Capítulo 1

Introducción

La no conmutatividad no es algo novedoso en la física: el primer ejemplo de un espacio no conmutativo que fue claramente reconocido como tal es el espacio de fases cuántico. De hecho algunas consideraciones tempranas sobre su geometría diferencial "cuantificada" fueron desarrolladas, ya en 1926, por P.A.M. Dirac [1],[2]. En estos trabajos, Dirac develó la estructura algebraica del espacio de fases cuántico, postulando su célebre regla de cuantificación de una teoría clásica, que consiste en la substitución del paréntesis de Poisson de dos observables clásicos por $i\hbar$ veces el conmutador de los operadores cuánticos asociados. De esta manera, las coordenadas del espacio de fases p y q se transforman en operadores no conmutantes $\hat{p}$ y $\hat{q}$ cuyo conmutador vale $i\hbar$. Esta no conmutatividad implica una relación de incerteza entre los autovalores de los operadores $\hat{p}$ y $\hat{q}$, que vacía de sentido a la noción de puntos individuales en el espacio de fases, siendo la idea más cercana que sobrevive en la teoría cuántica la de *celda de Bohr* de área $\hbar/2$. En el límite $\hbar \to 0$ se recupera el espacio de fases ordinario.

Este álgebra particular de operadores fue la que inspiró la idea mas radical de substituir las coordenadas x^μ del espacio-tiempo por operadores no conmutantes $\hat{x}^\mu$. Dado que, como sucede en el caso anterior, la relación $[\hat{x}^\mu, \hat{x}^\nu] \neq 0$ implica un principio de incerteza, desdibuja la imagen del espacio-tiempo a cortas distancias. De esta manera, la idea de punto del espacio tiempo es reemplazada por la de *celda de Plank* de área mínima $\langle [x^\mu, x^\nu] \rangle /2$, y el espacio tiempo carece de puntos a pequeña escala. Entonces, se puede pensar que las coordenadas x^μ que observamos corresponden a algún tipo de promedio sobre escalas del orden del área de Plank.

Esta idea fue inicialmente motivada en el interés por controlar las divergencias, que plagan las teorías cuánticas de campos como la electrodinámica, y que surgen en el cálculo de expresiones que contienen productos de los campos en puntos vecinos. En efecto, con el objeto de hacer finitas las integrales involucradas, es necesario truncar la integración en una longitud mínima Λ^{-1}, lo que introduce una escala externa en la teoría, el así llamado *cutoff ultravioleta*. Como fue sugerido por Snyder [3], la no conmutatividad implica necesariamente una escala por debajo de la cual no existe la noción de punto, y es posible que al introducirla en una teoría de campos proporcione un *cutoff* ultravioleta efectivo, es decir una distancia mínima en el espacio tiempo a la que es sensible la teoría, eliminando así los infinitos. Conviene aclarar sin embargo, que una teoría no conmutativa podría en principio tener las mismas divergencias que la teoría conmutativa o aún peores.

Luego de algunos desarrollos iniciales [4], la idea cayó en el olvido, principalmente debido a que el programa de renormalización de la teoría cuántica de campos se reveló apropiado para predecir muy precisamente valores numéricos finitos para las magnitudes observables en electrodinámica cuántica, sin recurrir a la no conmutatividad. Además, postular una relación de incerteza para las coordenadas del espacio tiempo conduce en principio a una teoría no local, con todas las complicaciones subsecuentes. Una razón suplementaria es que la no conmutatividad de las coordenadas del espacio tiempo generalmente entra en conflicto con la invarianza de Lorentz. Aún si fuera posible que la no localidad quedara confinada a escalas del orden del área de Plank, es difícil imaginar algún mecanismo que haga inobservarble la ruptura de simetría de Lorentz.

Más recientemente, una definición más formal de no conmutatividad fue desarrollada por A. Connes desde un punto de vista matemático [5]. Por algún tiempo, las aplicaciones físicas de estas ideas se basaron en la interpretación geométrica del Modelo Standard y sus múltiples campos y constantes de acoplamiento [6]-[8], donde la gravedad fue introducida de una manera unificada [9]-[14]. La idea central de estos enfoques es una generalización del mecanismo de Kaluza-Klein, donde las dimensiones ocultas se reemplazan por estructuras no conmutativas. Por ejemplo, en esta interpretación del Modelo Standard , el campo de Higgs es un campo de gauge discreto sobre la "variedad no conmutativa" Z_2, referido como un grado de libertad del tipo interno de Kaluza-Klein. Esto provee una prueba automática del mecanismo de Higgs, independientemente de los detalles del potencial. Dado que este punto de vista tiene varias debilidades, por ejemplo la incorporación de las correcciones radiativas cuánticas, enventualmente fue abandonado. Sin embargo, causó un renovado interés en las ideas de Snyder acerca de la no conmutatividad del espacio tiempo.

Otra motivación de las teorías no conmutativas que las mantuvo con cierta vigencia está relacionada con la idea de que, en una teoría cuántica que incluya la gravedad, la naturaleza del espacio tiempo debe cambiar a distancias comparables con la longitud de Plank. El impulso y la energía requeridos para realizar una medida a estas escalas, modificaría por sí mismo la geometría del espacio tiempo [15]. Una manera de formular matemáticamente esto es postular que, a escalas menores que la escala de Plank, el espacio tiempo no es una variedad diferenciable, sino que tiene la estructura de un espacio tiempo no conmutativo. Entonces, una teoría cuántica de la gravitación que contenga o prediga coordenadas no conmutativas, parece tener buenas chances de estar regulada intrínsecamente. Una motivación relacionada es que cualquier teoría de la gravedad cuántica no será local en un sentido convencional. La no localidad implica problemas prácticos y conceptuales que aún no han sido entendidos en su totalidad, por lo que las teorías no conmutativas proporcionan un laboratorio relativamente simple donde estudiarlos. Esta es la razón fundamental de la gran actividad reciente en el areas de teoría de campos no conmutativa.

El principal candidato para una teoría cuántica de la gravitación es la teoría de cuerdas, la cual no es local en ningún sentido preciso. De hecho hay más de un parámetro característico de esta no localidad, en general controlada por la mayor entre la longitud de Plank y la longitud l_s de las cuerdas fundamentales.

Las teorías de cuerdas han sugerido la posibilidad de un espacio tiempo no conmutativo ya desde los 80, en los trabajos de E. Witten acerca de las teorías de campos de cuerdas [16]. Más recientemente, A. Connes, M. Douglas y A. Schwarz, en [17], M. Douglas y C. Hull en [18] y N. Seiberg y E. Witten en [19], descubrieron que existen límites de bajas energías de la teoría de cuerdas y de la denominada teoría M, que llevan directamente a teorías de gauge no conmutativas y que, siendo mucho mas simples que la teoría de cuerdas original, preservan algo de su no localidad. Probablemente el ejemplo más famoso de este tipo de límites es el desarrollado por Seiberg y Witten en [19]. En este modelo, se estudian cuerdas en presencia de un campo tensorial antisimétrico de Neveu-Schwarz $B_{\mu\nu}$, constante, sobre las cuales se imponen condiciones de contorno de Dirichlet en p direcciones. Estas condiciones de contorno equivalen a restringir el extremo de la cuerda a moverse sobre un hiperplano p-dimensional llamado Dp-brana. En este contexto se verifica que la teoría de campos efectiva, que describe los grados de libertad de baja energía sobre la Dp-brana, es una teoría no conmutativa p-dimensional, donde el conmutador de las coordenadas está relacionado con el campo $B_{\mu\nu}$.

También las teorías de campos no conmutativas juegan un papel importante en el área de la materia condensada. Un ejemplo clásico es el de la teoría de electrones en un campo magnético externo, proyectados sobre el nivel de Landau más bajo, que puede ser tratado como una teoría no conmutativa. Es por esto que estas ideas son relevantes para el estudio del efecto Hall cuántico [20], y de hecho se han demostrado muy útiles en este marco [21].

La mayor parte de estos trabajos relacionados con materia condensada, estuvieron orientados a electrones no interactuantes, por lo que la introducción en este contexto de ideas de la teoría de campos puede contribuir a su progreso. En particular, L. Susskind ha sugerido que la teoría de Chern-Simons definida sobre un espacio no conmutativo puede ser útil para el estudio del efecto Hall [22]. Esta sugerencia se fundamenta en el enfoque lagrangiano del problema de un fluido cargado en un campo magnético intenso, donde la acción natural para describir la dinámica del fluido es una acción de Chern-Simons no conmutativa, pero truncada al primer orden en el desarrollo en serie de potencias del conmutador de las coordenadas. La introducción de los órdenes restantes se justifica apelando al volumen finito del electrón, que se pretende modelar con la celda de Plank.

En lo que concierne al aspecto puramente matemático, notemos que el marco tradicional de la geometría y la topología es un conjunto de “puntos” con alguna estructura particular que llamamos *espacio*. Sin embargo, como se descubrió muy tempranamente, aún objetos tan fundamentales como las curvas elípticas se estudian mejor no en términos del conjunto de puntos, sino examinando las funciones continuas que se pueden definir sobre éste. Weierstrass abrió un nuevo camino en la geometría, al estudiar directamente el conjunto de funciones complejas que satisfacen un álgebra de adición particular, y derivar el conjunto de puntos a partir de éstas.

En la geometría no conmutativa, esta idea general de reemplazar conjuntos de puntos por álgebras de funciones se amplía. En muchos casos el conjunto está completamente determinado por el álgebra de funciones, puede entonces abandonarse el conjunto y obtenerse toda la información a partir de las funciones solamente. Por otro lado, en muchos casos el conjunto de puntos es muy patológico, y un examen directo no proporciona información útil. En tales casos, cuando estudiamos el problema desde el punto de vista algebraico, es común encontrar que el álgebra de funciones contiene toda la información que necesitamos. Sin embargo, este álgebra es en general no conmutativa. Entonces el proceso consiste en primero descubrir de que manera las álgebras de funciones determinan la estructura de un conjunto de puntos, y luego determinar cuales son las propiedades relevantes de estas álgebras que no dependen de la conmutatividad. Hecho esto, estamos en condiciones de estudiar la “geometría no conmutativa” generada por un álgebra no conmutativa arbitraria. Fue von Neumann el primero en intentar describir rigurosamente tales “espacios cuánticos”, llamando a su estudio “geometría sin puntos”.

Las ideas de la geometría no conmutativa fueron revividas en los 80 por los matemáticos Connes y Woronovics, quienes generalizaron la noción de una estructura diferencial al caso no conmutativo, es decir a álgebras arbitrarias. Junto con la definición de una integración generalizada, esto llevó a la descripción algebraica del “espacio tiempo no conmutativo”, y permitió la definición de teorías de campos en tales espacios.

En resumen, las teorías no conmutativas constituyen una herramienta de gran utilidad en física teórica. Aparecen tanto en la física de altas energías, para la descripción desde un nivel fundamental del espacio tiempo a pequeña escala, como en el área de materia condensada como modelos efectivos para la descripción del efecto Hall. La enorme actividad actual alrededor de estas teorías está principalmente ligada a la aparición de la no conmutatividad en los límites de bajas energías de la teoría de cuerdas que hemos mencionado anteriormente. Dado que la teoría de cuerdas es la única teoría conocida que podría unificar todas las interacciones fundamentales, es posible que los problemas del control de las divergencias en la teoría cuántica de campos y de la cuantificación de la gravedad estén en última instancia íntimamente relacionados a través de algún tipo de no conmutatividad.

Esta tesis doctoral se inscribe dentro del contexto que hemos descripto en los párrafos precedentes. Estudiaremos en ella varias propiedades de dos teorías de campos de gauge de gran interés definidas en espacio no conmutativo: la teoría de Chern-Simons y la teoría de Born-Infeld. Además utilizaremos la acción de Chern-Simons para definir una teoría no conmutativa de la gravitación en tres dimensiones.

En el caso conmutativo, la teoría de Chern-Simons ha tenido innumerables aplicaciones que van desde el cálculo de invariantes (polinomios de Jones) al estudio de teorías conformes, del efecto Hall fraccionario, de superconductores a altas temperaturas y de gravitación [23]-[36].

La teoría de Chern-Simons ordinaria se puede obtener como la anomalía de paridad en la acción efectiva para fermiones en $2+1$ dimensiones espacio temporales. En el caso no conmutativo, la ruptura de la simetría de Lorentz involucrada en el conmutador de las coordenadas podría generar términos adicionales en la parte que viola paridad de la acción efectiva. Es por lo tanto de interés verificar si en este caso la teoría efectiva coincide con la teoría de Chern-Simons no conmutativa. Por otro lado, como se explicará en los capítulos que siguen, es posible que el límite conmutativo no se pueda intercambiar con el límite de las regularizaciones introducidas en el cálculo de la acción efectiva, en un fenómeno conocido como *mezcla infrarrojo-ultravioleta* o IR/UV. De esta manera, modelos fermiónicos en los cuales el acoplamiento es proporcional a la no conmutatividad $[x^\mu, x^\nu]$, generarán en la acción efectiva, efectos observables independientemente de la magnitud de ésta. Estos problemas son estudiados en el capítulo 6 de esta tesis.

Como hemos dicho antes, la teoría de Chern-Simons no conmutativa se revela de utilidad en el área de materia condensada para el estudio del efecto Hall. Si bien la propuesta original se limita al problema del fluido cargado moviéndose en un plano infinito, dado que las muestras Hall que se estudian en el laboratorio tienen extensión finita, es necesario estudiar el comportamiento de esta acción cuando está definida sobre variedades con borde. En particular es fundamental verificar bajo cuáles condiciones la acción así definida es diferenciable e invariante de gauge. Además es de importancia encontrar qué relación, si la hay, tiene este modelo con el correspondiente modelo conmutativo. Esto se investigará en los capítulos 7 y 8.

Mencionaremos también que, en el caso conmutativo existe una relación entre la gravitación en $2+1$ dimensiones espacio temporales y la teoría de Chern-Simons [35],[36]. Esto sugiere la posibilidad de definir una teoría consistente de la gravitación no conmutativa tridimensional, a partir de la teoría de Chern-Simons no conmutativa. En el caso conmutativo ordinario se conocen soluciones de agujero negro puramente topológicas a las ecuaciones de la gravitación en tres dimensiones [37]. Es de interés verificar si estas soluciones existen en la teoría así definida en el espacio no conmutativo. Estos temas se desarrollan en el capítulo 9.

En cuanto a la acción de Born-Infeld, ha despertado gran interés recientemente dada su conexión con teoría de cuerdas [42]-[52]. Su definición en el caso no conmutativo enfrenta problemas relacionados con el ordenamiento de los campos, cuando se define este lagrangiano no lineal a partir de su desarrollo en serie de potencias. Desde el punto de vista de la teoría de cuerdas, en el problema similar de la acción no abeliana, se ha sugerido un tipo especial de orden simétrico [44] para resolver esta ambigüedad. Es entonces un punto primordial verificar si se puede definir una acción de Born-Infeld no conmutativa que sea invariante de gauge utilizando alguna prescripción de ordenamiento para los campos. Esto lo haremos en el capítulo 10.

Además, en el caso conmutativo no abeliano se ha demostrado que la definición de orden simétrico es consistente con la supersimetría [53]. Se plantea entonces el problema de si es posible encontrar una extensión supersimétrica para la acción de Born-Infeld no conmutativa con ese tipo de ordenamiento. Este problema se estudia en el capítulo 11.

Finalmente en la conclusiones resumiremos nuestros principales resultados, señalando sus alcances y limitaciones.