Capítulo 13

Algunas propiedades del producto estrella

1. *Conjugación compleja:* El complejo conjugado del producto estrella de dos funciones f y g es igual al producto de las funciones conjugadas, tomado en orden inverso

$$
\begin{aligned}
(f * g)^* &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{i}{2} \right)^n \theta^{\alpha_1\beta_1} \cdots \theta^{\alpha_n\beta_n} \, \partial_{\alpha_1} \ldots \partial_{\alpha_n} f \, \partial_{\beta_1} \ldots \partial_{\beta_n} g \right)^* = \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(-\frac{i}{2} \right)^n \theta^{\alpha_1\beta_1} \cdots \theta^{\alpha_n\beta_n} \, \partial_{\alpha_1} \ldots \partial_{\alpha_n} f^* \, \partial_{\beta_1} \ldots \partial_{\beta_n} g^* \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(-\frac{i}{2} \right)^n (-1)^n \theta^{\beta_1\alpha_1} \cdots \theta^{\beta_n\alpha_n} \, \partial_{\beta_1} \ldots \partial_{\beta_n} g^* \, \partial_{\alpha_1} \ldots \partial_{\alpha_n} f^* \\
&= g^* * f^* \qquad (13.1)
\end{aligned}
$$

2. *Relación con el producto normal:* el producto estrella de dos funciones f y g se puede escribir como el producto puntual usual de ambas funciones mas una derivada total

$$
\begin{aligned}
f * g &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{i}{2} \right)^n \theta^{\alpha_1\beta_1} \cdots \theta^{\alpha_n\beta_n} \, \partial_{\alpha_1} \ldots \partial_{\alpha_n} f \, \partial_{\beta_1} \ldots \partial_{\beta_n} g = \\
&= fg + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{i}{2} \right)^n \theta^{\alpha_1\beta_1} \cdots \theta^{\alpha_n\beta_n} \, \partial_{\alpha_1} \ldots \partial_{\alpha_n} f \, \partial_{\beta_1} \ldots \partial_{\beta_n} g = \\
&= fg + \\
&\quad + \theta^{\alpha_1\beta_1} \partial_{\alpha_1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{i}{2} \right)^n \theta^{\alpha_2\beta_2} \cdots \theta^{\alpha_n\beta_n} \, \partial_{\alpha_2} \ldots \partial_{\alpha_n} f \, \partial_{\beta_1} \ldots \partial_{\beta_n} g = \\
&= fg + \partial_\mu B^\mu[f, g] \qquad (13.2)
\end{aligned}
$$

donde

$$B^\mu[f,g] = \theta^{\mu\beta_1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{i}{2}\right)^n \theta^{\alpha_2\beta_2} \cdots \theta^{\alpha_n\beta_n} \, \partial_{\alpha_2} \ldots \partial_{\alpha_n} f \, \partial_{\beta_1} \ldots \partial_{\beta_n} g \tag{13.3}$$

3. *Conmutador de Moyal:* el conmutador de dos funciones f y g es una derivada total, como se deduce fácilmente de la formula anterior

$$[f,g]- = \partial_\mu B^\mu[f,g] \tag{13.4}$$

donde

$$\begin{aligned}
B^\mu[f,g] &= B^\mu[f,g] - B^\mu[g,f] = \\
&= \theta^{\mu\beta_1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{i}{2}\right)^n \theta^{\alpha_2\beta_2} \cdots \theta^{\alpha_n\beta_n} \, \partial_{\alpha_2} \ldots \partial_{\alpha_n} f \, \partial_{\beta_1} \ldots \partial_{\beta_n} g - \\
&\quad -\theta^{\mu\beta_1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{i}{2}\right)^n \theta^{\alpha_2\beta_2} \cdots \theta^{\alpha_n\beta_n} \, \partial_{\alpha_2} \ldots \partial_{\alpha_n} g \, \partial_{\beta_1} \ldots \partial_{\beta_n} f = \\
&= \theta^{\mu\beta_1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{i}{2}\right)^n \theta^{\alpha_2\beta_2} \cdots \theta^{\alpha_n\beta_n} \, \partial_{\alpha_2} \ldots \partial_{\alpha_n} f \, \partial_{\beta_1} \ldots \partial_{\beta_n} g - \\
&\quad -\theta^{\mu\beta_1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} (-1)^{n-1} \left(\frac{i}{2}\right)^n \theta^{\alpha_2\beta_2} \cdots \theta^{\alpha_n\beta_n} \, \partial_{\beta_2} \ldots \partial_{\beta_n} g \, \partial_{\beta_1} \partial_{\alpha_2} \ldots \partial_{\alpha_n} f = \\
&= \theta^{\mu\beta_1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{i}{2}\right)^n \theta^{\alpha_2\beta_2} \cdots \theta^{\alpha_n\beta_n} \, \partial_{\alpha_2} \ldots \partial_{\alpha_n} f \, \partial_{\beta_1} \ldots \partial_{\beta_n} g - \\
&\quad -\theta^{\mu\beta_1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} (-1)^n \left(\frac{i}{2}\right)^n \theta^{\alpha_2\beta_2} \cdots \theta^{\alpha_n\beta_n} \, \partial_{\beta_1} \ldots \partial_{\beta_n} g \, \partial_{\alpha_2} \ldots \partial_{\alpha_n} f = \\
&= \theta^{\mu\beta_1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(1-(-1)^n\right) \left(\frac{i}{2}\right)^n \theta^{\alpha_2\beta_2} \cdots \theta^{\alpha_n\beta_n} \, \partial_{\alpha_2} \ldots \partial_{\alpha_n} f \partial_{\beta_1} \ldots \partial_{\beta_n} g = \\
&= \theta^{\mu\beta_1} \sum_{n \text{ impar}}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{i}{2}\right)^n \theta^{\alpha_2\beta_2} \cdots \theta^{\alpha_n\beta_n} \, \partial_{\alpha_2} \ldots \partial_{\alpha_n} f \, \partial_{\beta_1} \ldots \partial_{\beta_n} g
\end{aligned} \tag{13.5}$$

4. *Permutación cíclica:* la permutación cíclica de un producto estrella genera derivadas totales

$$f * g * h = h * f * g + \partial_\mu B^\mu_{\text{Cicl}}[f,g,h] \tag{13.6}$$

donde

$$B^\mu_{\text{Cicl}}[f,g,h] = B^\mu[f * g, h] = B^\mu[f, g * h] + B^\mu[g, h * f] \tag{13.7}$$