\mathbf{h}_{jkl}^{\eta, n+1}$ en término de los $\boldsymbol{\epsilon}_{jkl}^{\alpha, n+1}$. Reemplazando en la Ec. (2.38a) obtenemos un sistema lineal de 12 ecuaciones con 12 incógnitas para los coeficientes del campo eléctrico:

$$\mathbf{C}_{jkl} \boldsymbol{\epsilon}_{jkl}^{n+1} = \mathbf{b}_{jkl}^n. \quad (4.6)$$

Las matrices de coeficientes no cambian a lo largo del procedimiento iterativo mientras que los vectores \mathbf{b}_{jkl}^n deben ser recalculados en cada iteración; en el Apéndice B mostramos el sistema lineal de forma explícita.

Debemos obtener por último la versión discreta de la Ec. (2.38c), tarea fácilmente realizable a partir de las Ecs. (4.5). Debe notarse aquí que en realidad la Ec. (2.38c) son seis ecuaciones vectoriales, ya que por ella estamos indicando la actualización de los multiplicadores de Lagrange bidimensionales asociados al valor de componente tangencial del campo magnético en los puntos medios de las seis caras del dominio Ω_{jkl} .

Proponemos entonces nuestro algoritmo iterativo de elementos finitos mixtos no conformes híbrido con descomposición de dominio como sigue:

-
1. Elegir valores iniciales $(\boldsymbol{\epsilon}_{jkl}^{\alpha, 0}, \boldsymbol{\lambda}_{jkl}^{s, 0}, s \in \mathbb{G})$ para las incógnitas en todas las celdas Ω_{jkl} .

[†]Es decir, utilizamos $\int_A fg dS \approx |A|fg(m)$, donde $|A|$ es el área de la superficie A , y m es su punto medio.

2. Para todos los dominios Ω_{jkl}

Resolver el sistema lineal $\mathbf{C}_{jkl}\mathbf{e}_{jkl}^{n+1} = \mathbf{b}_{jkl}^n$.

Computar los $\lambda_{jkl}^{s,n+1}$, $s \in G$.

Recalcular \mathbf{b}_{jkl}^n .

3. Chequear convergencia. Si no ha sido alcanzada, ir al paso 2.

Una vez que el algoritmo ha convergido, los coeficientes \mathbf{h} del campo magnético se calculan a partir de los del eléctrico, tal como expresamos más arriba.

Elegimos el parámetro β en analogía al caso bidimensional, es decir

$$\beta_{jkl}^s = \frac{(1-i)}{2} (a_{jkl} + a_{(jkl)^*}), \quad s \in G, \quad (4.7)$$

donde el asterisco indica que el coeficiente a está calculado utilizando valores de la conductividad del dominio correspondiente (según el valor de s) de los adyacentes al Ω_{jkl} , es decir si $s = \mathcal{F}$, $a_{(jkl)^*} = a_{j+1kl}$. Los valores iniciales para todas las incógnitas se toman nulos.

Aceleración de la convergencia

En el modelado tridimensional, como en el bidimensional, relajamos los coeficientes del campo eléctrico y los multiplicadores de Lagrange según la Ec. (3.21).

Para la manera de subdividir el dominio Ω mostrada en la Fig. 4.2, llamada *masiva*, existen copias de los multiplicadores de Lagrange y de los coeficientes del campo eléctrico \mathbf{E} a ambos lados de las caras de los subdominios, a excepción claro está, del borde computacional. Es posible disminuir el número de incógnitas modificando la forma de particionar el dominio, generando las llamadas *tiras* ó *papas fritas* (Kim, 1995). Esto significa hacer global la partición de elementos finitos y consecuentemente la descomposición del dominio Ω en alguna dirección coordenada. De esta manera se determinan, si tomamos el eje x para construir las tiras, $n_y \cdot n_z$ dominios globales, eliminándose las interfases $\mathcal{F}\text{-}\mathcal{B}$ entre los dominios en la dirección elegida, de modo que existan

sólo dos coeficientes para el campo eléctrico en cada una de esas interfases, y desaparecen allí los multiplicadores de Lagrange. Si en el caso masivo para $n_x \cdot n_y \cdot n_z$ dominios existen $12 n_x$ coeficientes de campo eléctrico y $6 n_x$ multiplicadores λ para cada par k, l , con esta nueva forma de partición tenemos $10 n_x + 2$ coeficientes y $4 n_x$ multiplicadores por tira.

El precio que se paga con esta variante es que ya no se resuelven sistemas lineales de 12×12 , sino que ahora tenemos $n_y \cdot n_z$ sistemas lineales $\tilde{\mathbf{C}}_{kl}^{n+1} = \tilde{\mathbf{b}}_{kl}^n$ de orden dado por el número de coeficientes del campo eléctrico.

Sobre esta nueva formulación podemos aplicar el método de resolución blanco-negro, asignando un color diferente a cada tira de forma alternada.

El algoritmo que implementamos es entonces el siguiente:

1. Elegir valores iniciales $(\epsilon_{jkl}^{\alpha,0}, \lambda_{jkl}^{s,0}, s \in G)$ para las incógnitas en todas las tiras.

2. Para todas las tiras blancas

Resolver el sistema lineal $\tilde{\mathbf{C}}_{jkl} \tilde{\epsilon}_{kl}^{n+1} = \mathbf{b}_{jkl}^n$. Relajar los coeficientes calculados.

Computar los $\lambda_{jkl}^{s,n+1}, s \in G$. Relajar los multiplicadores calculados.

Recalcular \mathbf{b}_{jkl}^n .

Para todas las tiras negras

Resolver el sistema lineal $\tilde{\mathbf{C}}_{jkl} \tilde{\epsilon}_{kl}^{n+1} = \mathbf{b}_{jkl}^n$. Relajar los coeficientes calculados.

Computar los $\lambda_{jkl}^{s,n+1}, s \in G$. Relajar los multiplicadores calculados.

Recalcular \mathbf{b}_{jkl}^n .

3. Chequear convergencia. Si no ha sido alcanzada, ir al paso 2.

Para resolver los sistemas lineales en el caso masivo, utilizamos descomposición LU en la versión que aprovecha la estructura simétrica de las matrices de

coeficientes. En el caso de las tiras, las matrices de coeficientes siguen siendo simétricas, pero ya no son llenas, sino banda de ancho 31. Es conveniente en este caso, ya que las matrices de este tipo son poco pobladas, guardarlas en forma modificada, de modo de utilizar menor cantidad de recurso computacional (Becker et al., 1981). Para resolver los sistemas lineales, utilizamos una variante del método LU , adecuada para la forma de almacenado utilizada.

Finalmente, paralelamos el algoritmo, siendo el proceso muy similar al caso bidimensional, con la diferencia de que las “fronteras virtuales” entre procesadores ahora son bidimensionales, lo que aumenta el flujo de información entre procesadores. De todas maneras en el proceso de intercambio de datos sólo participan las tiras adyacentes a las fronteras virtuales. El esquema mostrado en la Fig.3.4 es válido también en este caso, si se consideran los gráficos como una vista frontal de las tiras. De esta manera puede verse que las papas fritas que están involucradas en el intercambio de datos son las que están en la zona sombreada.

4.3 Resultados

Presentamos resultados de dos modelos sugeridos en el proyecto COMMEMI (Zhdanov et al., 1997). En la Fig.4.3 se muestra el primer modelo, que consiste de un bloque conductor de 2 S/m inmerso en una Tierra homogénea con conductividad de 0.01 S/m, las medidas del bloque son $1 \text{ km} \times 2 \text{ km} \times 2 \text{ km}$. Aunque la estructura del modelo es simple, está caracterizado por un contraste muy grande de conductividades y por la cercanía de la inhomogeneidad a la superficie, lo que dificulta en gran medida los cálculos numéricos.

Para la resolución del Modelo 1 tomamos un dominio cuyas medidas son $16 \text{ km} \times 16 \text{ km} \times 12 \text{ km}$; la capa superior es de aire, mide 1 km y tiene una conductividad de $\sigma_0 = 10^{-7} \text{ S/m}$. Este dominio fue dividido en una grilla inhomogénea de $58 \times 64 \times 32$ elementos, siguiendo los criterios del caso bidimensional para su construcción. Se consideraron 2 frecuencias: 10 Hz para

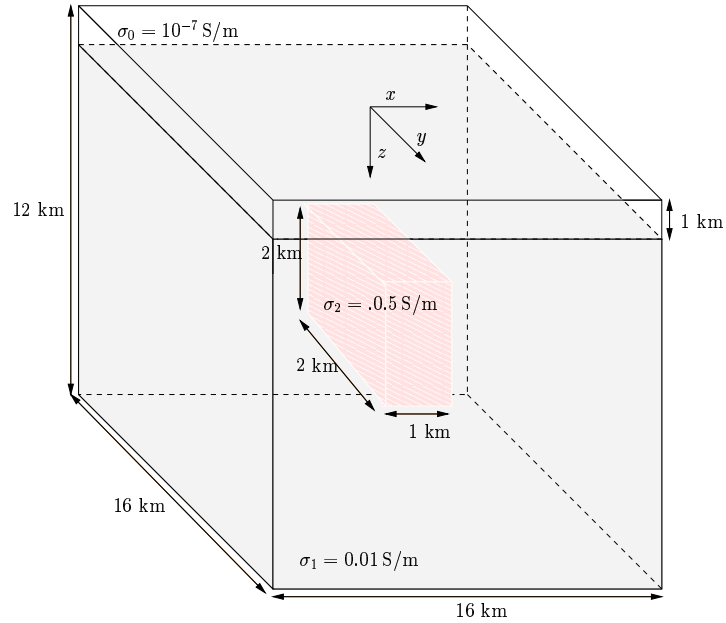


Figura 4.3: Modelo 1.

observar el comportamiento del método en presencia de campos con fuerte decaimiento, y 0.1 Hz para chequear la capacidad del algoritmo numérico para tratar con una solución cuasi estacionaria; con esta frecuencia también puede estudiarse el comportamiento de las condiciones de borde. La Fig.4.4 muestra las resistividades aparentes ρ_{xy}^a y ρ_{yx}^a correspondientes a polarizaciones $\mathbf{E} = (E, 0, 0)$, $\mathbf{H} = (0, H, 0)$ (modo XY, correspondiente al modo *TM* para modelado bidimensional) y $\mathbf{E} = (0, E, 0)$, $\mathbf{H} = (H, 0, 0)$ (modo YX, correspondiente al modo *TE* en dos dimensiones) respectivamente. Los resultados del trabajo de referencia son presentados como barras de error, tomando como puntos medios el valor medio de los datos luego de haber eliminado los más alejados de la media original. La longitud de las barras es $2\delta_1$, es decir, dos veces la desviación standard del conjunto de datos reducido. Los resultados obtenidos están en general en muy buen acuerdo con los de referencia. Tomando como origen de coordenadas el punto sobre la superficie de la Tierra de tal manera que el eje z pase por el centro de la

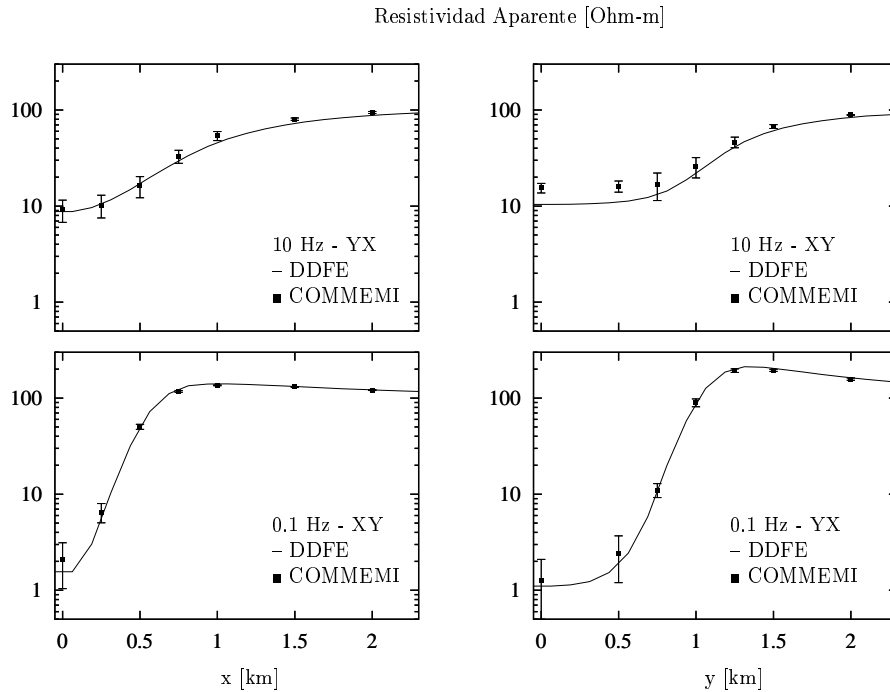


Figura 4.4: Resultados del Modelo 1.

inhomogeneidad y midiendo los campos sobre la superficie, los gráficos a la izquierda son medidas realizadas a lo largo del eje x con $y=0$ y los situados a la derecha muestran medidas a lo largo del eje y para $x=0$.

Existen en el modelado tridimensional efectos que modifican el comportamiento de los campos electromagnéticos, y por ende la distribución de conductividades estimada respecto del modelado bidimensional. Los más importantes son la distorsión horizontal y vertical de las corrientes, la inducción local y la acumulación de cargas en los bordes de las anomalías (Vozoff, 1991). El último suele ser relevante a frecuencias muy bajas, mientras que los primeros disminuyen al aumentar la frecuencia (Ting y Hohmann, 1981). En cuanto al primer efecto, las corrientes ya no están constreñidas a fluir solamente en dirección paralela o perpendicular al eje de simetría, de modo tal que se observan efectos de “atracción” de corrientes cuando se está en presencia de anomalías conductivas en medios resistivos, y también flujo de corrientes

alrededor de anomalías resistivas en medios más conductivos. Estos efectos a su vez se ven influenciados por las conductividades relativas de las capas en las que se asume está estratificado el subsuelo (Berdichevsky et al., 1998). En este trabajo se prueba que estimar estructuras tridimensionales a par-

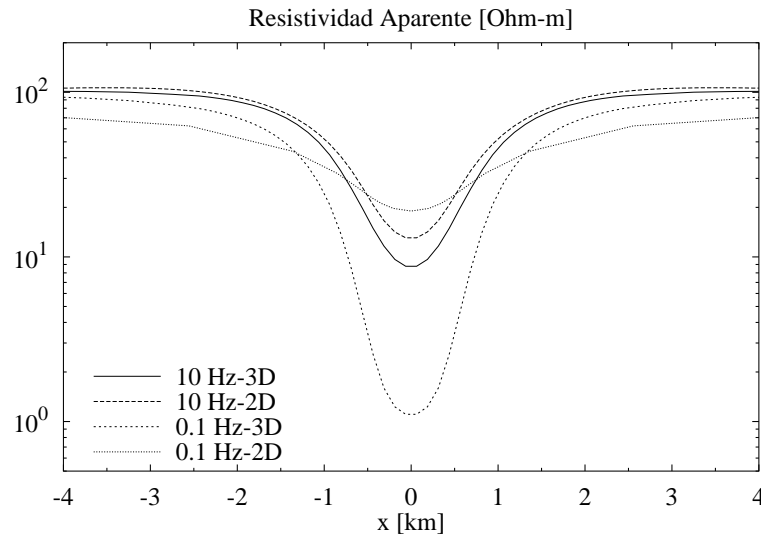


Figura 4.5: Resistividad aparente para el Modelo 1 y su correspondiente bidimensional, obtenidas para frecuencias de 0.1 Hz y 10 Hz

tir de curvas de la resistividad aparente bidimensionales, práctica adecuada cuando se tiene a-priori información de la región en estudio, puede conducir a gruesos errores en otros casos. Consideremos por ejemplo, las respuestas para la resistividad aparente ρ^a para el modo YX (TE) a 10 Hz y 0.1 Hz, para el Modelo 1 y su correspondiente bidimensional, que pueden observarse en la Fig.4.5. Las medidas se realizan lo largo del eje x , a $y = 0$. A 10 Hz las curvas manifiestan un cierto desacuerdo, que se hace muy marcado para la menor frecuencia considerada, que es cuando el efecto de acumulación de cargas en las caras perpendiculares al flujo de corriente se torna relevante. El segundo modelo resuelto, más complicado que el anterior, consiste en dos bloques de $20 \text{ km} \times 40 \text{ km} \times 10 \text{ km}$ de conductividades $\sigma = 1.0 \text{ S/m}$ y

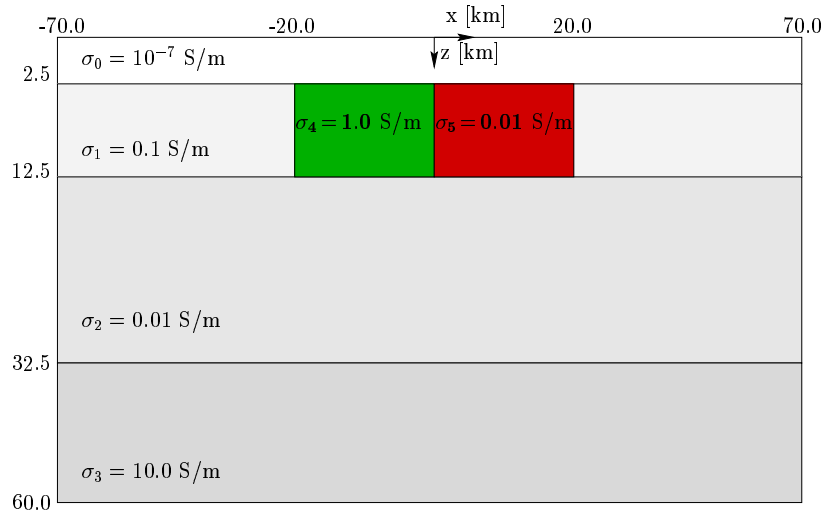


Figura 4.6: Corte en $y = 0$ del Modelo 2. En la dirección mencionada los bloques miden 40 km, y el dominio 120 km.

$\sigma = 0.01$ S/m que yacen en la capa superior de una Tierra con tres sustratos horizontales de conductividades $\sigma = 0.1$ S/m, $\sigma = 0.01$ S/m y $\sigma = 10.0$ S/m, cuyos espesores son 10 km, 20 km e ilimitado respectivamente. Para nuestro modelo, que se muestra en la Fig.4.6, adosamos la capa de aire de 2.5 km de altura y conductividad igual a la del Modelo 1 por encima de los sustratos, y limitamos la profundidad de la tercer capa a 27.5 km, de modo que la longitud total de nuestro modelo en z es 60 km. La extensión en el eje x es 140 km y en el eje y 120 km.

La dificultad de este modelo reside básicamente en las grandes variaciones del campo eléctrico que se esperan observar para la polarización XY.

Las Fig.4.7 y Fig.4.8 muestran las resistividades aparentes en superficie, en cortes para $y=0$ e $y=30$ km respectivamente obtenidas para una grilla inhomogénea de $54 \times 56 \times 32$ elementos a una frecuencia de 10^{-3} Hz. El error relativo para detener el proceso se fijó en 10^{-4} , al igual que en el caso anterior.

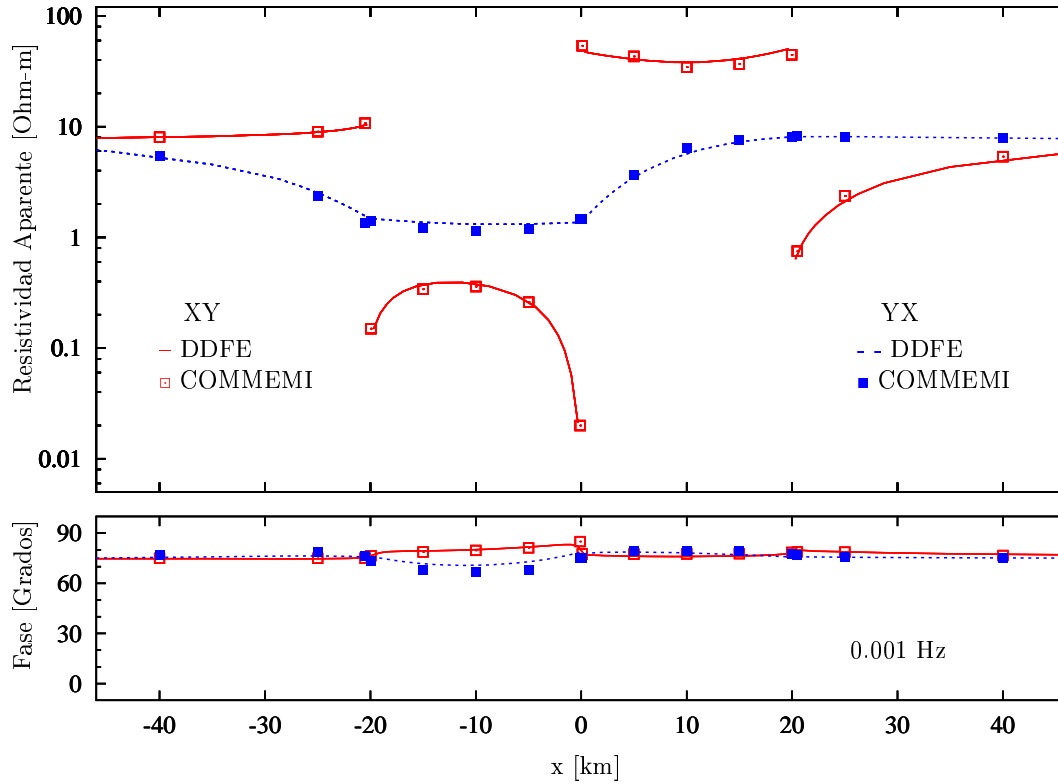


Figura 4.7: Resistividad aparente y fase de la impedancia medidas sobre la superficie, corte en $y = 0$.

El COMMEMI reúne varias contribuciones para el Modelo 1 obtenidas con distintos métodos. Sin embargo, para el Modelo 2 solamente un autor contribuyó con datos para el mismo, obtenidos con un método integral (Xiong, 1992b; Xiong y Tripp, 1997). No obstante pueden mencionarse otros algoritmos que solucionan el Modelo 2: Mackie et al. (1993) lo hacen implementando un método de diferencias finitas y Zhdanov y Fang (1996b) tratan el problema con un método integral. Al presente, sin embargo, no sabemos de la existencia de algún otro método de elementos finitos que lo haya resuelto.

En la Tabla 4.1 mostramos el comportamiento de las distintas implementaciones del algoritmo, utilizando el Modelo 1 para una frecuencia de 1 Hz y una grilla homogénea de 64^3 elementos, ya que el algoritmo masivo sólo acep-

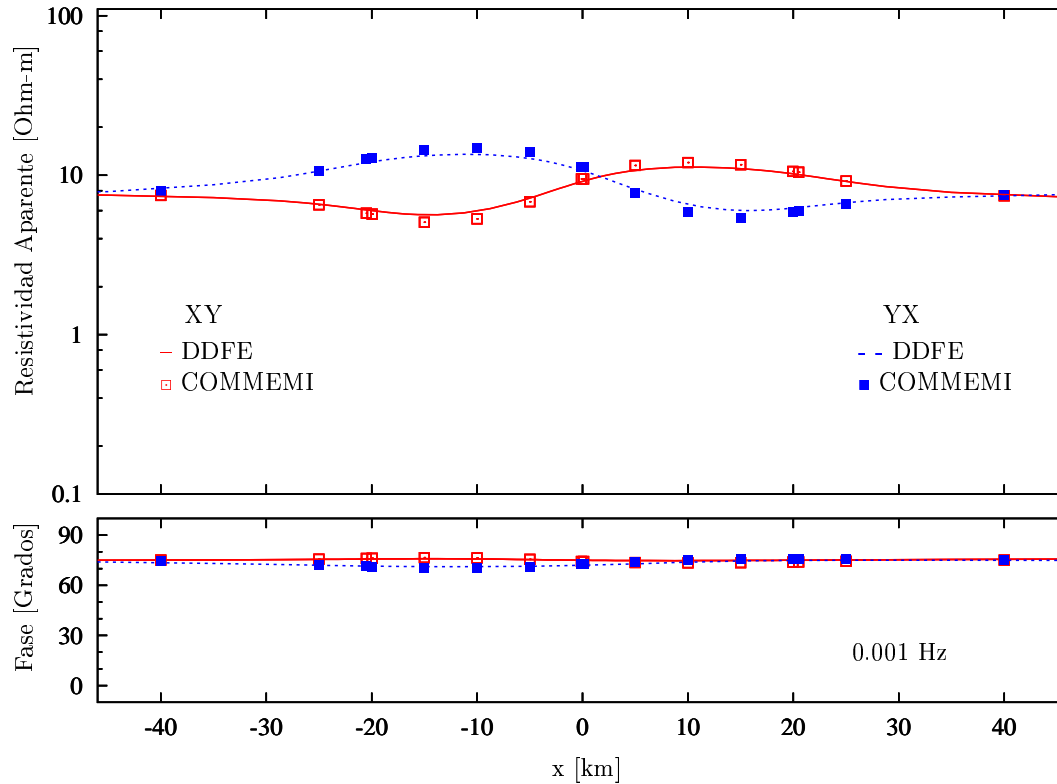


Figura 4.8: Igual que en la figura previa, corte en $y = 30$ km.

ta mallas de este tipo. Se observa que el algoritmo mejora sustancialmente la velocidad de convergencia al utilizar las tiras y aún más relajando con la técnica de blanco-negro.

La Tabla 4.2 refleja el comportamiento de nuestro algoritmo paralelo en la SP/2 para los modelos mencionados, utilizando la implementación más eficiente.

En la Fig. 4.9 mostramos la aceleración de la misma versión del algoritmo para los dos modelos que estamos analizando. Es esperable que para un tamaño dado de problema, si no se presenta el comportamiento anómalo de superlinealidad, la eficiencia del algoritmo paralelo disminuya. Sin embargo, para el mayor número de procesadores usados en cada modelo, la eficiencia es relativamente alta, de 70 % y 75 % respectivamente, lo que implica que el

Algoritmo	Modo XY	Modo YX
DDFE masivo	2768	2640
DDFE masivo con relajación	341	223
DDFE tiras	489	286
DDFE tiras con relajación y B-N	175	130

Tabla 4.1: Número de iteraciones necesarias para la convergencia en las distintas implementaciones del algoritmo DDFE.

Procesadores	Modelo 1	Modelo 2
1	520.6	2008.5
4	158.3	617.08
8	75.39	312.31
16	39.04	149.84
28	—	85.58
32	20.34	—
56	—	47.44
64	11.65	—

Tabla 4.2: Tiempos de cálculo en segundos para los modelos descritos. En ambos casos resolvemos el modo YX.

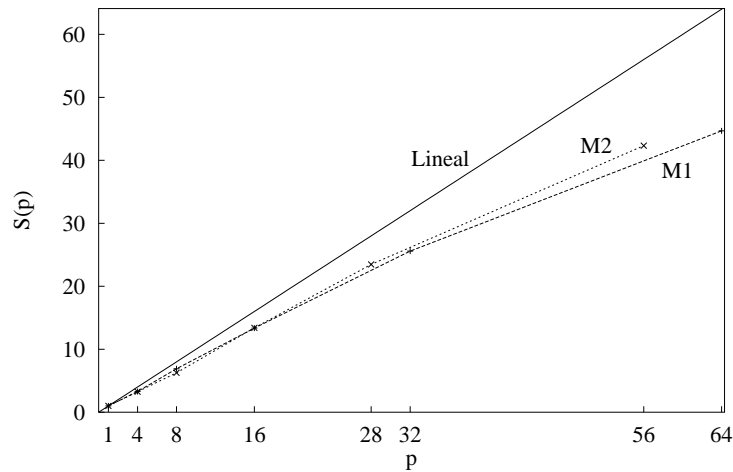


Figura 4.9: Medidas de la aceleración para el algoritmo descrito.

tiempo de cálculo se reduce hasta en un factor 47 en el caso del Modelo 1, de modo que para los tamaños de problema dados, es razonable utilizar el mayor número posible de procesadores.

Vimos sin embargo que de un algoritmo paralelo debe también esperarse que sea escaleable, es decir, que no disminuya su eficiencia a medida que aumentan simultáneamente el tamaño del problema y el número de procesadores. Para analizar al algoritmo DDFE, resolvimos al Modelo 1 con 8 procesadores en una grilla de $64 \times 64 \times 48$ elementos, lo que equivale a unas $3.5 \cdot 10^6$ incógnitas, obteniendo una eficiencia $Q = 0.85$. Posteriormente duplicamos el número de celdas, y por consiguiente el de incógnitas, utilizando en este caso 16 procesadores. La eficiencia obtenida en este caso fue $Q = 0.87$. Si bien no podemos a partir de estos dos casos afirmar categóricamente que en todo problema a tratar el algoritmo se comportará de igual modo, es esperable que la performance no disminuya significativamente, lo que establece un resultado muy alentador para el método desarrollado.