Capítulo 2

Introducción a las teorías no conmutativas

En este capítulo presentaremos una introducción a las teorías no conmutativas. Luego de describir brevemente el marco matemático en el que se inscribe la geometría no conmutativa, definiremos uno de los ejemplos mas sencillos de no conmutatividad: la deformación θ. Finalmente explicaremos como se formulan las teorías de campos en espacios θ-deformados, y mencionaremos el fenómeno de mezcla infrarrojo-ultravioleta, característico de estas teorías.

2.1. ¿Qué es la geometría no conmutativa?

Uno de los conceptos más fundamentales de la geometría es la topología. Sobre un cierto conjunto de puntos Ω, que llamaremos *espacio* una estructura topológica define la forma más primitiva del concepto de "proximidad", esto es, un punto esta "próximo" a otro si ambos pertenecen al mismo conjunto abierto. Sabemos que la estructura topológica de un espacio se refleja en el conjunto $\mathcal{C}_0(\Omega)$ de funciones complejas continuas que se pueden definir sobre él. Con la multiplicación punto a punto, el conjunto $\mathcal{C}_0(\Omega)$ adquiere estructura de álgebra conmutativa. Ejemplos sencillos de esto son las funciones definidas sobre el toro o sobre la esfera. En general, la topología de un espacio impone fuertes vínculos sobre el tipo de funciones continuas que se pueden definir globalmente.

Cabe entonces preguntarse cuanto se puede recorrer este camino en el sentido inverso: supongamos que de alguna manera conocemos la estructura del álgebra conmutativa $\mathcal{C}_0(\Omega)$ de funciones continuas definidas sobre un conjunto de puntos, ¿podemos, con la información presente en ese álgebra, reconstruir la estructura topológica del espacio Ω?. La respuesta es sí y es la principal consecuencia del llamado *teorema de Gel'fand-Naîmark*. Dicho en otras palabras: dada un álgebra conmutativa $\mathcal{C}$, es posible definir un conjunto de puntos Ω y una estructura topológica sobre él, tal que el álgebra inicial puede ser identificada con el álgebra de funciones continuas definidas en ese conjunto $\mathcal{C} = \mathcal{C}_0(\Omega)$.

Este resultado abre todo un nuevo panorama, basado en la siguiente pregunta: ¿qué otros aspectos de la geometría de un espacio se pueden deducir a partir de su álgebra de funciones continuas?. Se trata del área de la matemática conocida como geometría algebraica, que se ocupa de describir las propiedades geométricas de un espacio Ω a partir del álgebra conmutativa de funciones continuas definidas sobre él $\mathcal{C}_0(\Omega)$, mediante la identificación de los análogos algebraicos de las diferentes estructuras geométricas.

El primer paso en esa dirección es el que hemos mencionado previamente: la identificación del espacio topológico de partida Ω con el espacio de *caracteres*, o sea de las representaciones unidimensionales del álgebra conmutativa $\mathcal{C}_0(\Omega)$ dotado de una estructura topológica dada por la *construcción de Gel'fand-Naîmark-Siegal.* El paso siguiente es la identificación de haces vectoriales definidos sobre el espacio topológico con módulos proyectivos de tipo finito con coeficientes en el álgebra, lo que permite formular en términos algebraicos toda la teoría de formas diferenciales sobre una variedad. El cálculo sobre una variedad se reconstruye en el álgebra con la ayuda de la definición de un *triple espectral* canónico[1].

Sin embargo, se puede dar un paso más allá en esta dirección: una vez descubiertas las estructuras que, cuando están definidas sobre un álgebra conmutativa $\mathcal{C}$ tienen un significado geométrico en el correspondiente espacio asociado (por ejemplo, las nombradas en el párrafo anterior), podemos estudiarlas *per se* en el caso de un álgebra no conmutativa $\mathcal{A}$, para preguntarnos con un espíritu abierto, que tipo de interpretación geométrica puedan tener. Esta es la rama de la matemática conocida como *geometría no conmutativa.*

La geometría no conmutativa se centra en el estudio de aquéllas propiedades de las álgebras no conmutativas y de las estructuras definidas en base a ellas, que tendrían un significado geométrico en el caso conmutativo. En ese sentido, la geometría no conmutativa es una "geometría sin puntos", ya que no se parte de ningún tipo definido de espacio. Podemos pensar que estamos estudiando las propiedades de un "espacio no conmutativo" sin tener que definirlo formalmente.

¿Que interés puede tener todo lo anterior para los físicos?. La primera observación importante es que los campos Φ son elementos del álgebra de funciones continuas $\mathcal{C}_0(\mathcal{M})$ definidas sobre una cierta variedad espacio temporal $\mathcal{M}$. Dado que por el teorema de Gel'fand-Nâimark la variedad $\mathcal{M}$ se puede recuperar a partir del álgebra $\mathcal{C}_0(\mathcal{M})$, cabe plantearse la posibilidad de formular una teoría de campos solamente en términos del álgebra a la cual estos pertenecen, sin hacer ninguna referencia directa al espacio-tiempo. Para hacer tal cosa, necesitamos conocer los análogos algebraicos de derivadas, integrales y demás conceptos utilizados en teoría de campos. Como hemos comentado anteriormente, este es un problema que ha sido ampliamente estudiado por los matemáticos.

Pero si somos capaces de abstraer la variedad espacio temporal para definir nuestra teoría de campos en términos algebraicos, ¿que nos impide hacerlo usando un álgebra general $\mathcal{A}$,

[1] Una buena introducción pedagógica al significado y utilidad de todos estos términos técnicos en el área de la geometría no conmutativa se puede encontrar en [54]. Otros lecturas interesantes al respecto se pueden encontrar en [55],[56]. La formulación original de las ideas modernas de la geometría no conmutativa desde un punto de vista matemático se puede ver en [5]

incluso no conmutativa?. Nuestros campos serán entonces elementos de $\mathcal{A}$ con ciertas reglas de conmutación, y en algún sentido estamos estudiando la "teoría de campos en un espacio no conmutativo"[2].

2.2. Deformación θ y el producto * de Moyal

Uno de los ejemplos más simples de geometría no conmutativa es el de las llamadas deformaciones. Estas consisten esencialmente en tomar el álgebra de funciones continuas $\mathcal{C}_0(\mathcal{M})$ sobre una cierta variedad $\mathcal{M}$ y "deformar" el producto, substituyéndolo por otro que verifique

$$(f * g)(x) \;=\; f(x)g(x) + \theta\frac{i}{2}\,\{f(x), g(x)\}_{PB} + O(\theta^2)\,, \tag{2.1}$$

donde $\{\,\cdot\,,\,\cdot\,\}_{PB}$ representa una cierta estructura de Poisson definida sobre la variedad $\mathcal{M}$, y θ es un parámetro que controla la deformación, tal que $\theta \to 0$ es el límite conmutativo. Imponiendo como condición adicional la asociatividad del producto, se determinan los términos superiores de la expresión (2.1), a menos de redefiniciones lineales de las funciones [58]. Por lo tanto el producto estrella arriba definido es único para cada estructura de Poisson.

En lo que sigue nos concentraremos en la estructura de Poisson definida de acuerdo con $\theta\{f, g\}_{PB} = \theta^{\mu\nu}\partial_\mu f \partial_\nu g$, donde $\theta^{\mu\nu}$ es una matriz constante antisimétrica. Este tipo de deformación se denomina deformación θ. El correspondiente producto *estrella*, o *de Moyal* se puede escribir a todos los órdenes como

$$(\hat{f} * \hat{g})(x) = e^{\frac{i}{2}\theta^{\mu\nu}\partial_{\xi_\mu}\partial_{\zeta_\nu}}\hat{f}(x+\xi)\hat{g}(x+\zeta)\Big|_{\xi=\zeta=0}\,. \tag{2.2}$$

Nótese que este producto difiere del producto normal en una derivada total $\partial_\mu \tilde{B}^\mu[\hat{f}, \hat{g}]$, cuya forma explícita se da en el apéndice 13. Definiremos el *paréntesis de Moyal* como el conmutador tomado con este producto

$$[\hat{f}, \hat{g}] = \hat{f} * \hat{g} - \hat{g} * \hat{f}\,. \tag{2.3}$$

El acento circunflejo sobre las funciones indicará que éstas deben ser multiplicadas usando el producto estrella, es decir que las consideraremos como elementos del algebra deformada sobre la variedad $\mathcal{M}$, que llamaremos $\mathcal{C}_\theta(\mathcal{M})$, y no como elementos de $\mathcal{C}_0(\mathcal{M})$.

Si consideramos las "funciones coordenada" $\hat{x}^\mu$ sobre la variedad, tenemos para su conmutador de Moyal

$$[\hat{x}^\mu, \hat{x}^\nu] = i\theta^{\mu\nu}\,, \tag{2.4}$$

que es a lo que nos referimos como *espacio no conmutativo*. Debido a esto, la deformación θ nos provee de un tipo sencillo de geometría no conmutativa, en la cual aún tiene algún

[2] La teoría de campos no conmutativa en su forma más moderna fue formulada originalmente por A. Connes y puede encontrarse en [5]. Otras introducciones pedagógicas son [57]-[60]

sentido hablar de "puntos" y de "coordenadas". Esto simplifica la tarea de definir operaciones de derivación e integración en este álgebra, lo cual, como veremos en la sección que sigue, ayudará en la definición de una acción para los campos no conmutativos.

Como una manera alternativa de definir la deformación, dada una variedad $\mathcal{M}$ de dimensión d, considérense d objetos $\hat{x}^\mu$ que se multiplican con un producto asociativo que cumple la regla de conmutación (2.4). Estos objetos son la deformación de las coordenadas x^μ sobre la variedad $\mathcal{M}$.

¿Que sucede con el álgebra de funciones sobre la variedad cuando reemplazamos las coordenadas x^μ por los objetos no conmutativos $\hat{x}^\mu$?. En la expansión en serie de potencias de una dada función de las variables x^μ, es necesario decidir en cada término el orden en el cual se acomodaran los objetos $\hat{x}^\mu$. Una manera de hacer esto es definir el así llamado *orden de Weil*, en el cual el objeto $\hat{f} = W(f)$, asociado a la función f, se define según la fórmula

$$\hat{f} = W(f) = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \, e^{-ik_\mu \hat{x}^\mu} \tilde{f}(k) \,, \tag{2.5}$$

donde $\tilde{f}(k)$ es la transformada de Fourier de la función f. Es decir que definimos el elemento $\hat{f}$ como la transformada inversa de Fourier de f substituyendo en la exponencial las variables x^μ por las correspondientes variables deformadas $\hat{x}^\mu$.

Para ver identificar la estructura de álgebra de los elementos $\hat{f}$ multiplicamos dos de estos objetos "en el mismo punto"

$$\begin{aligned} \hat{f}\,\hat{g} &= \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{d^d k'}{(2\pi)^d} e^{-ik_\mu \hat{x}^\mu} e^{-ik'_\mu \hat{x}^\mu} \tilde{f}(k)\tilde{g}(k') = \\ &= \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{d^d k'}{(2\pi)^d} e^{-i(k_\mu + k'_\mu)\hat{x}^\mu} e^{-\frac{i}{2} k'_\mu \theta^{\mu\nu} k_\nu} \tilde{f}(k)\tilde{g}(k') = \\ W(f)W(g) &= W(f * g) \,, \end{aligned} \tag{2.6}$$

donde en la segunda línea hemos usado la formula de Campbell-Haussdorf para el producto de exponenciales de objetos no conmutantes y en la tercera línea hemos identificado el integrando con la transformada de Fourier de $f * g$ (ver apéndice 13). Por lo tanto el álgebra cuyos elementos son los objetos $\hat{f}$ definidos de acuerdo con el orden de Weil es isomorfa al álgebra $\mathcal{C}_\theta(\mathcal{M})$, lo que nos da otra manera de introducir el producto de Moyal a través de la deformación de la regla de multiplicación de las coordenadas[3]

La propiedades más usadas del producto de Moyal han sido explicadas en el apéndice 13.

[3] Esta definición de producto de Moyal es especialmente útil al estudiar solitones en las teorías de campos θ-deformadas.

2.3. Teorías de campos con producto estrella

En una teoría de campos no conmutativa con producto estrella, los campos $\hat{\Phi}$ son elementos del álgebra $\mathcal{C}_\theta(\mathcal{M})$ definida anteriormente. Es decir que la manera correcta de multiplicar los campos será con el producto estrella de Moyal (2.2). Para construir una acción $S^\theta[\hat{\Phi}]$ para ellos, la receta estándard es tomar una acción conmutativa usual $S[\Phi]$ para los correspondientes campos conmutativos Φ, y reemplazar todos los productos en esta presentes por productos de Moyal[4].

En cualquier teoría no conmutativa con producto estrella, la parte cuadrática de la acción es la misma funcional de los campos que en la correspondiente teoría conmutativa. Para ver esto supongamos que $\hat{\Phi}_1$ y $\hat{\Phi}_2$ representan dos campos cualesquiera de la teoría (o derivadas de ellos), entonces

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{M}} d^d x\, \hat{\Phi}_1 * \hat{\Phi}_2 &= \int_{\mathcal{M}} d^d x\, \hat{\Phi}_1 \hat{\Phi}_2 + \int_{\partial\mathcal{M}} d^{d-1} x\, n_\mu \tilde{B}^\mu[\hat{\Phi}_1, \hat{\Phi}_2] = \\ &= \int_{\mathcal{M}} d^d x\, \hat{\Phi}_1 \hat{\Phi}_2 \,, \end{aligned} \tag{2.7}$$

donde n_μ es un vector normal al borde de $\mathcal{M}$ y en la última igualdad, hemos supuesto que las condiciones de contorno son tales que el término de superficie $\tilde{B}_\mu[\hat{\Phi}_1, \hat{\Phi}_2]$ se anula[5]. La forma explícita del término de superficie se puede ver en el apéndice 13. De la ecuación (2.7) se deduce que los propagadores tendrán su forma usual, idénticos a los de la teoría conmutativa.

Sin embargo, las interacciones cambian por la introducción del producto estrella. Consideremos una interacción polinómica (que puede contener derivadas)

$$\sum_{n=3}^{L} g_n \int_{\mathcal{M}} d^d x\, \hat{\Phi}_1 * \hat{\Phi}_2 * \cdots * \hat{\Phi}_n \,. \tag{2.8}$$

Lo primero que se debe observar en tal interacción es que la presencia de las infinitas derivadas involucradas en el producto estrella la convierte en una interacción no local. Esta no localidad se puede analizar en detalle cuando se escribe el producto estrella en su forma integral (ver apéndice 13).

En espacio de impulsos, la interacción se escribe como

$$\sum_{n=3}^{L} \frac{g_n}{(2\pi)^{d(n-1)}} \int_{\mathcal{M}} d^d p_1 \cdots d^d p_n\, \delta\left(\sum_i^n p_i\right) \tilde{\Phi}_1(p_1) \tilde{\Phi}_2(p_2) \cdots \tilde{\Phi}_n(p_n)\, e^{-\frac{i}{2}\sum_{i<j}^n p_{i\mu}\theta^{\mu\nu} p_{j\nu}} \,, \tag{2.9}$$

[4]Más adelante veremos que esta receta está justificada desde el punto de vista de teoría de cuerdas.

[5]El el capítulo 7 analizaremos en detalle las condiciones de contorno adecuadas para el caso de la acción de Chern-Simons.

donde p_i es el impulso que fluye en el vértice a través del i-ésimo $\hat{\Phi}$. Aquí se puede ver que el vértice de interacción difiere del usual conmutativo en un factor de fase adicional. Esta es la única modificación de la reglas de Feynman.

El vértice (2.9) no es invariante bajo permutaciones arbitrarias de los p_i por lo que se debe respetar el orden en el cual las líneas emanan de cada vértice en el diagrama de Feynman. Debido a la conservación del impulso, se puede verificar que el vértice sólo es invariante bajo permutaciones cíclicas de los p_i.

Llamaremos diagramas *planos* a aquéllos en los cuales los factores de fase en cada vértice se factorizan del diagrama como un solo factor común, que involucra solamente los impulsos de las líneas externas y se puede extraer fuera de las integrales. Las integrales que resultan del cálculo de estos diagramas son idénticas a las correspondientes al caso conmutativo.

En cambio, los diagramas *no planos* contienen factores de fase en los integrandos que dependen de los impulsos de las líneas interiores de los diagramas, y que por lo tanto no se pueden factorizar fuera de las integrales. Estos son los responsables del fenómeno llamado mezcla infrarrojo-ultravioleta, ubicuo en las teorías no conmutativas[6].

Como ejemplo de un cálculo perturbativo en una teoría no conmutativa, tomaremos la teoría escalar con interacción cuártica $(\lambda/4!)\,\hat{\phi} * \hat{\phi} * \hat{\phi} * \hat{\phi}$ en $d = 4$ dimensiones espacio-temporales y describiremos resumidamente el cálculo de las correcciones a un loop al propagador [61].

Los diagramas planos contribuirán con

$$\Pi^{(1)}_{\mathrm{p}}(p) \;=\; \frac{1}{3}\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\,\frac{1}{k^2+m^2} \;\sim\; \Lambda^2 - m^2 \ln\left(\frac{\Lambda^2}{m^2}\right) \,, \tag{2.10}$$

donde Λ es un *cutoff* ultravioleta y se ve explícitamente la divergencia cuadrática. Por lo tanto, la relación de incerteza de las coordenadas espacio temporales no ha regulado completamente la teoría, algunas divergencias infrarrojas persisten.

La contribución de los diagramas no planos será

$$\Pi^{(1)}_{\mathrm{np}}(p) \;=\; \frac{1}{6}\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\,\frac{e^{ik_\mu\theta^{\mu\nu}p_\nu}}{k^2+m^2} \;\propto\; \frac{m}{\sqrt{p_\mu\theta^\mu{}_\rho\theta^{\rho\nu}p_\nu+\frac{1}{\Lambda^2}}}\,K_1\left(m\sqrt{p_\mu\theta^\mu{}_\rho\theta^{\rho\nu}p_\nu+\frac{1}{\Lambda^2}}\right)\,. \tag{2.11}$$

Puede verse que el factor oscilante en el integrando ha suprimido la divergencia ultravioleta, de manera que el resultado final es convergente en esta región del espectro. Sin embargo, la

[6] La razón para esta nomenclatura es la siguiente: es posible definir una expansión diagramática que automáticamente guarde el orden cíclico de los vértices si cada propagador es representado por una cinta en lugar de una línea en el correspondiente diagrama de Feynmann, asociando a cada borde de la i-ésima cinta los impulsos l_i y l_{i+1} tales que $l_{i+1} - l_i = k_i$. Esto es similar a la formulación de 't Hooft de las teorías no abelianas. De esta manera los diagramas se pueden clasificar de acuerdo con su topología, y adquiere sentido hablar de diagramas planos o no planos. La serie perturbativa se transforma en una suma sobre topologías, lo que inmediatamente sugiere una conexión entre las teorías de campos no conmutativas y la teoría de cuerdas.

divergencia aparece ahora como una divergencia en la región infrarroja del impulso externo p, como se puede ver desarrollando la función K_1 para valores pequeños del argumento

$$\begin{aligned} \Pi^{(1)}_{\rm np}(p) &\sim \frac{1}{p_\mu \theta^\mu{}_\rho \theta^{\rho\nu} p_\nu + \frac{1}{\Lambda^2}} + m^2 \ln\left(m^2\left(p_\mu \theta^\mu{}_\rho \theta^{\rho\nu} p_\nu + \frac{1}{\Lambda^2}\right)\right) = \\ &= \Lambda^2_{eff} - m^2 \ln\left(\frac{\Lambda^2_{eff}}{m^2}\right) \;, \end{aligned} \tag{2.12}$$

donde en la segunda línea hemos definido el *cutoff* efectivo

$$\Lambda^2_{eff} = \frac{1}{p_\mu \theta^\mu{}_\rho \theta^{\rho\nu} p_\nu + \frac{1}{\Lambda^2}} \;. \tag{2.13}$$

Nótese que en el límite ultravioleta, el diagrama no plano (2.12) es finito: la no conmutatividad ha regulado las divergencias. Sin embargo, el diagrama es divergente en la región infrarroja del impulso externo p.

Analicemos esto con mayor profundidad. Tomando el límite ultravioleta $\Lambda \to \infty$ en la formula para en *cutoff* efectivo (2.13) vemos que $\Lambda^2_{eff} = 1/p_\mu \theta^\mu{}_\rho \theta^{\rho\nu} p_\nu$. Por lo tanto, el límite infrarrojo de p corresponderá a $\Lambda_{eff} \to \infty$ y el diagrama (2.12) será divergente en ese límite. Alternativamente, podemos tomar primero el límite infrarrojo en (2.13), entonces $\Lambda_{eff} = \Lambda$ y el límite $\Lambda \to \infty$ corresponderá a $\Lambda_{eff} \to \infty$ y la fórmula (2.12) será divergente en el ultravioleta. Entonces podemos decir que las divergencias en la región infrarroja del espectro de p provienen de la región ultravioleta de integración. Este fenómeno se conoce como *mezcla infrarrojo-ultravioleta* o *IR/UV*.

Recapitulando: para $\theta^{\mu\nu}$ finito, los diagramas no planos son regulados por la no conmutatividad, siendo finitos en el ultravioleta. Sin embargo, en la región de pequeño momento externo, donde las fases que regulan el diagrama devienen inefectivas, reaparecen las divergencias ultravioletas ahora en la forma de divergencias infrarrojas. Se debe hacer notar que estas divergencias provienen de la región ultravioleta de integración, por lo que son una consecuencia de la dinámica de muy alta energía.

Este efecto aparece para $\theta^{\mu\nu}$ no nulo pero arbitrariamente pequeño, por lo que la teoría cuántica no conmutativa debajo de la escala de no conmutatividad no se parece en nada a la correspondiente teoría conmutativa (por ejemplo, como se ve en (2.12) el propagador de la teoría no conmutativa muestra un complicado comportamiento no local). En ese sentido, podemos decir que el límite $\theta^{\mu\nu} \to 0$ no conmuta con el límite del *cutoff*.