Capítulo 11

Teoría de Born-Infeld supersimétrica en espacio no conmutativo

Presentamos una versión supersimétrica de la teoría de Born-Infeld en espacio-tiempo no conmutativo, para grupo de gauge abeliano y no abeliano. Mostramos, usando el formalismo de supercampos, que la definición del orden simétrico con respecto al producto estrella del que hablamos en el capítulo anterior lleva naturalmente a una acción de Born-Infeld supersimetrizable en ambos casos, el $U(1)$ y el $U(N)$. Analizamos las ecuaciones de Bogomol'nyi en este contexto y discutimos las propiedades de la teoría resultante.

11.1. Supercampos en espacio no conmutativo

Los *supercampos* se definen como las serie de potencias formales generadas por los objetos $(x, \theta, \bar{\theta})$ donde las x^μ son variables conmutantes, que se transforman en la representación vectorial frente al grupo de Lorentz y $\theta^\alpha, \bar{\theta}_{\dot{\alpha}}$ son variables anticonmutantes o *de Grassman*, que se transforman en la representación espinorial. Estos supercampos forman naturalmente un álgebra asociativa, que se puede identificar con el álgebra de funciones sobre el *superespacio* de coordenadas $(x, \theta, \bar{\theta})$.

Como se discute en [111], cuando se construyen deformaciones del álgebra de supercampos, existen dos parámetros libres que caracterizan la deformación, un parámetro $\theta^{\mu\nu}$ relacionado con el conmutador de las coordenadas vectoriales x^μ en la forma (2.4), y un nuevo parámetro asociado al anticonmutador de las coordenadas de Grassman $\theta^\alpha, \bar{\theta}_{\dot{\alpha}}$.

Nuestro interés en los supercampos se relaciona con la construcción de acciones supersimétricas para teorías de campos no conmutativas, para lo cual es suficiente considerar las deformaciones que afectan solamente al conmutador de las coordenadas x^μ de acuerdo a (2.4), sin modificar la regla de anticonmutación de las coordenadas de Grassman $\theta^\alpha, \bar{\theta}_{\dot{\alpha}}$ [112],[113].

Por lo tanto, definiremos el producto estrella entre supercampos U_1, U_2 de acuerdo a

$$(U_1 * U_2)(x,\bar\theta,\theta) \;=\; e^{\frac{i}{2}\theta_{\mu\nu}\partial_{\xi^\mu}\partial_{\zeta^\nu}}\; U_1(x+\xi,\bar\theta,\theta)U_2(x+\zeta,\bar\theta,\theta)\big|_{\zeta=\xi=0}\,, \qquad (11.1)$$

Nótese que las derivadas en el producto estrella involucran solo coordenadas de espacio tiempo, sin afectar a las coordenadas de Grassman del superespacio, que siguen siendo anticonmutantes cuando el conmutador se calcula con este nuevo producto.

Por lo tanto, la expansión de los supercampos en serie de potencias de $\theta^\alpha, \bar\theta_{\dot\alpha}$ es idéntica al caso conmutativo. Por ejemplo, un campo vectorial real $V = V^\dagger$ en el gauge de Wess-Zumino se escribe como

$$V(x,\bar\theta,\theta) = -\theta^\alpha\sigma^\mu_{\alpha\dot\beta}\bar\theta^{\dot\beta}A_\mu + i\theta^\alpha\theta_\alpha\bar\theta_{\dot\beta}\bar\lambda^{\dot\beta} - i\bar\theta_{\dot\beta}\bar\theta^{\dot\beta}\theta^\alpha\lambda_\alpha + \frac{1}{2}\theta^\alpha\theta_\alpha\bar\theta_{\dot\beta}\bar\theta^{\dot\beta}D\,, \qquad (11.2)$$

donde D es el campo auxiliar

Es conveniente definir las variables quirales y^μ y ${y^\dagger}^\mu$en la forma

$$y^\mu = x^\mu + i\theta^\alpha\sigma^\mu_{\alpha\dot\beta}\bar\theta^{\dot\beta}\,, \qquad {y^\dagger}^\mu = x^\mu - i\theta^\alpha\sigma^\mu_{\alpha\dot\beta}\bar\theta^{\dot\beta}\,, \qquad (11.3)$$

de manera que se puedan definir las derivadas D_α and $\bar D_\alpha$ como

$$D_\alpha = \frac{\partial}{\partial\theta^\alpha} + 2i\left(\sigma^\mu\bar\theta\right)_\alpha\frac{\partial}{\partial y^\mu}, \qquad \bar D_{\dot\alpha} = -\frac{\partial}{\partial\bar\theta^{\dot\alpha}} - 2i\left(\theta\sigma^\mu\right)_{\dot\alpha}\frac{\partial}{\partial y^{\dagger\mu}}\,. \qquad (11.4)$$

Con la ayuda de estas variables quirales, un campo quiral izquierdo $\bar D_{\dot\alpha}\Lambda = 0$ se escribe

$$\Lambda(y,\theta) = A + \sqrt{2}\theta^\alpha\chi_\alpha + \theta^\alpha\theta_\alpha G\,, \qquad (11.5)$$

donde A y G son campos escalares complejos y χ es un espinor de Weil

Escribiremos las transformaciones de gauge generalizadas actuando sobre supercampos en la forma

$$e_*^{2i\Lambda} = 1 + 2i\Lambda - 2\Lambda * \Lambda + \cdots\,, \qquad (11.6)$$

donde $\Lambda = \Lambda(y,\theta)$ es un supercampo quiral izquierdo y $\Lambda^\dagger(y^\dagger,\bar\theta)$ su hermítico conjugado derecho $D_\alpha\Lambda^\dagger = 0$. Bajo tal transformación el supercampo V se transforma según

$$e_*^{2V} \to e_*^{-2i\Lambda^\dagger} * e_*^{2V} * e_*^{2i\Lambda}\,. \qquad (11.7)$$

A partir de V se construye el supercampo quiral de curvatura,

$$W^\alpha(y,\theta) = -\frac{1}{8}\bar D_{\dot\alpha}\bar D^{\dot\alpha}e_*^{-2V} * D^\alpha e_*^{2V}\,. \qquad (11.8)$$

En contraste con (11.7), bajo una transformación de gauge W_α se transforma covariantemente,

$$W^\alpha \to e_*^{-2i\Lambda} * W^\alpha * e_*^{2i\Lambda}\,. \qquad (11.9)$$

En cuanto al conjugado hermítico, $\bar{W}_\alpha$, se transforma como

$$\bar{W}_{\dot{\alpha}} \rightarrow e_*^{-2i\Lambda^\dagger} * \bar{W}_{\dot{\alpha}} * e_*^{2i\Lambda^\dagger} . \tag{11.10}$$

Escrito en componentes, W_α se lee

$$W^\alpha(y,\theta) = -i\lambda^\alpha + \theta^\alpha D - \frac{i}{2}\left(\sigma^\mu\bar{\sigma}^\nu\theta\right)^\alpha F_{\mu\nu} + \theta\theta\left(\not{\mathcal{D}}\bar{\lambda}\right)^\alpha . \tag{11.11}$$

Ahora estamos en condiciones de escribir acciones supersimétricas para el campo de gauge en espacio no conmutativo. Por ejemplo la acción supersimétrica $N=1$ de Yang-Mills no conmutativa se puede escribir en términos del supercampo quiral W_α y su conjugado hermítico $\bar{W}_{\dot{\alpha}}$ de acuerdo con

$$S_{SYM}^\theta = \frac{1}{4e^2}\mathrm{Tr}\int d^4x\left(\int d^2\theta W^\alpha * W_\alpha + \int d^2\bar{\theta}\bar{W}_{\dot{\alpha}} * \bar{W}^{\dot{\alpha}}\right) , \tag{11.12}$$

ya que las últimas componentes en $W*W$ y $\bar{W}*\bar{W}$ contienen la combinación $D*D - \frac{1}{2}\left(F_{\mu\nu}*F^{\mu\nu} \pm\ iF_{\mu\nu}*\tilde{F}^{\mu\nu}\right)$.

11.2. La acción de Born-Infeld supersimétrica no conmutativa

Siguiendo un enfoque similar a [53], presentaremos aquí la versión supersimétrica de la teoría de Born-Infeld en espacio no conmutativo, para los casos con grupo de gauge abeliano y no abeliano. Usando el formalismo de supercampos, adaptado al caso no conmutativo de la manera que hemos descripto en la sección anterior, veremos que la definición del orden $\mathcal{S}^*$ con respecto a la multiplicación de Moyal lleva naturalmente a una acción de Born-Infeld tanto en el caso $U(1)$ como en el caso $U(N)$.

Con el objeto de construir una acción de Born-Infeld en espacio no conmutativo, se deben incluir invariantes que no pueden ser expresados en términos de los invariantes cuadráticos básicos $F_{\mu\nu}*F^{\mu\nu}$ y $F_{\mu\nu}*\tilde{F}^{\mu\nu}$. En efecto, si se busca un lagrangiano de Born-Infeld expresable como un determinante, aparecerán invariantes de Lorentz que no pueden ser escritos en términos de los cuadráticos que citamos arriba. Este es de hecho el caso de los términos cuárticos que necesariamente aparecerán cuando se computa el determinante de Born-Infeld en cuatro dimensiones: si bien en el caso conmutativo abeliano estos términos se pueden escribir como algún funcional de $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ y $F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu}$, en el caso no conmutativo el producto de Moyal evita tal acomodación. Mas aún, potencias impares, que están ausentes en el caso usual conmutativo, pueden ahora aparecer.

Empezaremos entonces la búsqueda de un candidato para la extensión supersimétrica del modelo de Born-Infeld en espacio no conmutativo. Sabemos que potencias mas altas de W y

$\bar{W}$ deben incluirse de manera tal de respetar la invarianza de Lorentz. En el caso del espacio conmutativo, esto se logra combinando $W^2\bar{W}^2$ con potencias adecuadas de D^2W^2 y $\bar{D}^2\bar{W}^2$ [99]-[100]. En el presente caso, hay dos fuentes de complicaciones. Primero en vista de las leyes de transformación (11.7) y (11.9)-(11.10), factores $\exp_*(2V)$ se deben incluir adecuadamente en términos cuárticos en los supercampos, de manera de asegurar la invarianza de gauge. Segundo, uno tiene que incluir tantos invariantes independientes de los supercampos como sea necesario para reproducir aquéllos invariantes de Lorentz cuárticos que no puedan escribirse en términos de $F_{\mu\nu} * F^{\mu\nu}$ y $F_{\mu\nu} * \tilde{F}^{\mu\nu}$.

Considérese entonces los supercampos invariantes de gauge que pueden originar términos cuárticos. Hay dos candidatos naturales

$$\begin{aligned} Q_1 &= \int d^2\theta d^2\bar{\theta}\; W^\alpha * W_\alpha * e_*^{-2V} * \bar{W}_{\dot{\beta}} * \bar{W}^{\dot{\beta}} * e_*^{2V}\,, \\ Q_2 &= \int d^2\theta d^2\bar{\theta}\; W^\alpha * e_*^{-2V} * \bar{W}^{\dot{\beta}} * e_*^{2V} * W_\alpha * e_*^{-2V} * \bar{W}_{\dot{\beta}} * e_*^{2V}\,. \end{aligned} \tag{11.13}$$

La parte bosónica de Q_1 está dada por

$$\begin{aligned} Q_1|_{bos} = D^{*4} - \frac{1}{2}\left\{F^{\mu\nu} * F_{\mu\nu},\ D^{*2}\right\} - \frac{i}{2}\left[F^{\mu\nu} * \tilde{F}_{\mu\nu},\ D^{*2}\right] \\ + \frac{1}{4}\left((F^{\mu\nu} * F_{\mu\nu})^{*2} + (F^{\mu\nu} * \tilde{F}_{\mu\nu})^{*2}\right) + \frac{i}{4}\left[F^{\mu\nu} * \tilde{F}_{\mu\nu},\ F^{\rho\sigma} * F_{\rho\sigma}\right]\,, \end{aligned} \tag{11.14}$$

donde $A^{*2} = A * A$. Si extraemos la parte dependiente sólo en $F_{\mu\nu}$ toma la forma

$$Q_1|_{bos,\,F_{\mu\nu}} = \frac{1}{4}\left((F^{\mu\nu} * F_{\mu\nu})^{*2} + (F^{\mu\nu} * \tilde{F}_{\mu\nu})^{*2}\right) + \frac{i}{4}\left[F^{\mu\nu} * \tilde{F}_{\mu\nu}, F^{\rho\sigma} * F_{\rho\sigma}\right]\,. \tag{11.15}$$

Análogamente se obtiene para Q_2,

$$Q_2|_{bos,\,F_{\mu\nu}} = \frac{1}{4}F^{\mu\nu} * F^{\rho\sigma} * F_{\mu\nu} * F_{\rho\sigma} + \frac{1}{4}\tilde{F}^{\mu\nu} * \tilde{F}^{\rho\sigma} * F_{\mu\nu} * F_{\rho\sigma} + \frac{i}{4}\left[F^{\mu\nu}, F^{\rho\sigma} * \tilde{F}_{\mu\nu} * F_{\rho\sigma}\right] \tag{11.16}$$

Se puede ver ahora que una combinación muy económica de Q_1 y Q_2 genera los términos cuárticos que se esperan en la expansión de una acción DBI con raíz cuadrada, siempre que esta sea definida usando un orden simétrico de los factores $F_{\mu\nu}$. Efectivamente, bajo las condiciones de contorno adecuadas, que permitan rotar productos estrella bajo el signo integral, tenemos que

$$\frac{1}{4!}\mathrm{Tr}\int d^4x\,(2Q_1 + Q_2)|_{bos,\,F_{\mu\nu}} = \mathrm{Tr}\mathcal{S}^*\!\int d^4x\left(1 -_* \sqrt{1 + \frac{1}{2}F_{\mu\nu} * F^{\mu\nu} - \frac{1}{16}\left(F_{\mu\nu} * \tilde{F}^{\mu\nu}\right)^{*2}}\right)\Bigg|^{4^{\text{to}}\text{ orden}}\,, \tag{11.17}$$

donde en el lado derecho hemos utilizado la operación de orden simétrico $\mathcal{S}^*$, definida como en el capítulo anterior

El análisis de arriba concierne a los términos puramente bosónicos. Es entonces natural extenderlo considerando la combinación de supercampos $\int d^4x(2Q_1+Q_2)$, que nuevamente se puede acomodar en la forma de un orden simétrico, el cual ahora se debe definir de manera de tener en cuenta la presencia de objetos de Grassman anticonmutantes.

$$\frac{1}{3}\mathrm{Tr}\int d^4x(2Q_1+Q_2) \;=\; \mathrm{Tr}\mathcal{S}^*\int d^4x\left(W^\alpha * W_\alpha * \left[e_*^{-2V} * \bar{W}_{\dot\beta} * e_*^{2V}\right] * \left[e_*^{-2V} * \bar{W}^{\dot\beta} * e_*^{2V}\right]\right)\,, \tag{11.18}$$

donde ahora hemos definido el orden simétrico de supercampos de manera similar al caso puramente bosónico

$$\mathcal{S}^*\left(U_1 * U_2 * \ldots * U_n\right) = \frac{1}{n!}\sum_{\{\pi\}} \mathrm{sgn}\,\pi_O\, U_{\pi(1)} * U_{\pi(2)} * \ldots * U_{\pi(n)}\,. \tag{11.19}$$

Aquí U_i representa a W o $[\exp_*(-2V)\bar{W}\exp_*(2V)]$ (cualquiera de ambos) y $\mathrm{sgn}\,\pi_O$ sólo toma en cuenta el signo de la permutación de objetos Grassman impares.

Nótese que en la ecuación (11.18), $\exp_*(2V)$ y $\exp_*(-2V)$ adyacentes dentro del símbolo $\mathcal{S}^*$, no se pueden cancelar antes de desarrollar el orden simétrico, ya que este desarrollo incluye términos en los cuales estos factores no son adyacentes. Es decir, las expresiones dentro de los paréntesis en (11.18) se deben tomar como elementos individuales al hacer las permutaciones.

Ahora, con el objeto de obtener las potencias más altas de $F_{\mu\nu} * F^{\mu\nu}$ y $F_{\mu\nu} * \tilde{F}^{\mu\nu}$ necesarias para construir la acción de Born-Infeld, se ha demostrado [99] que en el caso conmutativo se deben incluir potencias de ciertos supercampos, que llamaremos X e Y, y que en el presente caso no conmutativo se deben definir como

$$\begin{aligned}
X &= \frac{1}{16}\left(\left\{\bar{D}_{\dot\beta}\bar{D}^{\dot\beta}\bar{R}_{\dot\alpha}, \bar{R}^{\dot\alpha}\right\} - 2\bar{D}_{\dot\beta}\bar{R}_{\dot\alpha} * \bar{D}^{\dot\beta}\bar{R}^{\dot\alpha} + \left\{e_*^{-2V} * D^\beta D_\beta R^\alpha * e_*^{2V}, W_\alpha\right\}\right.\\
&\quad \left. -2\left[e_*^{-2V} * D^\beta R^\alpha * e_*^{2V}\right] * \left[e_*^{-2V} * D_\beta R_\alpha * e_*^{2V}\right]\right)\,,\\
Y &= -\frac{i}{32}\left(\left\{\bar{D}_{\dot\beta}\bar{D}^{\dot\beta}\bar{R}_{\dot\alpha}, \bar{R}^{\dot\alpha}\right\} - 2\bar{D}_{\dot\beta}\bar{R}_{\dot\alpha} * \bar{D}^{\dot\beta}\bar{R}^{\dot\alpha} - \left\{e_*^{-2V} * D^\beta D_\beta R^\alpha * e_*^{2V}, W_\alpha\right\}\right.\\
&\quad \left. +2\left[e_*^{-2V} * D^\beta R^\alpha * e_*^{2V}\right] * \left[e_*^{-2V} * D_\beta R_\alpha * e_*^{2V}\right]\right)\,,
\end{aligned} \tag{11.20}$$

donde hemos definido

$$\bar{R}_{\dot\alpha} = e_*^{-2V} * \bar{W}_{\dot\alpha} * e_*^{2V}\,, \qquad R^\alpha = e_*^{2V} * W^\alpha * e_*^{-2V}\,. \tag{11.21}$$

En particular, se tiene en el sector bosónico

$$X|_{\theta=\bar\theta=0} = -\frac{1}{2}D * D + \frac{1}{4}F^{\mu\nu} * F_{\mu\nu}\,, \tag{11.22}$$

$$Y|_{\theta=\bar{\theta}=0} = \frac{1}{8} F^{\mu\nu} * \tilde{F}_{\mu\nu}\,. \tag{11.23}$$

O sea que las componentes mas bajas de X e Y incluyen los invariantes $F_{\mu\nu} * F^{\mu\nu}$ y $F_{\mu\nu} * \tilde{F}^{\mu\nu}$.

Por lo tanto, esto no lleva a considerar la siguiente acción supersimétrica como un candidato para reproducir la dinámica de Born-Infeld en su sector bosónico

$$S^{\theta}_{SBI} = S^{\theta}_{SYM} + \sum_{n,m} C_{nm} \mathrm{Tr}\mathcal{S}^* \int d^4x d^4\theta \Big(W^{\alpha} * W_{\alpha} * \bar{R}_{\dot{\beta}} * \bar{R}^{\dot{\beta}} * X^{*n} * Y^{*m} \Big) + \text{h.c.} \tag{11.24}$$

La operación $\mathcal{S}^*$ fue definida en la ecuación (11.19) para supercampos U, esto implica, para los factores X e Y, que se deben ordenar los paréntesis que entran en su construcción sin cambio de signo, ya que son Grassman pares.

La expresión (11.24) es de hecho bastante general. Es la extensión supersimétrica de una acción bosónica invariante de gauge que depende de la intensidad de campo $F_{\mu\nu}$ a través de las cantidades $F_{\mu\nu} * F^{\mu\nu}$ y $F_{\mu\nu} * \tilde{F}^{\mu\nu}$, en ciertas combinaciones restringidas por supersimetría. Los coeficientes C_{mn} son arbitrarios y se pueden elegir de manera de obtener la acción de Born-Infeld en su forma usual. De hecho, si se pone

$$C_{0\,0} = \frac{1}{8}\,, \qquad C_{n-2m\,2m} = (-1)^m \sum_{j=0}^{m} \begin{pmatrix} n+2-j \\ j \end{pmatrix} q_{n+1-j}\,, \qquad C_{n\,2m+1} = 0\,, \tag{11.25}$$

donde

$$q_0 = -\frac{1}{2}\,, \qquad q_n = \frac{(-1)^{n+1}}{4n} \frac{(2n-1)!}{(n+1)!(n-1)!} \quad \text{for} \;\; n \geq 1 \tag{11.26}$$

entonces, la parte puramente bosónica de la acción (11.24) se transforma, después de usar la relación (10.16),

$$S^{\theta}_{SBI}\big|_{bos} = \mathrm{Tr}\mathcal{S}^* \int d^4x \left(1 -_* \sqrt{-\det(g_{\mu\nu} + F_{\mu\nu})} \right) = S^{\theta}_{BI}\,. \tag{11.27}$$

Como en el caso de espacio ordinario, existen otras elecciones posibles de los coeficientes C_{mn} que llevan a una teoría de gauge supersimétrica, consistente con dinámica no polinómica para el campo de gauge. Déjesenos notar que las potencias impares de la intensidad de campo $F_{\mu\nu}$ han sido excluidas de nuestro tratamiento, ya que no es posible construir un funcional de los supercampos W, $\bar{W}$, DW y $\bar{D}\bar{W}$ que contenga F^3 en su componente mas alta en θ.

11.3. Supersimetría $N = 2$ y ecuaciones de Bogomol'nyi

Un aspecto importante en el estudio de las acciones supersimétricas, concierne a las ecuaciones de Bogomol'niy-Prassad-Sommerfeld del sector bosónico. A este respecto, para teorías de born-Infeld conmutativas, han sido estudiadas las condiciones bajo las cuales las ecuaciones resultantes coinciden con las de la teoría de Yang-Mills, y ha sido aclarada su relación con la supersimetría $N = 2$ [45]-[47], [101]. En el caso no conmutativo, se han encontrado ya soluciones a diferentes ecuaciones autoduales [116]-[124], pero falta el análisis de la conexión entre estas ecuaciones y la supersimetría. Es entonces natural investigar esta cuestión en el marco supersimétrico aquí presentado, extendiendo nuestro tratamiento de supersimetría $N = 1$ a $N = 2$.

Para llevar a cabo la extensión al caso $N = 2$, se debe añadir al supermultiplete vectorial V ya introducido, un supermuliplete escalar quiral $\Phi(y, \theta) = \phi + \sqrt{2}\theta^\alpha\psi_\alpha + \theta^\alpha\theta_\alpha F$, donde $\phi = \phi_1 + i\phi_2$ es un campo escalar complejo, ψ un segundo fermión de Majorana, y F un campo auxiliar complejo. Un multiplete vectorial completo $N = 2$ se puede acomodar en términos de todos estos campos en la forma $(A_\mu, \chi, \phi, D, F)$, donde ahora χ es un fermión de Dirac construido a partir de λ y ψ, $\chi = (\lambda, \bar{\psi})$.

El lagrangiano de Born-Infeld $N = 2$ se construye siguiendo los mismos pasos descriptos para el caso $N = 1$. Se usa como bloque para la construcción el supercampo quiral $N = 2$, Ψ, el cual juega un rol análogo al del supercampo de curvatura W en el caso $N = 1$.

$$\Psi = \Phi(\tilde{y}, \theta_1) + i\sqrt{2}\theta_2{}^\alpha W_\alpha(\tilde{y}, \theta_1) + \theta_2^\alpha\theta_{2\alpha}G(\tilde{y}, \theta_1)\,, \tag{11.28}$$

aquí $\tilde{y}^\mu = y^\mu + i\theta_2\sigma^\mu\bar{\theta}_2$ y G es un escalar quiral, el cual se puede expresar en términos de Φ y V (véase por ejemplo [115])

Es fácil ver que

$$\Psi^2\big|_{\psi=\lambda=\phi=0} \;=\; -4\theta_1^2\theta_2^2\left(F_{\mu\nu} * F^{\mu\nu} + iF_{\mu\nu} * \tilde{F}^{\mu\nu} - \frac{1}{2}D * D - \frac{1}{4}\{F^\dagger, F\}_+\right) \tag{11.29}$$

y por lo tanto la parte bosónica del lagrangiano $N = 2$ dependerá de $F_{\mu\nu}$ D y F a través de la combinación arriba definida. Entonces, las ecuaciones de movimiento para D y F son satisfechas para $D = F = 0$.

Con el objeto de buscar configuraciones de instantón, se debe pasar a espacio euclídeo e igualar a cero la ley de transformación de supersimetría para el gaugino. Cuando suponemos $\theta^{0i} = 0$, la rotación de Wick se puede llevar a cabo sin ninguna complicación adicional relacionada con la definición del producto estrella. Ahora, en la ley de transformación del gaugino, igualaremos a cero todos los campos fermiónicos y el campo escalar se deben poner a cero mientras que los campos auxiliares D y F se deben eliminar usando sus ecuaciones de movimiento, las cuales, como hemos visto, llevan a $D = F = 0$.

La ley de transformación de supersimetría del gaugino toma la forma

$$\delta\chi = -i\left(\frac{i}{4}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]F_{\mu\nu} - D\right)\xi + i\sqrt{2}\;\partial\!\!\!/\,(\gamma_5\phi_1 + i\phi_2)\,\chi - \sqrt{2}F^\dagger\gamma_5\bar{\chi}^t\,, \tag{11.30}$$

donde $(\xi_1, -\bar{\xi}_2) = \xi$ son los dos parámetros de transformación de la supersimetría $N = 2$. Poniendo $\phi = D = F = 0$, la ley de transformación del gaugino se reduce a

$$\delta\chi = -i\Gamma^{\mu\nu}F_{\mu\nu}\xi\,, \tag{11.31}$$

por lo tanto, cuando se imponen las condiciones de Bogomol'niy-Prassad-Sommerfeld en la forma $\delta\chi = 0$, se obtiene la ecuación de autodualidad, la cual en espacio euclídeo toma la forma

$$F_{\mu\nu} = \pm \tilde{F}_{\mu\nu}\,. \tag{11.32}$$

Cada una de las soluciones rompen la mitad de las supersimetrías. Como se esperaba, la ecuación del instantón coincide formalmente con la que surge en espacio tiempo ordinario. Por supuesto, se debe recordar que $F_{\mu\nu}$ en la ecuación (11.32) como se definió en (4.12) incluye un conmutador de Moyal. Esto significa que aún en el caso $U(1)$ podría haber soluciones de instantón, las cuales de hecho se han encontrado en [116].

11.4. Alcances y limitaciones

- Para entender mas profundamente las cotas y ecuaciones BPS, deberíamos construir el álgebra de supersimetría $N = 2$.

- Sería interesante clarificar la relación de nuestra prescripción de ordenamiento simétrico con otras propuesta para la acción de Born-Infeld no conmutativa mencionadas en la literatura [102]-[105].

- Deberíamos estudiar el comportamiento de la acción de Born-Infeld no conmutativa que hemos definido bajo el mapeo de Seiberg y Witten, así como su relación con la teoría de cuerdas.

11.5. Conclusiones

Como sumario de nuestras conclusiones podemos decir lo siguiente

- El problema de definir un acción escalar a partir de objetos valuados en el álgebra de Lie, se reduce simplemente a tomar la traza de la expresión simetrizada con $\mathcal{S}^*$. Como hemos demostrado, esta prescripción lleva a una acción de Born-Infeld que es invariante de gauge, en contraste con lo que pasaría si usáramos la traza simétrica después de simetrizar sobre los coeficientes. Aún así, en el límite $\theta_{\mu\nu} \to 0$, debido al efecto de simetrización de $\mathcal{S}^*$, nuestro resultado coincide con el obtenido para la acción de Born-Infeld no abeliana conmutativa usando la traza simétrica

- Hemos construido la extensión supersimétrica de la acción de Born-Infeld no conmutativa. En nuestra construcción, hemos visto que las funcionales naturales de los supercampos a partir de las cuales se construyen las extensiones supersimétricas de teorías de gauge, se combinan en la forma adecuada de raíz cuadrada de la acción de Born-Infeld, de manera tal que el orden simétrico $\mathcal{S}^*$ es señalado.

- Hemos avanzado en la construcción de una acción de Born-Infeld supersimétrca $N = 2$ no conmutativa, verificando que las condiciones de Bogomol'niy-Prassad-Sommerfeld que de ella se obtienen, coinciden con las de la teoría de Yang-Mills no conmutativa.