Capítulo 3

La motivación de las teorías no conmutativas en teoría de cuerdas y en materia condensada

En este capítulo describiremos algunas de las motivaciones de la teorías no conmutativas con producto de Moyal en la física. En particular recorreremos la celebrada deducción de Seiberg y Witten de la no conmutatividad de las teorías de campos que describen la dinámica de d-branas a bajas energías en un campo de Neveu-Schwarz constante. Luego estudiaremos la la manera en la cual aparece un producto de Moyal en materia condensada, cuando se hace la proyección en el nivel de Landau más bajo.

3.1. Cuerdas abiertas en un campo de Neveu-Schwarz constante

En esta sección analizaremos el espacio no conmutativo que emerge cuando se estudian cuerdas abiertas en un campo constante de Neveu-Schwarz, siguiendo el análisis original de [19][1]. Para esto, consideraremos la acción de la cuerda bosónica propagándose en un fondo de campos g_{AB}, B_{AB}, derivaremos las condiciones de contorno adecuadas para ese problema y construiremos el propagador en una hoja de mundo con la topología del disco (que corresponde a un cálculo a nivel árbol en teoría de cuerdas). Utilizando este propagador, analizaremos la dependencia de las amplitudes de dispersión con respecto al campo de Neveu-Schartz B_{AB}.

[1]Un enfoque similar usando técnicas de cuantificación canónica se ha dado en [62]

Ecuaciones de movimiento y condiciones de contorno

La acción para la cuerda bosónica viene dada por

$$S = \frac{1}{4\pi\alpha'} \int_{\mathcal{W}} d^2\sigma \left(g_{AB}(X)\partial_\alpha X^A \partial^\alpha X^B - 2\pi i\alpha' B_{AB}(X)\epsilon^{\alpha\beta}\partial_\alpha X^A \partial_\beta X^B\right), \qquad (3.1)$$

donde $\mathcal{W}$ es la hoja de mundo, descripta con coordenadas σ_α con $\alpha = 0, 1$. En el primer término, los índices a están contraídos con la métrica euclídea de la hoja de mundo $\eta_{\alpha\beta} = diag(1,1)^2$, mientras que en el segundo término, $\epsilon^{\alpha\beta}$ es el tensor antisimétrico de Levi-Civita bidimensional $\epsilon^{01} = -\epsilon^{10} = 1$. Aquí X^A, con $A = 0, \cdots, 9$, son las coordenadas de la cuerda en el espacio-tiempo de 10 dimensiones, que se comportan como campos escalares desde el punto de vista de la hoja de mundo, g_{AB} es la métrica del espacio tiempo y B_{AB} es el campo de Neveu-Schwarz antisimétrico.

Para una configuración con B_{AB} y g_{AB} constantes, integrando por partes en el segundo término se obtiene

$$S = \frac{1}{4\pi\alpha'} \int_{\mathcal{W}} d^2\sigma\, g_{AB}\partial_\alpha X^A \partial^\alpha X^B - \frac{i}{2}\int_{\partial\mathcal{W}} dt\, n_\alpha \epsilon^{\alpha\beta} B_{AB} X^A \partial_\beta X^B, \qquad (3.2)$$

aquí la variable de integración t es una coordenada a lo largo del borde $\partial\mathcal{W}$ de la hoja de mundo y n_α un vector normal a ese borde. Para la variación de esta acción se tiene

$$\begin{aligned} \delta S &= \frac{1}{2\pi\alpha'} \int_{\mathcal{W}} d^2\sigma\, g_{AB}\partial_\alpha X^A \partial^\alpha \delta X^B - i\int_{\partial\mathcal{W}} dt\, n_a \epsilon^{\alpha\beta} B_{AB}\delta X^A \partial_\beta X^B = \\ &= -\frac{1}{2\pi\alpha'}\left(\int_{\mathcal{W}} d^2\sigma\, g_{AB}\partial_\alpha\partial^\alpha X^A \delta X^B - \int_{\partial\mathcal{W}} dt\, n_\alpha\left(g_{AB}\partial^\alpha X^A + 2\pi i\alpha'\epsilon^{\alpha\beta}B_{AB}\partial_\beta X^A\right)\delta X^B\right), \end{aligned} \qquad (3.3)$$

Por lo tanto, para poder extraer la derivada variacional de la acción $\delta S/\delta X^A = g_{AB}\partial_\alpha\partial^\alpha X^B$, del primer término en (3.3), debemos anular el segundo término mediante las condiciones de contorno

$$n_\alpha\left(g_{AB}\partial^\alpha X^A + 2\pi i\alpha'\epsilon^{\alpha\beta}B_{AB}\partial_\beta X^A\right)\Big|_{\partial\mathcal{W}} = 0 \qquad A, B = 0, \cdots, p \equiv \mu, \nu\ , \qquad (3.4)$$

$$\delta X^A\Big|_{\partial\mathcal{W}} = 0 \qquad A = p+1, \cdots, 9 \equiv u\ , \qquad (3.5)$$

Las condiciones de contorno (3.5) corresponden a condiciones de tipo Dirichlet para las direcciones $p+1, \cdots, 9$ (es decir a una Dp-brana colocada en las direcciones $0, \cdots, p$). En cambio, las condiciones (3.4) corresponden a condiciones mixtas, que interpolan entre tipo Dirichlet y tipo Neumann para las direcciones restantes $0, \cdots, p$ (que se que se extienden a lo largo del volumen de mundo de la Dp-brana)[3 4],

[2]Si tomáramos en cambio signatura lorentziana $\eta_{\alpha\beta} = diag(1, -1)$, omitiríamos el "$i$" delante del $B_{\mu\nu}$.

[3]En adelante llamaremos μ, ν a las direcciones a lo largo de la Dp-brana $0, \cdots, p$, mientras que u, v serán las direcciones transversales $p+1, \cdots, 9$.

[4]Estas condiciones de contorno no son compatibles con con X^μ real (Si bien con una hoja de mundo lorentziana, las condiciones de contorno correspondientes serían reales). Aún así, la teoría de cuerdas abiertas se puede estudiar con ellas, hallando el propagador y utilizándolo en el cálculo de las funciones de correlación.

Las condiciones de contorno de Dirichlet en (3.5) se pueden reescribir $n_\alpha \epsilon^{\alpha\beta}\partial_\beta X^u = 0$ en las direcciones $u = p+1, \cdots, 9$. Reemplazando en la forma (3.2) de la acción, vemos que las componentes $u, v = p+1, \cdots, 9$ del campo B_{AB} se desacoplan de los campos X^A, por lo que podemos poner $B_{uv} = 0$. En lo que sigue supondremos no nulas solamente las componentes $B_{\mu\nu}$ de este campo, con $\mu, \nu = 0, \cdots, p$.

Nos concentraremos aquí en la aproximación a orden árbol de la teoría de cuerdas, por lo tanto, la topología de la hoja de mundo $\mathcal{W}$ en la cual trabajaremos será la del disco. Cualquier variedad con esta topología se puede mapear conformemente al semiplano superior, entonces condiciones de contorno (3.4) quedan escritas como

$$\begin{aligned} \left(g_{\mu\nu}\partial_\sigma X^\nu + 2\pi i\alpha' B_{\mu\nu}\partial_\tau X^\nu\right)\big|_{\sigma=0} &= 0\,, &(3.6)\\ \partial_\tau X^u\big|_{\sigma=0} &= 0\,, &(3.7)\end{aligned}$$

donde $\sigma_\alpha = \sigma, \tau$ son las coordenadas que parametrizan el semiplano, con $\sigma > 0$.

Propagador

En este punto estamos en condiciones de calcular el propagador para esta teoría, el cual deberá cumplir con las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned} \partial_\alpha\partial^\alpha \Delta^{\mu\nu}(\sigma_\alpha, \sigma'_\alpha) &= -2\pi\alpha' g^{\mu\nu}\delta(\sigma_\alpha - \sigma'_\alpha)\,, &(3.8)\\ \left(\partial_\sigma \Delta^{\mu\nu} + 2\pi i\alpha' B^\mu{}_\rho \partial_\tau \Delta^{\rho\nu}\right)\big|_{\sigma=0} &= 0\,, &(3.9)\\ \partial_\tau \Delta^{uv}\big|_{\sigma=0} &= 0\,. &(3.10)\end{aligned}$$

Como se puede verificar por substitución directa, la solución de la ecuación (3.8) con condiciones de contorno (3.9) es

$$\begin{aligned} \Delta^{\mu\nu}(\sigma_\alpha, \sigma'_\alpha) &= -\alpha'\left(g^{\mu\nu}\log\frac{|\vec\sigma - \vec\sigma'|}{|\vec\sigma - R\vec\sigma'|} + G^{\mu\nu}\log|\vec\sigma - R\vec\sigma'|^2\right) + \\ &\quad + \frac{i}{\pi}\theta^{\mu\nu}\,\mathrm{Arctan}\left(\frac{\tau - \tau'}{\sigma + \sigma'}\right) + D^{\mu\nu}\,, \\ \Delta^{uv}(\sigma_\alpha, \sigma'_\alpha) &= -\alpha' g^{uv}\log\frac{|\vec\sigma - \vec\sigma'|}{|\vec\sigma - R\vec\sigma'|}\,. &(3.11)\end{aligned}$$

donde $R = \mathrm{diag}(-1, 1)$ y hemos definido $G^{\mu\nu}$ y $\theta^{\mu\nu}$ de acuerdo a las partes simétrica y antisimétrica respectivamente del tensor $(g + 2\pi\alpha' B)^{-1}$, es decir

$$\begin{aligned} \left[\frac{1}{g + 2\pi\alpha' B}\right]^{\mu\nu} &= G^{\mu\nu} + \frac{1}{2\pi\alpha'}\theta^{\mu\nu}\,, \\ \theta^{\mu\nu} &= -(2\pi\alpha')^2\left(\frac{1}{g + 2\pi\alpha' B}B\frac{1}{g - 2\pi\alpha' B}\right)^{\mu\nu}\,, \\ G^{\mu\nu} &= \left(\frac{1}{g + 2\pi\alpha' B}\,g\,\frac{1}{g - 2\pi\alpha' B}\right)^{\mu\nu}\,, \\ G_{\mu\nu} &= g_{\mu\nu} - (2\pi\alpha')^2 B_{\mu\rho}g^{\rho\sigma}B_{\sigma\nu}\,. &(3.12)\end{aligned}$$

Las constantes de integración $D^{\mu\nu}$ en (3.11) pueden depender de $B_{\mu\nu}$ pero son independientes de σ, τ; no juegan ningún rol esencial y se pueden fijar con libertad en cualquier valor conveniente. Los primeros dos términos son manifiestamente univaluados. El tercer término no es univaluado, por lo que lo restringimos a tomar valores en el intervalo $[-\pi, \pi]$.

La forma que toma el propagador cuando se lo evalúa en el borde de la hoja de mundo, es decir en $\sigma = \sigma' = 0$, la cual será necesaria para nuestros cálculos más adelante, es

$$\begin{aligned} \Delta^{\mu\nu}(\tau, \tau')|_{\sigma=\sigma'=0} &= -\alpha' G^{\mu\nu} \log(\tau - \tau')^2 + \frac{i}{2}\theta^{\mu\nu}\epsilon(\tau - \tau'), \\ \Delta^{uv}(\tau, \tau')|_{\sigma=\sigma'=0} &= 0, \end{aligned} \tag{3.13}$$

donde hemos hecho $D^{\mu\nu} \equiv 0$. Señalaremos aquí que $G_{\mu\nu}$ tiene una simple interpretación intuitiva como la métrica efectiva que ven las cuerdas abiertas.

Como lo sugiere la notación, el coeficiente $\theta^{\mu\nu}$ en el propagador estará relacionado con el conmutador de las $p+1$ coordenadas X^μ de la cuerda en un espacio no conmutativo. Esta interpretación se obtiene al calcular este conmutador de operadores en la teoría conforme, usando el comportamiento a cortas distancias del orden temporal, esto es

$$\begin{aligned} [X^\mu(\tau), X^\nu(\tau)] &= \lim_{\epsilon\to 0} T\left(X^\mu(\tau)X^\nu(\tau-\epsilon) - X^\mu(\tau)X^\nu(\tau+\epsilon)\right) = \\ &= \lim_{\epsilon\to 0} T\Big(:X^\mu(\tau)X^\nu(\tau-\epsilon): - :X^\mu(\tau)X^\nu(\tau+\epsilon): \\ &\qquad - \Delta^{\mu\nu}(\tau, \tau-\epsilon) + \Delta^{\mu\nu}(\tau, \tau+\epsilon)\Big) = \\ &= i\theta^{\mu\nu}. \end{aligned} \tag{3.14}$$

hemos aprovechado aquí que el orden normal $:\cdot:$, definido de acuerdo con

$$:X^A(\sigma_\alpha)X^B(\sigma'_\alpha): \; = \; X^A(\sigma_\alpha)X^B(\sigma'_\alpha) + \Delta^{AB}(\sigma_\alpha, \sigma'_\alpha), \tag{3.15}$$

es una función analítica en $\sigma_\alpha - \sigma'_\alpha$, lo cual nos permitió escribir la última línea en (3.14). De esta manera vemos que el conmutador de las coordenadas que se extienden a lo largo del volumen de mundo de la Dp-brana es no nulo, por lo cual podemos inferir que ésta se convertirá en un espacio no conmutativo.

En lo que sigue, verificaremos que la acción efectiva de campos que reproduce las amplitudes de dispersión de teoría de cuerdas se corresponde con la acción de una teoría θ-deformada.

Orden normal y producto de operadores

Para calcular amplitudes de dispersión en teoría de cuerdas es necesario conocer la forma de un producto arbitrario de ciertos operadores, que están asociados a los estados dispersados, conocidos como operadores de vértice.

Tales operadores de vértice, para un estado con impulso p, tendrán la forma general

$$V_p(\sigma_\alpha) = :P(\partial_\alpha X^A(\sigma_\alpha), \partial_\alpha\partial_\beta X^A(\sigma_\alpha), \cdots)\, e^{ip\cdot X(\sigma_\alpha)} :, \tag{3.16}$$

donde P es un polinomio en las derivadas de los campos $X^A(\sigma_\alpha)$, que dependerá del estado de la cuerda representado con el operador de vértice. Aquí la definición del orden normal se ha extendido para una funcional arbitraria de $X^A(\sigma_\alpha)$ de acuerdo con

$$:\mathcal{F}[X]: = \exp\Big\{\frac{1}{2}\int d^2\sigma d^2\sigma'\, \Delta^{AB}(\sigma_\alpha, \sigma'_\alpha)\frac{\delta}{\delta X^A(\sigma_\alpha)}\frac{\delta}{\delta X^B(\sigma'_\alpha)}\Big\}\mathcal{F}[X]\ , \tag{3.17}$$

lo que implica para un producto de funcionales

$$:\mathcal{F}[X]:\,:\mathcal{G}[X]: = \exp\Big\{\int d^2\sigma d^2\sigma' \Delta^{AB}(\sigma_\alpha, \sigma'_\alpha)\frac{\delta_{\mathcal{F}}}{\delta X^A(\sigma_\alpha)}\frac{\delta_{\mathcal{G}}}{\delta X^B(\sigma'_\alpha)}\Big\}\ :\mathcal{F}[X]\,\mathcal{G}[X]:\ . \tag{3.18}$$

Como ejemplo de la fórmula anterior, considérese el producto de dos operadores de vértice exponenciales (asociados al estado de taquión) con impulsos p y q, evaluados en el borde de la hoja de mundo

$$\begin{aligned} :e^{ip\cdot X(\tau)}::e^{iq\cdot X(\tau')}: &= e^{-\Delta^{AB}(\tau,\tau')p_A q_B} :e^{ip\cdot X(\tau)}e^{iq\cdot X(\tau')}: = \\ &= (\tau-\tau')^{2\alpha' p_\mu G^{\mu\nu}p_\nu} e^{-\frac{i}{2}p_\mu\theta^{\mu\nu}p_\nu\epsilon(\tau-\tau')} :e^{ip\cdot X(\tau)}e^{iq\cdot X(\tau')}: = \\ &= e^{-\frac{i}{2}p_\mu\theta^{\mu\nu}p_\nu\epsilon(\tau-\tau')} \vdots e^{ip\cdot X(\tau)}\vdots\vdots e^{iq\cdot X(\tau')}\vdots, \end{aligned} \tag{3.19}$$

donde $\vdots\cdot\vdots$ es el orden normal calculado según la fórmula (3.17), pero usando el propagador

$$\Delta_0^{\mu\nu}(\tau,\tau')|_{\sigma=\sigma'=0} = -\alpha' G^{\mu\nu}\log(\tau-\tau')^2, \tag{3.20}$$

en lugar de (3.11). Este coincide con el propagador “usual” correspondiente al caso $B_{\mu\nu}\equiv 0$, con la única diferencia de que la métrica $G_{\mu\nu}$ aparece en lugar de la métrica $g_{\mu\nu}$.

Por lo tanto, este producto de operadores de vértice se reduce al producto de operadores de vértice del caso $B_{\mu\nu}\equiv 0$, salvo por la substitución de la métrica $g_{\mu\nu}$ por la nueva métrica de cuerdas abiertas $G_{\mu\nu}$ y por la aparición del importante factor de fase $\exp(i/2p_\mu\theta^{\mu\nu}p_\nu)$. Como veremos más adelante, este factor de fase, que es característico del producto de Moyal escrito en el espacio de impulsos, será el responsable de que la teoría efectiva sea no conmutativa.

En cuanto al producto de operadores de vértice mas generales (asociados a estados excitados de la cuerda), se debe observar que como el segundo término en el propagador contiene $\epsilon(\tau-\tau')$, para $\tau>\tau'$ no contribuirá a las contracciones de derivadas de $X^\mu(\tau)$, por lo tanto, se puede ver que un producto arbitrario de operadores de vértice será

$$\begin{aligned} &\prod_{i=1}^{k} :P_i(\partial X^A(\tau_i), \partial^2 X^A(\tau_i),\ldots)\, e^{ip^i\cdot X(\tau_i)}: = \\ &\qquad = e^{-\frac{i}{2}\sum_{i>j} p^i_\mu\theta^{\mu\nu}p^j_\nu\epsilon(\tau_i-\tau_j)} \prod_{i=1}^{k} \vdots P_n(\partial X^A(\tau_i), \partial^2 X^A(\tau_i),\ldots)\, e^{ip^i\cdot X(\tau_i)}\vdots\ . \end{aligned} \tag{3.21}$$

Nuevamente, el producto de operadores de vértice coincide con el usual salvo por el factor de fase dependiente de los impulsos y por la substitución de la métrica $g_{\mu\nu}$ por la métrica $G_{\mu\nu}$. La conservación del impulso asegura que el factor de fase sólo depende del orden cíclico de los τ_i en el borde del disco.

Amplitudes de dispersión

Ahora, armados con el propagador en la hoja de mundo y con la forma de un producto arbitrario de operadores de vértice, estamos en condiciones de calcular amplitudes de dispersión a orden árbol en la teoría de cuerdas, de manera de descubrir que tipo de teoría de campos es la adecuada para describir la física a bajas energías en esta Dp-brana no conmutativa.

Para calcular una amplitud de dispersión en teoría de cuerdas, se toma el valor medio de vacío del producto de los operadores de vértice $V^i_{p_i}(\tau_i)$ que representan a los estados involucrados, evaluados sobre el borde de la hoja de mundo, y se integra sobre los τ_i. Si incluimos factores de Chan-Patton en los extremos de la cuerda, debemos también tomar la traza del producto de las matrices M_i que representan estos factores.

Por lo tanto, cuando insertemos el producto (3.21) en un valor medio para calcular una amplitud de dispersión entre estados con un conjunto de partículas con impulsos p_i y estados de Chan-Patton M_i, obtendremos como resultado

$$\begin{aligned} S_{i\to f}(G_{\mu\nu},\theta^{\mu\nu}) &= \int \prod_{i=1}^{k} d\tau_i \left\langle \prod_{i=1}^{k} :P_i(\partial X^A(\tau_i), \partial^2 X^A(\tau_i), \ldots) e^{ip^i\cdot X(\tau_i)}: \right\rangle \mathrm{Tr}\left(\prod_{i=1}^{k} M_i\right) = \\ &= e^{-\frac{i}{2}\sum_{i>j} p^i_\mu \theta^{\mu\nu} p^j_\nu} \int \prod_{i=1}^{k} d\tau_i \left\langle \prod_{i=1}^{k} \vdots P_n(\partial X^A(\tau_i), \partial^2 X^A(\tau_i), \ldots) e^{ip^i\cdot X(\tau_i)} \vdots \right\rangle \mathrm{Tr}\left(\prod_{i=1}^{k} M_i\right) = \\ &= e^{-\frac{i}{2}\sum_{i>j} p^i_\mu \theta^{\mu\nu} p^j_\nu} S_{i\to f}(G_{\mu\nu}, \theta^{\mu\nu}\equiv 0) \ . \end{aligned} \tag{3.22}$$

Es decir que el efecto de un campo $B_{\mu\nu}$ no nulo en las amplitudes de dispersión consiste en cambiar la métrica $g_{\mu\nu}$ por la métrica de cuerdas abiertas $G_{\mu\nu}$, e introducir en los vértices el factor de fase $\exp(-i/2\sum_{i>j} p^i_\mu \theta^{\mu\nu} p^j_\nu)$, que caracteriza a una teoría no conmutativa. Por lo tanto, se ve que la acción efectiva construida para reproducir estas amplitudes de dispersión, contendrá productos estrella en sus vértices.

Para construir la teoría efectiva procedemos como sigue: si Φ^i_{ab} son campos asociados a los estados i de la cuerda con factores de Chan-Patton ab, entonces en el caso $B_{\mu\nu}=0$ la acción efectiva consiste en una suma de términos de la forma

$$\mathrm{Tr}\int d^dx\, \Phi_{i_1}\Phi_{i_2}\cdots\Phi_{i_n}\ , \tag{3.23}$$

donde la traza se toma sobre los índices de Chan-Patton de los campos. En el caso $B_{\mu\nu}$ no nulo, y de acuerdo con lo que hemos dicho mas arriba, la acción efectiva consistirá en exactamente los mismos términos, pero con los productos normales reemplazados por productos estrella

$$\mathrm{Tr}\int d^dx\,\Phi_{i_1}*\Phi_{i_2}*\cdots*\Phi_{i_n}\,. \tag{3.24}$$

Esto es consistente con la receta dada en 2.3 para construir una teoría de campos no conmutativa: tomar una acción de campos normal y cambiar productos normales por productos de Moyal, es decir introducir en los vértices el factor de fase que aparece en (3.22).

Límite de teoría de campos

Si bien con el razonamiento anterior hemos logrado dar una descripción simple de la dependencia de la acción efectiva en el campo $B_{\mu\nu}$, la forma del desarrollo de la acción efectiva en potencias de α' es al menos tan complicada como en el caso $B_{\mu\nu}=0$.

Por lo tanto, para tener una acción de teoría de campos que sea útil para describir la física de bajas energías de la teoría de cuerdas, debemos tomar el límite $\alpha'\to 0$ desacoplando los efectos de altas energías relacionados con el comportamiento de las cuerdas. Como hemos visto que las cuerdas abiertas son sensibles a los parámetros $G_{\mu\nu}$ y $\theta^{\mu\nu}$, al tomar este límite debemos mantener constantes estos parámetros en lugar de los usuales $g_{\mu\nu}$ y $B_{\mu\nu}$.

Para tomar ese límite en la ecuación (3.12), vemos que para mantener $\theta^{\mu\nu}$ constante es necesario que $g_{\mu\nu}$ tienda a cero como α'^2 y $B_{\mu\nu}$ se mantenga constante, entonces

$$\begin{aligned}
\theta^{\mu\nu} &= \left(\frac{1}{B}\right)^{\mu\nu}, \\
G^{\mu\nu} &= -\frac{1}{(2\pi\alpha')^2}\left(\frac{1}{B}\,g\frac{1}{B}\right)^{\mu\nu}, \\
G_{\mu\nu} &= -(2\pi\alpha')^2 B_{\mu\rho}g^{\rho\sigma}B_{\sigma\nu}\,.
\end{aligned} \tag{3.25}$$

Por lo tanto, es claro que la teoría de campos efectiva, construida para reproducir estas amplitudes de dispersión en un cálculo a orden árbol, es similar a la correspondiente al caso $B_{\mu\nu}=0$, salvo que deberá contener productos Moyal en sus vértices, con el parámetro $\theta^{\mu\nu}$ dado por (3.25), de manera de asegurar la aparición del factor de fase en (3.22).

Campos de gauge

Cuando ponemos de fondo un campo de gauge, la acción de cuerdas (3.1) se modifica con la adición del término

$$S_{gauge}=\int_{\partial\mathcal{W}} dt\, n_\alpha\epsilon^{\alpha\beta}A_A(X)\,\partial_\beta X^A\,. \tag{3.26}$$

Como se puede ver integrando por partes, este término es equivalente a sumar al campo B_{AB} la contribución $F_{AB}[A]$. Alternativamente, podríamos absorber el campo B_{AB} en el campo de gauge mediante un término $(1/2)\,B_{AB}X^B$. Esta ambigüedad se fija mediante la condición

$F_{AB}[A] \to 0$ cuando $X \to \infty$, por lo que cualquier constante en $F_{AB}[A]$ se considera parte de B_{AB}. Nuevamente las condiciones de contorno de Dirichlet desacoplan las componentes A_u del campo de gauge, por lo que podemos fijarlas a cero sin pérdida de generalidad.

La adición de un término de interacción de la forma (3.26) convierte nuestro modelo en un modelo sigma no lineal. Por lo tanto, las interacciones darán origen a la aparición de infinitos en los cálculos, los cuales deberán ser regularizados adecuadamente.

La acción (3.1) con el término (3.26) es invariante bajo la transformación

$$\delta A_\mu = \partial_\mu \lambda \,, \tag{3.27}$$

bajo la cual (3.26) transforma como una derivada total

$$\delta S_{gauge} = \int_{\partial \mathcal{W}} dt\, \partial_\mu \lambda(X)\, \partial_t X^\mu = \int_{\partial \mathcal{W}} dt\, \partial_t \lambda(X) = 0 \,. \tag{3.28}$$

Por lo tanto, clásicamente la teoría es invariante respecto de las transformaciones (3.27).

Sin embargo, en la integral funcional evaluada con esta acción, es necesario regularizar los infinitos originados por el producto de operadores en el mismo punto. En un valor medio arbitrario, desarrollando la variación de la exponencial de la acción a primer orden en el campo de gauge A_μ y en λ, obtenemos

$$\delta \langle \cdots \rangle = \left\langle \int d\tau \,:A_\mu(X(\tau)) \partial_\tau X^\mu(\tau) : \int d\tau' \,: \partial_{\tau'} \lambda(X(\tau')) : \cdots \right\rangle \,, \tag{3.29}$$

donde hemos mapeado conformemente la hoja de mundo al semiplano superior.

Para regularizar este producto de operadores utilizaremos el método de separación de puntos o *point splitting*, excluyendo de la región de integración en la segunda integral un pequeño intervalo de ancho ϵ en torno al punto en donde esta evaluado el operador en la primera integral. Al final del cálculo tomaremos el límite $\epsilon \to 0$. Entonces

$$\begin{aligned} \delta \langle \cdots \rangle|^{reg} &= \lim_{\epsilon \to 0} \left\langle \int d\tau \,: A_\mu(X(\tau))\, \partial_\tau X^\mu(\tau) : \int_{R-[t-\epsilon..t+\epsilon]} d\tau' \,: \partial_{\tau'} \lambda(X(\tau')) : \cdots \right\rangle = \\ &= \left\langle \int d\tau \,: A_\mu(X(\tau))\, \partial_\tau X^\mu(\tau) :: (\lambda(X(\tau - \epsilon)) - \lambda(X(\tau + \epsilon))) : \cdots \right\rangle, \end{aligned} \tag{3.30}$$

usamos el límite de bajas energías $\alpha' \to 0$ del propagador (3.13) para reescibir la última línea como

$$\begin{aligned} \delta \langle \cdots \rangle|^{reg} &= \left\langle \int d\tau \,: \partial_\tau X^\mu(\tau)\, (A_\mu(X(\tau)) * \lambda(X(\tau - \epsilon)) - A_\mu(X(\tau)) * \lambda(X(\tau + \epsilon))) : \cdots \right\rangle = \\ &= \left\langle \int d\tau \,: \partial_\tau X^\mu(\tau)\, [A_\mu(X(\tau)), \lambda(X(\tau))] : \cdots \right\rangle \,. \end{aligned} \tag{3.31}$$

Por lo tanto la acción adecuadamente regularizada por el método de separación de puntos no será invariante frente a las transformaciones (3.27).

Para encontrar las transformaciones que dejan invariante la acción regularizada, es necesario modificar la regla de transformación (3.27) de modo de cancelar la contribución anómala (3.30). De esta manera, tenemos que la acción regularizada será invariante bajo la nueva ley de transformación

$$\delta A_\mu = \partial_\mu \lambda + [A_\mu, \lambda] \,. \tag{3.32}$$

Como veremos más adelante, esta ley de transformación se corresponde con una teoría de gauge θ-deformada. Por lo tanto, la simetría de gauge en la brana será una simetría de gauge no conmutativa.

Si bien hemos desarrollado esta demostración en un desarrollo a primer orden en el campo de gauge A_μ, la demostración se puede extender a orden arbitrario. El caso no abeliano se demuestra de manera análoga.

Se debe notar que la deducción de (3.32) depende fuertemente del tipo de regularización utilizado. Si hubiéramos utilizado para regularizar las integrales un método invariante de gauge, como por ejemplo el de Pauli-Villars, nos encotraríamos con que la correcta simetría de gauge es (3.28) en lugar de (3.32). Esto cobrará importancia más adelante, cuando definamos el mapeo de Seiberg y Witten, que relaciona una teoría de gauge no conmutativa con una teoría conmutativa.

En resumen, hemos visto que cuando se estudian cuerdas abiertas en un campo de Neveu-Schwarz $B_{\mu\nu}$ constante, con sus extremos fijos a una DP-brana, las coordenadas que describen el volumen de mundo de la Dp-brana verifican el álgebra de un espacio tiempo no conmutativo θ-deformado. Vimos que existe un límite de baja energía de la teoría de cuerdas, en el cual los grados de libertad efectivos están descriptos por una teoría de campos no conmutativa con producto de Moyal. Además, si incluimos un campo de gauge, verificamos que la simetría de gauge de la teoría de campos efectiva se corresponde con la de una teoría de gauge no conmutativa.

3.2. El efecto Hall

Partícula en un campo magnético intenso

Supongamos una partícula de carga e mínimamente acoplada a un campo electromagnético externo. La parte de interacción de la acción vendrá dada por

$$\begin{aligned} S_{int} &= \int d^4x\, j^\mu(x) A_\mu(x) = \\ &= e \int d^4x \int d\tau\, \delta(x^\rho - X^\rho(\tau)) \frac{dX^\mu(\tau)}{d\tau} A_\mu(x) = \end{aligned}$$

$$= \; e\int dt\,\left(\dot{X}^i(t)A_i(X(t)) + A_0(X(t))\right)\,, \tag{3.33}$$

donde X^μ son las coordenadas de la partícula en el espacio tiempo, y en la última línea hemos fijado la invarianza de reparametrizaciones poniendo $X^0 = \tau \equiv t$. Especializando para un campo magnético constante en la dirección 3, tenemos $A_i(x) = -(B/2)\epsilon_{ij}\,x^j$ (con $i = 1, 2$) y $A_3(x) = A_0(x) = 0$, entonces

$$S_{int} = \frac{eB}{2}\int dt\,\epsilon_{ij}\,X^i\dot{X}^j\,, \tag{3.34}$$

La acción completa para la partícula contendrá también un término cinético, que en el límite no relativista será cuadrático en las velocidades $\dot{X}^i$ y proporcional a la masa m de la partícula. Está claro que en el límite de campo magnético fuerte $eB >> m$ podemos despreciar esta parte cinética frente al término (3.34). De esta manera obtenemos un sistema de primer orden en derivadas temporales, cuya acción está dada por (3.34).

Al derivar esta acción para obtener los impulsos canónicos, vemos que aparecen los vínculos de segunda clase

$$p_i + \frac{eB}{2}\,\epsilon_{ij}X^j = 0\,. \tag{3.35}$$

Para cuantificar canónicamente esta teoría, debemos obtener los corchetes de Dirac entre las variables canónicas de acuerdo con estos vínculos. Tales corchetes nos dan para las coordenadas

$$\{X^i, X^j\}_{DB} = -\frac{1}{eB}\epsilon^{ij}\,, \tag{3.36}$$

lo que tiene una estructura que nos recuerda a un espacio no conmutativo.

La primera cuantificación de la teoría requiere reemplazar las coordenadas X^i de la partícula por operadores $\hat{X}^i$ cuyas reglas de conmutación vendrán dadas por $i\hbar$ veces el paréntesis de Dirac, es decir

$$[\hat{X}^i, \hat{X}^j] = -\frac{i\hbar}{eB}\epsilon^{ij} = i\theta^{ij}\,, \tag{3.37}$$

donde $\theta^{ij} = -\frac{\hbar}{eB}\epsilon^{ij}$. Por lo tanto, la primera cuantificación de una partícula sometida a un campo magnético externo fuerte proporciona naturalmente una realización de un espacio no conmutativo θ-deformado.

Para definir los operadores $\hat{f}$ que representan en la teoría cuántica a los observables clásicos f, es necesario dar un prescripción de ordenamiento de las variables $\hat{X}^1$, $\hat{X}^2$ en $\hat{f}(\hat{X})$. Si esta prescripción se hace de acuerdo con el orden de Weil definido en (2.5), entonces el producto de operadores $\hat{f}\,\hat{g}$ será el operador correspondiente al producto Moyal de las funciones $f * g$. Vemos entonces que el álgebra de observables del sistema de una partícula cargada en un campo electromagnético fuerte es un álgebra $\mathcal{C}_\theta(\mathcal{M})$.

Límite continuo: fluido cargado en un campo magnético intenso

Estudiaremos aquí el límite continuo de las expresiones anteriores, y su relación con la teoría de Chern-Simons no conmutativa, siguiendo el análisis original de [22]. Si escribimos el equivalente de la acción (3.34) para un sistema de n partículas, en el límite $eB >> m$ obtenemos

$$S_{int} = \frac{1}{2} \int dt \sum_{l=1}^{n} eB \, \epsilon_{ij} \, X_l^i \dot{X}_l^j \, . \tag{3.38}$$

Particionando el plano en n sectores $\Delta_l S$ y multiplicando y dividiendo en la acción anterior por $\Delta_l S$ se tiene

$$S_{int} = \frac{1}{2} \int dt \sum_{l=1}^{n} \frac{eB}{\Delta_l S} \Delta_l S \, \epsilon_{ij} \, X_l^i \dot{X}_l^j \, , \tag{3.39}$$

en el límite continuo $n \to \infty, \Delta_l S \to 0$, esto se transforma en la siguiente acción de campos

$$S_{int} = \frac{e\Phi}{2} \int dt d^2 y \, \epsilon_{ij} \, X^i(t,y) \dot{X}^j(t,y) \, , \tag{3.40}$$

donde Φ es el flujo magnético, que hemos supuesto constante, y hemos reemplazado el índice de partícula l por un par de variables continuas (y^1, y^2). Los campos $X^i(t,y)$ se pueden entender como las coordenadas al tiempo t de la partícula que se hallaba en y^i en el instante inicial. Por lo tanto la condición inicial será $X^i(0,y) = y^i$.

El lagrangiano (3.40) es invariante frente a difeomorfismos en las variables y^i que preservan el área, es decir que tienen jacobiano unidad. Bajo tales difeomorfismos $X'^i(t,y') = X^i(t,y)$, lo que implica infinitesimalmente

$$\begin{aligned} y'^i &= y^i + f^i \, , \\ X'^i &= X^i - \partial_j X^i f^j \, . \end{aligned} \tag{3.41}$$

Nótese que la condición de jacobiano unidad $\det(\partial_i y'^j) = 1$ se traduce en $\partial_i f^i = 0$ cuya solución es $f^i = \epsilon^{ij} \partial_j \lambda$, con λ una función arbitraria de y. Con esto la ley de transformación se convierte en

$$\begin{aligned} y'^i &= y^i + \epsilon^{ij} \partial_j \lambda \, , \\ X'^i &= X^i - \epsilon^{jk} \partial_j X^i \partial_k \lambda \, . \end{aligned} \tag{3.42}$$

La corriente de Nœther asociada a esta simetría es

$$j^0 = \epsilon_{ij} \epsilon^{kl} \, \partial_k X^i \partial_l X^j \lambda \, , \tag{3.43}$$

$$j^i = 0 \, , \tag{3.44}$$

donde hemos hecho caso omiso de una derivada total que no contribuye a la carga. Por lo tanto, la ley de conservación de esta corriente implica

$$\partial_\mu j^\mu = \partial_0 j^0 = \partial_0 \left(\epsilon_{ij} \epsilon^{kl} \, \partial_k X^i \partial_l X^j \right) \lambda = 0 \, , \tag{3.45}$$

por lo vemos que el generador se conserva $\epsilon_{ij}\epsilon^{kl}\,\partial_k X^i \partial_l X^j = cte$. Es convencional fijar el valor de esta constante a 1 en ausencia de vórtices, por lo que nos quedamos con el vínculo

$$\epsilon_{ij}\epsilon^{kl}\,\partial_k X_i \partial_l X_j = 1\,. \tag{3.46}$$

Si imponemos este vínculo agregando un multiplicador de lagrange A_0, la acción nos queda escrita como

$$\begin{aligned} S &= \frac{e\Phi}{2}\int dtd^2y\,\left(\epsilon_{ij}\,X^i\dot{X}^j + A_0\left(\epsilon_{ij}\epsilon^{kl}\,\partial_k X^i\partial_l X^j - 1\right)\right) = \\ &= \frac{e\Phi}{2}\int dtd^2y\,\left(\epsilon_{ij}\,X^i\left(\dot{X}^j + \epsilon^{lk}\,\partial_k A_0\partial_l X^j\right) - A_0\right)\,. \end{aligned} \tag{3.47}$$

Si en la expresión anterior hacemos el cambio de variables

$$X^i = y^i + \epsilon^{ij}A_j\,, \tag{3.48}$$

nos queda, después de un poco de álgebra

$$S = \frac{e\Phi}{2}\int dtd^2y\,\epsilon^{ij}\left(A_0(\partial_i A_j + \epsilon^{kl}\partial_k A_i\partial_l A_j) - A_i\partial_0 A_j\right)\,, \tag{3.49}$$

donde hemos despreciado las derivadas totales.

Nótese que es segundo término en el coeficiente de A_0 se puede escribir como el desarrollo a primer orden de un conmutador de Moyal con parámetro $\theta^{kl} = -\epsilon^{kl}/eB$. Entonces nuestra acción difiere de

$$S^\theta = \frac{e\Phi}{2}\int dtd^2y\epsilon^{ij}\left(A_0(\partial_i A_j + [A_i, A_j]) - A_i\partial_0 A_j\right)\,, \tag{3.50}$$

en un término de orden $(\theta^{kl})^2 \sim 1/(eB)^2$. Por lo tanto, cuando el campo magnético es lo suficientemente intenso, podemos despreciar esa diferencia y utilizar (3.50) como la acción para el campo A_i, A_0. Haciendo esto hemos llegado a una teoría no conmutativa que, como veremos más adelante, se puede identificar con la teoría de Chern-Simons no conmutativa para el campo $A_\mu = (A_0, A_i)$.

Al adoptar (3.50) como la acción adecuada para describir el fluido de electrones, estamos aceptando una teoría en la cual las coordenadas del espacio tiempo no conmutan, con lo que tenemos una relación de incerteza del tipo $\Delta y_1 \Delta y_2 \geq \theta/2$, lo que implica un área mínima en el plano (y^1, y^2) accesible a las observaciones. Podemos interpretar esto diciendo que hemos recuperado de alguna manera el volumen finito ocupado por el electrón.