# Capítulo 5

# Introducción a la teoría de Chern-Simons

*En este capítulo repasaremos algunas propiedades conocidas de la acción de Chern-Simons en el espacio conmutativo, con el objeto de estudiarlas mas adelante en el caso no conmutativo. En particular, nos referiremos a la inducción de un término de Chern-Simons por integración de fermiones masivos en 2+1 dimensiones, la relación de la acción de Chern-Simons definida en una variedad con borde con la acción quiral de Wess-Zumino-Witten, y la formulación de la gravedad tridimensional como una teoría de Chern-Simons. En la última sección, definiremos la acción de Chern-Simons en espacio no conmutativo.*

## 5.1. La acción de Chern-Simons en espacio conmutativo

*Definición*

Cuando definimos una teoría de gauge en tres dimensiones espacio temporales, existe otra estructura que puede suplementar o reemplazar al término de Maxwell o Yang-Mills en la acción para los campos de gauge. Ésta es el término de Chern-Simons [23], el cual se define como

$$S_{CS}[A_\mu] = \frac{\kappa}{4\pi}\,\mathrm{Tr}\int_{\mathcal{M}} d^3x\,\epsilon^{\mu\nu\rho}\left(A_\mu\partial_\nu A_\rho + \frac{2}{3}A_\mu A_\nu A_\rho\right)\,, \tag{5.1}$$

donde $\kappa$ es una constante de acoplamiento o *nivel*, que es adimensional (cuando los campos se toman con las dimensiones adecuadas) y que es una medida de la intensidad con la cual el término de Chern-Simons determina la dinámica de la teoría. Remarcablemente, éste término no depende de la elección de la métrica sobre la variedad espacio temporal $\mathcal{M}$, es decir que se trata de un término *topológico*, que no dará contribuciones al tensor energía impulso del sistema.

Este término contribuye a la variación de la acción con

$$\delta S_{CS} = \frac{\kappa}{4\pi}\,\mathrm{Tr}\int_{\mathcal{M}} d^3x\,\epsilon^{\mu\nu\rho}F_{\nu\rho}\delta A_\mu + \frac{\kappa}{4\pi}\,\mathrm{Tr}\int_{\partial\mathcal{M}} d^2x\,n_\rho\epsilon^{\mu\nu\rho}A_\nu\delta A_\mu\,, \tag{5.2}$$

Para garantizar la diferenciabilidad de la acción, debemos anular el término de superficie en (5.2). Para esto es suficiente imponer la condición de contorno $A_0|_{\partial\mathcal{M}} = 0$ (o cualquiera de las componentes espaciales). De esta manera obtenemos una contribución adicional en las ecuaciones de movimiento de valor $(\kappa/4\pi)\epsilon^{\mu\nu\rho}F_{\nu\rho}$.

Bajo una transformación de gauge, que debe ser elegida de manera de respetar las condiciones de contorno de las que hablamos en el párrafo anterior, la acción de Chern-Simons no es invariante, sino que cambia de acuerdo con

$$\delta S_{CS} = -\frac{\kappa}{4\pi}\,\mathrm{Tr}\int_{\partial\mathcal{M}} d^2x\,n_\mu\epsilon^{\mu\nu\rho}\partial_\nu g\,g^{-1}A_\rho - \frac{\kappa}{12\pi}\,\mathrm{Tr}\int_{\mathcal{M}} d^3x\epsilon^{\mu\nu\rho}g\,\partial_\mu g^{-1}\,g\,\partial_\nu g^{-1}\,g\,\partial_\rho g^{-1}\,. \tag{5.3}$$

Mientras que el primer término en (5.3) contiene $A_\mu$, y se anula debido a las condiciones de contorno $A_0|_{\partial\mathcal{M}} = 0$, el segundo término es un término de superficie, que es proporcional al "número de enrollamiento" o *winding number* $W(g)$, esto es al número de veces que se "enrolla" la transformación gauge en la variedad.

Por lo tanto, tenemos que bajo una transformación de gauge, la acción cambia según $\delta S_{CS} = -2\pi\kappa W(g)$. Como en la teoría cuántica $e^{iS_{CS}}$ debe ser invariante de gauge, vemos que necesariamente el coeficiente $\kappa$ debe estar cuantizado $\kappa \in Z$.

*La anomalía de paridad*

Una de las maneras en la que aparece la acción de Chern-Simons en la física, es como acción efectiva por correcciones radiativas que resultan de la integración de fermiones acoplados a un campo de gauge en $2+1$ dimensiones, como la parte que viola paridad de la acción efectiva invariante de gauge para el campo $A_\mu$ [24].

Definamos la acción efectiva $\Gamma[A_\mu]$ de acuerdo con

$$e^{i\Gamma[A_\mu;m]} = \int \mathcal{D}\psi\mathcal{D}\bar{\psi}\,e^{iS[\psi,A_\mu;m]}\,, \tag{5.4}$$

donde $S[\psi, A_\mu; m]$ es la acción para fermiones de masa $m$ mínimamente acoplados al campo $A_\mu$ en alguna representación del grupo de gauge.

Al intentar calcular explícitamente por medio de la teoría de perturbaciones los primeros órdenes de la acción efectiva, nos encontramos con diagramas divergentes, en particular los diagramas de polarización de vacío y del triángulo. Un método invariante de gauge de regular estas divergencias es el de Pauli-Villars, que consiste en agregar a la teoría nuevos campos espinoriales bosónicos de masa $M$, que al final de los cálculos se hace tender a infinito. Pero en $d = 3$ dimensiones, la introducción de una masa, en este caso la del campo regulador, entraña una violación de la simetría de paridad, y es por esto que el cálculo de los diagramas regularizados de esta manera lleva a un término de Chern-Simons.

Como resultado, la parte de la acción efectiva invariante de gauge que viola paridad tiene la forma de una acción de Chern-Simons

$$\Gamma_{impar}[A_\mu; m = 0] = \frac{1}{2}\frac{M}{|M|} S_{CS}[A_\mu] \,. \tag{5.5}$$

Si bien el factor 1/2 delante de la acción efectiva haría pensar que no se respeta la invarianza de gauge frente a transformaciones de gauge *grandes*, esto es, con *winding number* $W(g)$ diferente de cero, la variación del término de Chern-Simons bajo estas transformaciones se cancela con la variación de la parte de la acción efectiva que preserva paridad.

En el caso de los fermiones masivos, la violación de paridad está explícita desde el inicio a través del término de masa. Pero además, podemos calcular la parte que viola paridad de la acción efectiva invariante de gauge por efectos radiativos, la cual, a baja energía y orden $e^3$ en teoría de perturbaciones, tiene la forma[1]

$$\Gamma_{impar}[A_\mu; m] = \frac{1}{2}\left(\frac{m}{|m|} + \frac{M}{|M|}\right) S_{CS}[A_\mu] + o(\frac{\partial^2}{m^2}, e^4) \,. \tag{5.6}$$

Nótese que en este caso masivo, el resultado es aproximado, ya que recibe correcciones de la región de altas energías (la forma explícita de estas correcciones, que para el caso abeliano ha sido estudiada en [28],[29], no corresponde a un término de Chern-Simons), además de correcciones de orden $e^4$ en teoría de perturbaciones. Por otro lado la parte de Chern-Simons es invariante de gauge aún bajo transformaciones grandes, independientemente de la parte que preserva paridad.

Otros métodos invariantes de gauge para la regularización de las integrales dan idéntica respuesta. Un sumario de estos resultados se puede encontrar en [27]. Si en lugar de utilizar un método invariante de gauge para regular las divergencias, hubiéramos utilizado un método que preserve la simetría de paridad de la acción original, habríamos encontrado que la acción efectiva resultante viola la simetría de gauge.

En cuanto a las correcciones perturbativas, para el caso abeliano [30] como para el no abeliano [31],[32] se ha probado que el coeficiente del término de Chern-Simons no se renormaliza a todo orden en teoría de perturbaciones.

*La acción de Chern-Simons en variedades con borde*

Dado que la acción de Chern-Simons tiene un carácter topológico, es de interés estudiar los efectos que tiene sobre esta teoría la topología de la variedad sobre la cual están definidos los campos de gauge [33]-[34].

[1] Si bien tanto en la definición de la acción de Chern-Simons como en la acción fermiónica no hemos incuído explícitamente la constante de acoplamiento $e$, ésta puede introducirse mediante el reescaleo $A_\mu \to eA_\mu$

Considérese la acción

$$S_{CS}[A_0, A_i] = \frac{\kappa}{4\pi} \mathrm{Tr} \int_{\mathcal{M}} d^3x\, \epsilon^{ij} \left(A_0 F_{ij} - A_i\, \partial_0 A_j\right) \ , \tag{5.7}$$

la cual difiere de la acción de Chern-Simons usual por un término de superficie. Si $\mathcal{M}$ no tiene borde, tal término de superficie es irrelevante, caso contrario el termino se anula cuando las condiciones de contorno son las mencionadas anteriormente.

Usando la forma (5.7) para la acción, la función de partición para la teoría de Chern-Simons toma la forma

$$\begin{aligned} Z &= \int \mathcal{D}A_i \mathcal{D}A_0 e^{iS_{CS}[A_0,A_i]} = \\ &= \int \mathcal{D}A_i \mathcal{D}A_0 e^{\frac{i\kappa}{4\pi} \mathrm{Tr} \int_{\mathcal{M}} d^3x\, \epsilon^{ij} (A_0 F_{ij} - A_i\, \partial_0 A_j)} \, , \end{aligned} \tag{5.8}$$

entonces vemos que el campo $A_0$ actúa como un multiplicador de Lagrange forzando la condición de conexión plana para las componentes espaciales del campo de gauge. Integrando sobre $A_0$ nos queda

$$Z = \int \mathcal{D}A_i \delta(\epsilon^{ij} F_{ij}) e^{-\frac{i\kappa}{4\pi} \mathrm{Tr} \int_{\mathcal{M}} d^3x\, \epsilon^{ij} A_i \partial_0 A_j} \, . \tag{5.9}$$

Para seguir adelante con este cálculo, debemos resolver la condición de conexión plana para las componentes espaciales del campo de gauge $A_i$. La solución de esta ecuación depende fuertemente de la topología de la variedad $\mathcal{M}$, y el resultado final contendrá un cierto número de grados de libertad, en la forma de variables o funciones arbitrarias, que constituyen lo que se suele llamar el *espacio de módulos* del problema.

Por ejemplo, si elegimos como nuestra variedad espacio temporal $\mathcal{M} = \Sigma \times \mathbb{R}$ donde $\Sigma$ es una variedad bidimensional con la topología del disco, la solución de la condición de conexión plana es simplemente $A_i = g\, \partial_i g^{-1}$, con $g : \mathcal{M} \to G$. Entonces el espacio de módulos en este caso consiste en las funciones sobre la variedad que toman valores en el grupo de gauge. Reinsertando en (5.9) tenemos

$$Z = \int \mathcal{D}g e^{iS_{QWZW}[g]} \, , \tag{5.10}$$

donde $S_{QWZW}[g]$ es la acción quiral de Wess-Zumino-Witten

$$S_{QWZW}[g] \;\; = \;\; -\frac{\kappa}{4\pi} \mathrm{Tr} \int_{\partial\mathcal{M}} d^2x\, g\, \partial_0 g^{-1} g\, \partial_\varphi g^{-1} - \frac{\kappa}{12\pi} \mathrm{Tr} \int_{\mathcal{M}} d^3x\, \epsilon^{\mu\nu\rho}\, g\, \partial_\mu g^{-1} g\, \partial_\nu g^{-1} g\, \partial_\rho g^{-1} \, , \tag{5.11}$$

donde $\varphi$ es una coordenada tangencial que parametriza el borde de $\mathcal{M}_2$.

*La relación con la gravitación en 2+1 dimensiones*

La teoría de gravitación de Einstein en espacio tiempo tridimensional [37]-[41] no posee grados de libertad que se propaguen. Esto es análogo a lo que sucede con la teoría de Chern-Simons, por lo que ya desde el principio se podría suponer alguna relación entre las dos.

La forma explícita de esta relación, que fue aclarada por primera vez en [35] para el caso de la supergravedad y estudiada en profundidad en [36], se puede expresar de la siguiente manera: formulando la teoría de la gravitación en el formalismo de tríadas, existe un cambio de variables que la mapea en una teoría gauge con acción de Chern-Simons. El grupo de gauge adecuado depende de la signatura del espacio tiempo y del signo de la constante cosmológica.

En el formalismo de tríadas, las variables dinámicas de la gravitación son la *tríada* o *dreibein* $e^a{}_\mu$ y la *conexión de Ricci* o *conexión de spin* $w^{ab}{}_\mu$, las cuales se relacionan con la métrica y la conexión afín de acuerdo con $g_{\mu\nu} = \eta_{ab} e^a{}_\mu e^b{}_\nu$ y $\Gamma^\mu{}_{\nu\rho} = \eta_{bc} e_a{}^\mu w^{ab}{}_\rho e^c{}_\nu + e_a{}^\mu \partial_\rho e^a{}_\nu$, donde $\eta_{ab} = \mathrm{diag}(1, -1, -1)$ es la métrica plana de Minkowski y hemos definido el *dreibein* inverso $e_a{}^\mu$ de modo que $e_a{}^\mu e^b{}_\mu = \delta^a_b$. Estas relaciones permiten interpretar la tríada $e^a{}_\mu$ como la matriz de transformación que en cada punto lleva del sistema de coordenadas $x^\mu$ al sistema localmente minkowskiano.

En términos de estas nuevas variables, la acción de Einstein-Hilbert tridimensional se escribe como

$$\begin{aligned} S_{EH}[e^a{}_\mu, w^{ab}{}_\mu] &= \int d^3x \sqrt{-g} \left( R_{\mu\nu}[\Gamma] g^{\mu\nu} - \frac{2\epsilon}{l^2} \right) = \\ &= \int d^3x \, \epsilon_{abc} \epsilon^{\mu\nu\rho} \left( R^{ab}{}_{\mu\nu} e^c{}_\rho + \frac{\epsilon}{3l^2} e^a{}_\mu e^b{}_\nu e^c{}_\rho \right) , \end{aligned} \tag{5.12}$$

aquí $R^{ab}{}_{\mu\nu} = \partial_\mu w^{ab}{}_\nu - \partial_\nu w^{ab}{}_\mu + w^a{}_{c\mu} w^{cb}{}_\nu - w^a{}_{c\nu} w^{cb}{}_\mu$, y hemos escrito la constante cosmológica como $\epsilon/l^2$ con $\epsilon = 0, \pm 1$.

Para relacionar la acción de Einstein con la teoría de Chern-Simons, definimos un campo de gauge $A_\mu$ según

$$A_\mu = e^a{}_\mu \mathcal{P}_a + w^a{}_\mu \mathcal{J}_a \, . \tag{5.13}$$

donde hemos definido $w^a{}_\mu = -(1/2) \epsilon^a{}_{bc} w^{bc}{}_\mu$ y donde $\mathcal{J}_a$ y $\mathcal{P}_a$ son generadores de algún grupo de gauge a determinar. La acción de Chern-Simons (5.1) para esta conexión de gauge es idéntica a la forma (5.12) de la acción de Einstein-Hilbert, cuando se imponen sobre los generadores $\mathcal{J}_a$ y $\mathcal{P}_a$ las reglas de conmutación

$$[\mathcal{J}_a, \mathcal{J}_b] = \epsilon_{ab}{}^c \mathcal{J}_c \, , \qquad [\mathcal{P}_a, \mathcal{P}_b] = -\frac{\epsilon}{l^2} \epsilon_{ab}{}^c \mathcal{J}_c \, , \qquad [\mathcal{J}_a, \mathcal{P}_b] = \epsilon_{ab}{}^c \mathcal{P}_c \, , \tag{5.14}$$

y la normalización

$$\mathrm{Tr}\,(\mathcal{P}_a \mathcal{P}_b) = \mathrm{Tr}\,(\mathcal{J}_a \mathcal{J}_b) = 0 \, , \qquad \mathrm{Tr}\,(\mathcal{J}_a \mathcal{P}_b) = \eta_{ab} \, . \tag{5.15}$$

Por lo tanto, la teoría de la gravitación en $2+1$ dimensiones es equivalente a una teoría de gauge con acción de Chern-Simons y con grupo de gauge generado por las matrices $\mathcal{P}_a$ y $\mathcal{J}_a$.

De acuerdo con lo que habíamos adelantado, se puede ver que las reglas de conmutación (5.14) dependen del signo de la constante cosmológica, y por lo tanto lo mismo sucede con el grupo de gauge de la teoría de Chern-Simons adecuada para la gravitación.

En el caso de constante cosmológica nula $\epsilon = 0$, las reglas de conmutación corresponden a las del grupo $ISO(2,1)$, es decir que la teoría de gravedad es equivalente a una teoría de Chern-Simons cuyo grupo de gauge es el grupo de Poincaré en $2+1$ dimensiones.

En el caso de constante cosmológica negativa $\epsilon = -1$, podemos hacer un cambio de base $\{\mathcal{P}_a, \mathcal{J}_a\} \to \{J_a^+, J_a^-\}$, con $J_a^{\pm} = (1/2)(\mathcal{J}_a \pm l\mathcal{P}_a)$. Entonces el álgebra de lie del grupo es generada con combinaciones lineales con coeficientes reales de seis matrices $J_a^{\pm}$. Estas matrices cumplen las reglas de conmutación

$$[J_a^+, J_b^+] = \epsilon_{ab}{}^c J_c^+ \,, \qquad [J_a^-, J_b^-] = \epsilon_{ab}{}^c J_c^- \,, \qquad [J_a^+, J_b^-] = 0 \,, \tag{5.16}$$

que corresponden a dos copias del álgebra de $SO(2,1)$. Por lo tanto el grupo de gauge adecuado para este caso es localmente isomorfo a $SO(2,1)\times SO(2,1)$, y la acción se desacopla en dos términos de Chern-Simons independientes para las dos conexiones $SO(2,1)$.

En el caso restante de constante cosmológica positiva $\epsilon = 1$, nótese que los generadores se pueden representar como $\mathcal{J}_a = J_a$, $\mathcal{P}_a = (i/l)J_a$, donde las matrices $J_a$ cumplen reglas de conmutación análogas a las de $\mathcal{J}_a$. Por lo tanto podemos decir que el álgebra de Lie es generada con coeficientes reales por el conjunto $\{J_a, (i/l)J_a\}$, o equivalentemente, con coeficientes complejos por el conjunto $\{J_a\}$. Los generadores $J_a$ se pueden representar utilizando las matrices de Pauli $J_1 = i\sigma_1, J_2 = -i\sigma_2, J_3 = i\sigma_3$, de donde se deduce que el grupo en cuestión es $SL(2,\mathbb{C})$.

Para analizar el caso euclídeo, necesitamos definir la rotación de Wick en este contexto. Dado que la tríada en espacio tiempo normal se interpreta como la matriz de transformación que lleva al sistema localmente minkowskiano, la definición adecuada para el espacio euclídeo es como la matriz de transformación que lleva al sistema localmente euclídeo. La relación minkowskiana $g_{\mu\nu} = e^a{}_\mu e^b{}_\nu \eta_{ab}$ se transforma en la correspondiente relación euclídea $g_{\mu\nu} = -e^a{}_\mu e^b{}_\nu \delta_{ab}$ si hacemos la substitución $e^0{}_\mu \to ie^0{}_\mu$. En cuanto a la conexión de spin, notemos que la relación minkowskiana $\Gamma^\mu{}_{\nu\rho} = \eta_{bc} e_a{}^\mu w^{ab}{}_\rho e^c{}_\nu + e_a{}^\mu \partial_\rho e^a{}_\nu$, se transforma en la relación euclídea $\Gamma^\mu{}_{\nu\rho} = -\delta_{bc} e_a{}^\mu w^{ab}{}_\rho e^c{}_\nu + e_a{}^\mu \partial_\rho e^a{}_\nu$, si además cambiamos $w^1{}_\mu \to -iw^1{}_\mu, w^2{}_\mu \to -iw^2{}_\mu$. Definiremos entonces de esta manera la operación de pasar al espacio euclídeo. Nótese que, a diferencia de la rotación de Wick utilizada en teoría de campos, esta definición no afecta de ninguna forma a la coordenada $x^0$.

La rotación de Wick arriba definida genera un factor $i$ que multiplica a la acción de Einstein para los campos euclídeos $e^a{}_\mu$ y $W^{ab}{}_\nu$, por lo tanto, la acción equivalente para los campos de gauge será la acción de Chern-Simons, multiplicada por este factor.

Aplicando esta rotación en la conexión (5.13), vemos que podemos absorber los coeficientes $i$ en los generadores, haciendo $\mathcal{P}_0 \to i\mathcal{P}_0, \mathcal{J}_1 \to -i\mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2 \to -i\mathcal{J}_2$. De esta manera las relaciones de conmutación se transforman en

$$[\mathcal{J}_a, \mathcal{J}_b] = -\epsilon_{abc}\mathcal{J}_c\,, \qquad [\mathcal{P}_a, \mathcal{P}_b] = \frac{\epsilon}{l^2}\epsilon_{abc}\mathcal{J}_c\,, \qquad [\mathcal{J}_a, \mathcal{P}_b] = -\epsilon_{abc}\mathcal{P}_c\,, \tag{5.17}$$

Con estos generadores podemos deducir los grupos adecuados al caso euclídeo para cada signo de la constante cosmológica. Haciendo consideraciones análogas a las del caso minkowskiano vemos que: para el caso de constante cosmológica nula el grupo será $ISO(3)$, para constante cosmológica positiva, hacemos el cambio de base $J_a^{\pm} = (1/2)(\mathcal{J}_a \pm l\mathcal{P}_a)$, con lo cual lo nuevos generadores $J_a^+$ y $J_a^-$ cumplen separadamente reglas de conmutación de $SO(3)$, por lo tanto el grupo adecuado será $SO(3) \times SO(3)$, para el caso con constante cosmológica negativa, el grupo será $SL(2,\mathbb{C})$, generado por $\{\mathcal{J}_a, (i/l)\mathcal{P}_a\}$.

## 5.2. La acción de Chern-Simons no conmutativa

*Definición*

Definiremos la acción de Chern-Simons en espacio no conmutativo en la forma que hemos explicado en la sección (4.3) simplemente subtituyendo en la acción de Chern-Simons usual (5.1) (escrita en forma matricial) los campos $A_\mu$ por sus análogos no conmutativos $\hat{A}_\mu$ y los productos normales por productos estrella. Con esto obtenemos

$$S_{CS}^{\theta}[A_\mu] = \frac{\kappa}{4\pi}\mathrm{Tr}\int_{\mathcal{M}} d^3x\, \epsilon^{\mu\nu\rho}\left(\hat{A}_\mu * \partial_\nu \hat{A}_\rho + \frac{2}{3}\hat{A}_\mu * \hat{A}_\nu * \hat{A}_\rho\right)\,, \tag{5.18}$$

fórmula que define la *acción de Chern-Simons no conmutativa*[2]. Esta acción ha sido estudiada en [66]-[78].

Obsérvese que, como estudiaremos en detalle más adelante, tanto la diferenciabilidad cuanto la invarianza de gauge de esta acción dependen de poder realizar rotaciones cíclicas de los productos estrella involucrados. Tales rotaciones se pueden realizar supuestas las adecuadas condiciones de contorno.

Además, la presencia de la matriz $\theta^{\mu\nu}$ en el producto estrella, rompe la invarianza general de coordenadas de la acción y por lo tanto la acción de Chern-Simons no conmutativa no es una acción topológica, depende de la métrica y del sistema de coordenadas privilegiado donde se define el producto estrella.

Supongamos que el producto estrella está definido en el sistema $(x^0, x^1, x^2)$. Es siempre posible encontrar una transformación de Lorentz que lleve a un nuevo sistema de coordenadas $(x^{0'}, x^{1'}, x^{2'})$, donde la dirección $x^{0'}$ es conmutativa, es decir que $[x^{0'}, x^{1'}] = [x^{0'}, x^{2'}] = 0$. Este sistema de coordenadas nos será útil más adelante, al estudiar el comportamiento de la teoría de Chern-Simons no conmutativa en variedades con borde.

[2] A lo largo de todo esta tesis hemos evitado usar la notación de formas diferenciales $A = A_\mu dx^\mu$, ya que puede inducir a confusión en el caso no conmutativo, especialmente al usar el teorema de Stokes

*Relación con el efecto Hall*

Supongamos la variedad espacio temporal es $\mathbb{R}^3$ y que los campos de gauge se anulan lo suficientemente rápido en el infinito, de manera de poder realizar sin riesgo rotaciones cíclicas en los productos estrella. En tal caso podemos reescribir (5.18) según

$$S^{\theta}_{CS}[A_0, A_i] = \frac{\kappa}{4\pi}\mathrm{Tr}\int_{\mathcal{M}} d^3x\, \epsilon^{ij} \left(\hat{A}_0 * \hat{F}_{ij} - \hat{A}_i * \partial_0 \hat{A}_j\right) , \tag{5.19}$$

El comportamiento que hemos supuesto para los campos en el infinito nos permite omitir los productos estrella bajo el signo integral, ya que el término de borde se anula. Entonces nos queda

$$S^{\theta}_{CS}[A_0, A_i] = \frac{\kappa}{4\pi}\mathrm{Tr}\int_{\mathcal{M}} d^3x\, \epsilon^{ij} \left(\hat{A}_0 \hat{F}_{ij} - \hat{A}_i \partial_0 \hat{A}_j\right) , \tag{5.20}$$

lo que coincide con la acción a la que hemos mencionado al describir el efecto Hall en el límite continuo. Por lo tanto la acción efectiva para el estudio del efecto Hall desde un punto de vista fluidodinámico es la acción de Chern-Simons no conmutativa [22].