



Universidad Nacional de La Plata

Facultad de Ciencias Exactas

Departamento de Física

---

Simulación numérica de difusión  
electromagnética en el subsuelo terrestre

---

TESIS DOCTORAL

FABIO IVÁN ZYSERMAN

# Índice General

<b>Agradecimientos</b>	<b>vi</b>
<b>Introducción</b>	<b>1</b>
<b>1 Magnetotelúrica</b>	<b>3</b>
1.1 Introducción . . . . .	3
1.2 El Modelo . . . . .	5
1.3 Fuentes . . . . .	8
1.4 Interacción con la Tierra . . . . .	9
1.5 Métodos numéricos en magnetotelúrica . . . . .	16
<b>2 Elementos Finitos para las Ecuaciones de Maxwell</b>	<b>21</b>
2.1 Aspectos básicos del método . . . . .	22
2.2 Caso bidimensional . . . . .	26
2.2.1 El modo TM . . . . .	27
2.2.2 El modo TE . . . . .	34
2.3 Caso tridimensional . . . . .	36
2.3.1 Descomposición de dominio e hibridización . . . . .	40
<b>3 Modelado Bidimensional</b>	<b>43</b>
3.1 El problema diferencial . . . . .	43
3.2 Implementación numérica . . . . .	49
3.3 Computación en paralelo . . . . .	54
3.4 Resultados . . . . .	59

---

<b>4 Modelado Tridimensional</b>	<b>69</b>
4.1 El modelo diferencial . . . . .	69
4.2 Implementación numérica . . . . .	71
4.3 Resultados . . . . .	76
<b>Conclusiones</b>	<b>85</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>87</b>
<b>A El modo <math>TE</math></b>	<b>99</b>
<b>B El sistema lineal en 3D</b>	<b>101</b>

# Introducción

Determinar la estructura, densidad, porosidad, propiedades elásticas, mecánicas y electromagnéticas entre otras características del subsuelo terrestre es un objetivo perseguido por investigadores en diversas ramas de la ciencia. Debido a la imposibilidad de acceder en forma directa al objeto de estudio, muchas de las propiedades mencionadas deben determinarse indirectamente midiendo en la superficie terrestre cantidades que están en relación con ellas. En particular, la estimación de la distribución de conductividades eléctricas de una determinada región del interior de la Tierra se realiza través de medidas de los campos electromagnéticos en la superficie, ya que éstos contienen información de la propiedad en cuestión. Esta tarea implica la resolución de un problema inverso, que involucra dos etapas; en una primera, llamada *modelado ó problema directo* -que motiva nuestro interés- se calculan los campos electromagnéticos en la superficie asumiendo un modelo que incluye una determinada geometría y una dada distribución de conductividades en el subsuelo. Luego, en una segunda etapa, ciertos parámetros del modelo se ajustan comparando los valores de los campos predichos con los observados en superficie. Debe notarse que el modelo utilizado en la primer etapa no es independiente de la técnica utilizada para obtener los datos que se utilizan en la segunda.

Tanto la resolución del problema directo, que implica el manejo de varios millones de incógnitas en problemas tridimensionales, como el ajuste de parámetros en la segunda etapa son tareas dificultosas, que necesitan de herramientas computacionales sofisticadas si se aspira a atacar problemas en

donde existan estructuras geológicas realistas. Por otra parte, las técnicas de prospección han evolucionado en los últimos tiempos y actualmente existen sistemas que permiten la obtención de datos que requieren interpretación tridimensional. Sin embargo, los algoritmos que auxilian en el análisis de estos datos no han seguido este progreso y no existen al momento suficientes métodos útiles para tal fin.

Con el objetivo de contribuir a mejorar esta situación, en esta Tesis analizamos e implementamos algoritmos numéricos para resolver el problema directo en magnetotelúrica en dos y tres dimensiones, utilizando métodos de elementos finitos y técnicas iterativas de descomposición de dominio. Los métodos en cuestión están especialmente diseñados para trabajar en computadoras paralelas cuyo uso, importante en el modelado bidimensional, es esencial si el modelado tridimensional ha de ser plausible.

El comportamiento de estos algoritmos es analizado aplicándolos a la resolución de problemas de interés en exploración geofísica y comparando los resultados obtenidos con los de otros métodos existentes; para realizar estos tests se utilizan computadoras de arquitectura paralela.

La estructura de la Tesis es la siguiente: En el Capítulo 1 describimos el marco teórico del método magnetotelúrico, mostrando ejemplos de modelos característicos uni- y bidimensionales con solución analítica; algunos de estos modelos se utilizan usualmente como tests de algoritmos numéricos. Finaliza el capítulo una breve reseña de los métodos numéricos utilizados para resolver distintos modelos. El Capítulo 2 introduce brevemente la teoría de elementos finitos y detalla los algoritmos empleados en los problemas específicos planteados en esta Tesis. También describimos aquí los conceptos más relevantes del cálculo distribuido. En los Capítulos 3 y 4 los algoritmos descritos se aplican a problemas bi- y tridimensionales, respectivamente. Finalizamos esta Tesis con las Conclusiones, en donde discutimos nuestros resultados y evaluamos perspectivas futuras.

# Capítulo 1

## Magnetotelúrica

En este capítulo hacemos una reseña del método magnetotelúrico, una de las varias técnicas electromagnéticas de prospección geofísica, mostrando ejemplos de su aplicación a algunas estructuras simples. A continuación describimos algunos de los métodos numéricos comúnmente utilizados para modelar la respuesta de la Tierra cuando una onda electromagnética incide sobre su superficie.

### 1.1 Introducción

En el método magnetotelúrico (MT), que surgió como tal a partir de los trabajos pioneros de Tikhonov (1950) y Cagniard (1953), se utilizan medidas de campos electromagnéticos naturales para estudiar la estructura de la conductividad del subsuelo terrestre. El interés en este conocimiento no es sólo académico; es sabido (Katz y Thompson, 1987) que a través de la relación entre la conductividad y la porosidad de las rocas es posible determinar la presencia de petróleo y el método magnetotelúrico es adecuado para tal fin en ambientes protegidos o en áreas volcánicas, donde otros métodos de prospección -como sísmica de reflexión- son inviables debido a los daños ambientales que generan, o fallan por las características morfológicas del subsuelo. Las fuentes naturales de campos MT con frecuencias por sobre 1 Hz

son las tormentas eléctricas alrededor del planeta, en las cuales los relámpagos radían campos que se propagan a grandes distancias. A frecuencias menores que 1 Hz, la mayor contribución proviene de corrientes generadas en la magnetósfera por su interacción con el viento solar. En ambos casos en modelado magnetotelúrico se asume que los campos electromagnéticos en la superficie terrestre pueden ser tratados como ondas planas (Madden y Nelson, 1986). La mayor parte de la energía de estas ondas incidentes es reflejada, pero un pequeño porcentaje se propaga hacia el interior de la Tierra. El campo eléctrico incidente, debido a la conductividad no nula del subsuelo, induce corrientes eléctricas, fuentes de campo magnético. Por su parte, la variación temporal del campo magnético genera un campo eléctrico a través de la ley de Faraday. La idea fundamental del método es que estos campos electromagnéticos, respuesta de la Tierra a los campos incidentes, proveen información indirecta sobre las propiedades eléctricas de la misma a profundidades entre decenas de metros y varios cientos de kilómetros (Spies, 1989), pues dependen de la distribución de conductividades del subsuelo.

En la superficie los campos medidos contienen también la contribución de los campos incidentes, lo que presenta un problema, puesto que en principio se ignora su magnitud. Es posible, sin embargo, de la información completa de los campos en superficie definir una cantidad denominada impedancia  $Z$ , que detallaremos en la sección 1.4, que depende de las propiedades del subsuelo y nos libera en parte de este inconveniente.

Los equipos para llevar a cabo las mediciones son pares de electrodos en contacto con la Tierra, ubicados perpendicularmente entre sí con los que se miden caídas de potencial, a partir del cual se obtiene el campo eléctrico, y magnetómetros para medir las componentes del campo magnético. Como las señales a medir son de muy baja intensidad, el proceso de adquisición de datos no es una tarea sencilla. Los datos adquiridos son procesados e interpretados en término de la distribución espacial de conductividades eléctricas, para lo cual se utilizan modelos numéricos uni-, bi- y tridimensionales. Como en general la información no es completa, es usual utilizar datos provenientes

de otros métodos para ayudar en este proceso, realizando la llamada inversión conjunta.

En la descripción del método MT detallaremos el modelo, las fuentes y la interacción entre los campos y el subsuelo. Cada uno de esos tópicos es suficientemente complejo como para ser discutido separadamente. En particular, el interés de esta Tesis se centra en los métodos numéricos utilizados para modelar la respuesta de la Tierra; en la última sección se describen algunos frecuentemente usados, y en el próximo capítulo introducimos los que implementaremos.

## 1.2 El Modelo

Recordemos que los fenómenos electromagnéticos están descriptos por las ecuaciones de Maxwell (Stratton, 1941)

$$\nabla \times \mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \mathbf{J}, \quad (1.1a)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0, \quad (1.1b)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \varrho, \quad (1.1c)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (1.1d)$$

donde

$\mathbf{E}$  = intensidad de campo eléctrico (V/m)

$\mathbf{D}$  = desplazamiento eléctrico (C/m<sup>2</sup>)

$\mathbf{H}$  = intensidad de campo magnético (A/m)

$\mathbf{B}$  = inducción magnética (Wb/m)

$\mathbf{J}$  = densidad de corriente eléctrica (A/m<sup>2</sup>)

$\varrho$  = densidad de carga eléctrica (C/m<sup>3</sup>)

Juntamente con las Ecs. (1.1) debemos considerar la ecuación de continuidad

$$\nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \varrho}{\partial t} = 0, \quad (1.2)$$

que establece la ley de conservación de la carga eléctrica. Sólo tres de estas cinco ecuaciones son independientes, de modo tal que para hacer al sistema definido debemos introducir las relaciones constitutivas que pueden ser escritas, siempre que la magnitud de los campos  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{H}$  y la de sus derivadas temporales no sean muy grandes -como es nuestro caso- como:

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}, \quad (1.3a)$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}, \quad (1.3b)$$

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}. \quad (1.3c)$$

A través de las Ecs. (1.3) el medio es caracterizado desde el punto de vista electromagnético por la permitividad eléctrica  $\varepsilon$  (F/m), la permeabilidad magnética  $\mu$  (H/m) y la conductividad eléctrica  $\sigma$  (S/m); estas cantidades son tensores en caso de ser el medio anisótropo, y escalares en caso de isotropía.

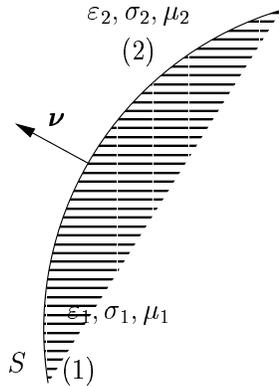


Figura 1.1: El vector normal  $\nu$  es positivo de (1) a (2).

Finalmente, las condiciones de borde que determinan la relación de los campos electromagnéticos en la interfase de medios con diferentes valores de los parámetros  $\varepsilon$ ,  $\sigma$ ,  $\mu$ , ver Fig.1.1, son las siguientes:

$$\begin{aligned} \nu \cdot (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) &= 0, & \nu \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) &= \mathbf{J}_s, \\ \nu \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) &= 0, & \nu \cdot (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) &= q_s, \\ \nu \cdot (\mathbf{J}_2 - \mathbf{J}_1) &= -\frac{\partial q_s}{\partial t} \end{aligned}$$

donde  $q_s$  la densidad superficial de carga y  $\mathbf{J}_s$  es la densidad superficial de corriente, que es nula cuando la conductividad en ambos medios

es finita.

Podemos enumerar ahora una serie de suposiciones que suelen hacerse al utilizar el método magnetotelúrico, que permiten simplificar las ecuaciones que hemos escrito hasta aquí :

- La permeabilidad magnética del suelo es del orden de la del vacío en la

mayoría de los casos, se considera entonces  $\mu = \mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$  H/m, excepto en presencia de magnetitas donde esta hipótesis no es válida (Keller, 1987).

- Por simplicidad, los medios se consideran isótropos, pero no necesariamente homogéneos.
- Se asume una dependencia temporal armónica de los campos, puesto que siendo las ecuaciones a resolver lineales, toda otra dependencia temporal puede considerarse como una superposición de ondas armónicas.
- En el rango de conductividades encontradas en la Tierra, de  $10^{-3}$  a 1 S/m, y considerando que las frecuencias de interés varían entre  $10^{-3}$  y  $10^4$  Hz, vale siempre que

$$\frac{\omega\varepsilon}{\sigma} \ll 1,$$

con lo que podemos desprestigiar las corrientes de desplazamiento frente a las de conducción y el problema que nos ocupa ya no es de propagación de ondas en el subsuelo, sino de su difusión al interior de la Tierra.

- Por nuestra parte consideramos por simplicidad  $\varepsilon$  y  $\sigma$  reales e independientes de la frecuencia.

Con estas suposiciones, y asumiendo además que en la región del subsuelo considerada no hay inicialmente cargas libres ni fuente alguna, las Ecs. (1.1) se reducen a las de Maxwell armónicas

$$\nabla \times \mathbf{H} = \sigma \mathbf{E}, \quad (1.4a)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -i\omega\mu\mathbf{H}, \quad (1.4b)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0, \quad (1.4c)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0. \quad (1.4d)$$

Siendo las dos últimas ecuaciones consecuencia de las dos primeras, en nuestro análisis numérico nos ocuparemos, como es usual (Ward y Hohmann, 1987) de las Ecs. (1.4a) y (1.4b). La onda plana incidente en superficie es considerada como una condición de borde en los casos más simples o bien, en los casos más complejos, todo el problema puede ser reformulado como veremos en el Capítulo 3.

### 1.3 Fuentes

Las señales electromagnéticas naturales provienen de una enorme variedad de procesos, originándose ya sea en el centro de la Tierra o en distantes galaxias. En el rango de interés del método MT, hay sólo dos fuentes importantes, la atmósfera y la magnetósfera. Las tormentas eléctricas en la parte baja de la primera son la causa dominante de campos con frecuencias entre 1 y 10 kHz. Un rayo generalmente consiste de una secuencia de descargas, llamada “flash”. La primer descarga en esta secuencia es nube-nube, se llama “líder” y abre el camino para otras 2 o 3 descargas del mismo tipo; finalmente se produce la descarga a tierra, que es la mayor fuente de energía electromagnética. Los campos  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{B}$  generados decaen con la distancia de forma muy similar a los de un dipolo eléctrico, hasta unos 50 km de producidos. Más allá de esta distancia, la forma de decaimiento de las señales, llamadas “atmosféricas”, depende de la frecuencia, siendo las componentes de mayor frecuencia atenuadas y las de menor preservadas por un efecto de guía de onda entre la superficie de la Tierra y las capas de aire ionizadas en la ionósfera (Vozoff, 1991).

Los campos con frecuencias por debajo de 1 Hz son originados primordialmente en la compleja interacción entre el campo magnético permanente de la Tierra y el flujo de plasma solar que tiene lugar en la magnetósfera (Kaufman y Keller, 1981). El campo magnético terrestre varía muy lentamente en el tiempo con relación al período de las fuentes consideradas, así que no es importante en aplicaciones magnetotelúricas. Pero su existencia causa fluctuaciones moderadamente rápidas en un campo magnético secundario: cuando las partículas que componen el viento solar encuentran a su paso al campo magnético terrestre los electrones y protones son desviados en direcciones opuestas, dando lugar a un efecto de corriente eléctrica e induciendo un campo magnético. En su viaje hacia la Tierra desde la magnetósfera estos campos atraviesan la ionósfera dando origen a ondas hidromagnéticas (Orr, 1984). Al ser observadas en la superficie son clasificadas como *micropulsaciones* según su período e intensidad. Las de frecuencias ultra bajas

(ULF) son las utilizadas como fuente en el método MT, suponiendo que se comportan como ondas planas (Madden y Nelson, 1986; Vozoff, 1991). Esta simplificación es generalmente aceptada y con ella trabajaremos en esta Tesis, pero se han reportado casos (Häkkinen y Pirjola, 1986) en los que no es válida.

## 1.4 Interacción con la Tierra

Para ver por qué los campos MT transportan información sobre la distribución espacial de conductividad eléctrica de la Tierra tenemos que observar la forma en que los campos interactúan con el suelo.

Comencemos con el caso más simple, unidimensional, donde una onda plana con amplitud para el campo eléctrico  $A$  y frecuencia angular  $\omega$  incide sobre un semiespacio de conductividad  $\sigma$ , ver Fig. 1.2.

La solución de las Ecs. (1.4a) y (1.4b) es  $E_x = Ae^{-ikz}$ ,  $H_y = A\frac{k}{\omega\mu}e^{-ikz}$ , donde  $k = (-i\omega\mu\sigma)^{\frac{1}{2}} = \frac{(1-i)}{\delta}$ .

La cantidad

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}} \quad (1.5)$$

es la *longitud de penetración* de la onda, que disminuye al aumentar la frecuencia de la onda incidente y la conductividad del medio. Para desprendernos de la dependencia con la amplitud del campo incidente, definimos la *impedancia*  $Z$  como

$$Z_{xy} = \frac{E_x}{H_y} = (1+i)\sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma}}, \quad (1.6)$$

o de forma equivalente para puede definirse la *resistividad*  $\rho$

$$\rho_{xy} = \frac{Z_{xy}\bar{Z}_{xy}}{\omega\mu}, \quad (1.7)$$

donde la barra indica complejo conjugado. Para el presente ejemplo  $\rho_{xy}$  se reduce a la relación  $\rho = 1/\sigma$ .

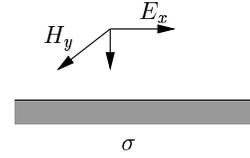


Figura 1.2: Onda plana incidente sobre una Tierra homogénea. El eje  $z$  es positivo hacia abajo.

En general las medidas de los campos en superficie se interpretan en términos de la resistividad y de la fase  $\gamma$  de  $Z$ , que es la diferencia de fases entre  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{H}$ . En medios no homogéneos no es posible desprenderse totalmente de la dependencia con el campo incidente y la resistividad, que se denomina ahora *resistividad aparente*  $\rho^a$  dependerá de la frecuencia del mismo.

En nuestro ejemplo, de la Ec. (1.6) se ve que la fase  $\gamma$  es  $\frac{\pi}{4}$ . Si el campo eléctrico está en el eje  $y$  y el magnético en el eje  $x$ , obtenemos para  $\rho_{yx}$  igual comportamiento que para  $\rho_{xy}$ , con la diferencia que la fase de  $Z_{yx}$  difiere de la de  $Z_{xy}$  en  $\pi$ . Puede también observarse de la misma ecuación que la fase  $\gamma$  es constante para el caso del semiespacio homogéneo, mientras que el módulo de la impedancia decrece con la conductividad y aumenta con la frecuencia. Esto es claro si lo pensamos en término de los campos, ya que al ser éstos cuasi-estacionarios, el campo magnético es originado por corrientes eléctricas y aumenta al aumentar  $\sigma$ ; el campo eléctrico tiene carácter rotacional, surgiendo como resultado de la variación temporal de la intensidad del campo magnético. A causa de esto, el campo eléctrico disminuye al disminuir la frecuencia.

Consideramos ahora, como segundo ejemplo de la interacción de los campos con la Tierra, que ésta está constituida por capas horizontales de distintos espesores y conductividades. En cada capa tenemos para los campos  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{H}$ , resolviendo Ecs. las (1.4), expresiones de la forma

$$Ae^{ikz} + Be^{-ikz} \quad (1.8)$$

donde el primer término es para la energía ascendente y el segundo para la descendente. La capa más profunda en este modelo es siempre infinita, de modo que en ella el coeficiente  $A$  es nulo. Veamos algunos casos particulares para comprender intuitivamente el comportamiento de la resistividad aparente  $\rho^a$  y la fase  $\gamma$ . Comencemos con los modelos de la Fig. (1.3). La capa superior es la misma en ambos modelos, pero  $\sigma_2 = \frac{1}{10}\sigma_1$  en el primer caso, y  $\sigma_2 = 10\sigma_1$  en el segundo. Vemos que cuando la frecuencia es lo suficientemente grande como para que la profundidad de penetración  $\delta$  sea mucho menor que el espesor  $h$  de la primer capa,  $\rho^a = \frac{1}{\sigma_1}$ , y cuando la frecuencia

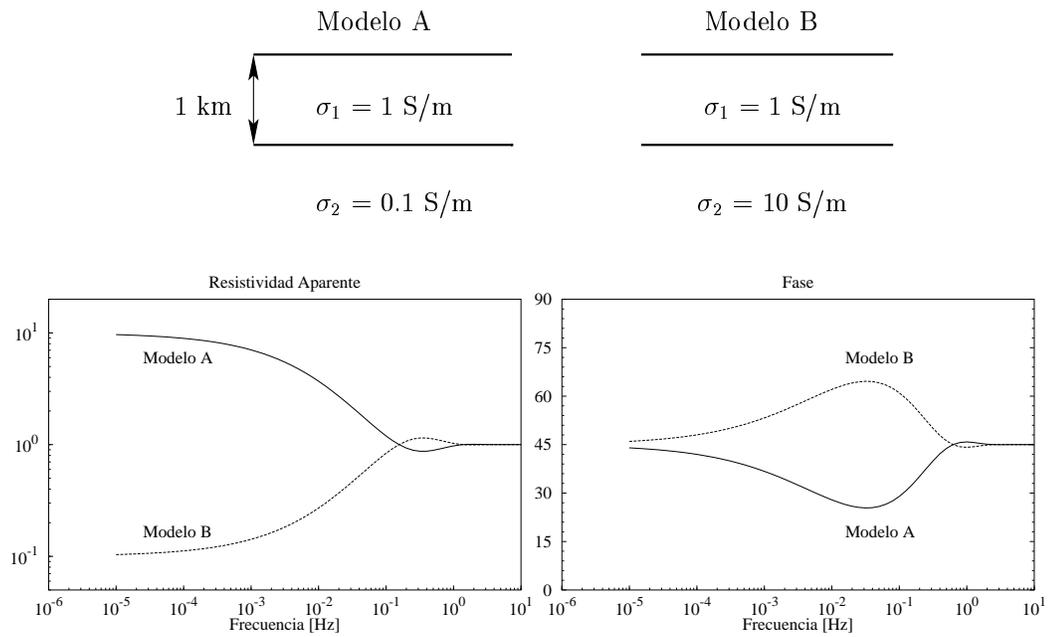


Figura 1.3: Resistividades aparentes en Ohm-m y fases en grados en función de la frecuencia en Hz, para modelos de dos capas. El modelo A corresponde a un basamento resistivo, el modelo B a uno conductivo.

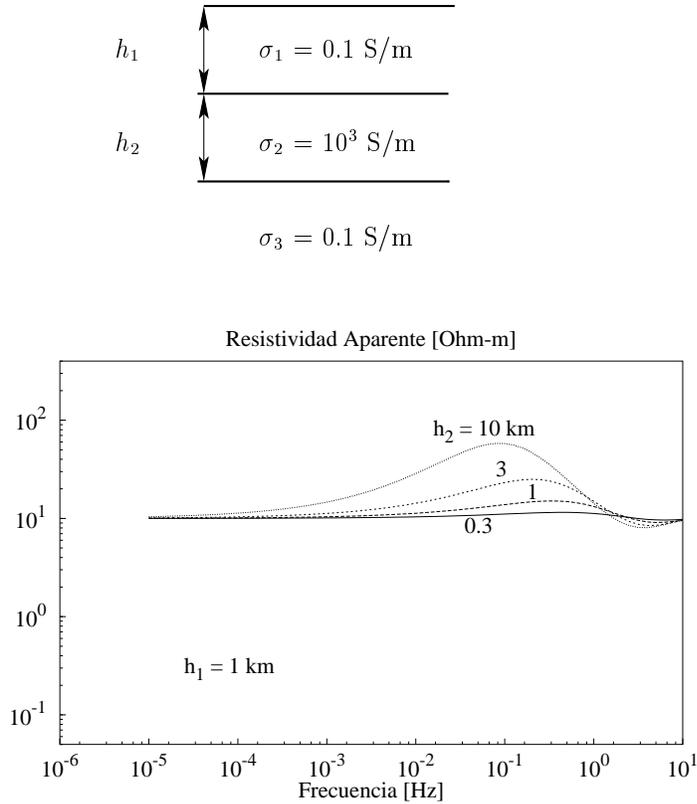


Figura 1.4: Cambios en la respuesta en la resistividad aparente con el espesor de la segunda capa en un modelo de tres.

disminuye al punto que  $\delta \gg h$ ,  $\rho^a = \frac{1}{\sigma_2}$ , y allí permanece cuando  $\omega \rightarrow 0$ . Debe notarse que la respuesta en la fase  $\gamma$  se da a mayores frecuencias que la de la resistividad aparente  $\rho^a$ , y que tiende a  $\frac{\pi}{4}$ , la fase del semiespacio homogéneo, tanto para frecuencias altas como bajas.

En ambos modelos, si incrementamos el espesor de la capa superficial, la frecuencia tiene que disminuir de manera que los campos incidentes penetren lo suficiente para que la respuesta en  $\rho^a$  involucre a la capa inferior. En un modelo de tres capas, ver Fig.1.4,  $\rho^a \rightarrow \frac{1}{\sigma_1}$  a frecuencias altas, pero  $\rho^a \rightarrow \frac{1}{\sigma_3}$  para frecuencias bajas. Para valores de frecuencia intermedios se acerca a  $\frac{1}{\sigma_2}$ . Cuán cerca llega a estar depende de los espesores y conductividades de las capas 1 y 2. Es claro que la capacidad de inferir la presencia de distintas capas depende de sus conductividades, espesores y del rango de frecuencias

presente.

Consideremos ahora el modelo bidimensional de la Fig.1.5, llamado *contacto*, que representa un semiespacio con dos conductividades diferentes  $\sigma_1$  y  $\sigma_2$ . Este problema es soluble analíticamente (d'Erceville y Kunetz, 1962); el análisis de geometrías de esta clase es importante puesto que, a diferencia de los modelos anteriores, en este caso se presentan discontinuidades en los campos al atravesar la interfase.

Sea en este ejemplo  $\sigma_1 > \sigma_2$  y la dirección de simetría el eje  $y$ . Analicemos en primer término el modo  $TM$ , de modo que el campo magnético de la onda plana incidente apunta en la dirección de simetría. A distancias del orden de dos veces la longitud de penetración  $\delta$  en ambas direcciones desde el contacto en  $z = 0$  la presencia del contacto no es distinguible, el campo magnético  $H_y$  es constante y toma el mismo valor, ya que el problema es esencialmente unidimensional y puede mostrarse que en este caso el campo magnético en la superficie es independiente de la conductividad del medio (Kaufman y Keller, 1981).

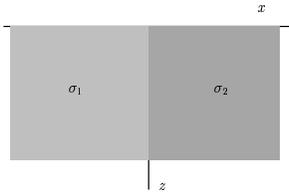


Figura 1.5: Modelo de contacto de longitud infinita.

Más aún, el requerimiento de continuidad de la componente normal de corriente eléctrica  $J_x$  implica, debido a la ley de Ampère, que el campo  $H_y$  es constante a través del contacto. De esta manera, medir esta componente en superficie no es útil para detectar la presencia de la inhomogeneidad.

Por el contrario, el campo eléctrico  $E_x$  varía a través del contacto, ya que suficientemente alejados de él en cada región vale  $Z^{1,2} = \frac{E_x^{1,2}}{H_y^{1,2}} = \frac{(1+i)}{\delta^{1,2}}$  respectivamente, estando suficientemente alejados del contacto, pero  $H_y^1 = H_y^2$  siempre. Además, como la densidad de corriente  $J_x$  no es función de  $x$  (McNeill y Labson, 1991), y a cada lado de la interfase la conductividad  $\sigma$  es constante, debe ser el campo eléctrico  $E_x$  también independiente de  $x$ . También debe verificarse que  $\sigma_1 E_x^1 = \sigma_2 E_x^2$ , de modo que el campo eléctrico varía de modo discontinuo. Esta situación se origina en la acumulación de cargas en la interfase. En

el ejemplo que tomamos, donde  $\sigma_1 > \sigma_2$ , inmediatamente a la izquierda del contacto,  $E_x$  disminuye por la presencia de estas cargas, mientras que a su derecha aumenta. La impedancia, y por ende la resistividad aparente tienen el mismo comportamiento, haciendo que el medio conductor lo parezca aún más, y que la región de menor conductividad se observe aún más resistiva, como se ve en la Fig.1.6. También podemos observar que al alejarnos de la discontinuidad, la resistividad aparente toma los valores del semi-espacio homogéneo. La fase tiene una variación relativamente pequeña sobre  $x = 0$ ; pero requiere distancias mayores a ambos lados para tomar el valor del semi-espacio homogéneo.

Analicemos ahora el modo  $TE$ , considerando que es el campo eléctrico de la onda plana incidente el que apunta en dirección  $y$ . La condición de borde requiere que  $E_y$  sea continua en  $x = 0$ , y así en el pasaje de la región conductora a la resistiva el campo eléctrico aumentará su magnitud y profundidad de penetración, no presentándose en este caso acumulación de cargas en la interfase. Para analizar el comportamiento del campo magnético  $H_x$  es necesario primero ver qué sucede con  $J_y$ , que varía discontinuamente al pasar de una región a la otra. Adyacente al contacto, del lado resistivo, la disminución del campo eléctrico hace que localmente la densidad de corriente disminuya. En el lado conductivo, en las inmediaciones del borde se va a ver bruscamente aumentada por un mayor coeficiente de conductividad. Entonces,  $H_x$  aumenta en la cercanía del contacto del lado conductivo, y disminuye del lado resistivo. Sin embargo, este comportamiento se ve parcialmente compensado ya que del lado resistivo la profundidad de penetración de la corriente es mayor que en conductivo, de modo que a distancias suficientemente grandes  $H_x$  es el mismo a ambos lados del contacto. La variación en  $x$  de la densidad de corriente  $J_y$  establece una componente en la dirección del eje  $z$  del campo magnético  $H_z$ , que tiende a cero al alejarnos del borde, y lo hace más rápidamente del lado conductivo, porque allí las corrientes decaen antes. El comportamiento descrito para los campos se ve reflejado en la resistividad aparente y su fase, como puede observarse en la Fig.1.6. Finalmente, agre-

gamos que es usual en tareas de interpretación de datos, utilizar la relación  $H_z = T_x H_x + T_y H_y$ , donde las  $T_i$  son cantidades complejas, para ayudar a determinar la existencia de una dirección de simetría. Dada una estructura bidimensional en la que  $x'$  es la dirección de simetría, la relación anterior en este sistema se reduce a  $H_z = T_{y'} H_{y'}$ . Si el modelo que estamos tratando

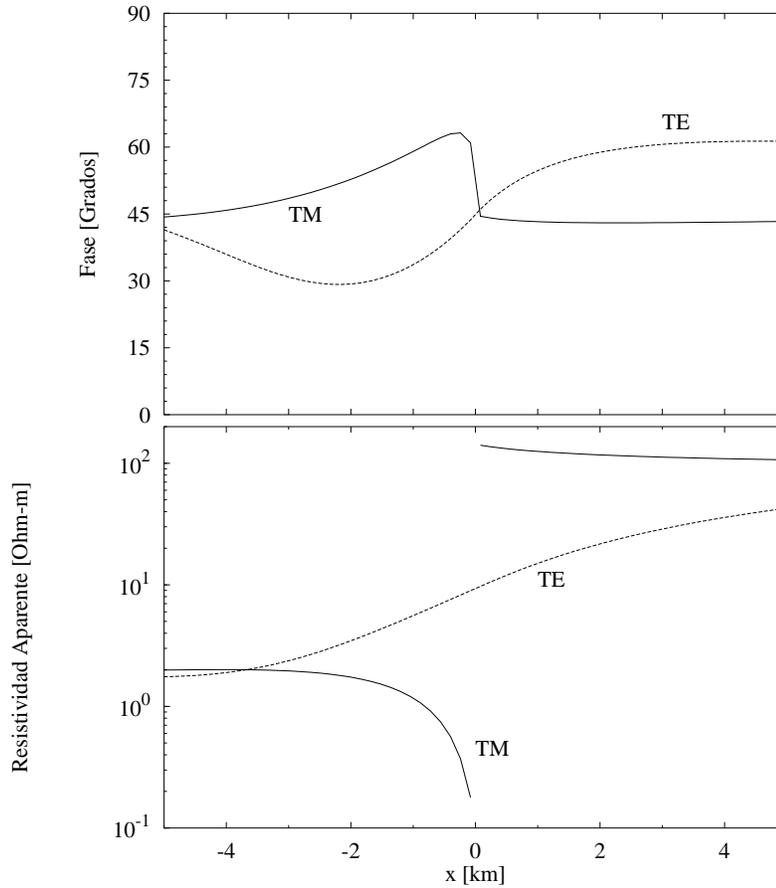


Figura 1.6: Comportamiento de la resistividad aparente y fase a través del contacto -situado en  $x = 0$ - mostrado en la Fig. 1.5, para el caso en que  $\sigma_1 = 0.5$ ,  $\sigma_2 = 10^{-2}$ , y la frecuencia es 0.1 Hz, para los modos  $TM$  y  $TE$ .

está cubierto por una capa homogénea, denominada *sobrecarga*, sus efectos se ven suavizados en alguna medida. Cuán importante es este proceso depende del espesor y conductividad de la capa, y de la frecuencia a la que se mide.

Para frecuencias suficientemente grandes, la profundidad de penetración es menor que el espesor de la carga en cuestión, y el contacto no será detectado, mientras que si las frecuencias son bajas, la capa es casi invisible.

Existen otros ejemplos de modelos bidimensionales resueltos analíticamente, como el de una secuencia de dos contactos, geometría denominada dique (Rankin, 1962) o cilindros de sección transversal circular o elíptica inmersos en semiespacios homogéneos (Kaufman y Keller, 1981). Posteriormente fueron presentadas soluciones (Weaver et al., 1985; Weaver et al., 1986) con modelos que extendían los de Rankin; que se utilizan frecuentemente como control de los métodos numéricos en sus aplicaciones bidimensionales. No existen al presente soluciones analíticas a problemas tridimensionales, lo que hace evidente la necesidad de contar con métodos computacionales capaces de resolver problemas de modo aproximado, si se desean modelar cabalmente las respuestas generadas por las diversas y complejas estructuras del subsuelo. En la próxima sección haremos un breve repaso sobre los distintos algoritmos que existen en la literatura para modelado bi- y tridimensional.

## 1.5 Métodos numéricos en magnetotelúrica

La bibliografía existente en el campo del modelado numérico de problemas electromagnéticos es muy amplia, ya que existen distintos métodos de resolución -cada uno de ellos con variantes- y es posible escribir las ecuaciones que modelan el problema geofísico de varias maneras. Brevemente, podemos agrupar los diferentes métodos en tres clases. Por un lado tenemos métodos de ecuaciones integrales (IE), que incluyen a su vez métodos de ecuaciones integrales de volumen y de superficie; y por otro existen métodos que parten del tratamiento de las ecuaciones en forma diferencial, como son los métodos de diferencias finitas (DE) y métodos de elementos finitos (FE). Hay actualmente un acuerdo generalizado en que los IE son adecuados para calcular la respuesta de unos pocos cuerpos, mientras que los DE tuvieron en principio mucha aceptación, y la siguen teniendo en el modelado en el dominio del

tiempo por su simplicidad en la implementación, pero tienen la desventaja de necesitar el uso de grillas rígidas. Por su parte, los FE tienen mucha aceptación por su versatilidad para modelar estructuras complejas, pero en general han tenido problemas por los requerimientos de memoria y almacenamiento.

Ciertamente, las referencias enumeradas abajo no engloban la totalidad de la literatura disponible acerca de métodos numéricos en magnetotelúrica. Existen además métodos que siendo variantes de algunos de los mencionados, permiten tratar problemas con fuentes modeladas por dipolos eléctricos y/o magnéticos entre otros, tanto en el dominio del tiempo como de las frecuencias, y son utilizados en los distintos métodos de prospección electromagnética en geofísica.

Las primeras soluciones numéricas a problemas de magnetotelúrica bidimensionales en el dominio de la frecuencia aparecieron a comienzos de los años setenta. Jones y Price (1971) presentaron una solución de diferencias finitas, y en el mismo año Coggon (1971) discutió una solución de elementos finitos usando una formulación variacional. Por su parte Hohmann (1971) y Parry y Ward (1971) desarrollaron soluciones de ecuaciones integrales de volumen y superficie respectivamente. Posteriormente Rodi (1976) introdujo una versión de elementos finitos para resolver las ecuaciones de Maxwell como ecuaciones de segundo orden, hallando el campo paralelo a la dirección de simetría, y a partir de éste, utilizando un esquema de diferenciación numérica, el campo transversal. En el mismo año (Brewitt-Taylor y Weaver, 1976) fue también introducida una técnica de diferencias finitas para resolver el problema bidimensional en magnetotelúrica, siendo las condiciones de borde utilizadas mejoradas en un trabajo posterior (Brewitt-Taylor y Weaver, 1978) para el caso particular del modo TM. En un trabajo clásico (Wannamaker et al., 1987) las ecuaciones de Maxwell fueron tratadas, como usualmente, como ecuaciones elípticas de segundo orden, pero planteadas en esta ocasión en término de los campos secundarios, lo que mejoró la exactitud de la aproximación. Dos años más tarde, Travis y Chave (1989) presentaron

un algoritmo de elementos finitos adaptivo para atacar el problema bidimensional. Ya en los '90, Pu et al. (1993) y Weaver et al. (1996) utilizaron diferencias finitas para obtener el campo magnético en el modo TM, una aproximación no muy frecuente, ya que en general se obtiene la única componente del campo eléctrico, y a partir de ésta, las del campo magnético. Posteriormente, también utilizando DE, se incluyó el efecto de la topografía (Aprea et al., 1997), es decir, la interfase Tierra-aire considerada en este caso no es una línea horizontal.

Finalmente mencionamos que Everett y Schultz (1996) y Martinec (1997) utilizaron FE para atacar el problema considerando la Tierra esférica con simetría azimutal, y no plana con simetría en una dirección como es usual.

El problema tridimensional comenzó a ser tratado numéricamente a-posteriori del problema bidimensional. Wannamaker y otros (1984a; 1984b; 1991) modelaron inhomogeneidades tridimensionales en una Tierra estratificada horizontalmente y resolvieron el problema utilizando ecuaciones integrales. Existen también otras contribuciones realizadas con variantes del mismo método (Weidelt, 1975; Ting y Hohmann, 1981; Xiong, 1992a; Zhdanov y Fang, 1996a), las diferencias entre las distintas contribuciones en general radican en la forma de aproximar el tensor de Green que aparece en las ecuaciones.

Entre los aportes desde las diferencias finitas, podemos mencionar a Zhdanov et al. (1982), quien utilizó condiciones de borde asintóticas, y a Mackie et al. (1993), quienes discretizaron la versión integral de las ecuaciones de Maxwell sobre una grilla uniforme, haciendo transformaciones de coordenadas para pasar a una irregular. En sendos trabajos, Torquil Smith (1996a; 1996b) presentó un algoritmo de DE sobre grillas desplazadas para el campo eléctrico y magnético, resolviendo el sistema lineal resultante con un método de gradiente biconjugado con preconditionamiento. Posteriormente Weaver et al. (1999) extendieron su trabajo previo (Weaver et al., 1996) a tres dimensiones. Finalmente mencionamos los FE, que hasta ahora no han sido muy difundidos, precisamente porque tratar a los modelos tridimensionales en la forma

---

clásica implica demandas gigantescas de memoria y almacenamiento, como mencionamos más arriba. El primer aporte en esta clase lo realizaron Reddy et al. (1977) discretizando el campo eléctrico total, luego Mogi (1996) utilizó elementos hexaédricos isoparamétricos con ocho nodos para discretizar las ecuaciones de segundo orden para el campo eléctrico secundario, y usó también condiciones de borde asintóticas. Debe notarse aquí que el uso de este tipo de elementos impide el modelado de contrastes importantes de conductividades puesto que implican la continuidad de las componentes tangenciales y normales de los campos, u obligan a introducir expresiones explícitas de las componentes normales discontinuas (Rätz, 1999). Sólo recientemente se han dado a conocer trabajos en la dirección de esta Tesis. Sugeng (1999) presentó un método que utiliza los llamados “elementos de borde”, donde sólo es requerida la continuidad de las componentes tangenciales de los campos.



## Capítulo 2

# Elementos Finitos para las Ecuaciones de Maxwell

El método de elementos finitos es una técnica general para construir soluciones aproximadas de ecuaciones diferenciales en dominios de forma arbitraria y con diversas condiciones de contorno. En cada caso particular involucra la división del dominio en un número finito de subdominios más simples y el uso de conceptos variacionales para construir una aproximación de la solución sobre éstos. A causa de la generalidad de las ideas que forman la base de la teoría del método, ha sido utilizado en resolver una gran variedad de problemas en virtualmente todas las áreas de la física matemática.

Estrictamente hablando, el método de elementos finitos es en realidad una variedad de algoritmos que emplean una representación subdominio a subdominio de la solución aproximada; han sido extensamente tratados (Zienkiewicz, 1977; Becker et al., 1981; Carey y Oden, 1983; Jin, 1993) con más énfasis en aplicaciones y por (Ciarlet, 1978; Oden y Carey, 1986; Brezzi y Fortin, 1991; Brenner y Scott, 1994) con una visión más formal del método. En este capítulo definiremos en primera instancia algunos conceptos básicos, y luego esbozaremos la teoría subyacente a los algoritmos utilizados en los capítulos siguientes.

## 2.1 Aspectos básicos del método

Consideremos el siguiente problema variacional abstracto:

Encontrar  $u \in V$  tal que

$$a(u, v) = f(v) \quad \forall v \in V, \quad (2.1)$$

donde el espacio de Hilbert  $V$ , la forma bilineal  $a(\cdot, \cdot)$  y la forma lineal  $f$  verifican las hipótesis del teorema de Lax-Milgram (Brenner y Scott, 1994), lo que garantiza la existencia de una única solución.

El método de Galerkin para aproximar la solución de problemas como el enunciado en Ec. (2.1) consiste en definir problemas similares en subespacios de dimensión finita  $V^h$  del espacio  $V$ . Específicamente, con cualquier  $V^h \subset V$  asociamos el *problema discreto*

Encontrar  $u^h \in V^h$  tal que

$$a(u^h, v^h) = f(v^h), \quad \forall v^h \in V^h. \quad (2.2)$$

Aplicando el teorema de Lax-Milgram, sabemos que este problema tiene una única solución  $u^h$ , a la que llamamos *solución discreta*.

En caso que la forma bilineal sea simétrica, la solución está también caracterizada por la siguiente propiedad:

$$J(u^h) = \inf_{v^h \in V^h} J(v^h), \quad (2.3)$$

donde el funcional  $J$  está dado por  $J(v) = \frac{1}{2}a(v, v) - f(v)$  (Carey y Oden, 1983). Esta definición alternativa de la solución discreta es conocida como método de Ritz.

Podemos establecer que en su forma más simple, el método de elementos finitos es una técnica general para construir subespacios de dimensión finita  $V^h$  del espacio  $V$  -que son llamados espacios de elementos finitos- para aplicar el método de Ritz-Galerkin a un problema variacional. Esta construcción está caracterizada por algunos principios básicos:

- Partición del dominio  $\Omega$ : El conjunto sobre el que actúan los elementos de  $V$

es dividido en un conjunto de subdominios  $K$  “simples”, llamados elementos. Para dominios bidimensionales los elementos son rectángulos o triángulos, siendo estos últimos los más adecuados para modelar dominios irregulares, mientras que en tres dimensiones la subdivisión puede hacerse en tetraedros, prismas triangulares o prismas rectangulares.

Este paso es muy importante porque la forma en que el dominio es subdividido afecta el tiempo de cálculo, la memoria requerida y la exactitud de los resultados numéricos.

Las funciones del espacio  $V$  definido sobre  $\Omega$  son luego aproximadas, formándose con las aproximaciones el *espacio de elementos finitos*  $V^h$ , de dimensión finita y a partir de éste, se construyen los espacios  $R = \{v^h|_K; v^h \in V^h\}$ , restricciones a  $K$  de las funciones de  $V^h$ .

- **Funciones aproximantes:** Es usual que los espacios  $R$  contengan polinomios -o funciones obtenidas de polinomios por un cambio de variables- de primer, segundo o mayor orden. Esta última opción implica en general una formulación más complicada; además hay que tener en cuenta que no tiene sentido tomar polinomios de orden mayor, si no esperamos una solución varias veces derivable.

- Se considera también importante la existencia de una base del espacio  $V^h$  cuyas correspondientes funciones base tengan soportes tan pequeños como sea posible, estando implícito que las funciones base sean fácilmente descritas.

Podemos ahora dar una definición formal de elementos finitos, que tiene en cuenta lo antes mencionado (Brezzi y Fortin, 1991; Brenner y Scott, 1994):

Un elemento finito en  $\mathbb{R}^n$  es una tripla  $(K, R, N)$  donde

(i)  $K$  es un subconjunto cerrado de  $\mathbb{R}^n$  con un interior no vacío y un borde Lipschitz-continuo.

(ii)  $R$  es un espacio de funciones reales sobre  $K$ .

(iii)  $N$  es un conjunto linealmente independiente de formas lineales  $\Phi_i$ ,  $1 \leq i \leq m$  definidas sobre un espacio que incluya a  $R$ .

Se requiere que el conjunto  $N$  sea  $R$ -unisolvente, es decir que dados cualesquiera escalares reales  $\alpha_i$ ,  $1 \leq i \leq m$  exista una única función  $r \in R$  tal

que

$$\Phi_i(r) = \alpha_i, \quad 1 \leq i \leq m. \quad (2.4)$$

Consecuentemente existen funciones  $r_i \in R$ ,  $1 \leq i \leq m$  que satisfacen

$$\Phi_j(r_i) = \delta_{ij}, \quad 1 \leq i \leq m. \quad (2.5)$$

Como tenemos que

$$\forall r \in R, \quad r = \sum_{i=1}^m \Phi_i(r)r_i, \quad (2.6)$$

el espacio  $R$  es de dimensión  $m$ . Las formas lineales  $\Phi_i$  se llaman *grados de libertad* del elemento finito, y las  $r_i$ , *funciones base*. La  $R$ -unisolvencia de  $N$  es equivalente a que las  $m$  funciones  $\Phi_i$  forman base del espacio dual en sentido algebraico de  $R$ , y puede verificarse en general si haciendo  $\Phi_i(r) = 0$ ,  $1 \leq i \leq m$  implica que  $r = 0$ .

Ciertamente la elección de grados de libertad no es única, dados  $K$  y  $R$  se obtienen elementos finitos diferentes si se eligen uno u otro conjunto de grados de libertad. Como ejemplo supongamos que  $K$  es cualquier triángulo. Sea  $R_1$  el conjunto de polinomios en dos variables de grado  $\leq 1$ . Sea  $N = \{\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3\}$ , donde los grados de libertad son la evaluación del polinomio en los vértices  $z_i$ ,  $1 \leq i \leq 3$  del triángulo, es decir  $\Phi_i(r) = r(z_i)$ ,  $1 \leq i \leq 3$ , ver Fig.2.1a. Sean  $L_i$ ,  $1 \leq i \leq 3$  las rectas que incluyen a los lados del triángulo. Supongamos ahora que  $r \in R$  se anula en  $z_i$ ,  $i = 2, 3$ . Como  $r|_{L_1}$  es una recta de una variable que se anula en 2 puntos,  $r|_{L_1} = 0$ . Podemos entonces escribir  $r = cL_1$  con  $c$  constante. Pero  $r(z_1) = cL_1(z_1) = 0$ , luego  $c = 0$  ya que  $L_1(z_1) \neq 0$ . Concluimos que  $r = 0$  y  $N$  es  $R$ -unisolviente. Las tres funciones base para esta elección de grados de libertad se encuentran usando Ec. (2.5), tomando  $r = a + bx + cy$ . Aplicar los grados de libertad a este polinomio conduce a un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas, los coeficientes  $a, b$  y  $c$ . Su resolución usando secuencialmente como lado derecho las columnas de la matriz  $I_{3 \times 3}$  nos da la respuesta buscada. En la Fig.2.1b se elige otro conjunto de grados de libertad  $\Phi_i(r) = r(m_i)$ ,  $1 \leq i \leq 3$ , donde

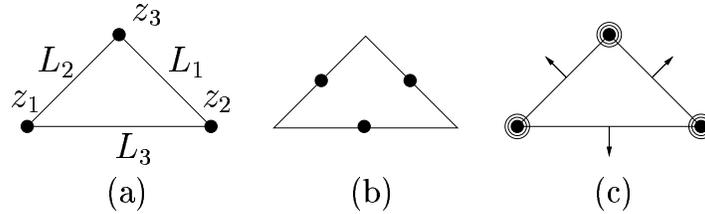


Figura 2.1: (a) Triángulo lineal de Lagrange. Observar que “•” significa evaluación en el punto donde está ubicado el círculo. (b) Triángulo lineal no-conforme de Crouzeix-Raviart. (c) Triángulo de Argyris. Aquí la circunferencia interna indica evaluación del gradiente en el vértice, y la externa la evaluación de las tres derivadas parciales en el mismo punto, la flecha indica evaluación de la derivada normal en el punto medio.

$m_i$  son los puntos medios de los lados del triángulo. Conectando los puntos medios con rectas, determinamos un triángulo en donde  $r$  se anula en los vértices, repitiendo el argumento anterior este conjunto  $N'$  es también unisolvante. Como vemos en la Fig.2.1c existen conjuntos de grados de libertad más complicados que los anteriores. En este caso son 21, y es unisolvante sobre el conjunto de polinomios de grado menor o igual que 5.

Dado un elemento finito  $(K, R, N)$  en el que  $N$  es  $R$ -unisolvante, y una función  $v : K \rightarrow \mathbb{R}$  definimos al  $R$ -interpolante local de  $v$  por

$$\Pi_K v = \sum_{i=1}^m \Phi_i(v) r_i \quad (2.7)$$

o equivalentemente a través de las siguientes condiciones:

$$\Pi_K v \in R \quad \text{y} \quad \Phi_i(\Pi_K v) = \Phi_i(v), \quad 1 \leq i \leq m. \quad (2.8)$$

Esta definición implica que  $\Pi_K v$  es el único elemento de  $R$  que toma los mismos valores que  $v$  en los nodos. Por su parte, el interpolante global en el

dominio  $\Omega$  se define por  $\Pi_K f|_{K_i} = \Pi_{K_i} f \quad \forall K_i$  para  $f$  suficientemente regular. Los interpolantes se utilizan cuando se estudia el error cometido al aproximar la solución de manera discreta.

Mencionamos más arriba que estos aspectos básicos establecen al método de elementos finitos en su forma más simple; estamos interesados, sin embargo, en considerar algunas variantes:

- Se puede partir de un problema variacional diferente a (2.1), como en el caso de los problemas mixtos; con este nombre se denomina a una variedad de métodos de elementos finitos en el que se tiene más de un espacio aproximante. Una característica de los métodos de elementos finitos mixtos es que no todos los espacios aproximantes conducen a soluciones discretas convergentes.
- El espacio  $V^h$  en el que se busca la solución discreta puede no ser un subespacio del espacio  $V$ . Esto ocurre, por ejemplo, cuando las funciones del espacio  $V^h$  no cumplen con las condiciones de continuidad adecuadas entre elementos adyacentes, dando lugar a los problemas no conformes. En general estos elementos tienen algunas ventajas -por su simplicidad- sobre los conformes pero en algunos casos pueden dar, como en el caso anterior, soluciones divergentes o converger a la solución incorrecta.

Son métodos mixtos y mixtos no conformes los que vamos a describir en las próximas secciones, aplicándolos a la resolución de las ecuaciones de Maxwell armónicas. No detallaremos en esta instancia los modelos que estamos tratando, tarea a la que nos abocaremos en los próximos capítulos.

## 2.2 Caso bidimensional

Previo a la formulación de nuestro problema, vamos a introducir alguna notación. Para todo entero no negativo  $s$ ,  $(H^s(\Omega), \|\cdot\|_s)$  denota el espacio de Sobolev usual sobre  $\Omega$  (Adams, 1976). En particular  $H^0(\Omega) = L^2(\Omega)$  y  $\|\cdot\|_0$  es la norma usual en  $L^2$ , inducida por el producto interno  $(v, w)_\Omega = \int_\Omega v\bar{w}dx$ , donde la barra indica complejo conjugado. Si  $\Gamma$  está contenida en el borde

$\partial\Omega$  del dominio  $\Omega$ , definimos  $\langle v, w \rangle_\Gamma = \int_\Gamma v \bar{w} ds$  para el producto interno en  $L^2(\Gamma)$ , con la norma asociada por  $\|\cdot\|_{0,\Gamma} = \langle \cdot, \cdot \rangle_\Gamma^{\frac{1}{2}}$ .

Para una función escalar  $\varphi(x, z)$  definimos

$$\text{curl } \varphi = \left( -\frac{\partial \varphi}{\partial z}, \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right), \quad (2.9)$$

y para un vector  $\mathbf{w} = (w_x, w_z)$  en el plano  $xz$  definimos el escalar

$$\text{curl } \mathbf{w} = \frac{\partial w_x}{\partial z} - \frac{\partial w_z}{\partial x}. \quad (2.10)$$

Sea también

$$H(\text{curl}, \Omega) = \{ \boldsymbol{\rho} \in (L^2(\Omega))^2 : \text{curl } \boldsymbol{\rho} \in (L^2(\Omega))^2 \}, \quad (2.11)$$

un espacio de Hilbert con producto interno y norma

$$(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\psi})_{H(\text{curl}, \Omega)} = (\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\psi}) + (\nabla \times \boldsymbol{\rho}, \nabla \times \boldsymbol{\psi}) \quad \|\boldsymbol{\rho}\|_{H(\text{curl}, \Omega)} = (\|\boldsymbol{\rho}\|_0^2 + \|\text{curl } \boldsymbol{\rho}\|_0^2)^{\frac{1}{2}}. \quad (2.12)$$

### 2.2.1 El modo TM

Estamos interesados en encontrar una aproximación discreta a la solución  $(\mathbf{U}, v)$  del problema:

$$\sigma \mathbf{U} - \text{curl } v = -\mathbf{g}, \quad \text{en } \Omega \quad (2.13a)$$

$$\text{curl } \mathbf{U} + i\omega\mu v = 0, \quad \text{en } \Omega \quad (2.13b)$$

$$(1 - i) \sqrt{\frac{\sigma}{2\omega\mu}} \mathbf{U} \cdot \boldsymbol{\tau} + v = 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega \equiv \Gamma, \quad (2.13c)$$

que es el correspondiente al modo *TM* de las ecuaciones de Maxwell armónicas para campos secundarios en un dominio bidimensional; veremos en detalle la formulación del modelo que conduce a estas ecuaciones en el Capítulo 3. El dominio  $\Omega$  es una región rectangular del plano  $xz$ ,  $\boldsymbol{\tau}$  es el vector tangente al borde  $\Gamma$  tomado en sentido horario,  $\mathbf{g} = (g, 0)$  y se asume que la conductividad está acotada superior- e inferiormente por números positivos.

Si testamos la Ec. (2.13a) usando  $\boldsymbol{\psi} \in H(\text{curl}, \Omega)$  como función de prueba

e integramos por partes haciendo uso de la Ec. (2.13c) (Girault y Raviart, 1981) y testeamos la Ec. (2.13b) usando a  $\varphi \in L^2(\Omega)$  como función de prueba obtenemos el siguiente *problema variacional mixto*:

Encontrar  $(\mathbf{U}, v) \in H(\text{curl}, \Omega) \times L^2(\Omega)$  tales que

$$(\sigma \mathbf{U}, \boldsymbol{\psi}) - (v, \text{curl } \boldsymbol{\psi}) + \langle (1-i)a\mathbf{U} \cdot \boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\psi} \cdot \boldsymbol{\tau} \rangle = -(g, \boldsymbol{\psi}),$$

$$\boldsymbol{\psi} \in H(\text{curl}, \Omega), \quad (2.14a)$$

$$(\text{curl } \mathbf{U}, \varphi) + (i\omega\mu v, \varphi) = 0, \quad \varphi \in L^2(\Omega), \quad (2.14b)$$

donde usamos  $a = \left(\frac{\sigma}{2\omega\mu}\right)^{\frac{1}{2}}$ . Santos (1998) definió una familia de elementos finitos para encontrar la solución discreta a este problema; el desarrollo siguiente se basa en sus ideas.

Definimos una partición del dominio  $\Omega$  en un conjunto de rectángulos  $\Omega_j$  de diámetros acotados por  $h$ , de modo tal que cubran a todo el dominio, y que la intersección entre dos subdominios diferentes sea vacía. Existen otras restricciones usuales para mallas de elementos finitos (Brenner y Scott, 1994) que la partición así definida cumple automáticamente. Llamamos además  $\Gamma_j$  al conjunto de cuatro segmentos que forman el borde del elemento  $\Omega_j$ .

Definimos también los espacios

$$V^h = \{ \mathbf{U}^h \in H(\text{curl}, \Omega) : \mathbf{U}^h|_{\Omega_j} \in P_{0,1} \times P_{1,0} \},$$

$$W^h = \{ v^h \in L^2(\Omega) : v^h|_{\Omega_j} \in P_{0,0} \}.$$

$P_{1,0}$  denota los polinomios de grado no mayor que 1 en  $x$  y no mayor que 0 en  $z$ . Sean también  $V_j^h = V^h|_{\Omega_j}$  y  $W_j^h = W^h|_{\Omega_j}$  las restricciones de los espacios  $V^h$  y  $W^h$  al subdominio  $\Omega_j$ . Dado  $\boldsymbol{\psi} \in (H^1(\Omega))^2$ , definimos ahora los grados de libertad sobre  $\Omega_j$  utilizando los cuatro momentos

$$M_{\Gamma_j^s}(\boldsymbol{\psi}) = \left\{ \langle \boldsymbol{\psi} \cdot \boldsymbol{\tau}, f \rangle_{\Gamma_j^s}; f \in P_0(\Gamma_j^s), \quad s = L, R, B, T \right\}. \quad (2.15)$$

Los elementos de la base local se obtienen con esta definición en  $[0, 1]^2$  -el llamado elemento de referencia- y luego mediante traslaciones y escaleos se da la base en cada  $\Omega_j$ . La base de  $V^h$  se obtiene extendiendo cada base local,

$$\begin{array}{cc} \psi^T = & (z, 0) & \psi^B = & (-1 + z, 0) \\ \psi^L = & (0, 1 - x) & \psi^R = & (0, -x) \end{array}$$

Tabla 2.1: Funciones base en  $[0, 1]^2$  para  $V^h$ .

haciéndola nula fuera del dominio correspondiente. Para construir entonces la base de referencia, tomemos un elemento  $r = (a + bz, c + dx)$  de  $P_{0,1} \times P_{1,0}$  y le aplicamos los grados de libertad, obteniendo el sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}. \quad (2.16)$$

Resolver sucesivamente los cuatro sistemas lineales con lado izquierdo dado por la Ec. (2.16), y cuyos lados derechos son las columnas de la matriz  $I_{4 \times 4}$ , o de forma equivalente tomar las columnas de la matriz inversa de la matriz de coeficientes en la Ec. (2.16), nos da los coeficientes de los vectores de la base buscados, que se muestran en la Tabla 2.1. Para el espacio  $W^h$  la elección de la función base es simple, ya que podemos tomar la función característica  $\Theta(x, z)$  del cuadrado de referencia,

$$\Theta(x, z) = \begin{cases} 1 & \text{si } (x, z) \in [0, 1]^2, \\ 0 & \text{en todo otro caso.} \end{cases} \quad (2.17)$$

El elemento finito mixto que queda así definido es unisolvante y conforme en  $H(\text{curl}, \Omega)$ , donde esta última característica implica que las funciones de  $V^h$  tienen componentes tangenciales continuas en los bordes internos  $\Gamma_j$  (Nédélec, 1980). Si bien estos elementos no son tan usuales como los presentados, por ejemplo, en (Lee y Masden, 1990) donde los grados de libertad quedan fijados por evaluación de los polinomios en los vértices del subdominio, tienen la ventaja de poder tratar discontinuidades de las propiedades del medio de forma transparente (Monk, 1992; Monk, 1993).

La aproximación de elementos finitos mixtos de las Ecs. (2.13) está dada por la restricción del sistema (2.14) a los espacios  $V^h \times W^h$ :

Encontrar  $(\mathbf{U}^h, v^h) \in V^h \times W^h$  tales que

$$(\sigma \mathbf{U}^h, \boldsymbol{\psi}) - (v^h, \operatorname{curl} \boldsymbol{\psi}) + \langle (1 - i)a \mathbf{U}^h \cdot \boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\psi} \cdot \boldsymbol{\tau} \rangle = -(\mathbf{g}, \boldsymbol{\psi}), \quad \boldsymbol{\psi} \in V^h, \quad (2.18a)$$

$$(\operatorname{curl} \mathbf{U}^h, \varphi) + (i\omega\mu v^h, \varphi) = 0, \quad \varphi \in W^h. \quad (2.18b)$$

Esta variante, llamada *global*, conduce a un sistema de ecuaciones lineales de solución única con  $3n_x n_z + n_x + n_z$  incógnitas, si  $n_x$  ( $n_z$ ) es el número de subdominios en dirección  $x$  ( $z$ ) respectivamente.

Estamos interesados en un método que sea apto para procesamiento paralelo y que nos permita evitar la resolución de sistemas lineales con un número generalmente elevado de incógnitas; para ello se hace necesaria la introducción de algunos nuevos conceptos.

**Hibridización:** Para obtener un método híbrido a partir del anterior, se remueve la condición de continuidad de las componentes tangenciales de los elementos de  $V^h$  sobre las fronteras interdominios, y se las acopla indirectamente mediante vínculos válidos sobre dichas interfases, cuyo cumplimiento se fuerza a través de la introducción de multiplicadores de Lagrange. Como resultado de esta formulación, pueden hacerse aproximaciones de la solución en el interior de un elemento  $\Omega_j$  independientes de las aproximaciones sobre sus bordes (Carey y Oden, 1983). El planteo híbrido tiene asociado un problema algebraico más simple que, en nuestro caso, al correspondiente a las Ecs. (2.18) (Arnold y Brezzi, 1985), pero se paga el costo de introducir nuevas variables.

**Descomposición de dominio (DD):** La idea general es dividir el dominio en el cual se quiere resolver una ecuación diferencial en varios subdominios, lo que conduce a algoritmos naturalmente paralelables. Si bien los métodos DD surgieron para resolver problemas elípticos, han sido utilizados

con asiduidad para resolver también otros tipos de ecuaciones diferenciales parciales (Keyes et al., 1992; Keyes y Xu, 1994), entre ellas las ecuaciones de Maxwell armónicas (Després et al., 1992). Existen dos tipos de métodos DD, con y sin superposición de dominios. En general los primeros son más simples en el sentido de su implementación, pero son sensibles a discontinuidades en los coeficientes del problema, y duplican los cálculos en las áreas superpuestas, lo que es particularmente costoso en el caso de problemas tridimensionales con gran número de subdominios. Los segundos, por su parte, resuelven las desventajas del caso anterior, pero pueden ser computacionalmente caros.

En el caso que estamos tratando la descomposición del dominio  $\Omega$  coincide con la partición asociada con los espacios  $V^h$  y  $W^h$ , es decir elegimos una descomposición donde los dominios no se superponen. Nuestro objetivo es resolver localmente, en cada  $\Omega_j$ , las ecuaciones (2.13), es decir

$$\sigma \mathbf{U}_j - \text{curl } v_j = -\mathbf{g}_j, \quad \text{en } \Omega_j \quad (2.19a)$$

$$\text{curl } \mathbf{U}_j + i\omega\mu v_j = 0, \quad \text{en } \Omega_j \quad (2.19b)$$

$$(1-i)\sqrt{\frac{\sigma}{2\omega\mu}} \mathbf{U}_j \cdot \boldsymbol{\tau}_j + v_j = 0 \quad \text{sobre } B_j^a, \quad (2.19c)$$

donde utilizamos  $B_j^a = \Gamma \cap \Gamma_j$ . Claro que en los bordes internos deben imponerse condiciones de consistencia, tanto para  $\mathbf{U}_j$  como para  $v_j$ . Las condiciones utilizadas son la continuidad de la componente tangencial de  $\mathbf{U}_j$  y la continuidad de  $v_j$  a través de todas las fronteras  $\Gamma_j$ , tales que  $\Gamma_j \cap \Gamma = \phi$ , es decir en todos los segmentos, que formando parte del borde de los dominios  $\Omega_j$  no son también parte del borde externo. Ambas condiciones pueden ser expresadas equivalentemente mediante las condiciones de borde de Robin (Douglas et al., 1993b; Kim, 1995)

$$v_j + \beta_{jk} \mathbf{U}_j \cdot \boldsymbol{\tau}_j = -\beta_{jk} \mathbf{U}_k \cdot \boldsymbol{\tau}_k + v_k \quad \text{sobre } \Gamma_{jk}, \quad \Gamma_{jk} \subset \Gamma_j, \quad (2.20a)$$

$$v_k + \beta_{jk} \mathbf{U}_k \cdot \boldsymbol{\tau}_k = -\beta_{jk} \mathbf{U}_j \cdot \boldsymbol{\tau}_j + v_j \quad \text{sobre } \Gamma_{kj}, \quad \Gamma_{kj} \subset \Gamma_k, \quad (2.20b)$$

donde  $\beta_{jk}$  es un parámetro de relajación complejo con parte real positiva y parte imaginaria negativa, que se introduce para acelerar la convergencia.

Aquí denotamos por  $\Omega_k$  a los vecinos del dominio  $\Omega_j$ , y denominamos  $\Gamma_{jk}$  al segmento compartido por los dominios adyacentes  $\Omega_j$  y  $\Omega_k$ . Debe tenerse cuidado al considerar los bordes, puesto que  $|\Gamma_{jk}| = |\Gamma_{kj}|$ , pero la dirección del vector tangente cambia a cada lado de los mismos.

La forma variacional del problema con descomposición de dominio se obtiene de las Ecs. (2.19) en forma análoga al caso global, observando en este caso que en la integración por partes deben ser tenidas en cuenta también las interfases internas. Su formulación es la siguiente: En todo  $\Omega_j$  encontrar  $(\mathbf{U}_j, v_j)$  tal que

$$\begin{aligned} & (\sigma \mathbf{U}_j, \boldsymbol{\psi})_{\Omega_j} - (v_j, \text{curl } \boldsymbol{\psi})_{\Omega_j} - \sum_{\Gamma_{jk} \cap \Gamma^k = \phi} \langle v_j, \boldsymbol{\psi} \cdot \boldsymbol{\tau}_j \rangle_{\Gamma_{jk}} + \\ & \langle (1 - i)a \mathbf{U}_j \cdot \boldsymbol{\tau}_j, \boldsymbol{\psi} \cdot \boldsymbol{\tau}_j \rangle_{B_j^s} = -(\mathbf{g}, \boldsymbol{\psi})_{\Omega_j}, \quad \boldsymbol{\psi} \in H(\text{curl}, \Omega_j), \end{aligned} \quad (2.21a)$$

$$(\text{curl } \mathbf{U}_j, \varphi)_{\Omega_j} + (i\omega\mu v_j, \varphi)_{\Omega_j} = 0, \quad \varphi \in L^2(\Omega_j). \quad (2.21b)$$

Reemplazamos ahora  $v_j$  en el tercer término del lado izquierdo de la Ec. (2.21a) por la expresión que se obtiene despejándolo de Ec. (2.20a), y luego pasamos al lado derecho de (2.21a) todos los términos que involucran a dominios vecinos del  $\Omega_j$ , ya que, como mencionamos anteriormente, el objetivo de la técnica de descomposición de dominio es localizar los cálculos correspondientes a cada subdominio. Es natural en esta instancia sugerir la construcción de la solución del problema planteado de esta manera en forma iterativa, asumiendo que los vecinos a  $\Omega_j$  -el lado derecho del sistema de ecuaciones- yacen un nivel atrasados. De esta manera el problema queda planteado como sigue: eligiendo arbitrariamente  $(\mathbf{U}_j^0, v_j^0)$ , se computan  $(\mathbf{U}_j^{n+1}, v_j^{n+1})$  mediante las ecuaciones

$$\begin{aligned}
& (\sigma \mathbf{U}_j^{n+1}, \boldsymbol{\psi})_{\Omega_j} - (v_j^{n+1}, \operatorname{curl} \boldsymbol{\psi})_{\Omega_j} \\
& \quad + \sum_{\substack{\mathbf{k} \\ \Gamma_{j\mathbf{k}} \cap \Gamma = \phi}} \langle \beta_{j\mathbf{k}} \mathbf{U}_j^{n+1} \cdot \boldsymbol{\tau}_j, \boldsymbol{\psi} \cdot \boldsymbol{\tau}_j \rangle_{\Gamma_{j\mathbf{k}}} \\
& \quad \quad + \langle (1-i)a \mathbf{U}_j^{n+1} \cdot \boldsymbol{\tau}_j, \boldsymbol{\psi} \cdot \boldsymbol{\tau}_j \rangle_{B_j^c} = \\
& -(\mathbf{g}, \boldsymbol{\psi})_{\Omega_j} - \sum_{\substack{\mathbf{k} \\ \Gamma_{j\mathbf{k}} \cap \Gamma = \phi}} \langle \beta_{j\mathbf{k}} \mathbf{U}_k^n \cdot \boldsymbol{\tau}_k - v_k^n, \boldsymbol{\psi} \cdot \boldsymbol{\tau}_j \rangle_{\Gamma_{j\mathbf{k}}}, \\
& \hspace{20em} \boldsymbol{\psi} \in H(\operatorname{curl}, \Omega_j), \quad (2.22a)
\end{aligned}$$

$$(\operatorname{curl} \mathbf{U}_j^{n+1}, \varphi)_{\Omega_j} + (i\omega\mu v_j^{n+1}, \varphi)_{\Omega_j} = 0, \quad \varphi \in L^2(\Omega_j), \quad (2.22b)$$

Antes de dar la versión discreta del sistema de ecuaciones (2.22) es preciso tener en cuenta que como las funciones del espacio  $W^h$  pueden ser discontinuas en los bordes  $\Gamma_{j\mathbf{k}}$ , imponer las condiciones de consistencia (2.20) implicaría que la condición de continuidad de la componente tangencial de  $\mathbf{U}$  se violaría a menos que la aproximación discreta  $v^h$  sea una constante, caso que obviamente no nos interesa. Hibridizamos (Douglas et al., 1993a; Beckie et al., 1993; Mosé et al., 1994) nuestro problema, incorporando entonces un conjunto de multiplicadores de Lagrange, asociados al valor de  $v_j^h$  sobre los bordes internos.

$$\Lambda^h = \{ \lambda^h : \lambda^h|_{\Gamma_{j\mathbf{k}}} \in P_0(\Gamma_{j\mathbf{k}}), \Gamma_{j\mathbf{k}} \cap \Gamma = \phi \}. \quad (2.23)$$

Se debe notar aquí que los valores que toman los multiplicadores sobre el borde quedan disociados de esta manera del valor de  $v^h$  en el interior del subdominio, y que sobre el borde  $\Gamma_{j\mathbf{k}}$  existen dos multiplicadores, asociados a  $v_j^h$  y a  $v_k^h$  respectivamente, que tienden al mismo valor cuando el método converge; las versiones discretas de las condiciones de consistencia (2.20) se obtienen haciendo los reemplazos pertinentes.

Podemos entonces establecer el algoritmo de elementos finitos mixtos híbrido con descomposición de dominio como sigue: Eligiendo  $(\mathbf{U}_j^{h,0}, v_j^{h,0}, \lambda_{j\mathbf{k}}^{h,0}, \lambda_{\mathbf{k}j}^{h,0}) \in V_j^h \times W_j^h \times \Lambda_{j\mathbf{k}}^h \times \Lambda_{\mathbf{k}j}^h$  arbitrariamente, se computan  $(\mathbf{U}_j^{h,n+1}, v_j^{h,n+1}, \lambda_{j\mathbf{k}}^{h,n+1}) \in$

$V_j^h \times W_j^h \times \Lambda_{jk}^h$  como la solución de las ecuaciones

$$\begin{aligned}
& (\sigma \mathbf{U}_j^{h,n+1}, \boldsymbol{\psi})_{\Omega_j} - (v_j^{h,n+1}, \operatorname{curl} \boldsymbol{\psi})_{\Omega_j} \\
& + \sum_{\Gamma_{jk} \cap \Gamma = \phi} \langle \beta_{jk} \mathbf{U}_j^{h,n+1} \cdot \boldsymbol{\tau}_j, \boldsymbol{\psi} \cdot \boldsymbol{\tau} \rangle_{\Gamma_{jk}} \\
& + \langle (1-i)a \mathbf{U}_j^{h,n+1} \cdot \boldsymbol{\tau}_j, \boldsymbol{\psi} \cdot \boldsymbol{\tau}_j \rangle_{B_j^a} = \\
& -(g, \boldsymbol{\psi})_{\Omega_j} - \sum_{\Gamma_{jk} \cap \Gamma = \phi} \langle \beta_{jk} \mathbf{U}_k^{h,n} \cdot \boldsymbol{\tau}_k - v_k^{h,n}, \boldsymbol{\psi} \cdot \boldsymbol{\tau} \rangle_{\Gamma_{jk}}, \\
& \boldsymbol{\psi} \in V_j^h, \quad (2.24a)
\end{aligned}$$

$$(\operatorname{curl} \mathbf{U}_j^{h,n+1}, \varphi)_{\Omega_j} + (i\omega\mu v_j^{h,n+1}, \varphi)_{\Omega_j} = 0, \quad \varphi \in W_j^h, \quad (2.24b)$$

$$\lambda_{jk}^{h,n+1} = \lambda_{kj}^{h,n} - \beta_{jk}(\mathbf{U}_j^{h,n+1} \cdot \boldsymbol{\tau}_j + \mathbf{U}_k^{h,n} \cdot \boldsymbol{\tau}_k) \quad \text{sobre } \Gamma_{jk}, \quad \Gamma_{jk} \cap \Gamma = \phi. \quad (2.24c)$$

Santos (1998) probó que el método iterativo (2.24) converge a la solución del problema discreto global, y encontró una cota para el error de este último, de orden  $h$  para el caso de polinomios de primer orden para aproximar  $\mathbf{U}$  y funciones constantes a trozos para aproximar  $v$  que aquí describimos.

### 2.2.2 El modo TE

En este caso el problema que queremos aproximar es

$$\operatorname{curl} u + i\omega\mu \mathbf{V} = 0 \quad \text{en } \Omega, \quad (2.25a)$$

$$\operatorname{curl} \mathbf{V} = \sigma u + f \quad \text{en } \Omega, \quad (2.25b)$$

$$(1-i)au - \mathbf{V} \cdot \boldsymbol{\tau} = 0 \quad \text{sobre } \Gamma. \quad (2.25c)$$

Si multiplicamos (2.25a) por  $\boldsymbol{\psi} \in H(\operatorname{curl}, \Omega)$  e integramos por partes, y si testeamos (2.25b) contra  $\varphi \in L^2(\Omega)$ , el problema variacional mixto queda planteado de la siguiente manera: Encontrar  $(\mathbf{V}, u) \in H(\operatorname{curl}, \Omega) \times L^2(\Omega)$

tales que

$$(i\omega\mu\mathbf{V}, \boldsymbol{\psi}) + (u, \operatorname{curl} \boldsymbol{\psi}) + \left\langle \left(\frac{1+i}{a}\right)\mathbf{V} \cdot \boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\psi} \cdot \boldsymbol{\tau} \right\rangle = 0, \\ \boldsymbol{\psi} \in H(\operatorname{curl}, \Omega), \quad (2.26a)$$

$$(\operatorname{curl} \mathbf{V}, \varphi) - (\sigma u, \varphi) = (f, \varphi), \quad \varphi \in L^2(\Omega). \quad (2.26b)$$

A partir de este estado se siguen, con pequeñas variaciones, los pasos descritos en la sección anterior. Cuando aplicamos la descomposición de dominio las condiciones de consistencia en las fronteras internas son la continuidad de  $u$  y la de la componente tangencial de  $\mathbf{V}$ , de modo tal que las condiciones de Robin son en este caso

$$u_j - \beta_{jk}\mathbf{V}_j \cdot \boldsymbol{\tau}_j = u_k - \beta_{jk}\mathbf{V}_k \cdot \boldsymbol{\tau}_k \quad \Gamma_{jk} \subset \Gamma_j, \quad (2.27a)$$

$$u_k - \beta_{jk}\mathbf{V}_k \cdot \boldsymbol{\tau}_k = u_j - \beta_{jk}\mathbf{V}_j \cdot \boldsymbol{\tau}_j \quad \Gamma_{kj} \subset \Gamma_k. \quad (2.27b)$$

Asociando en este caso multiplicadores de Lagrange  $\lambda_{jk}^h \simeq u_j^h$  en la interfases internas  $\Gamma_{jk}$ , el método mixto de elementos finitos híbrido con descomposición de dominio es el siguiente: Se eligen  $(\mathbf{V}_j^{h,0}, u_j^{h,0}, \lambda_{jk}^{h,0}) \in V_j^h \times W_j^h \times \Lambda_{jk}^h \times \Lambda_{kj}^h$  arbitrariamente. Luego, se obtienen  $(\mathbf{V}_j^{h,n+1}, u_j^{h,n+1}, \lambda_{jk}^{h,n+1}) \in V_j^h \times W_j^h \times \Lambda_{jk}^h$  como la solución de las ecuaciones

$$(i\omega\mu\mathbf{V}_j^{h,n+1}, \boldsymbol{\psi})_{\Omega_j} + (u_j^{h,n+1}, \operatorname{curl} \boldsymbol{\psi})_{\Omega_j} \\ + \sum_{\Gamma_{jk} \cap \Gamma = \phi} \langle \lambda_{jk}^{h,n+1}, \boldsymbol{\psi} \cdot \boldsymbol{\tau}_j \rangle_{\Gamma_{jk}} \\ + \left\langle \left(\frac{1+i}{a}\right)\mathbf{V}_j^{h,n+1} \cdot \boldsymbol{\tau}_j, \boldsymbol{\psi} \cdot \boldsymbol{\tau}_j \right\rangle_{B_j^c} = 0, \\ \boldsymbol{\psi} \in V_j^h \quad (2.28a)$$

$$(\operatorname{curl} \mathbf{V}_j^{h,n+1}, \varphi)_{\Omega_j} - (\sigma u_j^{h,n+1}, \varphi)_{\Omega_j} = (f, \varphi)_{\Omega_j}, \\ \varphi \in W_j^h, \quad (2.28b)$$

$$\lambda_{jk}^{h,n+1} = \lambda_{kj}^{h,n} + \beta_{jk}(\mathbf{V}_j^{h,n+1} \cdot \boldsymbol{\tau}_j + \mathbf{V}_k^{h,n} \cdot \boldsymbol{\tau}_k), \text{ sobre } \Gamma_{jk}, \Gamma_{jk} \cap \partial\Omega = \phi. \\ (2.28c)$$

## 2.3 Caso tridimensional

La extensión del problema que tratamos a tres dimensiones, si bien las ideas subyacentes son las mismas, no es inmediata. Antes de avanzar, debemos redefinir algunos conceptos utilizados en la sección anterior. Así el dominio  $\Omega$  es ahora un prisma rectangular, y el borde  $\partial\Omega \equiv \Gamma$  son las seis caras del prisma. La subdivisión del dominio se realiza en paralelepípedos  $\Omega_j$  de volumen  $h_{x_j} \cdot h_{y_j} \cdot h_{z_j}$ ;  $\Gamma_j$  es la frontera del subdominio  $\Omega_j$ . Por  $\Gamma_{jk}$  entenderemos ahora al rectángulo común a los dominios  $\Omega_j$  y  $\Omega_k$ . Nuevamente vale que  $|\Gamma_{jk}| = |\Gamma_{kj}|$ , pero en el primer caso -lado izquierdo de la igualdad- el vector normal unitario  $\boldsymbol{\nu}$  apunta desde  $\Omega_j$  hacia  $\Omega_k$ , y en el segundo, a la inversa. Concomitantemente debemos modificar los espacios  $H(\text{curl}, \Omega)$  y  $L^2(\Omega)$ , ahora

$$H(\text{curl}, \Omega) = \{\varphi \in (L^2(\Omega))^3 : \nabla \times \varphi \in (L^2(\Omega))^3\}. \quad (2.29)$$

Sin detallar el origen del modelo, de lo que nos encargaremos más adelante, establecemos el problema cuya solución  $(\mathbf{U}, \mathbf{V})$  queremos aproximar como

$$\sigma \mathbf{U} - \nabla \times \mathbf{V} = \mathbf{F} \quad \text{en } \Omega, \quad (2.30a)$$

$$i\omega\mu \mathbf{V} + \nabla \times \mathbf{U} = 0 \quad \text{en } \Omega, \quad (2.30b)$$

$$(1 - i)P_\tau a \mathbf{U} + \boldsymbol{\nu} \times \mathbf{V} = 0 \quad \text{sobre } \Gamma, \quad (2.30c)$$

donde  $\boldsymbol{\nu}$  es el vector unitario normal a  $\Gamma$ , y  $P_\tau \boldsymbol{\varphi} = -\boldsymbol{\nu} \times (\boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{\varphi})$ . La prueba de la existencia y unicidad de la solución a este problema está dada en (Santos y Sheen, 2000).

Análogamente al caso bidimensional, para obtener la forma variacional mixta del sistema (2.30), testeamos la Ec. (2.30b) con la función de prueba  $\boldsymbol{\varphi} \in (L^2(\Omega))^3$ , y la Ec. (2.30a) con  $\boldsymbol{\psi} \in H(\text{curl}, \Omega)$ , e integramos por partes haciendo uso de la Ec. (2.30c) (Sheen, 1992). Tenemos entonces que encontrar el par  $(\mathbf{U}, \mathbf{V})$  solución de

$$\begin{aligned} (\sigma \mathbf{U}, \boldsymbol{\psi}) - (\mathbf{V}, \nabla \times \boldsymbol{\varphi}) + \langle (1 - i)P_\tau a \mathbf{U}, P_\tau \boldsymbol{\psi} \rangle &= (\mathbf{F}, \boldsymbol{\psi}) \\ \boldsymbol{\psi} &\in H(\text{curl}, \Omega), \end{aligned} \quad (2.31a)$$

$$(i\omega\mu \mathbf{V}, \boldsymbol{\varphi}) + (\nabla \times \mathbf{U}, \boldsymbol{\varphi}) = 0, \quad \boldsymbol{\varphi} \in (L^2(\Omega))^3. \quad (2.31b)$$

La descripción de los espacios de elementos finitos no conformes que vamos a utilizar en la discretización del problema planteado sigue a (Douglas et al., 1999; Douglas et al., 2000). Uno de los objetivos de usar este tipo de elementos finitos es facilitar los cálculos, relajando la condición de continuidad entre las caras de los subdominios restringiéndola al centro del rectángulo. Para hacerlo correctamente deben utilizarse espacios aproximantes  $Y^h$  y  $Z^h$  de  $H(\text{curl}, \Omega)$  y  $((L^2(\Omega))^3)$  respectivamente con características distintas a los descriptos para el caso bidimensional. Para construir estos espacios de elementos finitos, introducimos los espacios de polinomios  $Q(K) = Q_x \times Q_y \times Q_z$  sobre el cubo de referencia  $K = [-1, 1]^3$ , donde

$$\begin{aligned} Q_x &= \text{Span} \left\{ 1, y, z, \left( y^2 - \frac{5}{3}y^4 \right) - \left( z^2 - \frac{5}{3}z^4 \right) \right\}, \\ Q_y &= \text{Span} \left\{ 1, z, x, \left( z^2 - \frac{5}{3}z^4 \right) - \left( x^2 - \frac{5}{3}x^4 \right) \right\}, \\ Q_z &= \text{Span} \left\{ 1, x, y, \left( x^2 - \frac{5}{3}x^4 \right) - \left( y^2 - \frac{5}{3}y^4 \right) \right\}, \end{aligned}$$

y  $S(K) = S_x \times S_y \times S_z$ , donde

$$\begin{aligned} S_x &= \text{Span} \left\{ 1, y - \frac{10}{3}y^3, z - \frac{10}{3}z^3 \right\}, \\ S_y &= \text{Span} \left\{ 1, z - \frac{10}{3}z^3, x - \frac{10}{3}x^3 \right\}, \\ S_z &= \text{Span} \left\{ 1, x - \frac{10}{3}x^3, y - \frac{10}{3}y^3 \right\}. \end{aligned}$$

Los grados de libertad para  $Q(K)$  son la evaluación en los puntos medios de las caras de las componentes tangenciales,

$$\Phi(\boldsymbol{\psi}) = \{(P_\tau \boldsymbol{\psi})(m_i), i = 1 \dots 6\} \quad (2.32)$$

donde  $m_i$  es el centro de la  $i$ -ésima cara del cubo  $K$ , mientras que para  $S(K)$  están definidos por los momentos

$$\int_K \varphi_l dx dy dz \quad \text{y} \quad \int_K \text{curl} \varphi_l dx dy dz, \quad l = x, y, z, \quad (2.33)$$

Funciones base para  $Q(K)$  y  $S(K)$ 

$\alpha$	$\psi^\alpha$	$\eta$	$\varphi^\eta$
$\mathcal{W}_x$	$(\frac{1}{4} - \frac{y}{2} - \frac{3}{8}(y^2 - \frac{5}{3}y^4 - (z^2 - \frac{5}{3}z^4)), 0, 0)$	1	$(\frac{1}{8}, 0, 0)$
$\mathcal{E}_x$	$(\frac{1}{4} + \frac{y}{2} - \frac{3}{8}(y^2 - \frac{5}{3}y^4 - (z^2 - \frac{5}{3}z^4)), 0, 0)$	2	$(\frac{3}{56}(y - \frac{10}{3}y^3), 0, 0)$
$\mathcal{S}_x$	$(\frac{1}{4} - \frac{z}{2} + \frac{3}{8}(y^2 - \frac{5}{3}y^4 - (z^2 - \frac{5}{3}z^4)), 0, 0)$	3	$(-\frac{3}{56}(z - \frac{10}{3}z^3), 0, 0)$
$\mathcal{N}_x$	$(\frac{1}{4} + \frac{z}{2} + \frac{3}{8}(y^2 - \frac{5}{3}y^4 - (z^2 - \frac{5}{3}z^4)), 0, 0)$	4	$(0, \frac{1}{8}, 0)$
$\mathcal{B}_y$	$(0, \frac{1}{4} - \frac{x}{2} - \frac{3}{8}(x^2 - \frac{5}{3}x^4 - (z^2 - \frac{5}{3}z^4)), 0)$	5	$(0, -\frac{3}{56}(x - \frac{10}{3}x^3), 0)$
$\mathcal{F}_y$	$(0, \frac{1}{4} + \frac{x}{2} - \frac{3}{8}(x^2 - \frac{5}{3}x^4 - (z^2 - \frac{5}{3}z^4)), 0)$	6	$(0, \frac{3}{56}(z - \frac{10}{3}z^3), 0)$
$\mathcal{W}_z$	$(0, 0, \frac{1}{4} - \frac{y}{2} + \frac{3}{8}(x^2 - \frac{5}{3}x^4 - (y^2 - \frac{5}{3}y^4)))$	7	$(0, 0, \frac{1}{8})$
$\mathcal{E}_z$	$(0, 0, \frac{1}{4} + \frac{y}{2} + \frac{3}{8}(x^2 - \frac{5}{3}x^4 - (y^2 - \frac{5}{3}y^4)))$	8	$(0, 0, \frac{3}{56}(x - \frac{10}{3}x^3))$
$\mathcal{S}_y$	$(0, \frac{1}{4} - \frac{z}{2} + \frac{3}{8}(x^2 - \frac{5}{3}x^4 - (z^2 - \frac{5}{3}z^4)), 0)$	9	$(0, 0, -\frac{3}{56}(y - \frac{10}{3}y^3))$
$\mathcal{N}_y$	$(0, \frac{1}{4} + \frac{z}{2} + \frac{3}{8}(x^2 - \frac{5}{3}x^4 - (z^2 - \frac{5}{3}z^4)), 0)$		
$\mathcal{B}_z$	$(0, 0, \frac{1}{4} - \frac{x}{2} - \frac{3}{8}(x^2 - \frac{5}{3}x^4 - (y^2 - \frac{5}{3}y^4)))$		
$\mathcal{F}_z$	$(0, 0, \frac{1}{4} + \frac{x}{2} - \frac{3}{8}(x^2 - \frac{5}{3}x^4 - (y^2 - \frac{5}{3}y^4)))$		

Tabla 2.2: En las funciones base de  $Q(K)$ ,  $\psi^{A_t}$  significa componente  $t$  no nula en el punto medio de la cara  $\mathcal{A}$  del cubo de referencia  $K = [-1, 1]^3$ , ver Fig.2.2 por detalles sobre  $K$ . Puede también verse que el espacio  $S(K)$  es el curl de  $Q(K)$ , una propiedad que deben verificar los espacios de los métodos mixtos.

donde curl debe entenderse bidimensional. Las Ecs. (2.32) y (2.33) proveen los doce (nueve) grados de libertad para determinar unívocamente los elementos de  $Q(K)$  ( $S(K)$ ) respectivamente. Para obtener la bases de estos espacios asociadas a los grados de libertad definidos, procedemos de igual manera que en el caso bidimensional, aplicando los grados de libertad a un elemento genérico, y obtenemos, para el caso de  $Q(K)$  un sistema lineal de doce ecuaciones, y para  $S(K)$  uno de nueve. Las columnas de las matrices inversas de la matrices de coeficientes nos dan los coeficientes de los vectores de la bases mostradas en la Tabla 2.2. Para la definición del espacio  $Y^h$  introducimos el siguiente conjunto de vectores constantes bidimensionales

$$\tilde{\Lambda}^h = \left\{ \tilde{\lambda}^h : \tilde{\lambda}^h|_{\Gamma_{jk}} = \tilde{\lambda}_{jk} \in P_0 \times P_0 \text{ en cada cara } \Gamma_{jk} \text{ de } \Omega_j, \tilde{\lambda}_{jk} + \tilde{\lambda}_{kj} = 0 \right\}.$$

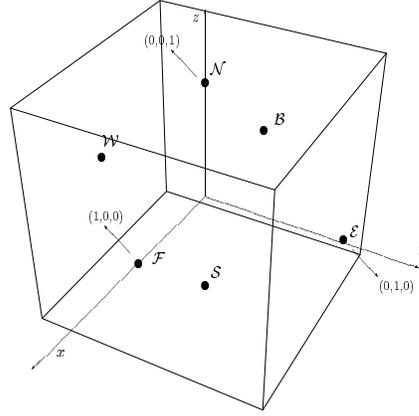


Figura 2.2: Cubo de referencia. Consideremos por ejemplo a  $\psi^{\mathcal{W}_x}$ . En el punto  $(0,-1,0)$ ,  $P_\tau \psi^{\mathcal{W}_x} = (1, 0, 0)$ , mientras que en los restantes puntos medios vale  $(0,0,0)$ . Análoga es la situación con las demás funciones base de  $Q(K)$ . Esta es una propiedad importante para la estimación del error de aproximación del método (Douglas et al., 1999)

Además usamos  $\langle\langle a, b \rangle\rangle_{\Gamma_{j\mathbf{k}}}$  para denotar la aproximación a  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\Gamma_{j\mathbf{k}}}$  mediante la regla del punto medio sobre  $\Gamma_{j\mathbf{k}}$ , es decir, si  $m_{j\mathbf{k}}$  es el punto medio de la cara  $\Gamma_{j\mathbf{k}}$ ,

$$\langle\langle a, b \rangle\rangle_{\Gamma_{j\mathbf{k}}} = |\Gamma_{j\mathbf{k}}| (a\bar{b})(m_{j\mathbf{k}}).$$

Estamos ahora en condiciones de definir los espacios de elementos finitos que utilizaremos en nuestra aproximación del problema (2.30) como

$$Y^h = \left\{ \boldsymbol{\psi} \in (L^2(\Omega_j))^3 : \boldsymbol{\psi}|_{\Omega_j} \in Q(\Omega_j) \text{ y } \sum_{j\mathbf{k}} \langle\langle \boldsymbol{\theta}, P_\tau \boldsymbol{\psi} \rangle\rangle_{\Gamma_{j\mathbf{k}}} = 0, \quad \forall \boldsymbol{\theta} \in \tilde{\Lambda}^h \right\},$$

$$Z^h = \{ \boldsymbol{\varphi} \in (L^2(\Omega_j))^3 : \boldsymbol{\varphi}|_{\Omega_j} \in S(\Omega_j) \}.$$

La última condición en la definición del espacio  $Y^h$  es la que expresa el relajamiento de la restricción de continuidad de las componentes tangenciales de las funciones a través de las caras; ahora sólo se requiere dicha continuidad en promedio y sólo en los puntos medios de las mismas.

Finalmente el procedimiento de elementos finitos mixtos no conformes es la

restricción a los espacios que acabamos de construir de las Ec. (2.31). Por lo tanto debemos encontrar  $(\mathbf{U}^h, \mathbf{V}^h) \in Y^h \times Z^h$  que verifiquen

$$(\sigma \mathbf{U}^h, \boldsymbol{\psi}) - \sum_j (\mathbf{V}^h, \nabla \times \boldsymbol{\varphi})_{\Omega_j} + \langle\langle (1-i)P_\tau a \mathbf{U}^h, P_\tau \boldsymbol{\psi} \rangle\rangle_\Gamma = (\mathbf{F}, \boldsymbol{\psi})$$

$$\boldsymbol{\psi} \in Y^h, \quad (2.34a)$$

$$(i\omega\mu \mathbf{V}^h, \boldsymbol{\varphi}) + \sum_j (\nabla \times \mathbf{U}^h, \boldsymbol{\varphi})_{\Omega_j} = 0, \quad \boldsymbol{\varphi} \in Z^h. \quad (2.34b)$$

En (Douglas et al., 2000) se demuestra que el error asociado a este método es asintóticamente de orden  $h^{1/2}$ .

### 2.3.1 Descomposición de dominio e hibridización

Para obtener la versión con descomposición de dominio, procedemos de manera análoga al caso bidimensional. Restringimos el problema (2.30) a cada uno de los subdominios  $\Omega_j$  de la descomposición, que nuevamente hacemos coincidir con la partición de elementos finitos. Las condiciones de consistencia entre los bordes internos son la continuidad de las componentes tangenciales de las funciones, es decir

$$P_\tau \mathbf{U}_j = P_\tau \mathbf{U}_k \quad \text{sobre } \Gamma_{jk}, \quad (2.35a)$$

$$\boldsymbol{\nu}_j \times \mathbf{V}_j = -\boldsymbol{\nu}_k \times \mathbf{V}_k \quad \text{sobre } \Gamma_{jk}. \quad (2.35b)$$

Nuevamente, estas condiciones pueden ser reescritas como condiciones de transmisión de Robin, que en el presente caso se leen

$$(\boldsymbol{\nu}_j \times \mathbf{V}_j + \beta_{jk} P_\tau \mathbf{U}_j) = -(\boldsymbol{\nu}_k \times \mathbf{V}_k - \beta_{jk} P_\tau \mathbf{U}_k) \quad \text{sobre } \Gamma_{jk} \subset \Gamma_j, \quad (2.36a)$$

$$(\boldsymbol{\nu}_k \times \mathbf{V}_k + \beta_{jk} P_\tau \mathbf{U}_k) = -(\boldsymbol{\nu}_j \times \mathbf{V}_j - \beta_{jk} P_\tau \mathbf{U}_j) \quad \text{sobre } \Gamma_{kj} \subset \Gamma_k, \quad (2.36b)$$

donde ahora  $\beta_{jk}$  es un número complejo con parte real positiva y parte imaginaria negativa o nula. Si seguimos los pasos detallados en el caso bidimensional para obtener la Ec.(2.21), y despejamos de la Ec. (2.36a) a  $\boldsymbol{\nu}_j \times \mathbf{V}_j$  en los bordes internos  $\Gamma_{jk}$  podemos escribir el problema variacional mixto

con descomposición de dominio a nivel diferencial como sigue: Hallar pares  $(\mathbf{U}_j, \mathbf{V}_j)$ ,  $j = 1 \dots J$  solución de

$$\begin{aligned} & (\sigma \mathbf{U}_j, \boldsymbol{\psi})_{\Omega_j} - (\mathbf{V}_j, \nabla \times \boldsymbol{\psi})_{\Omega_j} \\ & + \sum_{\Gamma_{jk} \overset{k}{\cap} \Gamma = \phi} \langle \beta_{jk} (P_\tau \mathbf{U}_j - P_\tau \mathbf{U}_k) + \boldsymbol{\nu}_k \times \mathbf{V}_k, P_\tau \boldsymbol{\psi} \rangle_{\Gamma_{jk}} \\ & + \langle (1-i) P_\tau a \mathbf{U}_j, P_\tau \boldsymbol{\psi} \rangle_{\Gamma_j} = (\mathbf{F}_j, \boldsymbol{\psi})_{\Omega_j}, \quad \boldsymbol{\psi} \in H(\text{curl}, \Omega_j), \end{aligned} \quad (2.37a)$$

$$(i\omega\mu \mathbf{V}_j, \boldsymbol{\varphi})_{\Omega_j} + (\nabla \times \mathbf{U}_j, \boldsymbol{\varphi})_{\Omega_j} = 0, \quad \boldsymbol{\varphi} \in (L^2(\Omega_j))^3. \quad (2.37b)$$

El proceso iterativo motivado por (2.37) se establece pasando como anteriormente los términos que involucran a vecinos del subdominio  $\Omega_j$  al lado derecho de las ecuaciones, y considerando a este último un nivel atrasado. Ahora, para obtener la versión discreta del método iterativo, debemos hibridizar al proceso iterativo propuesto, incorporando un conjunto de multiplicadores de Lagrange asociados con la componente tangencial de  $\mathbf{V}$  evaluada en el punto medio de la interfase -es decir  $\boldsymbol{\lambda} \simeq (\boldsymbol{\nu}_j \times \mathbf{V}_j)(m_{jk})$  sobre  $\Gamma_{jk}$ - para relajar la condición de continuidad impuesta por las condiciones de Robin sobre los elementos de  $Z^h$ ,

$$\Lambda^h = \{ \boldsymbol{\lambda}^h : \boldsymbol{\lambda}^h|_{\Gamma_{jk}} \equiv \boldsymbol{\lambda}_{jk}^h \in P_0(\Gamma_{jk}) \times P_0(\Gamma_{jk}) \}.$$

Como en el caso bidimensional, existen dos multiplicadores sobre cada interfase, pero recordamos que ahora no son escalares, sino vectores bidimensionales.

Estamos ahora en condiciones de escribir el método iterativo de elementos finitos mixtos híbrido con descomposición de dominio DDFE como sigue: Dados valores iniciales arbitrarios  $(\mathbf{U}_j^{h,0}, \mathbf{V}_j^{h,0}, \lambda_{jk}^{h,0}, \lambda_{kj}^{h,0}) \in Y_j^h \times Z_j^h \times \Lambda_{jk} \times \Lambda_{kj}$ , encontrar  $(\mathbf{U}_j^{h,n+1}, \mathbf{V}_j^{h,n+1}, \lambda_{jk}^{h,n+1}) \in Y_j^h \times Z_j^h \times \Lambda_{jk}$  como solución de las ecuaciones

$$\begin{aligned}
& (\sigma \mathbf{U}_j^{h,n+1}, \boldsymbol{\psi})_{\Omega_j} - (\mathbf{V}_j^{h,n+1}, \nabla \times \boldsymbol{\psi})_{\Omega_j} \\
& + \sum_{\substack{\mathbf{k} \\ \Gamma_{j\mathbf{k}} \cap \Gamma = \phi}} \langle \langle \beta_{j\mathbf{k}} P_\tau \mathbf{U}_j^{h,n+1}, P_\tau \boldsymbol{\psi} \rangle \rangle_{\Gamma_{j\mathbf{k}}} + \langle \langle (1-i) P_\tau a \mathbf{U}_j^{h,n+1}, P_\tau \boldsymbol{\psi} \rangle \rangle_{B_j^s} \\
& = (\mathbf{F}_j, \boldsymbol{\psi})_{\Omega_j} + \sum_{\substack{\mathbf{k} \\ \Gamma_{j\mathbf{k}} \cap \Gamma = \phi}} \langle \langle \beta_{j\mathbf{k}} P_\tau \mathbf{U}_k^{h,n} - \boldsymbol{\lambda}_{j\mathbf{k}}^{h,n}, P_\tau \boldsymbol{\psi} \rangle \rangle_{\Gamma_{j\mathbf{k}}}, \quad \boldsymbol{\psi} \in Y_j^h, \quad (2.38a)
\end{aligned}$$

$$(i\omega\mu \mathbf{V}_j^{h,n+1}, \boldsymbol{\varphi})_{\Omega_j} + (\nabla \times \mathbf{U}_j^{h,n+1}, \boldsymbol{\varphi})_{\Omega_j} = 0, \quad \boldsymbol{\varphi} \in Z_j^h \quad (2.38b)$$

$$\boldsymbol{\lambda}_{j\mathbf{k}}^{h,n+1} = -\boldsymbol{\lambda}_{\mathbf{k}j}^{h,n} + \beta_{j\mathbf{k}} (P_\tau \mathbf{U}_k^{h,n} - P_\tau \mathbf{U}_j^{h,n+1})(m_{j\mathbf{k}}), \quad m_{j\mathbf{k}} \in \Gamma_{j\mathbf{k}}. \quad (2.38c)$$

En (Douglas et al., 2000) se prueba que el método iterativo converge a la solución del problema discreto global, y que el error disminuye un factor  $1 - Ch$  en cada iteración, donde  $C$  es una constante independiente de  $h$ , el tamaño de la grilla. Veremos la implementación de este algoritmo en el Capítulo 4, aplicándolo a la resolución del problema directo tridimensional en magnetotelúrica.

# Capítulo 4

## Modelado Tridimensional

En este capítulo resentamos la generalización a tres dimensiones del método analizado en el capítulo anterior. Cobra particular importancia en este caso su comportamiento sobre máquinas paralelas, ya que los algoritmos paralelos brindan la única posibilidad de tratar de modo realista datos que requieren interpretación tridimensional (Wilson et al., 1999). Los resultados obtenidos, validados por comparación con los del “Proyecto internacional para la comparación de métodos de modelado para inducción electromagnética - COMMEMI” \* (Zhdanov et al., 1997), están parcialmente publicados en los trabajos (Zyserman y Santos, 1998), (Zyserman y Santos, 1999) y (Zyserman y Santos, 2000).

### 4.1 El modelo diferencial

Nuevamente, comenzamos con las ecuaciones de Maxwell armónicas para una determinada frecuencia angular  $\omega$  del campo incidente:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \sigma \mathbf{E}, \quad (4.1a)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -i\omega\mu\mathbf{H}, \quad (4.1b)$$

---

\*Este proyecto, de envergadura mundial, contribuyó a la estandarización de resultados para distintos modelos generados por métodos numéricos utilizados en la estimación de parámetros electromagnéticos de la Tierra.

considerándolas en este caso en el dominio tridimensional  $\Omega$  mostrado en la Fig.4.1. Como antes, la capa superior representa el aire y las demás capas sustratos horizontales con distintas conductividades, en los cuales hay inmerso un número cualquiera de inhomogeneidades de volumen total  $\Omega_s$  de forma arbitraria. Estas últimas no necesariamente yacen enteramente dentro de un único sustrato. La distribución de conductividades está determinada por:

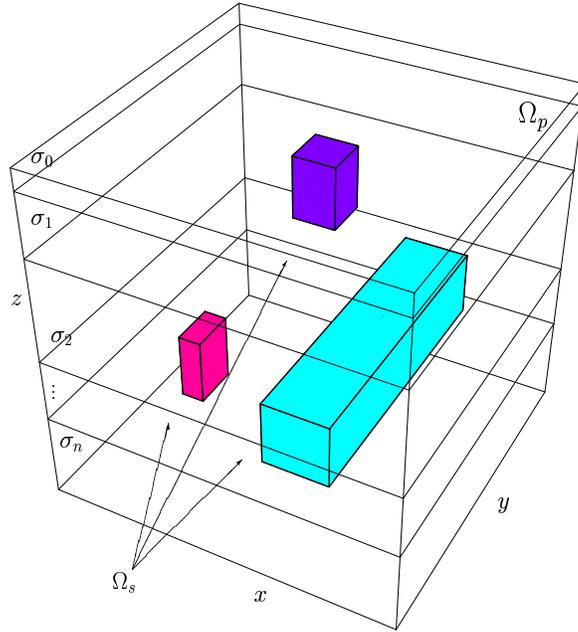


Figura 4.1: Modelo de Tierra tridimensional.

$$\sigma(x, y, z) = \begin{cases} \sigma_p(z) & \text{en } \Omega_p \text{ (capas),} \\ \sigma_p(z) + \sigma_s(x, y, z) & \text{en } \Omega_s \text{ (inhomogeneidades).} \end{cases} \quad (4.2)$$

Formulamos, como en el modelado bidimensional, el modelo diferencial en término de los campos dispersados. Sean  $\mathbf{E}^p$  y  $\mathbf{H}^p$  las soluciones de las Ecs. (4.1) para el modelo de capas horizontales con  $\sigma = \sigma_p(z)$ . Luego, sean  $\mathbf{E}^t = \mathbf{E}^p + \mathbf{E}^s$  y  $\mathbf{H}^t = \mathbf{H}^p + \mathbf{H}^s$  los campos electromagnéticos totales solución de las Ecs. (4.1) en  $\Omega$  con conductividad  $\sigma$  dada por (4.2), inducidos por una onda plana monocromática de frecuencia  $\omega$  que incide sobre la superficie terrestre. Reemplazando estas expresiones en las Ecs. (4.1), puede

verse que los campos secundarios  $\mathbf{E}^s$  y  $\mathbf{H}^s$  debidos a la presencia de las inhomogeneidades, satisfacen las ecuaciones

$$\nabla \times \mathbf{H}^s = -\sigma \mathbf{E}^s - \sigma_s \mathbf{E}^p = \mathbf{F}, \quad (4.3a)$$

$$\nabla \times \mathbf{E}^s = -i\omega\mu\mathbf{H}^s, \quad (4.3b)$$

Para las Ecs. (4.3) utilizamos las condiciones de borde (3.9) que, despreciando las corrientes de desplazamiento, se escriben

$$(1 - i)P_\tau a \mathbf{E}^s + \boldsymbol{\nu} \times \mathbf{H}^s = 0 \quad \text{sobre } \Gamma, \quad (4.4)$$

donde  $a = \left(\frac{\sigma}{2\omega\mu}\right)^{\frac{1}{2}}$ . A partir de ahora, para simplificar la notación, dejamos de lado los superíndices que denotan los campos secundarios.

Como para el modelado bidimensional, también aquí es usual (Mogi, 1996; Rätz, 1999; Sugeng et al., 1999) manipular las Ecs. (4.3) para obtener una ecuación diferencial de segundo orden. Como dijimos anteriormente, esto trae aparejado mayor complejidad numérica, de modo tal que nos inclinamos por la resolución del sistema de ecuaciones (4.3)-(4.4). En el Capítulo 2 mostramos un método de elementos finitos con descomposición de dominio adecuado para tratar este problema, cuya forma final está dada por las Ecs. (2.38). Determinamos ahora el problema algebraico al que nos conduce.

## 4.2 Implementación numérica

Utilizando la misma grilla para la partición de elementos finitos y la descomposición de dominio, dividimos la región  $\Omega$ , como se ve en la Fig. 4.2, en un conjunto de prismas rectangulares no superpuestos entre sí y no necesariamente de iguales dimensiones, de volumen  $h_j \cdot h_k \cdot h_l$ ,  $j = 1 \dots n_x$ ,  $k = 1 \dots n_y$ ,  $l = 1 \dots n_z$ . Como antes, tomamos  $h_j = x_{j+1} - x_j$ ,  $h_k = y_{k+1} - y_k$  y  $h_l = z_{l+1} - z_l$  y denotamos  $\Gamma_{jkl}$  la frontera del subdominio  $\Omega_{jkl}$  conformada por el conjunto de seis rectángulos  $G = \{\mathcal{F}, \mathcal{B}, \mathcal{W}, \mathcal{E}, \mathcal{N}, \mathcal{S}\}$ .

En cada celda  $\Omega_{jkl}$  aproximamos los campos eléctrico y magnético respectivamente, de acuerdo al método descrito en el Capítulo 2 mediante la

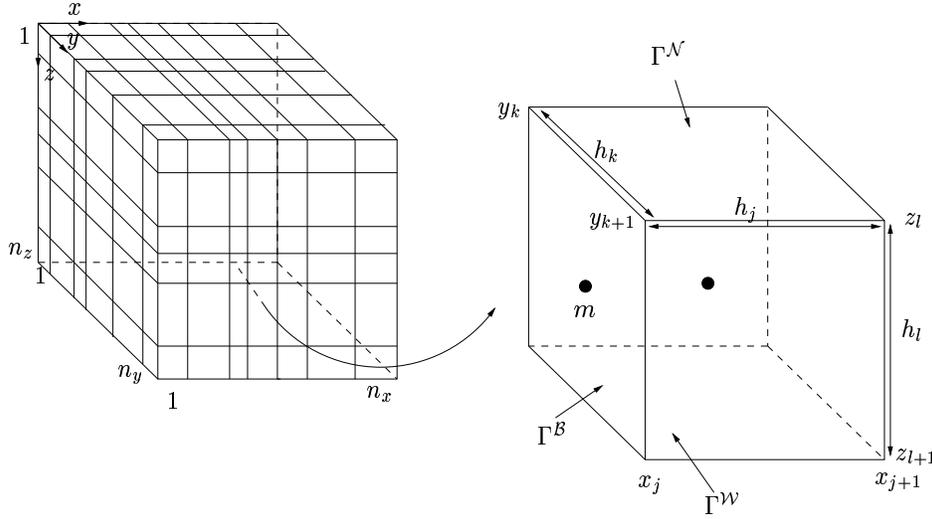


Figura 4.2: a) Una posible grilla para discretizar nuestro problema. b) Detalle del subdominio  $\Omega_{jkl}$ . A los puntos medios de las caras  $m$  están asociados los multiplicadores de Lagrange  $\lambda$ , y los correspondientes coeficientes de  $\mathbf{E}$ , mientras que al centro del dominio asociamos -arbitrariamente- los coeficientes de  $\mathbf{H}$ .

superposición lineal:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{jkl}^{n+1} &= \sum_{\alpha} \mathbf{e}_{jkl}^{\alpha, n+1} \psi^{\alpha}(x', y', z'), \\ \mathbf{H}_{jkl}^{n+1} &= \sum_{\eta} \mathbf{h}_{jkl}^{\eta, n+1} \varphi^{\eta}(x', y', z'), \end{aligned} \quad (4.5a)$$

donde los índices  $\alpha$  y  $\eta$  corren sobre todas las funciones base de los respectivos espacios aproximantes definidas en la Tabla 2.2 y los coeficientes complejos  $\mathbf{e}_{jkl}^{\alpha, n+1}$  y  $\mathbf{h}_{jkl}^{\eta, n+1}$  son los determinados en la iteración  $n + 1$ . De esta manera, en cada subdominio utilizamos doce funciones base para aproximar al campo eléctrico, y nueve para hacer lo propio con el campo magnético. Las variables de las funciones base se encuentran ajustadas de manera que éstas se mantengan dentro del cubo de referencia. Así  $x' = \frac{2x}{h_j} - 1$ , y de igual manera para  $y'$  y  $z'$ .

Estas aproximaciones para los campos se introducen en las Ecs. (2.38) que establecen nuestro algoritmo DDFE. Como las Ecs. (2.38a) y (2.38b) deben

cumplirse para toda la función de prueba  $\psi$  y  $\varphi$  de los espacios de elementos finitos  $Y_j^h$  y  $Z_j^h$ , requerimos que estas ecuaciones se cumplan para cada una de las funciones base de los respectivos espacios  $\psi^\alpha$  y  $\varphi^\eta$ . Por lo tanto reemplazamos estas funciones, referidas al dominio  $\Omega_{jkl}$ , por las enumeradas en la Tabla 2.2. Con estas consideraciones, suponiendo que la conductividad se considera constante en cada subdominio, y aproximando las integrales de superficie por la regla del punto medio <sup>†</sup> reducimos el sistema de ecuaciones (2.38) a un sistema lineal de 21 incógnitas en cada subdominio y para cada iteración. Sin embargo, la dimensión de este problema puede ser reducida, ya que con la elección realizada de las funciones base del campo magnético el primer término de la Ec. (2.38b) resulta diagonal, lo que permite obtener los coeficientes  $\mathbf{h}_{jkl}^{\eta, n+1}$  en término de los  $\boldsymbol{\epsilon}_{jkl}^{\alpha, n+1}$ . Reemplazando en la Ec. (2.38a) obtenemos un sistema lineal de 12 ecuaciones con 12 incógnitas para los coeficientes del campo eléctrico:

$$\mathbf{C}_{jkl} \boldsymbol{\epsilon}_{jkl}^{n+1} = \mathbf{b}_{jkl}^n. \quad (4.6)$$

Las matrices de coeficientes no cambian a lo largo del procedimiento iterativo mientras que los vectores  $\mathbf{b}_{jkl}^n$  deben ser recalculados en cada iteración; en el Apéndice B mostramos el sistema lineal de forma explícita.

Debemos obtener por último la versión discreta de la Ec. (2.38c), tarea fácilmente realizable a partir de las Ecs. (4.5). Debe notarse aquí que en realidad la Ec. (2.38c) son seis ecuaciones vectoriales, ya que por ella estamos indicando la actualización de los multiplicadores de Lagrange bidimensionales asociados al valor de componente tangencial del campo magnético en los puntos medios de las seis caras del dominio  $\Omega_{jkl}$ .

Proponemos entonces nuestro algoritmo iterativo de elementos finitos mixtos no conformes híbrido con descomposición de dominio como sigue:

- 
1. Elegir valores iniciales  $(\boldsymbol{\epsilon}_{jkl}^{\alpha, 0}, \boldsymbol{\lambda}_{jkl}^{s, 0}, s \in \mathbb{G})$  para las incógnitas en todas las celdas  $\Omega_{jkl}$ .

---

<sup>†</sup>Es decir, utilizamos  $\int_A fg dS \approx |A| fg(m)$ , donde  $|A|$  es el área de la superficie  $A$ , y  $m$  es su punto medio.

2. Para todos los dominios  $\Omega_{jkl}$

Resolver el sistema lineal  $\mathbf{C}_{jkl} \mathbf{e}_{jkl}^{n+1} = \mathbf{b}_{jkl}^n$ .

Computar los  $\lambda_{jkl}^{s,n+1}$ ,  $s \in \mathbf{G}$ .

Recalcular  $\mathbf{b}_{jkl}^n$ .

3. Chequear convergencia. Si no ha sido alcanzada, ir al paso 2.

---

Una vez que el algoritmo ha convergido, los coeficientes  $\mathbf{h}$  del campo magnético se calculan a partir de los del eléctrico, tal como expresamos más arriba.

Elegimos el parámetro  $\beta$  en analogía al caso bidimensional, es decir

$$\beta_{jkl}^s = \frac{(1-i)}{2} (a_{jkl} + a_{(jkl)^*}), \quad s \in \mathbf{G}, \quad (4.7)$$

donde el asterisco indica que el coeficiente  $a$  está calculado utilizando valores de la conductividad del dominio correspondiente (según el valor de  $s$ ) de los adyacentes al  $\Omega_{jkl}$ , es decir si  $s = \mathcal{F}$ ,  $a_{(jkl)^*} = a_{j+1kl}$ . Los valores iniciales para todas las incógnitas se toman nulos.

### Aceleración de la convergencia

En el modelado tridimensional, como en el bidimensional, relajamos los coeficientes del campo eléctrico y los multiplicadores de Lagrange según la Ec. (3.21).

Para la manera de subdividir el dominio  $\Omega$  mostrada en la Fig. 4.2, llamada *masiva*, existen copias de los multiplicadores de Lagrange y de los coeficientes del campo eléctrico  $\mathbf{E}$  a ambos lados de las caras de los subdominios, a excepción claro está, del borde computacional. Es posible disminuir el número de incógnitas modificando la forma de particionar el dominio, generando las llamadas *tiras* ó *papas fritas* (Kim, 1995). Esto significa hacer global la partición de elementos finitos y consecuentemente la descomposición del dominio  $\Omega$  en alguna dirección coordinada. De esta manera se determinan, si tomamos el eje  $x$  para construir las tiras,  $n_y \cdot n_z$  dominios globales, eliminándose las interfases  $\mathcal{F}$ - $\mathcal{B}$  entre los dominios en la dirección elegida, de modo que existan

sólo dos coeficientes para el campo eléctrico en cada una de esas interfases, y desaparecen allí los multiplicadores de Lagrange. Si en el caso masivo para  $n_x \cdot n_y \cdot n_z$  dominios existen  $12 n_x$  coeficientes de campo eléctrico y  $6 n_x$  multiplicadores  $\lambda$  para cada par  $k, l$ , con esta nueva forma de partición tenemos  $10 n_x + 2$  coeficientes y  $4 n_x$  multiplicadores por tira.

El precio que se paga con esta variante es que ya no se resuelven sistemas lineales de  $12 \times 12$ , sino que ahora tenemos  $n_y \cdot n_z$  sistemas lineales  $\tilde{\mathbf{C}}_{kl}^{n+1} = \tilde{\mathbf{b}}_{kl}^n$  de orden dado por el número de coeficientes del campo eléctrico.

Sobre esta nueva formulación podemos aplicar el método de resolución blanco-negro, asignando un color diferente a cada tira de forma alternada.

El algoritmo que implementamos es entonces el siguiente:

1. Elegir valores iniciales  $(\epsilon_{jkl}^{\alpha,0}, \lambda_{jkl}^{s,0}, s \in G)$  para las incógnitas en todas las tiras.

2. Para todas las tiras blancas

Resolver el sistema lineal  $\tilde{\mathbf{C}}_{jkl} \tilde{\epsilon}_{kl}^{n+1} = \mathbf{b}_{jkl}^n$ . Relajar los coeficientes calculados.

Computar los  $\lambda_{jkl}^{s,n+1}, s \in G$ . Relajar los multiplicadores calculados.

Recalcular  $\mathbf{b}_{jkl}^n$ .

Para todas las tiras negras

Resolver el sistema lineal  $\tilde{\mathbf{C}}_{jkl} \tilde{\epsilon}_{kl}^{n+1} = \mathbf{b}_{jkl}^n$ . Relajar los coeficientes calculados.

Computar los  $\lambda_{jkl}^{s,n+1}, s \in G$ . Relajar los multiplicadores calculados.

Recalcular  $\mathbf{b}_{jkl}^n$ .

3. Chequear convergencia. Si no ha sido alcanzada, ir al paso 2.

Para resolver los sistemas lineales en el caso masivo, utilizamos descomposición  $LU$  en la versión que aprovecha la estructura simétrica de las matrices de

coeficientes. En el caso de las tiras, las matrices de coeficientes siguen siendo simétricas, pero ya no son llenas, sino banda de ancho 31. Es conveniente en este caso, ya que las matrices de este tipo son poco pobladas, guardarlas en forma modificada, de modo de utilizar menor cantidad de recurso computacional (Becker et al., 1981). Para resolver los sistemas lineales, utilizamos una variante del método  $LU$ , adecuada para la forma de almacenado utilizada.

Finalmente, paralelamos el algoritmo, siendo el proceso muy similar al caso bidimensional, con la diferencia de que las “fronteras virtuales” entre procesadores ahora son bidimensionales, lo que aumenta el flujo de información entre procesadores. De todas maneras en el proceso de intercambio de datos sólo participan las tiras adyacentes a las fronteras virtuales. El esquema mostrado en la Fig.3.4 es válido también en este caso, si se consideran los gráficos como una vista frontal de las tiras. De esta manera puede verse que las papas fritas que están involucradas en el intercambio de datos son las que están en la zona sombreada.

### 4.3 Resultados

Presentamos resultados de dos modelos sugeridos en el proyecto COMMEMI (Zhdanov et al., 1997). En la Fig.4.3 se muestra el primer modelo, que consiste de un bloque conductor de 2 S/m inmerso en una Tierra homogénea con conductividad de 0.01 S/m, las medidas del bloque son 1 km  $\times$  2 km  $\times$  2 km. Aunque la estructura del modelo es simple, está caracterizado por un contraste muy grande de conductividades y por la cercanía de la inhomogeneidad a la superficie, lo que dificulta en gran medida los cálculos numéricos.

Para la resolución del Modelo 1 tomamos un dominio cuyas medidas son 16 km  $\times$  16 km  $\times$  12 km; la capa superior es de aire, mide 1 km y tiene una conductividad de  $\sigma_0 = 10^{-7}$  S/m. Este dominio fue dividido en una grilla inhomogénea de 58  $\times$  64  $\times$  32 elementos, siguiendo los criterios del caso bidimensional para su construcción. Se consideraron 2 frecuencias: 10 Hz para

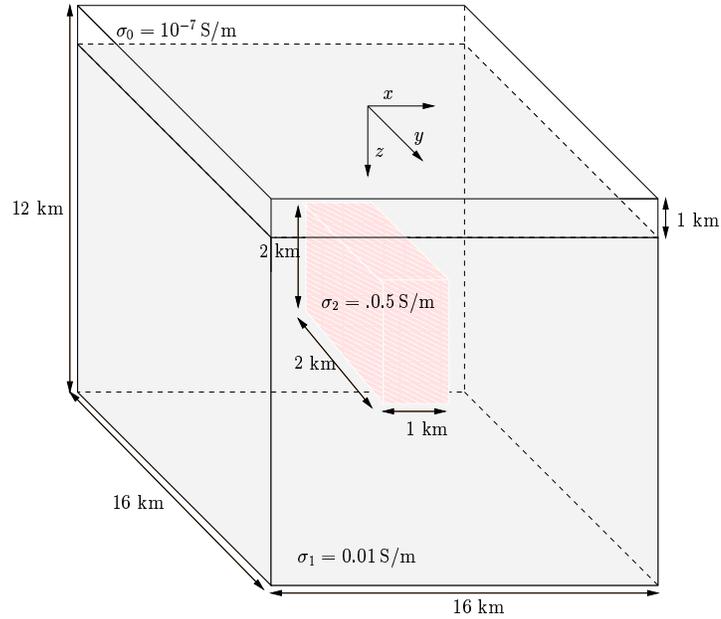


Figura 4.3: Modelo 1.

observar el comportamiento del método en presencia de campos con fuerte decaimiento, y 0.1 Hz para chequear la capacidad del algoritmo numérico para tratar con una solución cuasi estacionaria; con esta frecuencia también puede estudiarse el comportamiento de las condiciones de borde. La Fig.4.4 muestra las resistividades aparentes  $\rho_{xy}^a$  y  $\rho_{yx}^a$  correspondientes a polarizaciones  $\mathbf{E} = (E, 0, 0)$ ,  $\mathbf{H} = (0, H, 0)$  (modo XY, correspondiente al modo *TM* para modelado bidimensional) y  $\mathbf{E} = (0, E, 0)$ ,  $\mathbf{H} = (H, 0, 0)$  (modo YX, correspondiente al modo *TE* en dos dimensiones) respectivamente. Los resultados del trabajo de referencia son presentados como barras de error, tomando como puntos medios el valor medio de los datos luego de haber eliminado los más alejados de la media original. La longitud de las barras es  $2\delta_1$ , es decir, dos veces la desviación standard del conjunto de datos reducido. Los resultados obtenidos están en general en muy buen acuerdo con los de referencia. Tomando como origen de coordenadas el punto sobre la superficie de la Tierra de tal manera que el eje  $z$  pase por el centro de la

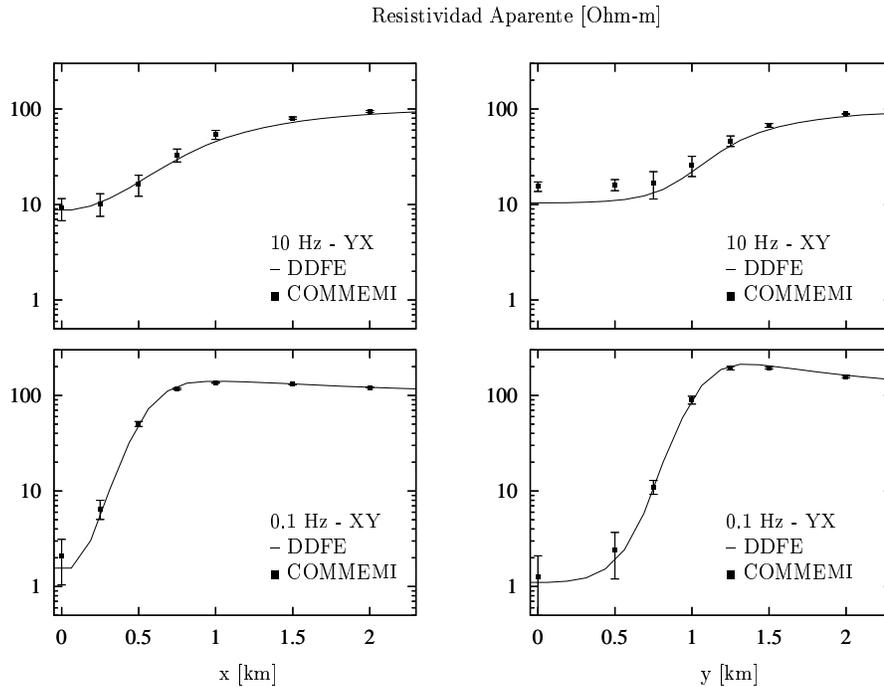


Figura 4.4: Resultados del Modelo 1.

inhomogeneidad y midiendo los campos sobre la superficie, los gráficos a la izquierda son medidas realizadas a lo largo del eje  $x$  con  $y=0$  y los situados a la derecha muestran medidas a lo largo del eje  $y$  para  $x=0$ .

Existen en el modelado tridimensional efectos que modifican el comportamiento de los campos electromagnéticos, y por ende la distribución de conductividades estimada respecto del modelado bidimensional. Los más importantes son la distorsión horizontal y vertical de las corrientes, la inducción local y la acumulación de cargas en los bordes de las anomalías (Vozoff, 1991). El último suele ser relevante a frecuencias muy bajas, mientras que los primeros disminuyen al aumentar la frecuencia (Ting y Hohmann, 1981). En cuanto al primer efecto, las corrientes ya no están constreñidas a fluir solamente en dirección paralela o perpendicular al eje de simetría, de modo tal que se observan efectos de “atracción” de corrientes cuando se está en presencia de anomalías conductivas en medios resistivos, y también flujo de corrientes

alrededor de anomalías resistivas en medios más conductivos. Estos efectos a su vez se ven influenciados por las conductividades relativas de las capas en las que se asume está estratificado el subsuelo (Berdichevsky et al., 1998). En este trabajo se prueba que estimar estructuras tridimensionales a par-

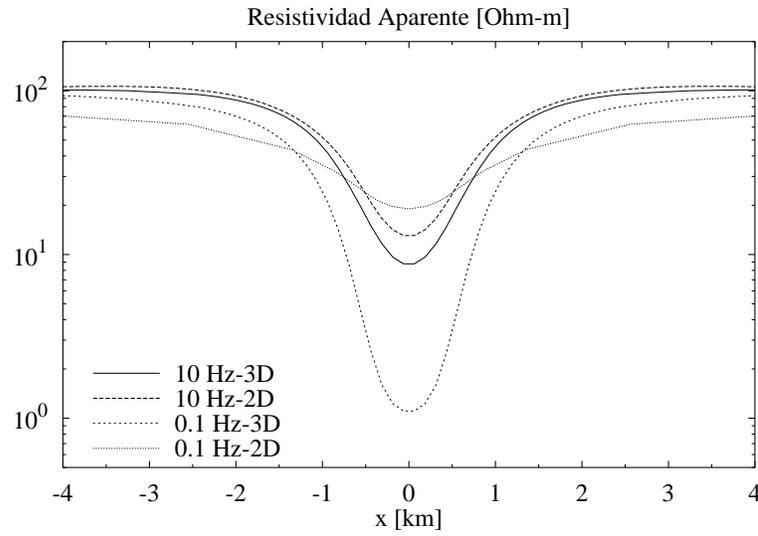


Figura 4.5: Resistividad aparente para el Modelo 1 y su correspondiente bidimensional, obtenidas para frecuencias de 0.1 Hz y 10 Hz

tir de curvas de la resistividad aparente bidimensionales, práctica adecuada cuando se tiene a-priori información de la región en estudio, puede conducir a gruesos errores en otros casos. Consideremos por ejemplo, las respuestas para la resistividad aparente  $\rho^a$  para el modo YX ( $TE$ ) a 10 Hz y 0.1 Hz, para el Modelo 1 y su correspondiente bidimensional, que pueden observarse en la Fig.4.5. Las medidas se realizan lo largo del eje  $x$ , a  $y = 0$ . A 10 Hz las curvas manifiestan un cierto desacuerdo, que se hace muy marcado para la menor frecuencia considerada, que es cuando el efecto de acumulación de cargas en las caras perpendiculares al flujo de corriente se torna relevante. El segundo modelo resuelto, más complicado que el anterior, consiste en dos bloques de  $20 \text{ km} \times 40 \text{ km} \times 10 \text{ km}$  de conductividades  $\sigma = 1.0 \text{ S/m}$  y

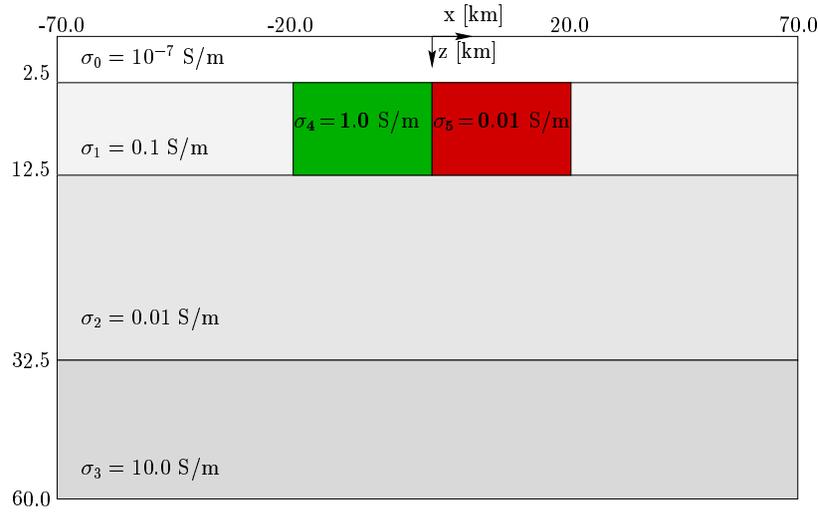


Figura 4.6: Corte en  $y = 0$  del Modelo 2. En la dirección mencionada los bloques miden 40 km, y el dominio 120 km.

$\sigma = 0.01$  S/m que yacen en la capa superior de una Tierra con tres sustratos horizontales de conductividades  $\sigma = 0.1$  S/m,  $\sigma = 0.01$  S/m y  $\sigma = 10.0$  S/m, cuyos espesores son 10 km, 20 km e ilimitado respectivamente. Para nuestro modelo, que se muestra en la Fig.4.6, adosamos la capa de aire de 2.5 km de altura y conductividad igual a la del Modelo 1 por encima de los sustratos, y limitamos la profundidad de la tercer capa a 27.5 km, de modo que la longitud total de nuestro modelo en  $z$  es 60 km. La extensión en el eje  $x$  es 140 km y en el eje  $y$  120 km.

La dificultad de este modelo reside básicamente en las grandes variaciones del campo eléctrico que se esperan observar para la polarización XY.

Las Fig.4.7 y Fig.4.8 muestran las resistividades aparentes en superficie, en cortes para  $y=0$  e  $y=30$  km respectivamente obtenidas para una grilla inhomogénea de  $54 \times 56 \times 32$  elementos a una frecuencia de  $10^{-3}$  Hz. El error relativo para detener el proceso se fijó en  $10^{-4}$ , al igual que en el caso anterior.

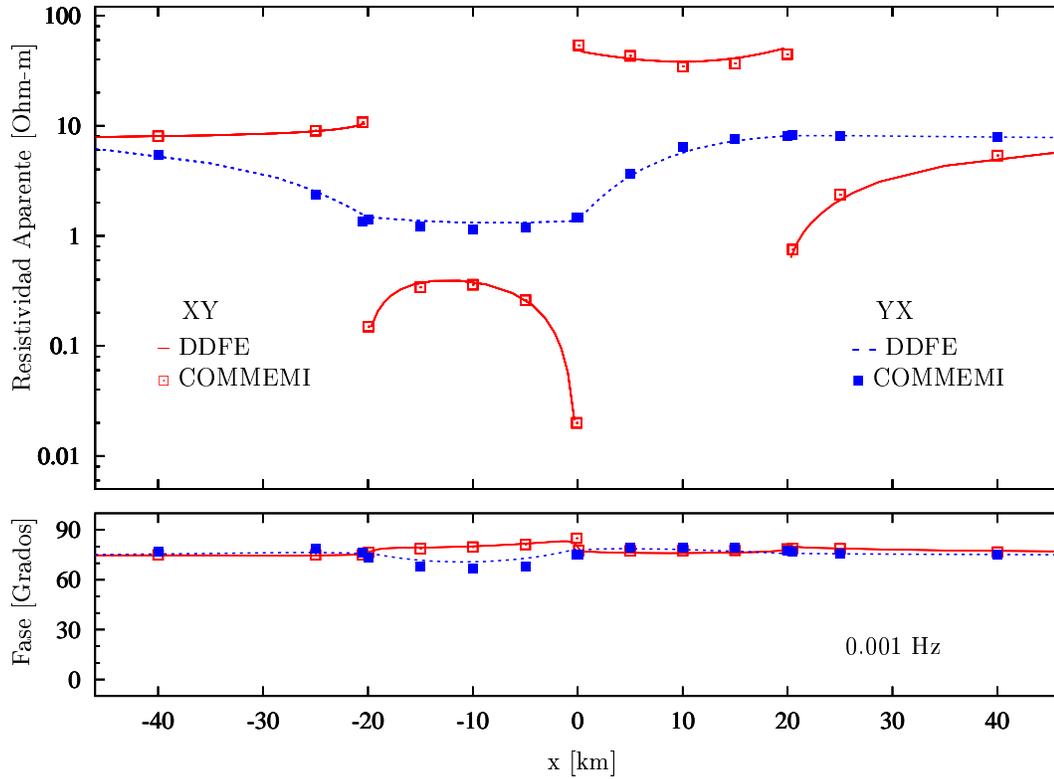


Figura 4.7: Resistividad aparente y fase de la impedancia medidas sobre la superficie, corte en  $y = 0$ .

El COMMEMI reúne varias contribuciones para el Modelo 1 obtenidas con distintos métodos. Sin embargo, para el Modelo 2 solamente un autor contribuyó con datos para el mismo, obtenidos con un método integral (Xiong, 1992b; Xiong y Tripp, 1997). No obstante pueden mencionarse otros algoritmos que solucionan el Modelo 2: Mackie et al. (1993) lo hacen implementando un método de diferencias finitas y Zhdanov y Fang (1996b) tratan el problema con un método integral. Al presente, sin embargo, no sabemos de la existencia de algún otro método de elementos finitos que lo haya resuelto.

En la Tabla 4.1 mostramos el comportamiento de las distintas implementaciones del algoritmo, utilizando el Modelo 1 para una frecuencia de 1 Hz y una grilla homogénea de  $64^3$  elementos, ya que el algoritmo masivo sólo acep-

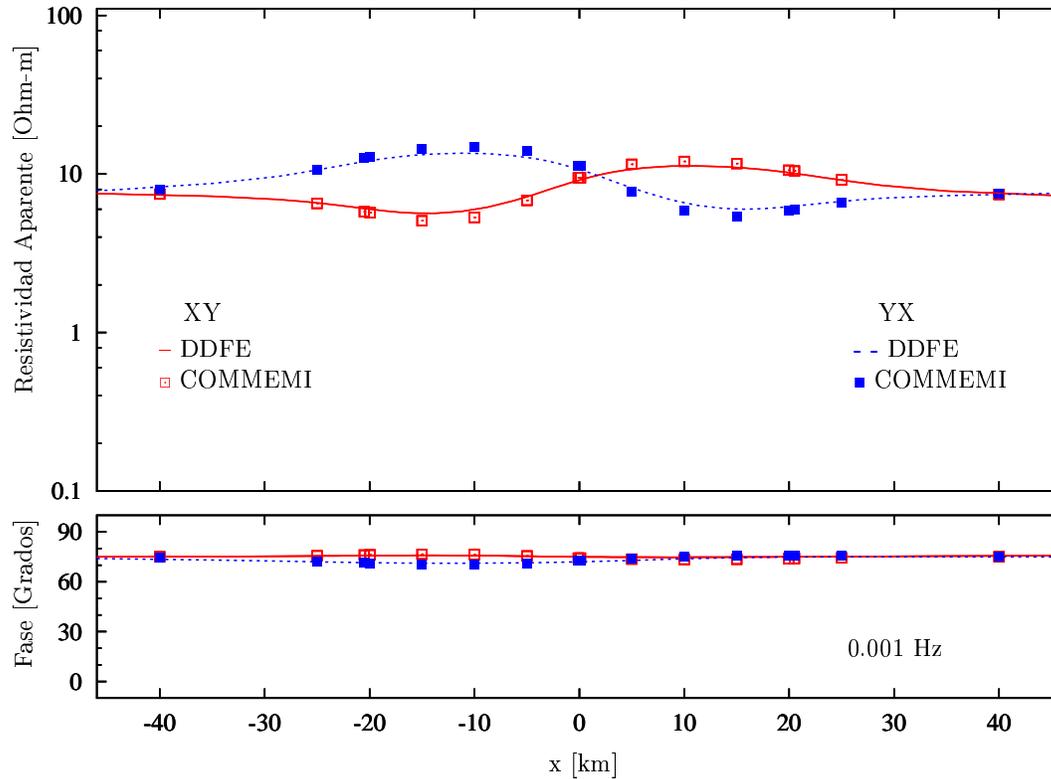


Figura 4.8: Igual que en la figura previa, corte en  $y = 30$  km.

ta mallas de este tipo. Se observa que el algoritmo mejora sustancialmente la velocidad de convergencia al utilizar las tiras y aún más relajando con la técnica de blanco-negro.

La Tabla 4.2 refleja el comportamiento de nuestro algoritmo paralelo en la SP/2 para los modelos mencionados, utilizando la implementación más eficiente.

En la Fig. 4.9 mostramos la aceleración de la misma versión del algoritmo para los dos modelos que estamos analizando. Es esperable que para un tamaño dado de problema, si no se presenta el comportamiento anómalo de superlinealidad, la eficiencia del algoritmo paralelo disminuya. Sin embargo, para el mayor número de procesadores usados en cada modelo, la eficiencia es relativamente alta, de 70 % y 75 % respectivamente, lo que implica que el

Algoritmo	Modo XY	Modo YX
DDFE masivo	2768	2640
DDFE masivo con relajación	341	223
DDFE tiras	489	286
DDFE tiras con relajación y B-N	175	130

Tabla 4.1: Número de iteraciones necesarias para la convergencia en las distintas implementaciones del algoritmo DDFE.

Procesadores	Modelo 1	Modelo 2
1	520.6	2008.5
4	158.3	617.08
8	75.39	312.31
16	39.04	149.84
28	—	85.58
32	20.34	—
56	—	47.44
64	11.65	—

Tabla 4.2: Tiempos de cálculo en segundos para los modelos descritos. En ambos casos resolvemos el modo YX.

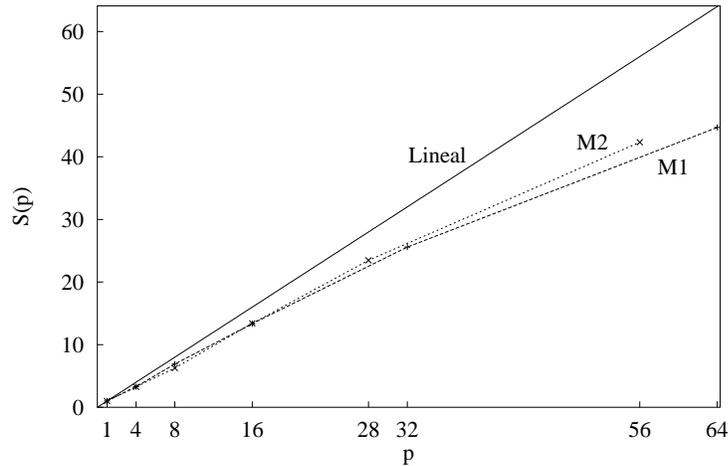


Figura 4.9: Medidas de la aceleración para el algoritmo descrito.

tiempo de cálculo se reduce hasta en un factor 47 en el caso del Modelo 1, de modo que para los tamaños de problema dados, es razonable utilizar el mayor número posible de procesadores.

Vimos sin embargo que de un algoritmo paralelo debe también esperarse que sea escaleable, es decir, que no disminuya su eficiencia a medida que aumentan simultáneamente el tamaño del problema y el número de procesadores. Para analizar al algoritmo DDFE, resolvimos al Modelo 1 con 8 procesadores en una grilla de  $64 \times 64 \times 48$  elementos, lo que equivale a unas  $3.5 \cdot 10^6$  incógnitas, obteniendo una eficiencia  $Q = 0.85$ . Posteriormente duplicamos el número de celdas, y por consiguiente el de incógnitas, utilizando en este caso 16 procesadores. La eficiencia obtenida en este caso fue  $Q = 0.87$ . Si bien no podemos a partir de estos dos casos afirmar categóricamente que en todo problema a tratar el algoritmo se comportará de igual modo, es esperable que la performance no disminuya significativamente, lo que establece un resultado muy alentador para el método desarrollado.

# Conclusiones

Suponiendo que la Tierra puede modelarse como un cuerpo compuesto de diferentes capas horizontales de distintos espesores y conductividades, con anomalías bi- o tridimensionales inmersas en ella, hemos estudiado en el marco de la magnetotelúrica los campos electromagnéticos generados en el subsuelo, cuando una onda electromagnética plana monocromática incide sobre su superficie.

Para calcular los campos en la superficie terrestre, resolvimos numéricamente las ecuaciones de Maxwell armónicas para los campos secundarios expresándolas como un sistema de ecuaciones diferenciales parciales de primer orden. En las fronteras computacionales la solución fue aproximada utilizando condiciones de borde absorbentes de primer orden, lo que reduce en forma significativa los tiempos de cómputo puesto que pueden emplearse dominios relativamente pequeños sin pérdida de exactitud en la solución.

Los algoritmos implementados, que emplean elementos finitos mixtos híbridos conformes -en el caso 2D- y no conformes -en el caso 3D- son iterativos y utilizan la técnica de descomposición de dominio.

A diferencia de los elementos finitos usuales, los aquí utilizados no exigen la continuidad de las componentes normales de los campos, lo que permite modelar sin restricciones contrastes importantes en las conductividades. Por otra parte, la técnica de descomposición de dominio conduce a sistemas lineales de orden reducido, fácilmente solubles por métodos usuales.

Nuestros algoritmos son naturalmente paralelables, proveyendo de esta forma una técnica de resolución rápida, característica particularmente importante

en el caso del modelado tridimensional.

Hemos aplicado estos algoritmos a modelos bi- y tridimensionales propuestos en la literatura, obteniendo en todos los casos resultados que acuerdan con los provistos por métodos alternativos.

En el modelado bidimensional, el algoritmo propuesto presenta en su implementación paralela comportamiento superlineal, lo que implica que puede ser utilizado para resolver estructuras complejas sin pérdida de eficiencia.

En el modelado tridimensional, por primera vez se presenta una solución numérica del modelo “3D-2” propuesto en el “Proyecto internacional para la comparación de métodos de modelado para inducción electromagnética” utilizando un método de elementos finitos, diseñado para ser implementado en computadoras de arquitectura paralela, con tiempos de cómputo que mejoran los de los algoritmos de referencia.

Se observó además que el algoritmo paralelo es escaleable, lo que habilita al método presentado a resolver problemas cada vez más grandes sin pérdida de eficiencia.

De esta manera se abre una nueva posibilidad para el modelado de estructuras tridimensionales empleando elementos finitos, ya que habían sido relegados por las dificultades aparentemente insalvables que representan sus requerimientos de memoria y almacenamiento, así como también relativamente prolongados tiempos de ejecución que hacían inviable la solución de estructuras de interés.

En cuanto a las perspectivas futuras, estos resultados nos inducen a intentar la generalización de los algoritmos aquí descritos a problemas de modelado electromagnético en donde las corrientes de desplazamiento no sean despreciables frente a las de conducción, y en los cuales además se utilizan fuentes finitas modeladas como dipolos eléctricos o magnéticos, o combinaciones de ambos. De esta manera podrían estudiarse fenómenos de propagación de ondas electromagnéticas en el subsuelo, problema de interés para la prospección electromagnética de alta frecuencia.

# Bibliografía

Adams, R. A., 1976, Sobolev spaces: Academic Press.

Alumbaugh, D. L., Prevost, G. A., y Shadid, J.N., 1996, Three-dimensional wide band electromagnetic modeling on massively parallel computers: Radio Science, **31**, 1–23.

Apra, C., Booker, J. R., y Smith, J. T., 1997, The forward problem of electromagnetic induction: accurate finite-difference approximations for two-dimensional discrete boundaries with arbitrary geometry: Geophys. J. Int., **129**.

Arnold, D.N., y Brezzi, F., 1985, Mixed and nonconforming finite element methods: implementation, postprocessing and error estimates: R.A.I.R.O. Modélisation, Mathématique et Analyse Numérique, **9**, 7–32.

Becker, E. B., Carey, G. F., y Oden, J. T., 1981, Finite elements: an introduction:, volume 1 of **The Texas finite element series** Prentice-Hall.

Beckie, R., Wood, E., y Aldama, A., 1993, Mixed finite element simulation of saturated groundwater flow using a multigrid accelerated domain decomposition technique: Water Resources Research, **29**, no. 9, 3145–3157.

Berdichevsky, M.N., Dmitriev, V. I., y Pozdnjakova, E. E., 1998, On two-dimensional interpretation of magnetotelluric soundings: Geophys.

J. Int., **133**, 585–606.

Berenger, J. P., 1994, A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves: J. Comput. Phys., **114**, 185–200.

Brenner, S. C., y Scott, L. R., 1994, The mathematical theory of finite element methods:, volume 15 of **Texts in Applied Mathematics** Springer.

Brewitt-Taylor, C. R., y Weaver, J. T., 1976, On the finite difference solution of two dimensional induction problems: J. R. astr. Soc., **47**, 375–396.

Brewitt-Taylor, C. R., y Weaver, J. T., 1978, Improved boundary conditions for the numerical solution of E-polarization problems in geomagnetic induction: J. R. astr. Soc., **54**, 309–317.

Brezzi, F., y Fortin, M., 1991, Mixed and hybrid finite element methods:, volume 15 of **Series on Computational Mathematics** Springer.

Cagniard, L., 1953, Basic theory of the magnetotelluric method of geophysical prospecting: Geophysics, **18**, 605–635.

Carey, G. F., y Oden, J. T., 1983, Finite elements: a second course:, volume 2 of **The Texas finite element series** Prentice-Hall.

Chen, Y., Chew, W. C., y Oristaglio, M. L., 1997, Application of perfectly matched layers to the transient modeling of subsurface EM problems: Geophysics, **62**, no. 6, 1730–1736.

Ciarlet, P. H., 1978, The finite element method for elliptic problems: North Holland.

Coggon, J. H., 1971, Electromagnetic and electrical modelling by the finite element method: Geophysics, **36**, 132–155.

d'Erceville, I., y Kunetz, G., 1962, The effect of a fault on the Earth's natural electromagnetic field: *Geophysics*, **27**, 666–676.

Després, B., Joly, P., y Roberts, J. E., 1992, A domain decomposition method for the harmonic maxwell equations, *in* Beauwens, R., y de Groen, P., Eds., *Iterative Methods in Linear Algebra*: Elsevier Science Publishers B. V. (North-Holland), 475–484.

Douglas Jr., J., Leme, P. J. P., Pereira, F., y Yeh, L., 1993a, A massively parallel iterative numerical algorithm for immiscible flow in naturally fractured reservoirs: *Int. Series of Numer. Math.*, **114**, 75–93.

——— 1993b, A parallel iterative procedure applicable to the approximate solution of second order partial differential equations by mixed finite element methods: *Numer. Math.*, **65**, 95–108.

Douglas, J., Pereira, F., y Yeh, L., 1995, A parallelizable characteristic scheme for two phase flow in single porosity models: *Comp. Appl. Math.*, **14**, no. 1, 73–96.

Douglas Jr., J., Hurtado, F., y Pereira, F., 1997, On the numerical simulation of waterflooding of heterogeneous petroleum reservoirs: *Computational Geosciences*, **1**, 155–190.

Douglas Jr., J., Santos, J. E., Sheen, D., y Ye, X., 1999, Nonconforming Galerkin methods based on quadrilateral elements for second order elliptic problems: *Math. Modelling and Numer. Anal.*, **33**, 747–770.

Douglas Jr., J., Santos, J. E., y Sheen, D., 2000, A nonconforming mixed finite element method for Maxwell's equations: *Math. Mod. and Meth. in App. Sci.*, en prensa.

Everett, M. E., y Schultz, A., 1996, Geomagnetic induction in a heterogeneous sphere: Azimuthally symmetric test computations and the response of an undulating 660-km discontinuity: *J. Geophys. Res.*, **101**, 2675–2783.

- Foster, I., 1995, Designing and building parallel programs: Addison-Wesley, también disponible en <http://www-unix.mcs.anl.gov:80/dbpp>.
- Gauzellino, P., 1999, Simulación numérica de propagación de ondas en medios dispersivos: Ph.D. thesis, Fac. de Cs. Astronómicas y Geofísicas, UNLP.
- Girault, V., y Raviart, P., 1981, Finite element approximation of the Navier-Stokes equations:, Lecture notes in Mathematics Springer.
- Häkkinen, L., y Pirjola, R., 1986, Calculation of electric and magnetic fields due to an electrojet current system above a layered earth: *Geophysica*, **22**, 31–44.
- Hohmann, G. W., 1971, Electromagnetic scattering by conductors in the earth near a line source of current: *Geophysics*, **36**, 101–131.
- Hohmann, G. W., 1983, Three dimensional EM modelling: *Geophys. Surveys*, **6**, 27–54.
- Jin, J., 1993, The finite element method in electromagnetics: Wiley.
- Jones, F. W., y Price, A. J., 1971, Geomagnetic effects of sloping and shelving discontinuities of earth conductivity: *Geophysics*, **36**, 58–66.
- Katz, A. J., y Thompson, A. H., 1987, Prediction of rock electrical conductivity from mercury injection measurements: *J. Geophys. Res.*, **92B**, 599–607.
- Kaufman, A. A., y Keller, G. V., 1981, The magnetotelluric sounding method:, volume 15 of **Methods in geochemistry and geophysics** Elsevier.
- Keller, G. V., 1987, Rock and mineral properties, *in* Nabighian, M., Ed., *Electromagnetic methods in applied geophysics*: SEG, Investigation in Geophysics, Vol. 1, 3, 13–51.

Keyes, D. E., y Xu, J., Eds., 1994, Domain decomposition methods in science and engineering computing, volume 180 of **Contemporary mathematics** American Mathematical Society.

Keyes, D. E., Chan, T. F., Meurant, G., Scroggs, J. S., y Voigt, R. G., Eds., 1992, Fifth international symposium on domain decomposition methods for partial differential equations American Mathematical Society.

Kim, S., 1995, Domain decomposition methods for contaminant transport in fractured porous media: Ph.D. thesis, Purdue University.

Lee, R. L., y Masden, N. K., 1990, A mixed finite element formulation for Maxwell's equations in the time domain: *J. Comput. Phys.*, **88**, 284–304.

Liu, E., y Lamontagne, Y., 1998, Geophysical application of a new surface integral equation method for EM modeling: *Geophysics*, **63**, no. 2, 411–423.

Mackie, R. L., Madden, T. H., y Wannamaker, P. E., 1993, Three-dimensional magnetotelluric modeling using difference equations- theory and comparison to integral equation solutions: *Geophysics*, **58**, no. 2, 215–226.

Madden, T. R., y Nelson, P., 1986, A defense of Cagniard method, *in* Vozoff, K., Ed., *Magnetotelluric methods*: SEG, Geophysics reprint series, 5, 89–102.

Martinec, Z., 1997, Spectral-finite-element approach to two-dimensional electromagnetic induction in a spherical earth: *Geophys. J. Int.*, **130**, 583–594.

McNeill, J., y Labson, V., 1991, Geological mapping using VLF radio fields, *in* Nabighian, M., Ed., *Electromagnetic methods in applied geophysics*: SEG, *Investigation in Geophysics*, Vol. 2, 3, 521–640.

- Mogi, T., 1996, Three-dimensional modeling of magnetotelluric data using finite element method: *Journal of Applied Geophysics*, **35**, 185–189.
- Monk, P., 1992, A comparison of three mixed methods for the time dependent Maxwell's equations: *SIAM J. Sci. Stat. Comput.*, **13**, no. 5, 1097–1122.
- Monk, P., 1993, An analysis of Nédélec's method for the spatial discretization of Maxwell's equations: *J. Comput. App. Math.*, **47**, 101–121.
- Mosé, R., Siegel, P., Ackerer, P., y Chavent, G., 1994, Application of the mixed hybrid finite element approximation in a groundwater flow model: *Luxury or necessity?: Water Resources Research*, **30**, no. 11, 3001–3012.
- Müller, C., 1969, *Foundations of the mathematical theory of electromagnetic waves*: Springer.
- Nédélec, J., 1980, Mixed finite elements in  $\mathbb{R}^3$ : *Numer. Math.*, pages 315–341.
- Newman, G., y Alumbaugh, D., 1997, Three-dimensional massively parallel electromagnetic inversion-I. theory: *Geophys. J. Int.*, **128**, 345–354.
- Oden, J. T., y Carey, G. F., 1986, *Finite elements: mathematical aspects*:, volume 4 of **The Texas finite element series** Prentice-Hall.
- Orr, D., 1984, Magnetospheric hydromagnetic waves: their eigenperiods, amplitudes and phase variations; a tutorial introduction: *J. Geophys.*, **55**, 76–84.
- P. G. PetropoulosL. Zhao, A. C. C., 1998, A reflectionless sponge layer absorbing boundary condition for the solution of Maxwell's equa-

tions with high-order staggered finite difference schemes: *J. of Comput. Phys.*, **139**, 184–208.

Pacheco, P. S., 1997, *Parallel programming with MPI*: Morgan Kaufmann.

Parry, J. R., y Ward, S. H., 1971, Electromagnetic scattering from cylinders of arbitrary cross section in a conductive half space: *Geophysics*, **36**, 67–100.

Pu, X. H., Agarwal, A. K., y Weaver, J. T., 1993, Magnetic field solutions of E-polarization induction problems: *J. Geomag. Geoelectr.*, **45**, 859–872.

Rankin, D., 1962, The magnetotelluric effect of a dike: *Geophysics*, **27**, 651–665.

Rätz, S., 1999, A 3D finite element code for modeling of electromagnetic responses: The 2<sup>nd</sup> International Symposium on 3D EM, University of Utah, 3DEM-2, 33–37.

Reddy, I. K., Rankin, D., y Phillips, R. J., 1977, Three dimensional modeling in magnetotelluric and magnetic variational sounding: *Geophys. J. R. ast. Soc.*, **51**, 313–325.

Rodi, W. L., 1976, A technique for improving the accuracy of finite element solutions for magnetotelluric data: *Geophys. J. R. ast. Soc.*, **44**, 483–506.

Santos, J. E., y Sheen, D., 2000, On the existence and uniqueness of Maxwell's equations in bounded domains with application to magnetotellurics: *Math. Mod. and Meth. in App. Sci.*, en prensa.

Santos, J. E., 1998, Global and domain decomposed mixed methods for the solution of maxwell's equations with application to magnetotel-

- lurics: Numerical Methods for Partial Differential Equations, **14**, 407–437.
- Sheen, D., 1992, A generalized Green's theorem: Appl. Math. Lett., **5**, 95–98.
- Sheen, D., 1997, Approximation of electromagnetic fields: Part I. continuous problems: SIAM J. Appl. Math., **57**, 1716–1736.
- Smith, J. T., y Booker, J. R., 1991, Rapid inversion of two and three dimensional magnetotelluric data: J. Geophys. Research, **96**, no. B3, 3905–3922.
- Smith, J. T., 1996a, Conservative modeling of 3-D electromagnetic fields, Part I: properties and error analysis: Geophysics, **61**, no. 5, 1308–1318.
- 1996b, Conservative modeling of 3-D electromagnetic fields, Part II: biconjugate gradient solution and an accelerator: Geophysics, **61**, no. 5, 1319–1324.
- Spies, B. R., 1989, Depth of investigation in electromagnetic sounding methods: Geophysics, **54**, no. 7, 872–888.
- Stoer, J., y Bulirsch, R., 1993, Introduction to numerical analysis, 2<sup>nd</sup> edition:, volume 12 of **Texts in applied mathematics** Springer.
- Stratton, J. A., 1941, Electromagnetic theory: MacGraw-Hill.
- Sugeng, F., Raiche, A., y Xiong, Z., 1999, An edge-element approach to model the 3D EM response of complex structures with high contrasts: The 2<sup>nd</sup> International Symposium on 3D EM, University of Utah, 3DEM-2, 25–28.
- Tikhonov, A.N., 1950, On determining electrical characteristics of the deep layers of the Earth's crust, *in* Vozoff, K., Ed., Magnetotelluric

methods: Society of Exploration Geophysicists, Geophysics reprint series, 5, 2–3.

Ting, S. C., y Hohmann, G. H., 1981, Integral equation modeling of three dimensional magnetotelluric response: Geophysics, **46**, 182–197.

Travis, B. J., y Chave, A. D., 1989, A moving finite element method for magnetotelluric modelling: Physics of the Earth and Planetary Interiors, **53**, 432–443.

Vozoff, K., 1991, The magnetotelluric method, *in* Nabighian, M., Ed., Electromagnetic methods in applied geophysics: SEG, Investigation in Geophysics, Vol. 2, 3, 641–711.

Wang, T., y Tripp, A. C., 1996, FDTD simulation of EM propagation in 3-D media: Geophysics, **61**, 110–120.

Wannamaker, P. E., Hohmann, G. W., y SanFilippo, W. A., 1984a, Electromagnetic modeling of three dimensional bodies in layered earths using integral equations: Geophysics, **49**, 60–74.

——— 1984b, MT responses of 3D bodies in layered earth: Geophysics, **49**, 1515–1533.

Wannamaker, P. E., Stodt, J. A., y Rijo, L., 1987, A stable finite element solution for two-dimensional magnetotelluric modelling: Geophys. J. R. Astr. Soc., **88**, 277–296.

Wannamaker, P. E., 1991, Advances in 3D magnetotelluric modelling using integral equations: Geophysics, **56**, 1716–1728.

Ward, S., y Hohmann, G. W., 1987, Electromagnetic theory for geophysical applications, *in* Nabighian, M., Ed., Electromagnetic methods in applied geophysics: SEG, Investigation in Geophysics, Vol. 1, 3, 131–311.

Weaver, J. T., Quang, B. V. L., y Fischer, G., 1985, A comparison of analytic and numerical results for a two dimensional control model in electromagnetic induction - I. B-polarization calculations: *Geophys. J. R. Astr. Soc.*, **82**, 263–277.

Weaver, J. T., Quang, B. V. L., y Fischer, G., 1986, A comparison of analytic and numerical results for a two dimensional control model in electromagnetic induction - II. E-polarization calculations: *Geophys. J. R. Astr. Soc.*, **87**, 917–948.

Weaver, J. T., Pu, X. H., y Agarwal, A. K., 1996, Improved methods for solving the magnetic field in E-polarization induction problems with fixed and staggered grids: *Geophys. J. Int.*, **126**, 437–446.

Weaver, J. T., Agarwal, A. K., y Pu, X. H., 1999, 3-D finite difference modeling of the magnetic field in geoelectromagnetic induction, *in* Oristaglio, M., y Spies, B., Eds., *Three Dimensional Electromagnetics: SEG, Geophysical Developments*, 7, 427–443.

Weidelt, P., 1975, Electromagnetic induction in three-dimensional structures: *J. Geophys.*, **41**, 85–109.

Wilson, A. J. S., MacDonald, K., Yu, L., Day, B., y Mills, H., 1999, Electromagnetic modeling on parallel computers, *in* Oristaglio, M., y Spies, B., Eds., *Three Dimensional Electromagnetics: SEG, Geophysical Developments*, 7, 322–345.

Xiong, Z., y Tripp, A. C., 1997, 3-D electromagnetic modeling for near surface targets using integral equations: *Geophysics*, **62**, no. 4, 1907–1106.

Xiong, Z., 1992a, Electromagnetic modeling of 3-D structures by the method of system iteration using integral equations: *Geophysics*, **57**, no. 12, 1556–1561.

——— 1992b, Symmetric properties of the scattering matrix in three-dimensional electromagnetic modeling using the integral equation method: *Geophysics*, **57**, 1199–1202.

Zhdanov, M., y Fang, S., 1996a, Quasi-linear approximation in 3-D electromagnetic modeling: *Geophysics*, **61**, no. 3, 646–665.

——— 1996b, Quasi-linear approximation in 3-D electromagnetic modeling: *Geophysics*, **61**, no. 3, 646–665.

Zhdanov, M., Golubev, N. G., Spichak, V. V., y Varentsov, I. M., 1982, The construction of effective methods for electromagnetic modeling: *Geophys. J. R. ast. Soc.*, **68**, 589–607.

Zhdanov, M. S., Varentsov, I. M., Weaver, J. T., Golubev, N. G., y Krylov, V. A., 1997, Methods for modelling electromagnetic fields: Results from COMMEMI—the international project on the comparison of modelling methods for electromagnetic induction: *Journal of Applied Geophysics*, **37**, 133–271.

Zienkiewicz, O. C., 1977, *The finite element method*: MacGraw-Hill.

Zyserman, F. I., y Santos, J. E., 1998, A parallel algorithm for solving the 3D forward problem in magnetotellurics, *in* Idelsohn, S., Ed., *Computational mechanics, new trends and applications*: International Association on Computational Mechanics, 18, Section 5, paper 2, 1–10.

Zyserman, F. I., y Santos, J. E., 1999, 3D forward magnetotelluric modelling: A new parallel finite element method: *The 2<sup>nd</sup> international symposium on 3D EM*, University of Utah, 3DEM-2, 107–110.

Zyserman, F. I., y Santos, J. E., 2000, Parallel finite element algorithm with domain decomposition for three dimensional magnetotelluric modelling: *Journal of Applied Geophysics*, **44**, no. 4, 337–351.

Zyserman, F. I., Guarracino, L., y Santos, J. E., 1997, A numerical method for solving the 2D direct problem in magnetotellurics, *in* Padra, E., Ed., *Mecánica Computacional: Asociación Argentina de Mecánica Computacional*, 18, 405–414.

Zyserman, F. I., Guarracino, L., y Santos, J. E., 1999, A hybridized mixed finite element domain decomposed method for two dimensional magnetotelluric modelling: *Earth, Planets and Space*, **51**, no. 4, 297–306.

# Apéndice A

## El modo $TE$

Mostramos aquí brevemente las ecuaciones a resolver del caso bidimensional cuando se trata el modo  $TE$ . Recordando que en este caso tenemos un campo eléctrico  $\mathbf{E} = (0, E_y, 0)$  y un campo magnético  $\mathbf{H} = (H_x, 0, H_z)$ , obtenemos a partir de las Ecs. (3.1)

$$\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} = \sigma E_y, \quad (A.1a)$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial z} = i\omega\mu H_x, \quad (A.1b)$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = -i\omega\mu H_z. \quad (A.1c)$$

Como hemos mencionado anteriormente, las expresiones para  $\mathbf{E}^p = (0, E_y^p(z), 0)$  y  $\mathbf{H}^p = (H_x^p(z), 0, 0)$  inducidos por una onda incidente con polarización

$$\mathbf{E}^0 = (0, E_y^0, 0), \quad \mathbf{H}^0 = (H_x^0, 0, 0), \quad (A.2)$$

sobre un modelo de Tierra con conductividad  $\sigma_p(z)$  pueden ser obtenidas analíticamente. Definamos los campos eléctrico y magnético secundarios  $\tilde{\mathbf{E}}^s$  y  $\tilde{\mathbf{H}}^s$  por

$$\tilde{\mathbf{E}}^s = \mathbf{E}^t - \mathbf{E}^p = (0, E_y^t - E_y^p, 0), \quad (A.3a)$$

$$\tilde{\mathbf{H}}^s = \mathbf{H}^t - \mathbf{H}^p = (H_x^t - H_x^p, 0, H_z^t). \quad (A.3b)$$

Luego, las ecuaciones para los campos secundarios, tomando para el campo magnético  $\mathbf{H} = (H_x, H_z)$  y para el campo eléctrico el escalar  $E$ , y suprimiendo

superíndices como hicimos en el modo  $TM$  quedan expresadas como

$$\frac{\partial E}{\partial x} = -i\omega\mu H_z, \quad (\text{A.4a})$$

$$\frac{\partial E}{\partial z} = i\omega\mu H_x, \quad (\text{A.4b})$$

y

$$\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} = \sigma E + (\sigma - \sigma_p)E_y^p = \sigma E + f. \quad (\text{A.5})$$

Resolvemos las Ecs. (A.4) y (A.5) conjuntamente con la condición de borde absorbente

$$a(1 - i)E - \mathbf{H} \cdot \boldsymbol{\tau} = 0, \quad \text{sobre } \Gamma. \quad (\text{A.6})$$

Esta condición es también derivada de la condición de borde absorbente propuesta por Sheen (1997). Utilizando la notación indicada en el Capítulo 2, el sistema de ecuaciones a resolver puede escribirse como:

$$\text{curl } E + i\omega\mu \mathbf{H} = 0, \quad \text{en } \Omega, \quad (\text{A.7a})$$

$$\text{curl } \mathbf{H} = \sigma E + f, \quad \text{en } \Omega, \quad (\text{A.7b})$$

$$(1 - i)aE - \mathbf{H} \cdot \boldsymbol{\tau} = 0, \quad \text{sobre } \Gamma. \quad (\text{A.7c})$$

Estas son las Ecs. (2.25), cuya solución aproximamos con el oportunamente descrito método de elementos finitos mixto híbrido con descomposición de dominio. Debe notarse aquí que las funciones base a partir de las cuales construimos las aproximaciones del campo eléctrico en el modo  $TM$ , son en este caso utilizadas para aproximar al campo magnético, y el campo eléctrico en el modo  $TE$  es aproximado como lo fue el campo magnético en el modo  $TM$ . Por lo tanto, las ecuaciones (3.14), con  $\mathbf{H}$  en vez de  $\mathbf{E}$  y  $E$  en vez de  $H$ , siendo correspondientemente renombrados los coeficientes, son utilizadas para obtener la expresión algebraica de las Ecs. (2.28). Ciertamente, los pasos son totalmente análogos a los del modo  $TM$ , y el algoritmo obtenido es implementado en la misma forma que la enunciada en el Capítulo 2.

# Apéndice B

## El sistema lineal en 3D

Mostramos en este apéndice la forma final del sistema lineal  $12 \times 12$  a ser resuelto en cada uno de los subdominios  $\Omega_{jkl}$  en los que dividimos al dominio original  $\Omega$ , es decir, consideramos aquí la partición masiva del dominio. Suponemos, como antes, que tenemos  $n_x \cdot n_y \cdot n_z$  subdominios. Para establecer claramente el problema algebraico, continuamos utilizando, como en la sección 4.2, tres subíndices para individualizar subdominios, y demás parámetros

Consecuentemente, también modificamos la notación para las caras  $\Gamma_{jkl}$ . Por ejemplo, para la cara frontal  $\mathcal{F}$  de  $\Omega_{jkl}$  la Ec. (2.38c) deviene en

$$\lambda_{jkl}^{\mathcal{F},n+1} = -\lambda_{j-1kl}^{\mathcal{B},n} - \beta_{jkl}^{\mathcal{F}}(P_{\tau} \mathbf{E}_{jkl}^{n+1}(m_{jkl}^{\mathcal{F}}) - P_{\tau} \mathbf{E}_{j-1kl}^n(m_{jkl}^{\mathcal{F}})).$$

La matriz de coeficientes  $C$ , que se obtiene siguiendo los pasos detallados oportunamente en la sección 4.2 es simétrica, y tiene la estructura que mostramos a continuación.

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & c_{16} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} & c_{26} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & c_{33} & c_{34} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{3\ 11} & c_{3\ 12} \\ & & & c_{44} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{4\ 11} & c_{4\ 12} \\ & & & & c_{55} & c_{56} & 0 & 0 & c_{59} & c_{5\ 10} & 0 & 0 \\ & & & & & c_{66} & 0 & 0 & c_{69} & c_{6\ 10} & 0 & 0 \\ & & & & & & c_{77} & c_{78} & c_{79} & c_{7\ 10} & c_{7\ 11} & c_{7\ 12} \\ & & & & & & & c_{88} & c_{89} & c_{8\ 10} & c_{8\ 11} & c_{8\ 12} \\ & & & & & & & & c_{99} & c_{9\ 10} & 0 & 0 \\ & & & & & & & & & c_{10\ 10} & 0 & 0 \\ & & & & & & & & & & c_{11\ 11} & c_{11\ 12} \\ & & & & & & & & & & & c_{12\ 12} \end{pmatrix}$$

donde

$$\begin{aligned} c_{11} &= \frac{781}{5040} h_j h_k h_l \sigma_{jkl} + \frac{1}{i\omega\mu} \left( \frac{1036}{784} \left( \frac{h_j h_k}{h_l} + \frac{h_j h_l}{h_k} \right) + \frac{h_j h_l}{h_k} \right) + \\ &\quad h_j h_l (1 - \delta_{k1}) \beta_{jkl}^W + (1 - i) \delta_{k1} h_j h_l a_{jkl}, \\ c_{12} &= \frac{-59}{5040} h_j h_k h_l \sigma_{jkl} + \frac{1}{i\omega\mu} \left( \frac{1036}{784} \left( \frac{h_j h_k}{h_l} + \frac{h_j h_l}{h_k} \right) - \frac{h_j h_l}{h_k} \right), \\ c_{13} &= \frac{269}{5040} h_j h_k h_l \sigma_{jkl} - \frac{1}{i\omega\mu} \frac{1036}{784} \left( \frac{h_j h_k}{h_l} + \frac{h_j h_l}{h_k} \right), \\ c_{14} &= c_{13}, \\ c_{15} &= -\frac{1}{i\omega\mu} h_l, \\ c_{16} &= \frac{1}{i\omega\mu} h_l, \\ c_{22} &= \frac{781}{5040} h_j h_k h_l \sigma_{jkl} + \frac{1}{i\omega\mu} \left( \frac{1036}{784} \left( \frac{h_j h_k}{h_l} + \frac{h_j h_l}{h_k} \right) + \frac{h_j h_l}{h_k} \right) + \\ &\quad h_j h_l (1 - \delta_{kn_y}) \beta_{jkl}^E + (1 - i) \delta_{kn_y} h_j h_l a_{jkl}, \\ c_{23} &= c_{13}, \\ c_{24} &= c_{14}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_{25} &= c_{16}, \\
c_{26} &= c_{15}, \\
c_{33} &= \frac{781}{5040} h_j h_k h_l \sigma_{jkl} + \frac{1}{i\omega\mu} \left( \frac{1036}{784} \left( \frac{h_j h_k}{h_l} + \frac{h_j h_l}{h_k} \right) + \frac{h_j h_k}{h_l} \right) + \\
&\quad h_j h_k (1 - \delta_{l1}) \beta_{jkl}^S + (1 - i) \delta_{l1} h_j h_k a_{jkl}, \\
c_{34} &= \frac{-59}{5040} h_j h_k h_l \sigma_{jkl} + \frac{1}{i\omega\mu} \left( \frac{1036}{784} \left( \frac{h_j h_k}{h_l} + \frac{h_j h_l}{h_k} \right) - \frac{h_j h_k}{h_l} \right), \\
c_{311} &= -\frac{1}{i\omega\mu} h_k, \\
c_{312} &= \frac{1}{i\omega\mu} h_k, \\
c_{44} &= \frac{781}{5040} h_j h_k h_l \sigma_{jkl} + \frac{1}{i\omega\mu} \left( \frac{1036}{784} \left( \frac{h_j h_k}{h_l} + \frac{h_j h_l}{h_k} \right) + \frac{h_j h_k}{h_l} \right) + \\
&\quad h_j h_k (1 - \delta_{lnz}) \beta_{jkl}^N + (1 - i) \delta_{lnz} h_j h_k a_{jkl}, \\
c_{411} &= c_{311}, \\
c_{412} &= c_{312}, \\
c_{55} &= \frac{781}{5040} h_j h_k h_l \sigma_{jkl} + \frac{1}{i\omega\mu} \left( \frac{1036}{784} \left( \frac{h_j h_k}{h_l} + \frac{h_k h_l}{h_j} \right) + \frac{h_k h_l}{h_j} \right) + \\
&\quad h_k h_l (1 - \delta_{j1}) \beta_{jkl}^B + (1 - i) \delta_{j1} h_k h_l a_{jkl}, \\
c_{56} &= \frac{-59}{5040} h_j h_k h_l \sigma_{jkl} + \frac{1}{i\omega\mu} \left( \frac{1036}{784} \left( \frac{h_j h_k}{h_l} + \frac{h_k h_l}{h_j} \right) - \frac{h_k h_l}{h_j} \right), \\
c_{59} &= \frac{269}{5040} h_j h_k h_l \sigma_{jkl} - \frac{1}{i\omega\mu} \frac{1036}{784} \left( \frac{h_j h_k}{h_l} + \frac{h_k h_l}{h_j} \right), \\
c_{510} &= c_{59}, \\
c_{66} &= \frac{781}{5040} h_j h_k h_l \sigma_{jkl} + \frac{1}{i\omega\mu} \left( \frac{1036}{784} \left( \frac{h_j h_k}{h_l} + \frac{h_k h_l}{h_j} \right) + \frac{h_k h_l}{h_j} \right) + \\
&\quad h_k h_l (1 - \delta_{jn_x}) \beta_{jkl}^F + (1 - i) \delta_{jn_x} h_k h_l a_{jkl}, \\
c_{69} &= c_{59}, \\
c_{610} &= c_{510}, \\
c_{77} &= \frac{781}{5040} h_j h_k h_l \sigma_{jkl} + \frac{1}{i\omega\mu} \left( \frac{1036}{784} \left( \frac{h_j h_l}{h_k} + \frac{h_k h_l}{h_j} \right) + \frac{h_j h_l}{h_k} \right) + \\
&\quad h_j h_l (1 - \delta_{k1}) \beta_{jkl}^W + (1 - i) \delta_{k1} h_j h_l a_{jkl}, \\
c_{78} &= \frac{-59}{5040} h_j h_k h_l \sigma_{jkl} + \frac{1}{i\omega\mu} \left( \frac{1036}{784} \left( \frac{h_j h_l}{h_k} + \frac{h_k h_l}{h_j} \right) - \frac{h_j h_l}{h_k} \right), \\
c_{79} &= -\frac{1}{i\omega\mu} h_j, \\
c_{710} &= \frac{1}{i\omega\mu} h_j,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_{711} &= \frac{269}{5040} h_j h_k h_l \sigma_{jkl} - \frac{1}{i\omega\mu} \frac{1036}{784} \left( \frac{h_j h_l}{h_k} + \frac{h_k h_l}{h_j} \right), \\
c_{712} &= c_{711}, \\
c_{88} &= \frac{781}{5040} h_j h_k h_l \sigma_{jkl} + \frac{1}{i\omega\mu} \left( \frac{1036}{784} \left( \frac{h_j h_l}{h_k} + \frac{h_k h_l}{h_j} \right) + \frac{h_j h_l}{h_k} \right) + \\
&\quad h_j h_l (1 - \delta_{kn_y}) \beta_{jkl}^{\mathcal{E}} + (1 - i) \delta_{kn_y} h_j h_l a_{jkl}, \\
c_{89} &= c_{710}, \\
c_{810} &= c_{79}, \\
c_{811} &= c_{711}, \\
c_{812} &= c_{712}, \\
c_{99} &= \frac{781}{5040} h_j h_k h_l \sigma_{jkl} + \frac{1}{i\omega\mu} \left( \frac{1036}{784} \left( \frac{h_j h_k}{h_l} + \frac{h_k h_l}{h_j} \right) + \frac{h_j h_k}{h_l} \right) + \\
&\quad h_j h_k (1 - \delta_{l1}) \beta_{jkl}^{\mathcal{S}} + (1 - i) \delta_{l1} h_j h_k a_{jkl}, \\
c_{910} &= \frac{-59}{5040} h_j h_k h_l \sigma_{jkl} + \frac{1}{i\omega\mu} \left( \frac{1036}{784} \left( \frac{h_j h_k}{h_l} + \frac{h_k h_l}{h_j} \right) - \frac{h_j h_k}{h_l} \right), \\
c_{1010} &= \frac{781}{5040} h_j h_k h_l \sigma_{jkl} + \frac{1}{i\omega\mu} \left( \frac{1036}{784} \left( \frac{h_j h_k}{h_l} + \frac{h_k h_l}{h_j} \right) + \frac{h_j h_k}{h_l} \right) + \\
&\quad h_j h_k (1 - \delta_{ln_z}) \beta_{jkl}^{\mathcal{N}} + (1 - i) \delta_{ln_z} h_j h_k a_{jkl}, \\
c_{1111} &= \frac{781}{5040} h_j h_k h_l \sigma_{jkl} + \frac{1}{i\omega\mu} \left( \frac{1036}{784} \left( \frac{h_j h_l}{h_k} + \frac{h_k h_l}{h_j} \right) + \frac{h_k h_l}{h_j} \right) + \\
&\quad h_k h_l (1 - \delta_{r1}) \beta_{jkl}^{\mathcal{B}} + (1 - i) \delta_{r1} h_k h_l a_{jkl}, \\
c_{1112} &= \frac{-59}{5040} h_j h_k h_l \sigma_{jkl} + \frac{1}{i\omega\mu} \left( \frac{1036}{784} \left( \frac{h_j h_l}{h_k} + \frac{h_k h_l}{h_j} \right) - \frac{h_k h_l}{h_j} \right), \\
c_{1212} &= \frac{781}{5040} h_j h_k h_l \sigma_{jkl} + \frac{1}{i\omega\mu} \left( \frac{1036}{784} \left( \frac{h_j h_l}{h_k} + \frac{h_k h_l}{h_j} \right) + \frac{h_k h_l}{h_j} \right) + \\
&\quad h_k h_l (1 - \delta_{jn_x}) \beta_{jkl}^{\mathcal{F}} + (1 - i) \delta_{jn_x} h_k h_l a_{jkl}.
\end{aligned}$$

La delta de Kronecker se introduce en los coeficientes para incluir en la misma expresión términos que contribuyen ó sobre el borde  $\Gamma$ , ó dentro del dominio  $\Omega$ . El coeficiente  $a_{jkl}$  es el ya definido, evaluando los parámetros en el dominio correspondiente,  $a_j = \left( \frac{\sigma_j}{2\omega\mu} \right)^{\frac{1}{2}}$ .

Para darle valores a  $\beta$  elegimos la misma idea que en el caso bidimensional,

es decir que tomando

$$\beta_{jkl}^s = \frac{1-i}{2\sqrt{2\omega\mu}} \left( \sqrt{\sigma_{jkl}^*} + \sqrt{\sigma_{jkl}} \right), \quad (\text{B.4})$$

donde

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{para } s = \mathcal{W} \quad j^* = j k - 1 l, \\ \text{para } s = \mathcal{E} \quad j^* = j k + 1 l, \\ \text{para } s = \mathcal{S} \quad j^* = j k l - 1, \\ \text{para } s = \mathcal{N} \quad j^* = j k l + 1, \\ \text{para } s = \mathcal{B} \quad j^* = j - 1 k l, \\ \text{para } s = \mathcal{F} \quad j^* = j + 1 k l, \end{array} \right.$$

las Ecs. (2.38c) son condiciones de borde absorbentes para las fronteras interiores.

Finalmente, el vector de doce elementos que forma la el término independiente del sistema lineal, en la iteración n+1 es el siguiente:

$$\mathbf{b}_{jkl}^n = \begin{pmatrix} (1 - \delta_{kl}) h_j h_l (\beta_{jkl}^{\mathcal{W}} \varepsilon_{j k - 1 l}^{\mathcal{E}x, n} - \lambda_{j k - 1 l, x}^{\mathcal{E}}) \\ (1 - \delta_{kn_y}) h_j h_l (\beta_{jkl}^{\mathcal{E}} \varepsilon_{j k + 1 l}^{\mathcal{W}x, n} - \lambda_{j k + 1 l, x}^{\mathcal{W}}) \\ (1 - \delta_{l1}) h_j h_k (\beta_{jkl}^{\mathcal{S}} \varepsilon_{j k l - 1}^{\mathcal{N}x, n} - \lambda_{j k l - 1, x}^{\mathcal{N}}) \\ (1 - \delta_{ln_z}) h_j h_k (\beta_{jkl}^{\mathcal{N}} \varepsilon_{j k l + 1}^{\mathcal{S}x, n} - \lambda_{j k l + 1, x}^{\mathcal{S}}) \\ (1 - \delta_{j1}) h_k h_l (\beta_{jkl}^{\mathcal{B}} \varepsilon_{j - 1 k l}^{\mathcal{F}y, n} - \lambda_{j - 1 k l, y}^{\mathcal{F}}) \\ (1 - \delta_{jn_x}) h_k h_l (\beta_{jkl}^{\mathcal{F}} \varepsilon_{j + 1 k l}^{\mathcal{B}y, n} - \lambda_{j + 1 k l, y}^{\mathcal{B}}) \\ (1 - \delta_{k1}) h_j h_l (\beta_{jkl}^{\mathcal{W}} \varepsilon_{j k - 1 l}^{\mathcal{E}z, n} - \lambda_{j k - 1 l, z}^{\mathcal{E}}) \\ (1 - \delta_{kn_y}) h_j h_l (\beta_{jkl}^{\mathcal{E}} \varepsilon_{j k + 1 l}^{\mathcal{W}z, n} - \lambda_{j k + 1 l, z}^{\mathcal{W}}) \\ (1 - \delta_{l1}) h_j h_k (\beta_{jkl}^{\mathcal{S}} \varepsilon_{j k l - 1}^{\mathcal{N}y, n} - \lambda_{j k l - 1, y}^{\mathcal{N}}) \\ (1 - \delta_{ln_z}) h_j h_k (\beta_{jkl}^{\mathcal{N}} \varepsilon_{j k l + 1}^{\mathcal{S}y, n} - \lambda_{j k l + 1, y}^{\mathcal{S}}) \\ (1 - \delta_{j1}) h_k h_l (\beta_{jkl}^{\mathcal{B}} \varepsilon_{j - 1 k l}^{\mathcal{F}z, n} - \lambda_{j - 1 k l, z}^{\mathcal{F}}) \\ (1 - \delta_{jn_x}) h_k h_l (\beta_{jkl}^{\mathcal{F}} \varepsilon_{j + 1 k l}^{\mathcal{B}z, n} - \lambda_{j + 1 k l, z}^{\mathcal{B}}) \end{pmatrix}$$

La contribución del término fuente debe sumarse al vector  $\mathbf{b}_{jkl}^n$ . Si se supone una polarización XY para la onda incidente,  $-\frac{1}{4} h_j h_k h_l \sigma_{jkl} \mathbf{E}^p(z_j k l)$ , donde  $z_j k l$  es el centro de  $\Omega_{jkl}$ , se suma a los elementos primero, segundo, tercero y cuarto. En el caso de una polarización YX, la contribución va a los elementos quinto, sexto, noveno y décimo.