Capítulo 7

La acción de Chern-Simons no conmutativa en variedades con borde

Aquí estudiaremos algunos aspectos de la acción de Chern-Simons en variedades compactas. En particular, describiremos las condiciones de contorno necesarias para hacer que la acción de Chern-Simons definida en una variedad con borde sea diferenciable e invariante de gauge. Además estudiaremos las transformaciones de simetría de la acción que preservan estas condiciones de contorno. Finalmente estableceremos la conexión entre la acción de Chern-Simons no conmutativa y la acción quiral de Wess-Zumino-Witten. Lo que aquí se expone constituye otro de los resultados originales de la tesis

7.1. El efecto del borde y la derivada de la acción

Cuando se considera la teoría de Chern-Simons no conmutativa en una variedad con borde, emergen complicaciones debido a la presencia del producto de Moyal. En esta sección seguiremos los pasos delineados en [39] para tratar la acción de Chern-Simons en una variedad con borde, adecuadamente adaptados al presente caso no conmutativo. Tales pasos son:

1. En primer lugar estableceremos las condiciones de contorno sobre el campo de gauge $\hat{A}_\mu$ de manera de asegurar la diferenciabilidad de la acción.

2. En segundo lugar, estableceremos las simetrías del problema, encontrando las transformaciones $\hat{g} : \mathcal{M} \to G$ que preserven esas condiciones de contorno.

3. El último paso en este procedimiento, consiste en definir el grupo de transformaciones de gauge como aquéllas $\hat{g}$ que son generadas por el vínculo[1]. Dado que el desarrollo de

[1]Estas serán las simetrías a ser "gaugeadas", es decir eliminadas del espectro de la teoría mediante una proyección adecuada. El resto de las simetrías serán simetrías observables del problema.

este último paso requiere de la formulación hamiltoniana de la teoría, que casi siempre es problemática en el caso no conmutativo, no desarrollaremos esta parte.

Condiciones de contorno

Veamos primero cuales son las condiciones de contorno adecuadas para que la acción sea diferenciable, es decir que exista una derivada variacional. Al variar la acción para encontrar las ecuaciones de movimiento, es necesario manipular los productos estrella para obtener una expresión cerrada para la derivada variacional. Estas manipulaciones dan origen a términos de borde, que pondrían en duda en principio la diferenciabilidad de la acción. Explícitamente

$$
\begin{aligned}
\delta S^{\theta}_{CS}[\hat{A}] &= \frac{\kappa}{4\pi}\mathrm{Tr}\int_{\mathcal{M}} d^3x\, \epsilon^{\mu\nu\rho}\Big(\delta\hat{A}_\mu * \partial_\nu \hat{A}_\rho + \hat{A}_\mu * \partial_\nu \delta\hat{A}_\rho \\
&\quad + \frac{2}{3}\Big(\delta\hat{A}_\mu * \hat{A}_\nu * \hat{A}_\rho + \hat{A}_\mu * \delta\hat{A}_\nu * \hat{A}_\rho + \hat{A}_\mu * \hat{A}_\nu * \delta\hat{A}_\rho\Big)\Big) = \\
&= \frac{\kappa}{4\pi}\mathrm{Tr}\int_{\mathcal{M}} d^3x\, \epsilon^{\mu\nu\rho}\Big(\delta\hat{A}_\mu * \partial_\nu \hat{A}_\rho - \partial_\nu\hat{A}_\mu * \delta\hat{A}_\rho + \partial_\nu(\hat{A}_\mu * \delta\hat{A}_\rho) \\
&\quad + \frac{2}{3}\Big(\delta\hat{A}_\mu * \hat{A}_\nu * \hat{A}_\rho + \hat{A}_\mu * \delta\hat{A}_\nu * \hat{A}_\rho + \hat{A}_\mu * \hat{A}_\nu * \delta\hat{A}_\rho\Big)\Big)\ .
\end{aligned}
\tag{7.1}
$$

La derivada variacional es el coeficiente de $\delta\hat{A}_\mu$ en la variación de la acción. Para identificarla, es necesario reordenar los productos estrella en la expresión anterior, de manera de dejar $\delta\hat{A}_\mu$ a la izquierda, y luego eliminar la estrella que multiplica a $\delta\hat{A}_\mu$. Como se muestra en el apéndice 13, este tipo de manipulaciones del producto Moyal genera derivadas totales que contribuirán a la variación de la acción bajo la forma de términos de borde.

Siguiendo el apéndice, definiremos las dos derivadas totales que surgen al conmutar un producto de Moyal $\partial_\alpha B^\alpha[f_1, f_2] = [f_1, f_2]$ y al eliminar la estrella $\partial_\alpha \tilde{B}^\alpha[f_1, f_2] = f_1 * f_2 - f_1 f_2$. Entonces, como primer paso, reordenaremos los términos en (7.1) de manera de dejar $\delta\hat{A}_\mu$ a la derecha, poniendo atención a los términos de borde que aparecen en el proceso

$$
\begin{aligned}
\delta S^{\theta}_{CS}[\hat{A}] = \frac{\kappa}{4\pi}\mathrm{Tr}\int_{\mathcal{M}} d^3x\, \epsilon^{\mu\nu\rho}\Big(&\delta\hat{A}_\mu * \partial_\nu \hat{A}_\rho - \delta\hat{A}_\rho * \partial_\nu\hat{A}_\mu + \partial_\nu(\hat{A}_\mu * \delta\hat{A}_\rho) - \partial_\alpha B^\alpha[\partial_\nu\hat{A}_\mu, \delta\hat{A}_\rho] \\
&+ 2\,\delta\hat{A}_\mu * \hat{A}_\nu * \hat{A}_\rho + \frac{2}{3}\partial_\alpha B^\alpha[\hat{A}_\mu, \delta\hat{A}_\nu * \hat{A}_\rho] + \frac{2}{3}\partial_\alpha B^\alpha[\hat{A}_\mu * \hat{A}_\nu, \delta\hat{A}_\rho]\Big)\ ,
\end{aligned}
\tag{7.2}
$$

aquí, la derivada total en la primera línea aparece cuando se rota el término cuadrático en $\hat{A}_\mu$ y las dos derivadas totales en la segunda línea aparecen al hacer lo mismo con el término cúbico. La expresión resultante puede reacomodarse para dar

$$
\begin{aligned}
\delta S^{\theta}_{CS}[\hat{A}] &= \frac{\kappa}{4\pi}\mathrm{Tr}\int_{\mathcal{M}} d^3x\, \epsilon^{\mu\nu\rho}\Big(\delta\hat{A}_\mu * \hat{F}_{\nu\rho} + \partial_\alpha\Big(\delta^\alpha_\nu\, \hat{A}_\mu * \delta\hat{A}_\rho - B^\alpha[\partial_\nu\hat{A}_\mu, \delta\hat{A}_\rho] \\
&\quad + \frac{2}{3}B^\alpha[\hat{A}_\mu, \delta\hat{A}_\nu * \hat{A}_\rho] + \frac{2}{3}B^\alpha[\hat{A}_\mu * \hat{A}_\nu, \delta\hat{A}_\rho]\Big)\Big)\ .
\end{aligned}
\tag{7.3}
$$

En esta última expresión, es necesario eliminar la estrella que multiplica a $\delta\hat{A}_\mu$, de manera de identificar correctamente la derivada variacional de la acción como el coeficiente correspondiente, con lo que se llega a la forma final

$$\begin{aligned}
\delta S^\theta_{CS}[\hat{A}] &= \frac{\kappa}{4\pi}\,\mathrm{Tr}\int_{\mathcal{M}} d^3x\,\epsilon^{\mu\nu\rho}\Big(\delta\hat{A}_\mu\hat{F}_{\nu\rho} + \partial_\alpha\left(\tilde{B}^\alpha[\delta\hat{A}_\mu,\hat{F}_{\nu\rho}] + \delta^\alpha_\nu\,\hat{A}_\mu * \delta\hat{A}_\rho - B^\alpha[\partial_\nu\hat{A}_\mu,\delta\hat{A}_\rho]\right.\\
&\quad\left. + \frac{2}{3}B^\alpha[\hat{A}_\mu,\delta\hat{A}_\nu * \hat{A}_\rho] + \frac{2}{3}B^\alpha[\hat{A}_\mu * \hat{A}_\nu,\delta\hat{A}_\rho]\right)\Big) =\\
&= \frac{\kappa}{4\pi}\mathrm{Tr}\int_{\mathcal{M}} d^3x\,\epsilon^{\mu\nu\rho}\delta\hat{A}_\mu\hat{F}_{\nu\rho} + \frac{\kappa}{4\pi}\mathrm{Tr}\int_{\partial\mathcal{M}} d^2x\,n_\alpha B^\alpha_{total}\,,
\end{aligned} \tag{7.4}$$

donde hemos definido

$$\begin{aligned}
n_\alpha B^\alpha_{total} &= n_\alpha\epsilon^{\mu\nu\rho}\Big(\delta^\alpha_\nu\,\hat{A}_\mu * \delta\hat{A}_\rho + \tilde{B}^\alpha[\delta\hat{A}_\mu,\hat{F}_{\nu\rho}] - B^\alpha[\partial_\nu\hat{A}_\mu,\delta\hat{A}_\rho] + \frac{2}{3}B^\alpha[\hat{A}_\mu,\delta\hat{A}_\nu * \hat{A}_\rho]\\
&\quad + \frac{2}{3}B^\alpha[\hat{A}_\mu * \hat{A}_\nu,\delta\hat{A}_\rho]\Big)\,.
\end{aligned} \tag{7.5}$$

El procedimiento usual es imponer condiciones de contorno tales que anulen el término de borde en (7.4). De esta manera, la acción es diferenciable, es decir tiene una derivada variacional bien definida, y las ecuaciones de movimiento y las condiciones de contorno son

$$\frac{\delta S^\theta_{CS}}{\delta\hat{A}_\mu} = \epsilon^{\mu\nu\rho}\hat{F}_{\nu\rho} = 0\,, \qquad n_\alpha B^\alpha|_{\partial\mathcal{M}} = 0\,. \tag{7.6}$$

Para hacer esto, necesitamos anular los términos de borde presentes en (7.5). En el caso usual conmutativo, en la expresión (7.5) subsiste solamente el primer término, que se hace cero con sólo imponer la nulidad de una de las componentes tangenciales del campo de gauge en la frontera. En el caso no conmutativo, surgen complicaciones debidas a la presencia de los términos que contienen $B^\mu[\,\cdot\,,\,\cdot\,]$ y $\tilde{B}^\mu[\,\cdot\,,\,\cdot\,]$.

Una primera posibilidad es que sobre alguno de los bordes del problema, el producto escalar $n_\mu B^\mu[\,\cdot\,,\,\cdot\,]$ y $n_\mu\tilde{B}^\mu[\,\cdot\,,\,\cdot\,]$ sea nulo. Para que esto suceda, dado que $B^\mu[\,\cdot\,,\,\cdot\,]$ es proporcional a $\theta^{\mu\nu}$, es necesario que el tensor $\theta^{\mu\nu}$ no tenga componentes en la dirección normal al borde $n_\mu\theta^{\mu\nu} = 0$. Como primera observación, dado que $\theta^{\mu\nu}$ es constante, n_μ debe ser constante para poder cumplir esta condición, lo que implica que el borde es un plano. Además, esto significa que la dirección normal al borde es la direción conmutativa x'^0 de la que hemos hablado en la sección 5.2, por lo tanto las direcciones tangenciales al borde serán x'^1 y x'^2. Por lo tanto en este caso la frontera es un plano perpendicular a la dirección conmutativa x'^0. En tal caso, la expresión (7.5) se reduce a

$$n_\alpha B^\alpha = n_\alpha\epsilon^{\mu\alpha\rho}\hat{A}_\mu * \delta\hat{A}_\rho\,. \tag{7.7}$$

Haciendo una transformación de Lorentz al sistema de coordenadas (x'_0, x'_1, x'_2), en el cual $n_\alpha = (1,0,0)$, tenemos

$$n_\alpha B^\alpha \;=\; \hat{A}_{1'} * \delta\hat{A}_{2'} - \hat{A}_{2'} * \delta\hat{A}_{1'}\,, \tag{7.8}$$

donde es fácil ver que si ponemos por ejemplo $\hat{A}_{1'}|_{\partial M} = 0$, automáticamente todas las derivadas tangenciales de $\hat{A}_{1'}$ se anulan en la frontera y, dado que en este caso el producto estrella no involucra derivadas normales, toda la expresión (7.8) se anula. Por lo tanto hemos llegado a la conclusión siguiente: *Si existen bordes sobre los cuales $\theta^{\mu\nu}$ no tiene componentes normales, sobre ellos es necesario y suficiente para la diferenciabilidad de la acción, que se anule sólo una componente tangencial del campo de gauge.* Ésta es la misma condición de contorno que en el caso conmutativo.

Sin embargo, en el caso general en el cual $\theta^{\mu\nu}$ tiene componentes en la dirección perpendicular a la frontera, los términos que contienen $B^\mu[\,\cdot\,,\,\cdot\,]$ y $\tilde{B}^\mu[\,\cdot\,,\,\cdot\,]$ no se anulan automáticamente, y es necesario imponer condiciones de contorno mas fuertes sobre el campo de gauge. Por ejemplo, centrándonos en el segundo término en (7.5)

$$\epsilon^{\mu\nu\rho}\tilde{B}^\alpha[\delta\hat{A}_\mu, \hat{F}_{\nu\rho}] \;=\; 2\tilde{B}^\alpha[\delta\hat{A}_0, \hat{F}_{12}] + 2\tilde{B}^\alpha[\delta\hat{A}_1, \hat{F}_{20}] - 2\tilde{B}^\alpha[\delta\hat{A}_2, \hat{F}_{10}]\,. \tag{7.9}$$

Como se puede ver en las fórmulas (13.3), algunos de estos términos se anulan cuando se impone que una de las funciones en el argumento se anule en el borde, junto con sus infinitas derivadas normales. Si en esta expresión, ponemos por ejemplo $\hat{A}_0$ y todas sus derivadas normales iguales a cero, obtenemos

$$\epsilon^{\mu\nu\rho}\tilde{B}^\alpha[\delta\hat{A}_\mu, \hat{F}_{\nu\rho}] \;=\; -2\tilde{B}^\alpha[\delta\hat{A}_1, \partial_0\hat{A}_2] + 2\tilde{B}^\alpha[\delta\hat{A}_2, \partial_0\hat{A}_2]\,, \tag{7.10}$$

donde aún hay contribuciones provenientes de las otras componentes del campo de gauge. Por lo tanto, debemos exigir la nulidad de una componente más, digamos $\hat{A}_1$, y de todas sus derivadas normales en la frontera [78]. Esto es suficiente para anular los otros términos en (7.5). Con lo cual concluimos que *sobre aquellos bordes en los cuales $\theta^{\mu\nu}$ tenga componentes normales no nulas, la condición de contorno a imponer es que dos componentes del campo de gauge, junto con sus infinitas derivadas normales, sean cero.*

Simetrías que preservan las condiciones de contorno:

Habiendo establecido las condiciones de contorno, el siguiente punto es encontrar, dentro del grupo de simetrías de la acción, el subgrupo de transformaciones que preservan estas condiciones de contorno. Este subgrupo será el grupo de simetrías del sistema.

En el primer caso particular que analizamos, es decir cuando $\theta^{\mu\nu}$ no tiene componentes transversales, la condición de contorno adecuada es anular una componente tangencial del campo de gauge en la frontera, digamos $\hat{A}_{1'}$. Bajo un cambio de gauge, esta componente se transformará según

$$\delta\hat{A}_{1'}\Big|_{\partial\mathcal{M}} = \Big(\partial_{1'}\lambda + [\hat{A}_{1'}, \lambda]\Big)\Big|_{\partial\mathcal{M}} \equiv 0 \tag{7.11}$$

en esta fórmula, el conmutador es nulo porque sólo involucra derivadas tangenciales de $\hat{A}_{1'}$, que son naturalmente nulas en la frontera. Por lo tanto, si λ no depende de la dirección tangencial x'^1 en la frontera, de manera que el primer término (7.11) sea cero, la transformación de gauge deja invariante la condición de contorno. Entonces *si $\theta^{\mu\nu}$ no tiene componentes normales, las simetrías de la teoría estarán restringidas a las transformaciones $\hat{g} : \mathcal{M} \to G$ tales que $\hat{g}|_{\partial\mathcal{M}}$ no dependa de x'^1.*

En el segundo caso que analizamos más arriba, es decir cuando $\theta^{\mu\nu}$ tiene componentes normales a la superficie, la condición de contorno adecuada será anular dos componentes del campo de gauge, digamos $\hat{A}_0$ y $\hat{A}_1$, y todas sus derivadas normales en el borde. Entonces bajo una transformación de gauge, estas componentes se transformarán de acuerdo con

$$\delta\hat{A}_0\Big|_{\partial\mathcal{M}} = \left(\partial_0\lambda + [\hat{A}_0, \lambda]\right)\Big|_{\partial\mathcal{M}} \equiv 0\,, \tag{7.12}$$

y similar para $\hat{A}_1$. Para que esta transformación no afecte las condiciones de contorno, deberá cumplirse que $\delta\hat{A}_0$, $\delta\hat{A}_1$ y todas sus derivadas normales se anulan en la superficie. En primer lugar, para anular $\delta\hat{A}_0$ y $\delta\hat{A}_1$ basta con que λ no dependa de x_0 ni de x_1 en la superficie lo que hace cero el primer término en (7.12). En cuanto al segundo término, es cero debido a la nulidad de todas las derivadas normales de $\hat{A}_0$ y $\hat{A}_1$. Para preservar la nulidad de las derivadas normales de $\delta\hat{A}_0$ y $\delta\hat{A}_1$ debe cumplirse que

$$\partial_n^{(q)}\delta\hat{A}_0\Big|_{\partial\mathcal{M}} = \left(\partial_n^{(q)}\partial_0\lambda + [\hat{A}_0, \partial_n^{(q)}\lambda]\right)\Big|_{\partial\mathcal{M}} \equiv 0\,, \tag{7.13}$$

y lo mismo para A_1. Por lo tanto, es necesario y suficiente que todas las derivadas normales de λ se anulen en la superficie. Entonces *en el caso en el que $\theta^{\mu\nu}$ tiene componentes no nulas en las direcciones normales a la superficie, las transformaciones de simetría serán aquellas tales que $\hat{g}|_{\partial\mathcal{M}}$ no dependa de x_0, x_1 y que $\partial_n^{(q)}\hat{g}|_{\partial\mathcal{M}} = 0$.*

7.2. La conexión entre la acción de Chern-Simons y la acción quiral de Wess-Zumino-Witten

Como es bien conocido, la teoría de Chern-Simons conmutativa se puede reducir a una acción efectiva que tome en cuenta solamente los grados de libertad en el borde de la variedad sobre la cual están definidos los campos, siguiendo diferentes caminos [25]-[33]. Aquí discutiremos de qué manera se puede establecer esta conexión en el caso no conmutativo.

Si reescribimos la acción de Chern-Simons no conmutativa, singularizando una componente del campo de gauge, digamos $\hat{A}_0$, llegamos a la siguiente expresión

$$\begin{aligned} S_{CS}^{\theta}[\hat{A}_0, \hat{A}_i] &= \frac{\kappa}{4\pi}\mathrm{Tr}\int_{\mathcal{M}} d^3x \left(\epsilon^{ij}\left(\hat{A}_0 * \partial_i\hat{A}_j + \frac{2}{3}\hat{A}_0 * \hat{A}_i * \hat{A}_j\right)\right. \\ &\left. -\epsilon^{ij}\left(\hat{A}_i * \partial_0\hat{A}_j + \frac{2}{3}\hat{A}_i * \hat{A}_0 * \hat{A}_j\right) + \epsilon^{ij}\left(\hat{A}_i * \partial_j\hat{A}_0 + \frac{2}{3}\hat{A}_i * \hat{A}_j * \hat{A}_0\right)\right) \end{aligned} \tag{7.14}$$

lo que se puede transformar mediante rotación de productos estrella e integración por partes en

$$S^{\theta}_{CS}[\hat{A}_0, \hat{A}_i] = \frac{\kappa}{4\pi}\mathrm{Tr}\int_{\mathcal{M}} d^3x\, \epsilon^{ij}\left(\hat{A}_0 * \hat{F}_{ij} - \hat{A}_i * \partial_0 \hat{A}_j\right) + \frac{\kappa}{4\pi}\mathrm{Tr}\int_{\partial\mathcal{M}} d^2x\, n_\alpha B^{\alpha}_{total}\,, \qquad (7.15)$$

donde el término de borde, que surge de las rotaciones y de la integración por partes, es similar al que hemos visto en la sección anterior y viene dado por

$$B^{\alpha}_{total} = \epsilon^{ij}\left(\delta_{\alpha j}\hat{A}_i * \hat{A}_0 + B^{\alpha}[\partial_j \hat{A}_i, \hat{A}_0] + \frac{2}{3}\left(B^{\alpha}[\hat{A}_i * \hat{A}_j, \hat{A}_0] - B^{\alpha}[\hat{A}_i, \hat{A}_0 * \hat{A}_j]\right)\right)\,. \quad (7.16)$$

Estos términos se anulan para cualquiera de las dos condiciones de contorno que hemos explicado en la sección previa. Si $\theta^{\mu\nu}$ no tiene componentes normales a la superficie, entonces los términos $B^{\alpha}[\,\cdot\,,\,\cdot\,]$ son naturalmente nulos y el término restante se anula si $\hat{A}_0|_{\partial\mathcal{M}} = 0$. Por otro lado, si $\theta^{\mu\nu}$ tiene componentes normales, las condiciones de contorno adecuadas exigen que dos cualesquiera componentes del campo de gauge se anulen en la frontera junto con todas sus derivadas normales, lo que hace que toda la expresión anterior se anule.

Si ahora además eliminamos la estrella en el primer término de la acción (7.15), el correspondiente término de borde también se anula, dejándonos con la expresión simplificada

$$S^{\theta}_{CS}[\hat{A}_0, \hat{A}_i] = \frac{\kappa}{4\pi}\mathrm{Tr}\int_{\mathcal{M}} d^3x\, \epsilon^{ij}\left(\hat{A}_0 \hat{F}_{ij} - \hat{A}_i * \partial_0 \hat{A}_j\right)\,. \qquad (7.17)$$

Por conveniencia, por el momento mantendremos la estrella en el segundo término, si bien se podría eliminar en razón de nuestras condiciones de borde.

Usando la acción (7.17), la función de partición para la teoría de Chern-Simons no conmutativa toma la forma

$$Z \;=\; \int \mathcal{D}\hat{A}_i \mathcal{D}\hat{A}_0 e^{S^{\theta}_{CS}[\hat{A}_0,\hat{A}_i]}\,, \qquad (7.18)$$

Para cada uno de los puntos de $\mathcal{M}$, $\hat{A}_0$ actúa como un multiplicador de Lagrange, forzando la anulación de las componentes espaciales de la conexión

$$\epsilon^{ij}\hat{F}_{ij} = 0\,. \qquad (7.19)$$

entonces, la función de partición (7.18) se puede reescribir como

$$Z = \int \mathcal{D}\hat{A}_i \delta(\epsilon^{ij}\hat{F}_{ij}) \exp\left(-\frac{i\kappa}{4\pi}\mathrm{Tr}\int_{\mathcal{M}} d^3x\, \epsilon^{ij}\hat{A}_i * \partial_0 \hat{A}_j\right)\,. \qquad (7.20)$$

El siguiente paso es resolver la ecuación (7.19) y substituir el resultado en el exponente de (7.20). Para esto es necesario definir la topología de nuestra variedad. En lo que sigue, nos limitaremos al caso $\mathcal{M} = \Sigma \times \mathbb{R}$ donde Σ tiene la topología del disco. Entonces la solución de la condición de conexión plana (7.19) es $\hat{A}_i = \hat{g} * \partial_i \hat{g}^{-1}$, con $\hat{g} : \mathcal{M} \to G$ una función arbitraria. Reinsertando en (7.20) se tiene

$$Z = \int \mathcal{D}\hat{g} e^{iS^{\theta}_{QWZW}[\hat{g}]} \,, \tag{7.21}$$

donde $S^{\theta}_{QWZW}[\hat{g}]$ es una acción que tiene la forma de un modelo de Wess-Zumino-Witten quiral no conmutativo

$$\begin{aligned} S^{\theta}_{QWZW}[\hat{g}] &= -\frac{\kappa}{4\pi}\mathrm{Tr}\int_{\partial\mathcal{M}} d^2x\, \check{t}^i\,(\hat{g} * \partial_0\hat{g}^{-1}) * (\hat{g} * \partial_i\hat{g}^{-1}) \\ &\quad -\frac{\kappa}{12\pi}\mathrm{Tr}\int_{\mathcal{M}} d^3x\, \epsilon^{\mu\nu\rho}(\hat{g} * \partial_\mu\hat{g}^{-1}) * (\hat{g} * \partial_\nu\hat{g}^{-1}) * (\hat{g} * \partial_\rho\hat{g}^{-1}) \,, \end{aligned} \tag{7.22}$$

aquí $\check{t}^i$ es un vector unitario tangente al borde de Σ. Nótese que debido a la presencia del producto estrella, en un borde arbitrario no es posible combinar $\check{t}_i$ con $\partial_i\hat{g}$ para formar la derivada tangencial de $\hat{g}$. Esto es posible solamente en un borde plano, donde $\check{t}_i$ es constante, y en ese caso se tiene

$$\begin{aligned} S^{\theta}_{QWZW}[\hat{g}] &= -\frac{\kappa}{4\pi}\mathrm{Tr}\int_{\partial\mathcal{M}} d^2x\,(\hat{g} * \partial_0\hat{g}^{-1}) * (\hat{g} * \partial_\varphi\hat{g}^{-1}) \\ &\quad -\frac{\kappa}{12\pi}\mathrm{Tr}\int_{\mathcal{M}} d^3x\, \epsilon^{\mu\nu\rho}(\hat{g} * \partial_\mu\hat{g}^{-1}) * (\hat{g} * \partial_\nu\hat{g}^{-1}) * (\hat{g} * \partial_\rho\hat{g}^{-1}) \,, \end{aligned} \tag{7.23}$$

Nótese que, si $\theta^{\mu\nu}$ tiene componentes normales al borde de la variedad, la acción (7.23) no es la acción quiral de Wess-Zumino-Witten no conmutativa definido sobre $\partial\Sigma \times \mathbb{R}$, ya que contiene infinitas derivadas de los campos $\hat{g}$ en las direcciones que salen de $\partial\Sigma \times \mathbb{R}$. Entonces *sólo en el caso en el que $\theta^{\mu\nu}$ no tenga componentes normales a la frontera, la expresión (7.23) corresponde a la acción quiral de Wess-Zumino-Witten no conmutativa en $\partial\Sigma \times \mathbb{R}$.*

En el caso general en el que $\theta^{\mu\nu}$ tiene componentes normales a la frontera, la condición de contorno sobre el campo de gauge impone que dos componentes del campo se anulen en la superficie. Por lo tanto en el primer término de la fórmula (7.22) debemos reemplazar $\hat{A}_1 = \hat{g} * \partial_1\hat{g}^{-1}$ por cero, y sólo sobrevive $\hat{A}_2 = \hat{g} * \partial_2\hat{g}^{-1}$, por lo que la expresión se reduce a

$$\begin{aligned} \hat{S}_{CWZW}[\hat{g}] &= -\frac{\kappa}{4\pi}\mathrm{Tr}\int_{\partial\mathcal{M}} d^2x\, \check{t}^2\,(\hat{g} * \partial_0\hat{g}^{-1}) * (\hat{g} * \partial_2\hat{g}^{-1}) \\ &\quad -\frac{\kappa}{12\pi}\mathrm{Tr}\int_{\mathcal{M}} d^3x\, \epsilon^{\mu\nu\rho}(\hat{g} * \partial_\mu\hat{g}^{-1}) * (\hat{g} * \partial_\nu\hat{g}^{-1}) * (\hat{g} * \partial_\rho\hat{g}^{-1}) \,. \end{aligned} \tag{7.24}$$

Donde en el término de borde sólo interviene la derivada en la direción x^2, mostrando explícitamente la ruptura de la invarianza de Lorentz introducida por la no conmutatividad. Entonces *en el caso general de borde curvo, la acción de Chern-Simons es equivalente a la acción (7.24), donde sólo permanece una de las derivadas en el término cuadrático.*

7.3. Alcances y limitaciones del cálculo

Algunas consideraciones acerca de la validez de nuestros cálculos

- **Existencia del producto estrella:** Hemos utilizado en este capítulo la expresión diferencial del producto de Moyal (2.2). Cuando realizamos el producto entre dos funciones a cualquier orden finito en $\theta^{\mu\nu}$, la serie en derivadas truncada de este producto es siempre una expresión local, por lo que siempre obtenemos como resultado una función continua bien definida sobre nuestra variedad.

  Sin embargo, al sumar los infinitos órdenes en el desarrollo del producto, podemos encontrarnos con que el resultado no es una función continua bien definida sobre nuestra variedad. Esto se hace evidente cuando escribimos la forma integral del producto estrella, la cual claramente depende de la variedad elegida.

- **Existencia de funciones que cumplan las condiciones de contorno:** Otro punto a tener en cuenta, es la existencia de funciones no triviales que verifiquen las condiciones de contorno (7.12). Debido a que se trata de condiciones de contorno muy fuertes, no es en principio evidente que existan tales funciones.

Ambas cuestiones han sido analizadas en profundidad y respondidas afirmativamente en la referencia [78].

7.4. Conclusiones

Como resumen de las conclusiones podemos decir que

- La acción de Chern-Simons no conmutativa definida en un variedad con borde es diferenciable e invariante de gauge siempre que se cumpla alguna de las siguientes condiciones de borde, dependiendo de las direcciones del parámetro $\theta^{\mu\nu}$

  1. **Caso especial:** si existen bordes sobre los cuales $\theta^{\mu\nu}$ no tiene componentes normales, sobre ellos es necesario y suficiente para la diferenciabilidad de la acción que se anule una componente tangencial del campo de gauge.
  2. **Caso general:** sobre aquellos bordes en los cuales $\theta^{\mu\nu}$ tenga componentes normales no nulas, la condición de contorno a imponer es que dos[2] componentes del campo de gauge, junto con sus infinitas derivadas normales, sean cero.

- Las transformaciones de simetría que preservan las condiciones de contorno serán aquellas que cumplan las adecuadas condiciones de borde, a saber

[2] El hecho de que se debe imponer la condiciones de contorno sobre dos componentes del campo de gauge en lugar de sobre una sola fue señalado originalmente en [78]

1. **Caso especial:** si $\theta^{\mu\nu}$ no tiene componentes longitudinales, las simetrías de la teoría serán las funciones $\hat{g} : \mathcal{M} \to G$ tales que $\hat{g}|_{\partial\mathcal{M}}$ no dependa de una dirección tangente x'^1 en el borde.
2. **Caso general:** en el caso en que $\theta^{\mu\nu}$ tenga componentes no nulas en las direcciones normales a la superficie, las transformaciones de simetría serán aquellas tales que $\hat{g}|_{\partial\mathcal{M}}$ no dependa de x_0, x_1 y que $\partial_n^{(q)}\hat{g}|_{\partial\mathcal{M}} = 0$ en el borde.

- Para el caso $\mathcal{M} = \Sigma \times \mathbb{R}$ donde Σ tiene la topología del disco, la acción de Chern-Simons es equivalente a un modelo de Wess-Zumino-Witten con las siguientes características

1. **Caso especial:** cuando $\theta^{\mu\nu}$ no tiene componentes normales al borde del disco, obtenemos una acción quiral de Wess-Zumino-Witten, donde los productos se han transformado en productos estrella. Es decir obtenemos lo que llamaríamos un modelo quiral de Wess-Zumino-Witten no conmutativo.
2. **Caso general:** cuando $\theta^{\mu\nu}$ posee componentes no nulas normales al borde del disco, obtenemos un modelo de Wess-Zumino-Witten no conmutativo un poco más complicado, como se puede ver en la fórmula (7.24). Esto se debe a la necesidad de imponer condiciones de contorno sobre dos componentes del campo de gauge en lugar de sobre una sola.