Capítulo 4

Las teorías de gauge no conmutativas y el mapeo de Seiberg-Witten

Este capítulo estará dedicado a las teorías de gauge es espacio no conmutativo. Primero estudiaremos de que manera se definen los campos de materia en diferentes representaciones del grupo de gauge. Luego definiremos la conexión y la curvatura no conmutativas. Finalmente describiremos la conexión existente entre teorías de gauge conmutativas y no conmutativas, a través del mapeo de Seiberg y Witten

4.1. Campos de materia

Podemos ahora preguntarnos como se construirá una teoría de gauge no conmutativa. Sea G el grupo de gauge, cuya álgebra de Lie es generada por los generadores J_a, con constantes de estructura $f^a{}_{bc}$. En una teoría de gauge convencional, los campos de materia son vectores $\Phi = [\Phi_a]$ de algún espacio de representación del grupo de gauge, con entradas Φ_a que son funciones continuas sobre la variedad $\mathcal{M}$, es decir $\Phi_a \in \mathcal{C}_0(\mathcal{M})$. Similarmente las transformaciones de gauge son matrices $g = [g_{ab}]$, que están en alguna representación del grupo de gauge, y cuyas entradas perteneces al álgebra de funciones continuas sobre la variedad, es decir $g_{ab} \in \mathcal{C}_0(\mathcal{M})$. Formulamos la teoría de manera que sea invariante frente a $\Phi \to g\,\Phi$.

Siguiendo los lineamentos generales descriptos en los capítulos anteriores, debemos reemplazar los campos conmutativos $\Phi_a \in \mathcal{C}_0(\mathcal{M})$ por campos no conmutativos $\hat{\Phi}_a \in \mathcal{C}_\theta(\mathcal{M})$. Sin embargo, tal reemplazo implica un cambio en las reglas de transformación frente a cambios de gauge, ya que para poder ser multiplicadas por los campos $\hat{\Phi}_a$ (que sólo admiten producto estrella), las entradas $\hat{g}_{ab}$ de las matrices de transformación de gauge deberán pertenecer a $\mathcal{C}_\theta(\mathcal{M})$. O sea que la regla correcta será

$$\hat{\Phi} \;\to\; \hat{g} * \hat{\Phi}\,, \tag{4.1}$$

y debemos formular nuestra teoría de manera que sea invariante bajo esta regla de transformación.

En este punto se debe observar una propiedad importante de las teorías de gauge no conmutativas. En una teoría de gauge usual conmutativa, tanto la representación *transpuesta* o *antifundamental*, en la cual representamos el campo Φ por un vector fila y transformamos de acuerdo con $\Phi \to \Phi\, g^{-1}$, como la representación *adjunta*, en la cual pensamos a Φ como una matriz en el álgebra de Lie del grupo y transformamos según $\Phi \to g\,\Phi\, g^{-1}$, son equivalentes a una representación natural, donde $\Phi \to g\,\Phi$ con una adecuada elección de g y Φ. En cambio, en el presente caso, debido a la no conmutatividad del producto estrella, ninguna de esas representaciones es equivalente a alguna forma de (4.1). Entonces, las posibles reglas de transformación para los campos de materia serán

$$\hat{\Phi}(x) \quad\to\quad \begin{cases} \hat{g} * \hat{\Phi} & \text{representación fundamental } \textit{“f”}, \\ \hat{\Phi} * \hat{g}^{-1} & \text{representación antifundamental } \textit{“a”}, \\ \hat{g} * \hat{\Phi} * \hat{g}^{-1} & \text{representación adjunta } \textit{“adj”}. \end{cases} \tag{4.2}$$

La inversa $\hat{g}^{-1}$ de una transformación de gauge está definida con relación al producto de Moyal, esto es $\hat{g}^{-1} * \hat{g} = 1$. Obsérvese que, aún en el caso con grupo de gauge $U(1)$, tiene sentido diferenciar las tres posibilidades arriba mencionadas para la regla de transformación.

Si escribimos $\hat{g} = 1 + \hat{\lambda}$, donde $\hat{\lambda}$ es una matriz del álgebra de Lie del grupo con entradas en $\mathcal{C}_\theta(\mathcal{M})$, obtenemos la forma infinitesimal de estas transformaciones

$$\delta\hat{\Phi}(x) \quad=\quad \begin{cases} \hat{\lambda} * \hat{\Phi} & \textit{“f”}, \\ \hat{\Phi} * \hat{\lambda} & \textit{“a”}, \\ \hat{\lambda} * \hat{\Phi} - \hat{\Phi} * \hat{\lambda} & \textit{“adj”}. \end{cases} \tag{4.3}$$

Por aplicación sucesiva de transformaciones infinitesimales construimos una transformación finita

$$\begin{aligned} \hat{g}(x) &= \left(1 + \hat{\lambda}\right) * \left(1 + \hat{\lambda}\right) * \cdots * \left(1 + \hat{\lambda}\right) = \\ &= 1 + \hat{\lambda} + \frac{1}{2}\hat{\lambda} * \hat{\lambda} + \cdots \equiv e_*^{\hat{\lambda}} \,, \qquad (4.4) \\ g^{-1} &= e_*^{-\lambda} \,. \qquad (4.5) \end{aligned}$$

4.2. Conexión, curvatura y derivadas covariantes

Nótese que, dado que el producto estrella satisface la regla de Leibnitz, las derivadas de los campos se transformarán bajo cambio de gauge de manera diferente a los campos mismos, de acuerdo con

$$\partial_\mu \hat{\Phi} \to \begin{cases} \partial_\mu \hat{g} * \hat{\Phi} + \hat{g} * \partial_\mu \hat{\Phi} & \textit{“f”}, \\ \partial_\mu \hat{\Phi} * \hat{g}^{-1} + \hat{\Phi} * \partial_\mu \hat{g}^{-1} & \textit{“a”}, \\ \partial_\mu \hat{g} * \hat{\Phi} * \hat{g}^{-1} + \hat{g} * \partial_\mu \hat{\Phi} * \hat{g}^{-1} + \hat{g} * \hat{\Phi} * \partial_\mu \hat{g}^{-1} & \textit{“adj”}, \end{cases}$$

$$(4.6)$$

es decir que si pretendemos formular una teoría invariante bajo transformaciones de gauge locales[1], debemos definir un campo de gauge y una derivada covariante. Obsérvese que debido a que en (4.6) están involucrados productos estrella, el campo de gauge no conmutativo $\hat{A}_\mu$ debe multiplicarse usando ese producto, tanto en la derivada covariante cuanto en su regla de transformación de gauge.

Si definimos para $\hat{A}_\mu$ la regla de transformación

$$\hat{A}_\mu \to \hat{g} * \hat{A}_\mu * \hat{g}^{-1} + \hat{g} * \partial_\mu \hat{g}^{-1}\,, \tag{4.7}$$

deducimos que las correctas derivadas covariantes adecuadas a cada representación deben ser

$$\hat{D}_\mu \hat{\Phi} = \begin{cases} \partial_\mu \hat{\Phi} + \hat{A}_\mu * \hat{\Phi} & \text{“}f\text{”}\,, \\ \partial_\mu \hat{\Phi} - \hat{\Phi} * \hat{A}_\mu & \text{“}a\text{”}\,, \\ \partial_\mu \hat{\Phi} + [\hat{A}_\mu, \hat{\Phi}] & \text{“}adj\text{”}\,, \end{cases} \tag{4.8}$$

las cuales transformarán de acuerdo con

$$\hat{D}_\mu \hat{\Phi} \quad \to \quad \begin{cases} \hat{g} * \hat{D}_\mu \hat{\Phi} & \text{“}f\text{”}\,, \\ \hat{D}_\mu \hat{\Phi} * \hat{g}^{-1} & \text{“}a\text{”}\,, \\ \hat{g} * \hat{D}_\mu \Phi * \hat{g}^{-1} & \text{“}adj\text{”}\,. \end{cases} \tag{4.9}$$

Una observación importante: tomemos la representación adjunta en el caso $U(1)$. Si bien este modelo se desacopla en el límite conmutativo $\theta^{\mu\nu} \to 0$, para $\theta^{\mu\nu}$ finito la interacción es no trivial como se puede ver en (4.8). Más aún, cuando se consideran los efectos cuánticos, la presencia de $\theta^{\mu\nu}$ arbitrariamente pequeño pero no nulo genera efectos observables cualitativamente diferentes a los del caso estrictamente conmutativo. Esto sucede debido a que, cuando $\theta^{\mu\nu}$ es no nulo, cualquier regularización invariante de gauge hace uso de la derivada covariante (4.8). Otra manera de decir esto es que el límite conmutativo no es un límite suave y no conmuta con los límites tomados al regular las integrales en la teoría de campos. Este fenómeno está cercanamente relacionado con la mezcla infrarrojo-ultravioleta ó IR/UV, de la que hemos hablado anteriormente, que es característica de las teorías no conmutativas y ha sido ampliamente estudiada en la literatura[2]. La forma de la regla de transformación de $\hat{A}_\mu$ bajo el cambio infinitesimal (4.3) es

$$\delta \hat{A}_\mu = \hat{D}_\mu \hat{\lambda}\,, \tag{4.10}$$

[1]La palabra “local” debe interpretarse aquí en el sentido débil de “matrices de transformación que dependen de las coordenadas”. Las leyes de transformación de gauge (4.2) involucran infinitas derivadas de los campos y de las matrices de transformación, por que son claramente no locales, dependiendo de los valores que toman estas funciones en todo el espacio.

[2]En el capítulo (6) veremos un ejemplo claro de este fenómeno, en el caso de la inducción de un término de Chern-Simons por fluctuación de fermiones no conmutativos en la representación adjunta.

donde $\hat{D}_\mu$ corresponde a la representación adjunta. Escrito en componentes

$$\delta \hat{A}^a_\mu = \partial_\mu \hat{\lambda}^a + \frac{1}{2}[t_b, t_c]\{\hat{A}^b_\mu, \hat{\lambda}^c\} + \frac{1}{2}\{t_b, t_c\}[\hat{A}^b_\mu, \hat{\lambda}^c]\,. \tag{4.11}$$

En esta fórmula se ve explícitamente una restricción importante para las teorías de gauge no conmutativas: si el campo de gauge $\hat{A}_\mu$ debe ser interpretado como una conexión en el álgebra de Lie del grupo de gauge G, es necesario que el anticonmutador en el último término sea expresable como combinación lineal de los generadores. Es decir que los grupos admisibles como grupos de gauge de teorías no conmutativas deben ser tales que su álgebra de Lie cierre por anticonmutación (además de por conmutación, como es usual).

Esto nos prohíbe, por ejemplo, los grupos $SO(N)$, $SU(N)$, $SL(N,\mathbb{R})$, $SL(N,\mathbb{C})$, etc, los cuales deben ser substituidos por grupos cuya álgebra de Lie cierre por anticonmutación (como por ejemplo $U(N)$, $GL(N,\mathbb{C})$), etc)[3].

Con la ayuda de las derivadas covariantes antes definidas, encontramos una expresión para la curvatura $\hat{F}_{\mu\nu}$ en la teoría de gauge no conmutativa

$$\hat{F}_{\mu\nu} = [\hat{D}_\mu, \hat{D}_\nu] = \partial_\mu \hat{A}_\nu - \partial_\nu \hat{A}_\mu + \hat{A}_\mu * \hat{A}_\mu - \hat{A}_\nu * \hat{A}_\mu\,. \tag{4.12}$$

Nótese que debido a que los dos últimos términos en (4.12) involucran productos de Moyal, no se cancelan aún en el caso $U(1)$, por lo que la electrodinámica no conmutativa es una teoría no lineal.

De la definición (4.12) se deduce la correspondiente ley de transformación

$$\hat{F}_{\mu\nu} \to \hat{g} * \hat{F}_{\mu\nu} * \hat{g}^{-1} \tag{4.13}$$

o sea que la curvatura transforma en la representación adjunta.

4.3. Acción invariante de gauge

La receta general que hemos descrito en el capítulo 2.3 para construir la acción de una teoría no conmutativa consiste en tomar la acción de alguna teoría de campos conmutativa y reemplazar en ella los campos Φ por los correspondientes campos no conmutativos $\hat{\Phi}$ y los productos usuales por productos de Moyal. Apliquemos esta receta para los campos de una teoría de gauge

[3]Sin embargo, es posible sortear este inconveniente si se renuncia a la interpretación del campo de gauge como una conexión, o si se imponen vínculos adicionales sobre el campo. De esta manera se han construido ejemplos de teorías de gauge con grupos especiales o simplécticos [63], [64], [65].

Representaciones fundamental y antifundamental

Para un campo escalar ϕ en la representación fundamental (antifundamental), tomamos la acción de la teoría conmutativa y le aplicamos la regla anterior para obtener

$$S^\theta = \frac{1}{2}\int d^dx \left((\hat{D}^\mu \hat{\phi})^\dagger * \hat{D}_\mu \hat{\phi} - m^2\, \hat{\phi}^\dagger * \hat{\phi} \right) , \tag{4.14}$$

donde $\hat{D}_\mu \phi$ es la derivada covariante en la representación fundamental (antifundamental). Para referencia futura, nótese que obtenemos el mismo resultado si aplicamos nuestra regla de reemplazo a la derivada covariante escrita en su forma matricial $D_\mu\phi = \partial_\mu\phi + A_\mu\phi$ o en términos de componentes $(D_\mu\phi)^a = \partial_\mu\phi^a + f^a_{\ bc}A^b_\mu\phi^c$.

De manera similar, para un campo espinorial en la representación fundamental (antifundamental) se tiene

$$S^\theta = \frac{1}{2}\int d^dx\, \bar{\hat{\psi}} * \left(i\, \hat{\not{D}} - m \right) \hat{\psi} \, . \tag{4.15}$$

Tanto en el caso fermiónico como en el bosónico el lagrangiano para los campos en la representación fundamental (antifundamental) es invariante de gauge, y por lo tanto lo mismo sucede con la acción.

Representación adjunta

En el caso de que los campos de materia están en la representación adjunta (4.2), la acción invariante de gauge será, para un campo escalar

$$S^\theta = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\int d^dx \left((\hat{D}^\mu \hat{\phi})^\dagger * \hat{D}_\mu \hat{\phi} - m^2 \hat{\phi}^\dagger * \hat{\phi} \right) , \tag{4.16}$$

mientras que para un campo espinorial

$$S^\theta = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\int d^dx \left(\bar{\hat{\psi}} * \left(i\, \hat{\not{D}} - m \right) \hat{\psi} \right) , \tag{4.17}$$

donde en ambos casos la derivada covariante es la correspondiente a la representación adjunta según se define en (4.8).

Debemos hacer aquí una observación importante: las expresiones (4.16) y (4.17) se obtienen a partir de la correspondiente teoría conmutativa aplicando la receta de la que hablamos anteriormente (esto es, reemplazando los campos conmutativos por los no conmutativos y los productos usuales conmutativos por productos estrella) a las formas matriciales de las derivadas covariantes $D_\mu\phi = \partial_\mu\phi + [A_\mu, \phi]$. Otro hubiera sido el resultado de aplicar nuestra receta a la forma en componentes de la derivada covariante $(D_\mu\phi)^a = \partial_\mu\phi^a + f^a_{\ bc}A^b_\mu\phi^c$. Esta observación cobra importancia al construir la acción para el campo de gauge.

Se debe hacer notar que, tanto el lagrangiano en (4.16) como aquél en (4.17), para los campos de materia en la representación adjunta, no son invariantes de gauge sino que transforman según

$$\mathcal{L} = \mathrm{Tr}(\ \cdot\ ) \to \mathrm{Tr}(g^{-1} *\ \cdot\ * g)\ , \tag{4.18}$$

el producto de Moyal en la expresión resultante nos impide usar la propiedad cíclica de la traza para probar la invarianza de gauge del lagrangiano. Sin embargo, si se imponen condiciones de contorno adecuadas, el producto estrella cumple la propiedad cíclica bajo el signo integral, por lo tanto la acción construída con este lagrangiano será invariante de gauge.

Acción para el campo de gauge

Cuando nos disponemos a aplicar nuestra receta para escribir la acción invariante de gauge para los campos de gauge A_μ, tomamos una acción conmutativa usual, la escribimos en su forma matricial y recién después reemplazamos los campos por los correspondientes campos no conmutativos $\hat{A}_\mu$ y los productos usuales por productos de Moyal. Nuestra receta para construir acciones no conmutativas no se puede aplicar a la acción escrita en términos de componentes $\hat{A}^a_\mu$.

Por ejemplo, para la acción de Yang-Mills no conmutativa obtenemos

$$S^\theta_{YM} = \frac{1}{4}\int d^Dx\,\mathrm{Tr}(\hat{F}_{\mu\nu} * \hat{F}^{\mu\nu})\,. \tag{4.19}$$

Obsérvese que el lagrangiano no es invariante de gauge, pero la acción sí lo es dadas las adecuadas condiciones de contorno. Esto es similar a lo que observamos para los campos de materia en el caso de la representación adjunta. Otra observación importante es que esta acción contiene autointeracción para el campo de gauge aún en el caso $U(1)$, por lo cual el desarrollo perturbativo de la electrodinámica no conmutativa contendrá diagramas con loops de fotones.

En la Parte II de la tesis definiremos la acción de Chern-Simons no conmutativa siguiendo los lineamientos aquí descriptos. En la Parte III haremos lo propio en relación a la acción no conmutativa de Born-Infeld.

4.4. El mapeo de Seiberg y Witten

Hemos visto en la sección 3, que al regularizar la integral funcional de teoría de cuerdas usando el método de *point splitting* se obtiene una teoría de gauge no conmutativa cuyos campos hemos llamado $\hat{A}_\mu$, mientras que en cambio, si regularizáramos usando el método de Pauli-Villars, obtenemos una teoría de gauge usual conmutativa con campos de gauge A_μ. Por lo tanto, dado que se trata de una diferencia de regularización, debe existir una redefinición de los campos $\hat{A}_\mu[A_\mu]$, que mapee la simetría de gauge ordinaria conmutativa en la correspondiente simetría no conmutativa. Tal transformación fue encontrada por Seiberg y Witten, en la forma de un cambio de variables orden a orden en $\theta^{\mu\nu}$ [19].

Dado que debemos respetar las simetrías presentes a cada lado de la transformación, esto significa que para un cambio infinitesimal de gauge con parámetro λ en la teoría conmutativa, debe existir un $\hat{\lambda}$ en la teoría no conmutativa tal que

$$\hat{A}_\mu[A_\mu + \delta_\lambda A_\mu] = \hat{A}_\mu[A_\mu] + \delta_{\hat{\lambda}} \hat{A}_\mu[A_\mu] \,. \tag{4.20}$$

Es importante resaltar que esto no significa que exista un cambio de parámetros del tipo $\hat{\lambda} = \hat{\lambda}[\lambda]$, ya que si así fuera tendríamos un isomorfismo entre los grupos de gauge de ambas teorías. Basta con recordar que en el caso $U(1)$ la teoría no conmutativa es "no abeliana" (a diferencia de la conmutativa), para ver que tal isomorfismo es imposible. Entonces, lo mas cercano que podemos escribir es una transformación de la forma $\hat{\lambda} = \hat{\lambda}[\lambda, A_\mu]$.

Postularemos que, en un desarrollo del campo $\hat{A}_\mu[A_\mu]$ en potencias de $\theta^{\mu\nu}$, los coeficientes son expresiones locales en términos del campo A_μ y sus derivadas. Entonces, como se puede verificar por substitución directa, una solución de la condición (4.20) a primer orden en $\theta^{\mu\nu}$ será

$$\begin{aligned} \hat{A}_\mu[A] &= A_\mu + \frac{1}{4}\theta^{\rho\sigma}\{A_\rho, \partial_\sigma A_\mu + F_{\sigma\mu}\} + O\left((\theta^{\mu\nu})^2\right) \,, \\ \hat{\lambda}[\lambda, A] &= \lambda - \frac{1}{4}\theta^{\rho\sigma}\{\partial_\rho \lambda, A_\sigma\} + O\left((\theta^{\mu\nu})^2\right) \,, \end{aligned} \tag{4.21}$$

(obsérvese que, dado que esta es una expresión a primer orden en $\theta^{\mu\nu}$, los productos involucrados son productos matriciales usuales).

Sin embargo, en este punto debemos notar que en realidad nuestra deducción de la ecuación (4.20) y de su solución (4.21) es independiente del valor de $\theta^{\mu\nu}$. En otras palabras, nuestros razonamientos siguen siendo válidos si el campo de gauge A_μ se refiere a una teoría no conmutativa con parámetro $\theta^{\mu\nu} \neq 0$ y el campo $\hat{A}_\mu$ a una teoría no conmutativa con parámetro $\theta^{\mu\nu} + \delta\theta^{\mu\nu} \neq 0$. En ese caso, la solución se puede escribir como

$$\begin{aligned} \delta\hat{A}_\mu[A] &= \frac{1}{4}\,\delta\theta^{\rho\sigma}\{A_\rho, \partial_\sigma A_\mu + F_{\sigma\mu}\} \,, \\ \delta\hat{\lambda}[\lambda, A] &= -\frac{1}{4}\,\delta\theta^{\rho\sigma}\{\partial_\rho \lambda, A_\sigma\} \,. \end{aligned} \tag{4.22}$$

La aplicación de este cambio de variables en la acción efectiva para el campo de gauge transforma la acción no conmutativa $S^\theta[\hat{A}_\mu]$ en un acción conmutativa $S[A]$, que no necesariamente es aquella de la cual se obtuvo $S^\theta[\hat{A}_\mu]$ al reemplazar productos estrella por productos normales. Por ejemplo la aplicación a la acción de Yang-Mills no conmutativa (4.19) del mapeo de Seiberg y Witten no la transforma en la acción de Yang-Mills conmutativa, sino en una acción conmutativa complicada y no polinómica. Estudiaremos más adelante el caso de la acción de Chern-Simons en $2+1$ dimensiones.

Para referencia futura, señalaremos aquí que la regla de transformación para el tensor de curvatura $\hat{F}_{\mu\nu}$ que se deduce de (4.22) es

$$\delta\hat{F}_{\mu\nu} = \frac{1}{4}\delta\theta_{\rho\sigma}\left(-2\{F_{\mu\rho}, F_{\nu\sigma}\} + \{A_\rho, \partial_\sigma F_{\mu\nu} + D_\sigma F_{\mu\nu}\}\right) . \tag{4.23}$$