Capítulo 12

Conclusiones

En esta tesis doctoral hemos estudiado dos teorías de gauge definidas en espacio no conmutativo: la teoría de Chern-Simons y la de Born-Infeld. Tanto por su simplicidad cuanto por sus posibles aplicaciones en modelos físicos de interés, hemos seleccionado un tipo especial de espacio no conmutativo conocido como θ-deformado.

En lo que concierne a la acción de Chern-Simons θ-deformada, inducidos por los celebrados resultados obtenidos en espacio conmutativo [24], hemos investigado la posibilidad de que el término de Chern-Simons se genere por fluctuaciones de fermiones masivos en $2+1$ dimensiones espacio temporales, en las diferentes representaciones del grupo de gauge. Pudimos mostrar que cuando se toman en cuenta las contribuciones del regulador se obtiene un resultado invariante de gauge, aún bajo transformaciones "grandes". En todos los casos, la forma de la parte que viola paridad de la acción efectiva invariante de gauge, es la de una acción de Chern-Simons no conmutativa.

Para las representaciones fundamental y anti-fundamental, el cálculo es completamente análogo al caso conmutativo, ya que las únicas contribuciones a la acción efectiva provienen de diagramas planos, en los que el factor de fase sale fuera de las integrales. Para la representación adjunta, en la cual intervienen diagramas no planos, el resultado invariante de gauge no trivial (6.20) es originado solamente por los campos reguladores, lo que implica que el límite conmutativo $\theta_{\mu\nu} \to 0$ no conmuta con el límite de la regularización $M \to \infty$. Este fenómeno se conoce como mezcla infrarrojo-ultravioleta y es el análogo tridimensional del resultado obtenido por A. Matusis, L. Susskind y N. Toumbas en [79], para el caso de la anomalía quiral en $d = 3+1$.

Luego, en vista de posibles aplicaciones al efecto Hall propuestas en [22], hemos considerado la posibilidad de definir la acción de Chern-Simons en un espacio con borde, determinando las condiciones de contorno adecuadas para que sea diferenciable e invariante de gauge. A este respecto encontramos dos casos relevantes: un caso especial en el cual existen bordes sobre los cuales $\theta^{\mu\nu}$ no tiene componentes normales, de modo que sobre ellos es necesario y suficiente para la diferenciabilidad de la acción que se anule una componente tangencial del campo de gauge; y un caso general, en el cual sobre aquellos bordes en los cuales $\theta^{\mu\nu}$ tenga componentes normales no nulas, la condición de contorno a imponer es que dos componentes del campo de gauge, junto con sus infinitas derivadas normales, sean cero.

A continuación hemos encontrado las transformaciones de simetría que preservan las condiciones de contorno, las cuales verifican las condiciones adecuadas en el borde, a saber: para el caso especial antes citado, las simetrías de la teoría serán las funciones valuadas en el grupo de gauge, tales que sobre el borde no dependan de una dirección tangente; para el caso general, las funciones no deben depender de dos direcciones en el borde, y todas sus derivadas normales deben anularse.

Hemos investigado también la relación entre la acción de Chern-Simons y la acción quiral de Wess-Zumino-Witten definida en el borde de la variedad, un aspecto importante, que en el caso conmutativo es muy útil para el análisis de modelos invariantes conformes de interés en mecánica estadística. Concluímos que cuando la variedad tiene la topología del disco por la recta real, la acción de Chern-Simons es equivalente a un modelo de Wess-Zumino-Witten con las siguientes características: para el caso especial, obtenemos una acción quiral de Wess-Zumino-Witten, con los productos ordinarios transformados en productos estrella. Es decir obtenemos lo que llamaríamos un modelo quiral de Wess-Zumino-Witten no conmutativo; para el caso general, obtenemos un modelo de Wess-Zumino-Witten no conmutativo un poco más complicado, debido a la necesidad de imponer condiciones de contorno sobre dos componentes del campo de gauge en lugar de sobre una sola.

Motivados por la relación entre la acción de Chern-Simons y el modelo quiral de Wess-Zumino-Witten, y la equivalencia entre los modelos de Wess-Zumino-Witten conmutativo y no conmutativo, investigamos el comportamiento de la acción de Chern-Simons bajo el mapeo de Seiberg y Witten, que relaciona teorías no conmutativas con diferentes valores del parámetro de no conmutatividad $\theta^{\mu\nu}$. Demostramos que, a diferencia de otros casos, el modelo de Chern-Simons se mapea en un modelo análogo, independientemente del valor de este parámetro.

A continuación hemos formulado una teoría de Chern-Simons no conmutativa, con grupo de gauge $GL(2,\mathbb{R})$, con la idea de dar una definición de la gravitación no conmutativa. Es sabido que en el caso conmutativo, la gravedad en $d = 3$ dimensiones euclídeas es equivalente a una teoría de Chern-Simons con grupo de gauge $SL(2,\mathbb{C})$. El límite conmutativo de nuestra teoría coincide, a nivel clásico, con dicha forma de Chern-Simons de la gravitación, unida a un campo de gauge $U(1)$ complejo, desacoplado y con acción de Chern-Simons. Para $\theta^{\mu\nu}$ finito, el acoplamiento entre el campo $U(1)$ y la parte $SL(2,\mathbb{R})$ es no trivial.

Hemos sido capaces de reformular dicha teoría de Chern-Simons en términos de un *dreibein* y conexión de spin no conmutativos, cuyas ecuaciones de movimiento generalizan las ecuaciones de estructura de Cartan. Verificamos que es posible definir una acción de Einstein no conmutativa, escrita en términos de los campos no conmutativos, de la cual se derivan las correctas ecuaciones de movimiento, sin necesidad de definir algún ordenamiento para el determinante del *dreibein*, sorteando de esta manera las dificultades que se han discutido en la literatura [87]-[90]. Además, hemos formulado estas ecuaciones ne términos de métrica y conexión afín, encontrando los que hemos definido como las ecuaciones de Einstein no conmutativas.

Encontramos soluciones a nuestras ecuaciones que corresponden, en el límite conmutativo, a las soluciones conocidas de la teoría de gravitación en $d = 3$ dimensiones, en particular la solución afín y la solución de agujero negro BTZ. Además, hemos encontrado un operador que mapea las soluciones de nuestra teoría no conmutativa en las correspondientes soluciones de la teoría conmutativa.

En cuanto a la teoría de Born-Infeld, dada su utilidad en el contexto de la teoría de cuerdas para la descripción de la dinámica de baja energía de las D-branas, nos propusimos definir la correspondiente versión no conmutativa, para los casos con grupo de gauge abeliano y no abeliano. En nuestra construcción, hemos encontrado que el orden simétrico de los factores $\hat{F}_{\mu\nu}$ en el desarrollo en serie de potencias de la acción, provee una definición adecuada para la acción de Born-Infeld invariante de gauge.

Esta construcción se puede hacer independientemente del grupo de gauge. Remarcablemente, en el caso $U(N)$, el problema de definir una acción escalar a partir de objetos valuados en el álgebra de Lie, se reduce simplemente a tomar la traza de la expresión simetrizada. Como demostramos, esta prescripción lleva a una acción de Born-Infeld que es invariante de gauge en contraste con lo que pasaría si usáramos la traza simétrica. Aún así, en el límite conmutativo, debido al efecto de la simetrización, nuestro resultado coincide con el obtenido para la acción de Born-Infeld no abeliana conmutativa, cuando se usa la traza simétrica [44].

La extensión supersimétrica de la acción de Born-Infeld que construímos, se basa en el formalismo de supercampos, adecuadamente extendido al presente caso no conmutativo. La acción resultante conduce a un sector bosónico con dinámica gobernada por la acción de Born-Infeld no conmutativa, a todos los órdenes en $\theta^{\mu\nu}$.

Finalmente, hemos hecho algunas consideraciones sobre la extensión supersimétrica $N = 2$ y las ecuaciones de Bogomol'nyi de la acción de Born-Infeld no conmutativa. Como se esperaba, la ecuación de autodualidad coincide formalmente con la que surge en espacio tiempo ordinario. es de interés recordar que, dado que el tensor de curvatura no conmutativo incluye un conmutador de Moyal, pueden existir soluciones de instantón aún en el caso $U(1)$, las que de hecho han sido encontradas en [116].

En resumen, hemos estudiado la acción de Chern-Simons en espacio no conmutativo, demostrando que se puede obtener como la acción efectiva para fermiones masivos en $d = 2 + 1$ dimensiones, y hallando las condiciones en las cuales esta acción esta bien definida en variedades con borde, además de estudiar su relación con el modelo quiral de Wess-Zumino-Witten y con la acción de Chern-Simons usual conmutativa. También la hemos aplicado a la construcción de una teoría de gravitación tridimensional no conmutativa, encontrando soluciones de las ecuaciones clásicas de movimiento, entre las que se encuentra el agujero negro tridimensional BTZ.

Además, hemos definido una acción de Born-Infeld no conmutativa, en la cual un ordenamiento simétrico de los factores que contienen la curvatura de gauge, asegura la invarianza de la acción. Construímos además una extensión supersimétrica, verificando que la supersimetría es consistente con el ordenamiento simétrico y la hemos utilizado para investigar las ecuaciones de Bogomol'nyi del sector bosónico.

Como hemos hecho al terminar cada capítulo, señalaremos aquí los problemas abiertos por nuestro trabajo, que pueden ser objeto de una futura investigación 6.4.

- Generalizando nuestros cálculos sobre la acción de Chern-Simons inducida, se podría considerar la contribución de gráficos con dos o mas loops, y verificar si existe una versión no conmutativa del teorema de no renormalización de Coleman y Hill [30]. Tal demostración deberia seguir las líneas de las versiones no abelianas [31], [32], de manera similar a lo desarrollado en [77].

- Es natural preguntarse acerca de los diagramas de un loop, pero con más patas externas, que no contribuyen al término de Chern-Simons ya calculada. En el caso masivo, estos gráficos, si bien continúan siendo convergentes y por lo tanto no reciben contribuciones que contengan la masa del regulador, contienen potencias de la masa física m. Por lo tanto no está en principio vedado que contribuyan a la violación de paridad.

- El siguiente orden en la expansión en potencias de $p/|m|$, corresponde en el caso usual conmutativo abeliano a la extensión de Chern-Simons en derivadas mas altas, estudiada en [28],[29]. En el caso no conmutativo la fórmula análoga no es invariante de gauge. La forma de una extensión en derivadas más altas, invariante de gauge, contiene términos cuadráticos en $\hat{A}_\mu$ y en $\hat{F}_\mu$, por lo que provendrá necesariamente de gráficos con más patas externas. Sería interesante verificar si la forma invariante de gauge de la extensión de Chern-Simons en derivadas más altas, se obtiene al calcular explícitamente las contribuciones de los gráficos adecuados.

- En nuestro trabajo sobre la acción de Chern-Simons en variedades con borde utilizamos la expresión diferencial del producto de Moyal. Es importante verificar si los resultados relativos a a las condiciones de borde se sostienen cuando se utiliza la forma integral de este producto, que depende fuertemente de la variedad elegida.

- Sería interesante estudiar el efecto del mapeo de Seiberg y Witten sobre otras teorías de gauge no conmutativas cuya ecuación clásica de movimiento sea $\hat{F}_{\mu\nu} = 0$, como por ejemplo los modelos BF.

- Queda por realizar un análisis cuántico de este mapeo, lo que requeriría el del comportamiento de la medida de integración bajo este cambio de variables.
- Es importante estudiar la relación de nuestro modelo de gravitación no conmutativa con otras propuestas como las que se han discutido en [9]-[14] y en [87]-[90]
- Sería interesante encontrar una interpretación geométrica del término adicional en las ecuaciones de Einstein no conmutativas.
- En lo relacionado con la acción de Born-Infeld, es interesante clarificar la relación de nuestra prescripción de ordenamiento simétrico con otras propuestas para la acción de Born-Infeld no conmutativa mencionadas en la literatura [102]-[105].
- Queda abierta la posibilidad de estudiar el comportamiento de la acción de Born-Infeld no conmutativa que hemos definido bajo el mapeo de Seiberg y Witten, así como su relación con la teoría de cuerdas.