Capítulo 10

Introducción a la teoría de Born-Infeld

En esta sección recorreremos algunas propiedades de la acción de Born-Infeld en espacio conmutativo. Comenzaremos dando su definición en el caso abeliano así como su conexión con la forma determinantal Dirac. Luego analizaremos la definición de la acción de Born-Infeld en el caso de una teoría de gauge no abeliana, deteniéndonos un poco en la forma simétrica propuesta por Tseytlin, escribiéndola de una forma ligeramente diferente de la usual. En la última sección de este capítulo propondremos una definición de la acción de Born-Infeld en espacio no conmutativo.

10.1. La acción de Born-Infeld conmutativa

Introducción

En 1934 Max Born [91] luego acompañado por Leopold Infeld [92]-[94], desarrolló una teoría general de la electrodinámica no lineal, como alternativa a la teoría de Maxwell. Su principal motivación fue construir una teoría con soluciones clásicas representando partículas eléctricamente cargadas, como los electrones, con autoenergía finita.

Si bien la teoría inicialmente causó interés en físicos como Schrödinger [95], Einstein y Rosen, etc, entró en un período de hibernación por aproximadamente 40 años, asomando en la superficie de vez en cuando. Hace aproximadamente diez años reapareció en conexión con la teoría de cuerdas y modelos sigma [44]-[52].

Más recientemente ha habido una explosión de artículos donde la acción de Born-Infeld juega algún rol en diferentes contextos, en particular, será importantes para lo que sigue los citados en [97]-[101].

La acción de Born-Infeld para el caso abeliano

La acción de Born-Infeld puede escribirse en dos formas equivalentes. En el espacio de Minkowsky en 3+1 dimensiones se tiene

$$S_{BI} = -\beta^2 \int d^4x \left(\sqrt{1 + \frac{1}{2\beta^2} F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{16\beta^4}(F^{\mu\nu}\tilde{F}_{\mu\nu})^2} - 1 \right) , \tag{10.1}$$

o bien

$$S_{BI} = \int d^4x \left(\sqrt{-\beta \det g_{\mu\nu}} - \sqrt{-\det(\beta g_{\mu\nu} - F_{\mu\nu})} \right) . \tag{10.2}$$

debido a su similitud con la acción de Dirac para el modelo extensible del electron [96], esta última forma en determinantes se suele llamar *forma de Dirac* de la acción de Born-Infeld

Las dimensiones de β y $F_{\mu\nu}$ son $[\beta] = [F_{\mu\nu}] = m^2$. La identidad entre ambas formas de S_{BI} se puede probar fácilmente calculando el determinante que aparece bajo la raíz cuadrada en la forma (10.2)

$$\begin{aligned} & - \begin{vmatrix} \beta & -F_{01} & -F_{02} & -F_{03} \\ F_{01} & -\beta & -F_{12} & -F_{13} \\ F_{02} & -F_{12} & -\beta & F_{23} \\ F_{03} & -F_{13} & F_{23} & -\beta \end{vmatrix} = \\ = & \ \beta(\beta^3 - F_{12}F_{23}F_{13} - F_{13}F_{12}F_{23} + \beta F_{13}^2 + \beta F_{23}^2 + \beta F_{12}^2) + \ldots = \\ = & \ \beta^4 + (0)\beta^3 - (\frac{1}{2}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu})\beta^2 + (0)\beta + \frac{1}{16}(F^{\mu\nu}\tilde{F}_{\mu\nu})^2 . \end{aligned} \tag{10.3}$$

Se puede verificar que la teoría no lineal coincide con la teoría de Maxwel para valores pequeños de E y B. En otras palabras, en el límite $\beta \to \infty$, tenemos que $S_{BI} \to S_{Maxwell}$[1].

Como teoría cuántica de campos, el modelo de Born-Infeld no es renormalizable: cuando se expande la raíz cuadrada, aparecen potencias crecientes de $1/\beta^2 \sim 1/m^4$. Por supuesto, se puede considerar el lagrangiano de Born-Infeld como el lagrangiano efectivo a baja energía resultante de la integración de modos masivos en algún lagrangiano renormalizable. En el régimen de baja energía, donde se usa el lagrangiano de Born-Infeld, hay un cutoff natural, $\Lambda = \sqrt{\beta}$, el cual puede ser usado para tener resultados perturbativos finitos.

Las ecuaciones de Euler-Lagrange en la teoría de Born-Infeld son

$$\partial_\mu \left(\frac{1}{R}(F^{\mu\nu} - \frac{1}{4\beta^2}(F^{\alpha\beta}\tilde{F}_{\alpha\beta})\tilde{F}^{\mu\nu}) \right) = 0 \, , \tag{10.4}$$

$$R = \sqrt{1 + \frac{1}{2\beta^2}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{16\beta^4}(F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu})^2} \, . \tag{10.5}$$

[1]Se puede ver que este requerimieto, unido a la simetría de dualidad, impone varios vínculos sobre la forma de cualquier lagrangiano no lineal. [97]

Si se agrega como fuente en estas ecuaciones una carga eléctrica puntual en el origen, y se considera el caso puramente eléctrico $F^{0i} = E^i, F^{ij} = 0$, se tiene como solución

$$\vec{E} = \frac{e}{4\pi} \frac{1}{\sqrt{r^4 + r_0^4}} \check{r} \tag{10.6}$$

con $r_0^2 = e/(4\sqrt{2}\pi\beta)$. Vemos entonces que el campo eléctrico no diverge en el origen, sino que toma un valor máximo, $E(0) = \sqrt{2}\beta$. Esa es la razón por la cual Born llamó a β el "campo absoluto". Las soluciones de las ecuaciones de Born-Infeld cuando son incorporadas fuentes fueron llamadas *BIones* por Gibbons [52].

La energía total de esta solución se puede hallar a partir del tensor de energía impulso derivado de la acción (10.1). Después de un poco de cálculo se encuentra una respuesta finita $U_{tot} = 1{,}236 e^2/4\pi r_0$, lo que se podía esperar siendo $E(0)$ finito.

Teorías de Born-Infeld no abelianas

En la literatura [44]-[48], han sido discutidas varias posibilidades para extender la acción de Born-Infeld abeliana al caso de una simetría de gauge no abeliana. Básicamente, estas difieren en la forma en que la operación de traza sobre el álgebra está definida.

Se puede construir una extensión natural de la propuesta de Yang y Mills a una acción de Born-Infeld, tomando la traza fuera de la raíz cuadrada, es decir

$$\begin{aligned} S_{BI} &= -\beta^2 \operatorname{Tr} \int d^4x \left(\sqrt{1 + \frac{1}{2\beta^2} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{16\beta^4} (F^{\mu\nu} \tilde{F}_{\mu\nu})^2} - 1 \right) = \\ &= \operatorname{Tr} \int d^4x \left(-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{32\beta^2} (F^{\mu\nu} \tilde{F}_{\mu\nu})^2 + \frac{1}{8} \left(\frac{1}{2\beta} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{16\beta^3} (F^{\mu\nu} \tilde{F}_{\mu\nu})^2 \right)^2 + \cdots \right), \end{aligned} \tag{10.7}$$

donde en la segunda línea hemos desarrollado la raíz cuadrada en serie de potencias para luego tomar la traza sobre los productos de matrices resultantes.

Sin embargo, en el contexto de teoría de cuerdas, una operación de "traza simétrica" como la propuesta por Tseytlin [44] parece ser la apropiada. Una forma de definir esta acción es

$$\begin{aligned} S_{BI} &= -\beta^2 \operatorname{Tr}\mathcal{S} \int d^4x \left(\sqrt{1 + \frac{1}{2\beta^2} F_{\mu\nu}, F^{\mu\nu} - \frac{1}{16\beta^4} (F^{\mu\nu}, \tilde{F}_{\mu\nu})^2} - 1 \right) = \\ &= \operatorname{Tr}\mathcal{S} \int d^4x \left(-\frac{1}{4} F_{\mu\nu}, F^{\mu\nu} + \frac{1}{32\beta^2} (F^{\mu\nu}, \tilde{F}_{\mu\nu})^2 + \frac{1}{8} \left(\frac{1}{2\beta} F_{\mu\nu}, F^{\mu\nu} - \frac{1}{16\beta^3} (F^{\mu\nu}, \tilde{F}_{\mu\nu})^2 \right)^2 + \cdots \right). \end{aligned} \tag{10.8}$$

Aquí la operación $\mathcal{S}$, que actúa linealmente en el desarrollo en serie de potencias de la segunda línea, se define sobre un producto arbitrario de componentes de la curvatura de la siguiente manera

$$\mathcal{S}\left(F_{\mu_1\nu_1}, F_{\mu_2\nu_2}, \ldots, F_{\mu_N\nu_N}\right) = \frac{1}{N!}\sum_{\{\sigma\}} F_{\mu_{\sigma_1}\nu_{\sigma_1}} F_{\mu_{\sigma_2}\nu_{\sigma_2}} \ldots F_{\mu_{\sigma_N}\nu_{\sigma_N}}\,, \tag{10.9}$$

donde la suma se toma sobre todas las permutaciones de los factores presentes en el miembro derecho.

Es decir que para definir el lagrangiano de Born-Infeld no abeliano, en cada término de la serie de potencias, sumamos sobre los productos ordenados de todas las maneras posibles ("simetrizando" la expresión mediante la operación $\mathcal{S}$) y luego tomamos la traza de la serie resultante. El resultado se puede resumar sólo para algunas configuraciones particulares del campo $F_{\mu\nu}$ [98].

Si escribimos $F^a_{\mu\nu}t^a$, podemos reescribir la traza de la expresión anterior de la siguiente manera

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}\mathcal{S}\left(F_{\mu_1\nu_1}, F_{\mu_2\nu_2}, \ldots, F_{\mu_N\nu_N}\right) &= F^{a_1}_{\mu_1\nu_1}F^{a_2}_{\mu_2\nu_2}\ldots F^{a_2}_{\mu_N\nu_N}\frac{1}{N!}\sum_{\{\sigma\}}\mathrm{Tr}(t^{a_{\sigma_1}}t^{a_{\sigma_2}}\ldots t^{a_{\sigma_N}}) = \\ &= F^{a_1}_{\mu_1\nu_1}F^{a_2}_{\mu_2\nu_2}\ldots F^{a_2}_{\mu_N\nu_N}\mathrm{STr}(t^{a_1}, t^{a_2}, \ldots, t^{a_N})\,. \end{aligned}\tag{10.10}$$

Entonces la operación compuesta $\mathrm{Tr}\mathcal{S}$ se reduce a la prescripción de ordenamiento simétrico para los generadores en el desarrollo en serie de potencias de la raíz cuadrada, o *traza simétrica*, STr, la cual afecta al producto de N generadores de la siguiente manera

$$\mathrm{STr}(t^{a_1}, t^{a_2}, \ldots, t^{a_N}) = \frac{1}{N!}\sum_{\{\sigma\}}\mathrm{Tr}(t^{a_{\sigma_1}}t^{a_{\sigma_2}}\ldots t^{a_{\sigma_N}})\,, \tag{10.11}$$

con la cual la acción (10.14) se puede reescribir

$$S_{BI} = -\beta^2\,\mathrm{STr}\int d^4x\left(\sqrt{1+\frac{1}{2\beta^2}F_{\mu\nu}, F^{\mu\nu} - \frac{1}{16\beta^4}(F^{\mu\nu}, \tilde{F}_{\mu\nu})^2} - 1\right). \tag{10.12}$$

Nótese que la prescripción (10.11) se debe aplicar exclusivamente sobre los generadores presentes en la curvatura $F^a_{\mu\nu}t^a$ y no sobre aquéllos presentes en la conexión $A^a_\mu t^a$. Si hiciéramos lo último, al simetrizar desaparecerían aquellos términos en $F_{\mu\nu}$ que contienen conmutadores de A_μ.

Sólo cuando se utiliza esta simetrización puede relacionarse el lagrangiano con una expresión en términos de un determinante, ya que desaparecen la ambigüedades relacionadas con el orden del producto de los elementos del determinante

$$\begin{aligned} S_{BI} &= -\beta^2\,\mathrm{STr}\int d^4x\left(\sqrt{1+\frac{1}{2\beta^2}F_{\mu\nu}, F^{\mu\nu} - \frac{1}{16\beta^4}(F^{\mu\nu}, \tilde{F}_{\mu\nu})^2} - 1\right) = \\ &= \mathrm{STr}\int d^4x\left(\sqrt{-\beta\det g_{\mu\nu}} - \sqrt{-\det(\beta g_{\mu\nu} - F_{\mu\nu})}\right), \end{aligned}\tag{10.13}$$

que hace contacto con la definición de Dirac para el caso abeliano y es mucho más cercana a las acciones efectivas de branas en las que $g_{\mu\nu}$ es una métrica inducida

Esta definición para la acción de Born-Infeld es la única que lleva a una acción que es linealizada por ecuaciones de Bogomol'nyi y a ecuaciones de movimiento que coinciden con las que surgen de imponer la nulidad de la función β para los campos subyacentes en la teoría de supercuerdas abiertas.

Se debe mencionar que aún hay algunos problemas no resueltos concernientes al uso de la traza simétrica en teorías de Born-Infeld no abelianas. En particular, algunas discrepancias entre los resultados provenientes de una teoría de Born-Infeld simetrizada y el espectro esperado en las teorías de branas como se señala en [48].

Supersimetría

Ya en los 80, interesantes propiedades de la teoría de Born-Infeld en conexión con supersimetría fueron descubiertas por diferentes autores:

Deser y Puzalowski [99] estudiaron el conjunto infinito de acciones no masivas de spin 1 formadas con los dos invariantes algebraicos $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ y $F^{\mu\nu}\tilde{F}_{\mu\nu}$. La teoría de Born-Infeld fue una de las teorías supersimetrizables mas sencillas seleccionadas. Estos autores también mostraron que el lagrangiano efectivo de Euler-Heisenberg, que surge de la integración de escalares masivos y fermiones en una teoría supersimétrica coincide sólo hasta el orden sexto en potencias del campo vectorial. A órdenes más altos no hay más parámetros para acomodar de manera de hacer coincidir los dos modelos.

Mas recientemente, la supersimetrización de la acción de Born-Infeld ha sido estudiada en [100]-[101]. La teoría no abeliana supersimétrica ha sido estudiada en [53], donde se ha demostrado que la elección del orden simétrico de los generadores, en la expansión en potencias de la raíz cuadrada, es consistente con la supersimetría.

10.2. La acción de Born-Infeld no conmutativa

Llegados a este punto, podemos plantearnos cómo definir la acción de Born-Infeld en espacio no conmutativo.

En el espacio ordinario conmutativo, cuando son necesarias potencias más altas de combinaciones de $F_{\mu\nu}$ y $\tilde{F}_{\mu\nu}$ para generar lagrangianos del tipo del de Born-Infeld, aparece un problema de ordenamiento relacionado con los generadores t^a, como hemos visto en la sección previa. En el presente caso no conmutativo y no abeliano, nos enfrentamos a un segundo problema de orden relacionado con el producto estrella. Como veremos, ambos problemas se entrelazan y deben ser resueltos ambos a la vez[2].

[2] Si el interés en la teoría de Born-Infeld viene de la dinámica de D-branas, en la cual es relevante cuando se pueden despreciar los términos que contienen derivadas de la curvatura, el problema de ordenamiento puede en principio ser ignorado [19]. No obstante, la equivalencia entre la teoría de gauge no conmutativa y

Si pretendemos aplicar la receta que hemos desarrollado en capítulos anteriores, que nos dice cómo definir la acción de una teoría no conmutativa a partir de su análoga conmutativa, debemos primero escribir la acción conmutativa en términos de matrices del álgebra de Lie A_μ, evitando cualquier forma en componentes A^a_μ. Por lo tanto, aplicaremos nuestra receta de reemplazar campos conmutativos por sus análogos no conmutativos y productos normales por productos estrella en la forma (10.8) de la acción de Born-Infeld no abeliana, donde la operación $\mathcal{S}$ se definirá según (10.9).

Por lo tanto, la acción de Born-Infeld no conmutativa quedará definida de acuerdo con [127]

$$
\begin{aligned}
S^\theta_{BI} = & -\beta^2 \,\mathrm{Tr}\mathcal{S}^* \int d^4x \left({}_*\sqrt{1 + \frac{1}{2\beta^2}\hat{F}_{\mu\nu} * \hat{F}^{\mu\nu} - \frac{1}{16\beta^4}(\hat{F}^{\mu\nu} * \tilde{\hat{F}}_{\mu\nu})^2} - 1 \right) = \\
= & \,\mathrm{Tr}\mathcal{S}^* \int d^4x \left(-\frac{1}{4}\hat{F}_{\mu\nu} * \hat{F}^{\mu\nu} + \frac{1}{32\beta^2}(\hat{F}^{\mu\nu} * \tilde{\hat{F}}_{\mu\nu})^2 + \frac{1}{8}\left(\frac{1}{2\beta}\hat{F}_{\mu\nu} * \hat{F}^{\mu\nu} - \frac{1}{16\beta^3}(\hat{F}^{\mu\nu} * \tilde{\hat{F}}_{\mu\nu})^2 \right)^2 + \cdots \right),
\end{aligned}
\tag{10.14}
$$

donde ${}_*\sqrt{\ }$ significa que la raíz cuadrada es definida usando el producto de Moyal en cada orden de la expansión en serie de potencias, y la operación $\mathcal{S}^*$ se ha definido de acuerdo con

$$
\mathcal{S}^* \left(\hat{F}_{\mu_1\nu_1} * \hat{F}_{\mu_2\nu_2} * \ldots * \hat{F}_{\mu_N\nu_N} \right) = \frac{1}{N!} \sum_{\{\sigma\}} \hat{F}_{\mu_{\sigma_1}\nu_{\sigma_1}} * \hat{F}_{\mu_{\sigma_2}\nu_{\sigma_2}} * \ldots * \hat{F}_{\mu_{\sigma_N}\nu_{\sigma_N}} \,, \tag{10.15}
$$

Nótese que, si bien la operación compuesta $\mathrm{tr}\,\mathcal{S}^*$ coincide con la traza simétrica Str en el límite conmutativo $\theta_{\mu\nu} \to 0$, cuando $\theta_{\mu\nu}$ es no nulo la ecuación (10.10) deja de ser válida debido a la no conmutatividad del producto estrella entre las componentes de la curvatura en el álgebra de Lie $\hat{F}^a_{\mu\nu}$.

El orden simétrico definido en (10.15) asegura que los productos de campos reales como el lado derecho de (10.14), son números reales, lo cual no está garantizado para un producto estrella general no ordenado. $\mathcal{S}^*$ también resuelve las ambigüedades que surgen en la definición del lagrangiano DBI como un determinante y se puede probar que

$$
\begin{aligned}
S^\theta_{BI} &= \mathrm{Tr}\mathcal{S}^* \int d^4x \left(1 -_* \sqrt{1 + \frac{1}{2}(\hat{F}^{\mu\nu} * \hat{F}_{\mu\nu}) - \frac{1}{16}(\hat{F}^{\mu\nu} * \tilde{\hat{F}}_{\mu\nu})^2} \right) = \\
&= \mathrm{Tr}\mathcal{S}^* \int d^4x \left(1 -_* \sqrt{\det(g_{\mu\nu} + \hat{F}_{\mu\nu})} \right) ,
\end{aligned}
\tag{10.16}
$$

donde la última línea está unívocamente definida a través de la prescripción $\mathcal{S}^*$. Entonces, si se obtiene, partir de la construcción supersimétrica, una acción bosónica que toma la forma

ordinaria a través de un cambio de variables, impone ciertas condiciones en las correcciones en derivadas a la acción DBI, como se ha analizado en la referencia [102]-[105]. Otras aspectos de la acción DBI no conmutativa se han discutido en la literatura [106]-[110].

del lado izquierdo de (10.16), se puede escribir también sin ambigüedades como la forma usual de determinante.

Es fácil ver que (10.15) cambia covariantemente bajo transformaciones de gauge $\hat{g}$ cuando $\hat{F}_{\mu\nu} \rightarrow \hat{g}^{-1} * \hat{F}_{\mu\nu} * \hat{g}$,

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Tr}\, \mathcal{S}^*([\hat{g}^{-1} * \hat{F}_{\mu_1\nu_1} * \hat{g}] * [\hat{g}^{-1} * \hat{F}_{\mu_2\nu_2} * \hat{g}] * \ldots * [\hat{g}^{-1} * \hat{F}_{\mu_N\nu_N} * \hat{g}]) = \\
&\quad = \mathrm{Tr} \left(\frac{1}{N!} \sum_{\{\sigma\}} \hat{g}^{-1} * \hat{F}_{\mu_{\sigma_1}\nu_{\sigma_1}} * \hat{g} * \hat{g}^{-1} * \hat{F}_{\mu_{\sigma_2}\nu_{\sigma_2}} * \hat{g} * \ldots * \hat{g}^{-1} * \hat{F}_{\mu_{\sigma_N}\mu_{\sigma_N}} * \hat{g} \right) = \\
&\quad = \mathrm{Tr} \left(\frac{1}{N!} \sum_{\sigma} \hat{g}^{-1} * \hat{F}_{\mu_{\sigma_1}\nu_{\sigma_1}} * \hat{F}_{\mu_{\sigma_2}\nu_{\sigma_2}} * \ldots * \hat{F}_{\mu_{\sigma_N}\nu_{\sigma_N}} * \hat{g} \right) = \\
&\quad = \mathrm{Tr} \left(\hat{g}^{-1} * \mathcal{S}^*(\hat{F}_{\mu_1\nu_1}, \hat{F}_{\mu_2\nu_2}, \ldots, \hat{F}_{\mu_N\nu_N}) * \hat{g} \right) . \qquad (10.17)
\end{aligned}$$

Por lo tanto el lagrangiano definido con la prescripción $\mathcal{S}^*$ será covariante bajo transformaciones de gauge no conmutativas, lo que nos asegura que, con las condiciones de contorno adecuadas, la acción de Born-Infeld no conmutativa definida en (10.14) será invariante de gauge.

Nótese que en lugar de tomar la traza normal Tr en los generadores del álgebra de Lie, se podría intentar usar la traza simétrica STr, simetrizando el producto de generadores t^a, sin afectar los coeficientes $\hat{F}^a_{\mu\nu}$ (que podemos elegir simetrizar o no). Entonces, se puede ver que se obtiene una expresión diferente (la cual también se reduce a la prescripción de traza simétrica en el límite conmutativo). Sin embargo, esta receta para ordenar el producto se debe descartar ya que carece de la propiedad de covarianza de gauge.