Capítulo 8

Comportamiento de la acción de Chern-Simons bajo el mapeo de Seiberg-Witten

En este capítulo estudiaremos el comportamiento de la acción de Chern-Simons no conmutativa definida en los capítulos anteriores, respecto del mapeo de Seiberg y Witten, que relaciona teorías de gauge conmutativas y no conmutativas. Como resultado importante veremos que su imagen bajo este mapeo es la acción de Chern-Simons usual conmutativa, en contraste con lo que sucede con otras teorías de gauge

8.1. Algunas motivaciones

En el capítulo precedente, hemos encontrado la relación entre la acción de Chern-Simons no conmutativa y la acción no conmutativa de Wess-Zumino-Witten quiral.

La teoría de Wess-Zumino-Witten no conmutativa ha sido estudiada en [83], donde se encontró un cambio de variables, similar al mapeo de Seiberg y Witten, que relaciona los campos $\hat{g}$ de un modelo de Wess-Zumino-Witten no conmutativo con los campos g de un dado modelo conmutativo. Según los razonamientos expuestos en ese trabajo, la dinámica de este último está regida por la acción de Wess-Zumino-Witten conmutativa. Por lo tanto, en el caso espacial de la teoría de Wess-Zumino-Witten, el cambio de variables mapea el modelo no conmutativo en el correspondiente modelo conmutativo. Esto no es automático en un modelo general, por ejemplo, al aplicar el mapeo de Seiberg y Witten (4.22) para los campos de gauge $\hat{A}_\mu$ a la acción de Yang-Mills no conmutativa, se obtiene una acción complicada para los campos conmutativos A_μ, que tiene la forma de un desarrollo en potencias de $\theta^{\mu\nu}$. Es decir que el cambio de variables no mapea la acción de Yang-Mills no conmutativa en la acción de Yang-Mills conmutativa.

El cambio de variables para $\hat{g}$ definido en [83] se puede aplicar también al modelo quiral de

Wess-Zumino-Witten no conmutativo, y es razonable suponer que la mencionada conexión se verificará también para ese modelo, obteniéndose para g una acción quiral de Wess-Zumino-Witten conmutativa. En ese caso, podemos adelantar una conexión análoga para las teorías de Chern-Simons. La situación se puede visualizar en el siguiente esquema

$$\begin{array}{ccc} S^{\theta}_{QWZW}[\hat{g}] & \longleftrightarrow & S^{\theta}_{CS}[\hat{A}] \\ \updownarrow & & \updownarrow ? \\ S_{QWZW}[g] & \longleftrightarrow & S_{CS}[A] \end{array} \tag{8.1}$$

La acción de Chern-Simons conmutativa está relacionada con el modelo de Wess-Zumino-Witten quiral conmutativo por integración del A_0 como hemos mencionado en el capítulo 5. La misma conexíon se verifica para los modelos no conmutativos como demostramos en el capítulo precedente. Por otro lado, el modelo quiral de Wess-Zumino-Witten no conmutativo se mapea a través del cambio de variables definido en [83] en el modelo conmutativo. Entonces podemos inferir que lo mismo sucede para las acciones de Chern-Simons.

Pero para estudiar esta última conexión, no es necesario recurrir al mapeo definido en [83] para los campos $\hat{g}$ del modelo de Wess-Zumino-Witten. Podemos utilizar directamente el mapeo de Sieberg y Witten (4.22) para los campos de gauge $\hat{A}_\mu$, e investigar si la acción de Chern-Simons no conmutativa se mapea en la acción de Chern-Simons conmutativa.

Otra evidencia en favor de esta hipótesis se obtiene al aplicar el mapeo de Seiberg y Witten a una configuración clásica de la teoría de Chern-Simons no conmutativa, que cumple las ecuaciones de movimiento $\hat{F}_{\mu\nu} = 0$. De acuerdo a la regla de transfomación para $\hat{F}_{\mu\nu}$, ecuación 4.23, vemos que la correspondiente teoría conmutativa cumple $F_{\mu\nu} = 0$, con lo que tenemos el siguiente esquema

$$\begin{array}{ccc} \hat{F}_{\mu\nu} = 0 & \longleftrightarrow & S^{\theta}_{CS}[\hat{A}] \\ \updownarrow & & \updownarrow ? \\ F_{\mu\nu} = 0 & \longleftrightarrow & S_{CS}[A] \end{array} \tag{8.2}$$

Entonces soluciones clásicas de la teoría de Chern-Simons no conmutativa son mapeadas en soluciones clásicas de la teoría de Chern-Simons conmutativa.

8.2. El mapeo de Seiberg y Witten aplicado a la acción de Chern-Simons

En lo que sigue aplicaremos el mapeo de Seiberg y Witten a la acción de Chern-Simons no conmutativa, para comprobar si se verifica la relación sugerida más arriba. La teoría de

Chern-Simons estará definida sobre una variedad arbitraria $\mathcal{M}$ y supondremos que se cumplen las condiciones de contorno adecuadas para que la acción sea diferenciable e invariante de gauge.

Nótese que quedan descartadas las condiciones de contorno del caso especial que hemos discutido en el capítulo anterior, donde $\theta^{\mu\nu}$ no tiene componentes normales al borde, ya que nos proponemos estudiar el comportamiento de la acción de Chern-Simons bajo variaciones totalmente arbitrarias del parámetro antisimétrico $\theta^{\mu\nu}$.

Tomaremos como punto de partida la acción de Chern-Simons en la forma (7.17), en la cual sacamos el producto estrella en el segundo término, lo que no genera términos de borde debido a las condiciones de contorno, es decir que tenemos que

$$S^{\theta}_{CS}[\hat{A}_0, \hat{A}_i] = \frac{\kappa}{4\pi}\mathrm{Tr}\int_{\mathcal{M}} d^3x\, \epsilon^{ij}\left(\hat{A}_0\hat{F}_{ij} - \hat{A}_i\partial_0\hat{A}_j\right) . \tag{8.3}$$

Como esta expresión no contiene productos estrella, depende del parámetro de no conmutatividad $\theta^{\mu\nu}$ solamente a través de la dependencia de $\hat{A}_\mu$ dada por el mapeo de Seiberg y Witten. Entonces, si derivamos con respecto a $\theta_{\mu\nu}$ obtenemos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial S^{\theta}_{CS}(\hat{A})}{\partial\theta_{\mu\nu}} &= \frac{\kappa}{4\pi}\int_{\mathcal{M}} d^3x\, \epsilon^{ij}\frac{\partial}{\partial\theta_{\mu\nu}}\left(\hat{A}_0\hat{F}_{ij} - A_i\partial_0 A_j\right) = \\
&= \frac{\kappa}{4\pi}\int_{\mathcal{M}} d^3x\, \epsilon^{ij}\left(\frac{\partial\hat{A}_0}{\partial\theta_{\mu\nu}}\hat{F}_{ij} + \hat{A}_0\frac{\partial\hat{F}_{ij}}{\partial\theta_{\mu\nu}} - 2\frac{\partial A_i}{\partial\theta_{\mu\nu}}\partial_0 A_j\right) ,
\end{aligned} \tag{8.4}$$

donde para reescribir el último término hemos integrado por partes, descartando un término de superficie que se anula con las condiciones de contorno que hemos elegido. En la expresión precedente, las derivadas de los campos con respecto a $\theta^{\mu\nu}$ se obtienen de las fórmulas (4.22)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\hat{A}_\mu}{\partial\theta^{\rho\sigma}} &= \frac{1}{4}\left\{\hat{A}_\rho, \partial_\sigma\hat{A}_\mu + \hat{F}_{\sigma\mu}\right\} , \\
\frac{\partial\hat{F}_{\mu\nu}}{\partial\theta^{\rho\sigma}} &= \frac{1}{4}\left(-2\left\{\hat{F}_{\mu\rho}, \hat{F}_{\nu\sigma}\right\} + \left\{\hat{A}_\rho, \hat{D}_\sigma\hat{F}_{\mu\nu} + \partial_\sigma\hat{F}_{\mu\nu}\right\}\right) .
\end{aligned} \tag{8.5}$$

Reemplazando (8.5) en la expresión (8.4) obtenemos una expresión para la variación de la acción bajo un cambio arbitrario de $\theta^{\mu\nu}$.

Mediante un cálculo directo, que no vale la pena detallar aquí, en el cual se deben mantener solamente los términos antisimétricos con respecto a los índices μ,ν e i,j, obtenemos como resultado final

$$\frac{\partial S^{\theta}_{CS}(\hat{A})}{\partial\theta_{\mu\nu}} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad S^{\theta}_{CS}(\hat{A}) = S_{CS}(A) , \tag{8.6}$$

donde $S_{CS}(A)$ es la acción de Chern-Simons ordinaria conmutativa como se definición en el capítulo 5. Los pasos intermedios de este cálculo contienen integraciones por partes, las cuales generan términos de superficie, que se anulan debido a las condiciones de contorno. Es interesante notar que en el caso $U(1)$ el mapeo de Seiberg-Witten cancela los términos cúbicos presentes en $\hat{S}_{CS}(\hat{A})$.

En suma, hemos visto que la transformación de (8.5) mapea la acción de Chern-Simons no conmutativa en su contraparte conmutativa

8.3. Alcances y limitaciones del cálculo

Detallaremos a continuacion los alcances de nuestro cálculo, las posibles derivaciones y algunas de sus limitaciones

- Si bien entre las motivaciones originales de nuestro cálculo se encontraba la relación de la acción de Chern-Simons con el modelo quiral de Wess-Zumino-Witten y la conexión entre las acciones conmutativa y no conmutativa de éste último, nuestra demostración es completamente independiente de estas consideraciones, ya que involucra solamente a la acción de Chern-Simons y al cambio de variables (4.22) de Seiberg y Witten.

- Otra de las motivaciones fue la correspondencia de las soluciones clásicas de las teorías de Chern-Simons conmutativa y no conmutativa. Sin embargo, debemos señalar que nuestra demostración en ningún punto supone que los campos cumplen las ecuaciones de movimiento.

- El resultado obtenido es en realidad más general: la acción de Chern-Simons no conmutativa con un valor dado para el parámetro de no conmutatividad $\theta^{\mu\nu}$ se mapea por el mapeo de Seiberg y Witten en la acción no conmutativa con un valor diferente de este parámetro.

- Estos resultados pueden ser útiles al interpretar el esquema 8.1 en la otra dirección, como un argumento a favor de la hipótesis de que el mapeo definido en [83] relaciona también los modelos quirales de Wess-Zumino-Witten conmutativo y no conmutativo.

- Otra posible derivación de este resultado se infiere a partir del esquema 8.2: sería interesante estudiar el efecto del mapeo de Seiberg y Witten sobre otras teorías de gauge no conmutativas cuya ecuación clásica de movimiento sea $\hat{F}_{\mu\nu} = 0$, como por ejemplo los modelos BF, así como también sobre otros modelos topológicos más generales.

- Este cálculo tiene aplicación solamente a la teoría de Chern-Simons clásica. Un análisis cuántico requeriría del estudio del cambio bajo el mapeo de Seiberg y Witten de la medida de integración $\mathcal{D}A_\mu$, con el gauge adecuadamente fijado. Debido a que este mapeo es no lineal, es difícil definir consistentemente el correspondiente jacobiano.

8.4. Conclusiones

Resumimos a continuación las conclusiones de este capítulo

- La principal conclusión de este capítulo es que la acción de Chern-Simons no conmutativa se mapea por la transformación de Seiberg y Witten en la acción de Chern-Simons conmutativa. Esta es una propiedad no trivial de este modelo, que no se verifica en otras teorías como por ejemplo la de Maxwell o la de Yang-Mills.

- Esta conclusión se puede extender al resultado más general de que la acción de Chern-Simons no conmutativa no depende del valor del parámetro $\theta^{\mu\nu}$, cuando se consideran a los campos de gauge $\hat{A}_\mu$ como funciones de este parámetro dadas por el mapeo de Seiberg y Witten.