Capítulo 9

Gravedad no conmutativa en tres dimensiones

Formulamos una teoría de gravedad en tres dimensiones no conmutativas mediante el uso de la conexión entre gravedad tridimensional y teoría de Chern-Simons. En el sector euclídeo, consideramos, con constante cosmológica negativa, estudiaremos el efecto particular de la topología $T^2 \times \mathbb{R}$ y mostramos que el agujero negro tridimensional (BTZ) resuelve las ecuaciones de movimiento no conmutativas.

9.1. Teoría de Chern-Simons no conmutativa

Como hemos explicado con cierto detalle en el capítulo 5, en el caso usual conmutativo, la gravitación en espacio euclídeo con constante cosmológica negativa, es completamente equivalente a una teoría de gauge, con grupo de gauge $SL(2,\mathbb{C})$, y cuya dinámica está regida por la acción de Chern-Simons.

En el caso no conmutativo, definiremos nuestra teoría de gravedad en $d = 3$ dimensiones euclídeas y con constante cosmológica negativa, como la correspondiente teoría de gauge no conmutativa [126]. Sin embargo, como hemos mencionado en la sección 4.2, el álgebra de $SL(2,\mathbb{C})$ no es cerrada cuando los conmutadores se calculan usando el producto de Moyal, por lo que es necesario ampliarla y considerar el grupo $GL(2,\mathbb{C})$. El álgebra de Lie de $GL(2,\mathbb{C})$ esta generada con coeficientes complejos por la base $\{J_a, iI\}$, donde J_a son los generadores que hemos definido en el capítulo 5. Una representación de estos generadores esta dada por $J_1 = i\sigma_1, J_2 = i\sigma_2, J_3 = i\sigma_3$ donde σ_a son las matrices de Pauli.

El campo de gauge $\hat{A}_\mu \in GL(2,\mathbb{C})$ se puede expandir en esta base de la siguiente manera

$$\hat{A}_\mu \;\; = \;\; \hat{A}^a_\mu \, J_a + \hat{\mathbb{A}}_\mu \, iI = \hat{\mathrm{A}}_\mu + i\hat{\mathbb{A}}_\mu \, , \tag{9.1}$$

donde hemos llamado $\hat{\mathrm{A}}_\mu = A^a_\mu J_a$ a la parte $SL(2,\mathbb{C})$ de la conexión y $\hat{\mathbb{A}}_\mu$ a la parte $U(1)$. Dado que $\hat{A}_\mu$ es una conexión compleja, debemos definir un segundo campo independiente

$\hat{\bar{A}}_\mu$.

$$\hat{\bar{A}}_\mu \;\;=\;\; \hat{\bar{A}}^a_\mu \, J_a + \hat{\bar{\mathbb{A}}}_\mu \, iI = \hat{\bar{\mathrm{A}}}_\mu + i\hat{\bar{\mathbb{A}}}_\mu \,, \tag{9.2}$$

La acción adecuada no conmutativa para estos campos de gauge se define como

$$S^\theta_{CS}[\hat{A}_\mu, \hat{\bar{A}}_\mu] = i\left(S^\theta_{CS}[\hat{A}_\mu] - \hat{S}^\theta_{CS}[\hat{\bar{A}}_\mu]\right) \,, \tag{9.3}$$

donde el factor i proviene de la rotación de Wick necesaria para llevar la teoría de gravitación a espacio euclídeo. Es decir que tenemos dos teorías de gauge desacopladas, con acción de Chern-Simons no conmutativa, para los campos de gauge complejos $\hat{A}_\mu$ y $\hat{\bar{A}}_\mu$.

Para asegurar la diferenciabilidad de la acción, debemos imponer alguna de las dos condiciones de contorno estudiadas en el capítulo 7. En cualquiera de esos casos, las ecuaciones de movimiento son

$$\hat{F}_{\mu\nu}[\hat{A}_\rho] = \hat{F}_{\mu\nu}[\hat{\bar{A}}_\rho] = 0 \,. \tag{9.4}$$

Las mismas condiciones de contorno nos garantizan que la acción es invariante frente a transformaciones de gauge no conmutativas. Si en las ecuaciones (9.4) separamos el campo $U(1)$, $\hat{\mathbb{A}}_\mu$, del resto de las componentes, obtenemos

$$\hat{\mathrm{F}}_{\mu\nu}[\hat{\mathrm{A}}_\rho] \;\;\equiv\;\; \partial_\mu \hat{\mathrm{A}}_\nu - \partial_\nu \hat{\mathrm{A}}_\mu - \frac{1}{2}\epsilon^{abc}\{A^b_\mu, A^c_\nu\}J_a = i[\hat{\mathbb{A}}_\mu, \hat{\mathrm{A}}_\nu] + i[\hat{\mathrm{A}}_\mu, \hat{\mathbb{A}}_\nu] \,, \tag{9.5}$$

$$\hat{\mathbb{F}}_{\mu\nu}[\mathbb{A}_\rho] \;\;\equiv\;\; \partial_\mu \hat{\mathbb{A}}_\nu - \partial_\nu \hat{\mathbb{A}}_\mu + i[\hat{\mathbb{A}}_\mu, \hat{\mathbb{A}}_\nu] = i\mathrm{Tr}[\mathrm{A}_\mu, \mathrm{A}_\nu] \,, \tag{9.6}$$

y ecuaciones análogas para $\hat{\bar{A}}_\mu$. El miembro derecho de estas ecuaciones se anula para $\theta^{\mu\nu} = 0$, mostrando que $\hat{\mathrm{A}}_\mu$ y $\hat{\mathbb{A}}_\mu$ se desacoplan en el límite conmutativo. Es importante notar que $\hat{\mathrm{F}}_{\mu\nu}$ no son las componentes en J_a del tensor de curvatura $\hat{F}_{\mu\nu}$ de la teoría de gauge $GL(2,\mathbb{C})$, sino las que corresponderían a una teoría $SL(2,\mathbb{C})$, escrita en componentes. Análogamente, $\hat{\mathbb{F}}_{\mu\nu}$ no es la componente en la identidad de la curvatura $GL(2,\mathbb{C})$, sino la curvatura correspondiente a una teoría $U(1)$ no conmutativa. Para referencia futura, mencionaremos aquí que existen soluciones "planas en $SL(2\mathbb{C})$", es decir con $\hat{\mathrm{F}}_{\mu\nu} = 0$ siempre que,

$$[\hat{\mathbb{A}}_\mu, \hat{\mathrm{A}}_\nu] + [\hat{\mathrm{A}}_\mu, \hat{\mathbb{A}}_\nu] = 0. \tag{9.7}$$

En el límite $\theta^{\mu\nu} \to 0$, la teoría de gauge que hemos definido es equivalente a nivel clásico a la gravitación en $d = 3$ dimensiones, más dos campos de gauge $U(1)$ libres y con acción de Chern-Simons. En efecto, los campos abelianos $\hat{\mathbb{A}}_\mu$ y $\hat{\bar{\mathbb{A}}}_\mu$ se desacoplan completamente de $\hat{\mathrm{A}}_\mu$ y $\hat{\bar{\mathrm{A}}}_\mu$ en ese límite, como se puede ver en (9.5-9.6), y pueden elegirse nulos. Si bien los campos se acoplan no trivialmente en el caso $\theta^{\mu\nu}$ finito, existen, como veremos, soluciones con $\hat{\mathbb{A}}_\mu = \hat{\bar{\mathbb{A}}}_\mu = 0$.

9.2. Gravedad tridimensional no conmutativa

Representación en términos de tríada y conexión de Ricci

En la sección anterior hemos definido una teoría de gauge no conmutativa, en cuyo límite $\theta^{\mu\nu} = 0$ recuperamos la forma de Chern-Simons de la gravitación en tres dimensiones, junto con dos campos de gauge $U(1)$ con acción de Chern-Simons.

Estamos entonces en condiciones de preguntarnos si nuestra teoría puede ser formulada en términos de variables tríada $\hat{e}^a{}_\mu$ y conexión de spin $\hat{w}^{ab}{}_\mu$ "no conmutativas". Si aceptamos que la relación entre estas variables y las componentes $SL(2,\mathbb{C})$ de los campos de gauge $\hat{A}^a_\mu$ y $\hat{\bar{A}}^a_\mu$ es la misma que en el caso conmutativo, obtenemos una generalización no conmutativa natural, es decir

$$\hat{e}^a{}_\mu = \frac{l}{2i}(\hat{A}^a_\mu - \hat{\bar{A}}^a_\mu)\,, \tag{9.8}$$

$$\hat{w}^a{}_\mu = \frac{1}{2}(\hat{A}^a_\mu + \hat{\bar{A}}^a_\mu) = -\frac{1}{2}\epsilon^{abc} w^{bc}{}_\mu\,. \tag{9.9}$$

Sumando y restando las ecuaciones de Chern-Simons para $\hat{A}^a_\mu$ y $\hat{\bar{A}}^a_\mu$, se prueba directamente que $e^a{}_\mu$ y $w^a{}_\mu$ satisfacen la "ecuaciones de estructura de Cartan no conmutativas"

$$R^a{}_{\mu\nu} = -\frac{i}{2}\left([\hat{\mathbb{A}}_\mu + \hat{\bar{\mathbb{A}}}_\mu, \hat{w}^a{}_\nu] + [\hat{w}^a{}_\mu, \hat{\mathbb{A}}_\nu + \hat{\bar{\mathbb{A}}}_\nu] + \frac{i}{l}[\hat{\mathbb{A}}_\mu - \hat{\bar{\mathbb{A}}}_\mu, e^a{}_\nu] + [e^a{}_\mu, \hat{\mathbb{A}}_\nu - \hat{\bar{\mathbb{A}}}_\nu]\right) \tag{9.10}$$

$$T^a{}_{\mu\nu} = -\frac{i}{2}\left([\hat{\mathbb{A}}_\mu - \hat{\bar{\mathbb{A}}}_\mu, \hat{w}^a{}_\nu] + [\hat{w}^a{}_\mu, \hat{\mathbb{A}}_\nu - \hat{\bar{\mathbb{A}}}_\nu] + \frac{i}{l}[\hat{\mathbb{A}}_\mu + \hat{\bar{\mathbb{A}}}_\mu, e^a{}_\nu] + [e^a{}_\mu, \hat{\mathbb{A}}_\nu + \hat{\bar{\mathbb{A}}}_\nu]\right) \tag{9.11}$$

mientras que, para el campo $U(1)$ obtenemos

$$\hat{\mathbb{F}}_{\mu\nu} = -2i([w^a{}_\mu, w^a{}_\nu] + \frac{1}{l^2}[e^a{}_\mu, e^a{}_\nu] + \frac{i}{l}([e^a{}_\mu, w^a{}_\nu] + [w^a{}_\mu, e^a{}_\nu]))\,, \tag{9.12}$$

$$\hat{\bar{\mathbb{F}}}_{\mu\nu} = -2i([w^a{}_\mu, w^a{}_\nu] + \frac{1}{l^2}[e^a{}_\mu, e^a{}_\nu] - \frac{i}{l}([e^a{}_\mu, w^a{}_\nu] + [w^a{}_\mu, e^a{}_\nu]))\,. \tag{9.13}$$

En estas ecuaciones, la curvatura de gauge $U(1)$, $\hat{\mathbb{F}}_{\mu\nu}$ esta definida como en (9.6), y los tensores de curvatura y de torsión tienen la forma

$$R^a{}_{\mu\nu} = \partial_\mu \hat{w}^a{}_\nu - \partial_\nu \hat{w}^a{}_\mu - \frac{1}{2}\epsilon^{abc}\{\hat{w}^b{}_\mu, \hat{w}^c{}_\nu\} + \frac{1}{2l^2}\epsilon^{abc}\{\hat{e}^b{}_\mu, \hat{e}^c{}_\nu\}\,, \tag{9.14}$$

$$T^a{}_{\mu\nu} = \partial_\mu \hat{e}^a{}_\nu - \partial_\nu \hat{e}^a{}_\mu - \frac{1}{2}\epsilon^{abc}\left(\{\hat{e}^b{}_\mu, \hat{w}^c{}_\nu\} + \{\hat{w}^b{}_\mu, \hat{e}^c{}_\nu\}\right)\,. \tag{9.15}$$

Se observa inmediatamente que, siempre que esté presente el campo $U(1)$, el espacio no conmutativo tiene torsión no nula. Por otro lado, los campos gravitatorios actúan como fuente para el campo $U(1)$, por lo que podemos decir que están cargados frente a ese campo.

Si se desea simplificar aún más estas ecuaciones, podemos definir el *dreivein* $\hat{e}_\mu = \hat{e}^a{}_\mu J_a - (l/2)(\hat{\mathbb{A}}_\mu - \hat{\bar{\mathbb{A}}}_\mu)$ y la conexión de spin $\hat{w}_\mu = \hat{w}^a{}_\mu J_a + (i/2)(\hat{\mathbb{A}}_\mu + \hat{\bar{\mathbb{A}}}_\mu)$, ambos valuados en el algebra de $GL(2, C)$ (nótese la cuarta componente en la identidad, ausente en el caso conmutativo). Entonces las ecuaciones toman la forma

$$
\begin{aligned}
\partial_\mu \hat{w}_\nu - \partial_\nu \hat{w}_\mu + [\hat{w}_\mu, \hat{w}_\nu] - \frac{1}{l^2}[\hat{e}_\mu, \hat{e}_\nu] &= 0, \qquad (9.16)\\
\partial_\mu \hat{e}_\nu - \partial_\nu \hat{e}_\mu + [\hat{w}_\mu, \hat{e}_\nu] - [\hat{e}_\mu, \hat{w}_\nu] &= 0\,, \qquad (9.17)
\end{aligned}
$$

que, superficialmente, coinciden con las condiciones usuales de torsion y curvatura para la conexión de spin y el tríada valuados en el álgebra. Sin embargo, no debe olvidarse que en estas ecuaciones están involucrados los campos $U(1)$ que, si bien ocultos por la notación, se acoplan a las variables gravitatorias de manera no trivial como puede verse en (9.5-9.6)

Como un procedimiento alternativo, podemos invertir las relaciones (9.9-9.8) para obtener los campos de gauge y reemplazar en la acción (9.3), con lo que obtenemos como acción para las nuevas variables

$$
S^\theta[\hat{w}^a{}_\mu, \hat{e}^a{}_\mu, \hat{\mathbb{A}}_\mu, \hat{\bar{\mathbb{A}}}_\mu] = S^\theta_{EH}[\hat{w}^a{}_\mu, \hat{e}^a{}_\mu] + i\hat{S}_{CS}[\hat{\mathbb{A}}_\mu] - iS^\theta_{CS}[\hat{\bar{\mathbb{A}}}_\mu] + S^\theta_{Int}[\hat{\mathbb{A}}_\mu, \hat{\bar{\mathbb{A}}}_\mu, \hat{w}^a{}_\mu, \hat{e}^a{}_\mu], \qquad (9.18)
$$

donde S^θ_{CS} es la acción de Chern-Simons no conmutativa $U(1)$ para los campos $\mathbb{A}_\mu$ y $\hat{\bar{\mathbb{A}}}_\mu$, S^θ_{EH} es la "acción de Einstein-Hilbert no conmutativa"

$$
S^\theta_{EH}[\hat{e}^a{}_\mu, \hat{w}^a{}_\mu] = \frac{2}{l}\int d^3x\, \epsilon_{\mu\nu\rho}\left(R^a{}_{\mu\nu} * \hat{e}^a{}_\rho + \frac{1}{3l^2}\epsilon^{abc}\hat{e}^a{}_\mu * \hat{e}^b{}_\nu * \hat{e}^c{}_\rho\right), \qquad (9.19)
$$

y $\hat{S}_{Int}$ es el término de interacción que viene dado por

$$
S^\theta_{Int} = \int d^3x\, \left(\hat{\mathbb{A}}_\mu j_\mu + \hat{\bar{\mathbb{A}}}_\mu \bar{j}_\mu\right)\,, \qquad (9.20)
$$

donde hemos definido las corrientes j_μ y $\bar{j}_\mu$ de acuerdo con

$$
\begin{aligned}
j_\mu &= -4i\epsilon_{\mu\nu\rho}\left(w^a{}_\nu w^a{}_\rho - \frac{1}{l^2}e^a{}_\nu e^a{}_\rho + \frac{i}{l}([e^a{}_\nu, w^a{}_\rho] + [w^a{}_\nu, e^a{}_\rho])\right)\,, \qquad (9.21)\\
\bar{j}_\mu &= 4i\epsilon_{\mu\nu\rho}\left(w^a{}_\nu w^a{}_\rho - \frac{1}{l^2}e^a{}_\nu e^a{}_\rho - \frac{i}{l}([e^a{}_\nu, w^a{}_\rho] + [w^a{}_\nu, e^a{}_\rho])\right)\,. \qquad (9.22)
\end{aligned}
$$

En términos de las variables valuadas en el algebra, $\hat{w}_\mu$ y $\hat{e}_\mu$, que hemos definido anteriormente, el conjunto completo de ecuaciones (9.16-9.17) se puede derivar de la "acción no conmutativa de Einstein-Hilbert",

$$
S^\theta[\hat{e}_\mu, \hat{w}_\mu] = -\frac{2}{l}\mathrm{Tr}\int d^3x\, \epsilon_{\mu\nu\rho}\left(R_{\mu\nu} * \hat{e}_\rho - \frac{2}{3l^2}\hat{e}_\mu * \hat{e}_\nu * \hat{e}_\rho\right)\,, \qquad (9.23)
$$

donde $R_{\mu\nu} = \partial_\mu \hat{w}_\nu - \partial_\nu \hat{w}_\mu + [\hat{w}_\mu, \hat{w}_\nu]$. La variación con respecto al la tríada $\hat{e}_\mu$ origina (9.16), mientras que la variación con respecto a la conexión de spin $\hat{w}_\mu$ origina (9.17). La diferenciabilidad de esta acción queda asegurada dadas las condiciones de contorno discutidas anteriormente.

Se debe insistir en que, más allá de la similitud entre (9.23) y la acción de Einstein-Hilbert usual, en la primera los campos abelianos $\hat{\mathbb{A}}_\mu$ y $\hat{\bar{\mathbb{A}}}_\mu$ están acoplados a $\hat{e}^a{}_\mu$ y $\hat{w}^a{}_\mu$ de manera no trivial, siendo los acoplamientos proporcionales a potencias positivas de $\theta^{\mu\nu}$.

Si, a manera de *anzätz*, elegimos anular los campos abelianos, las ecs. (9.16-9.17) (o sus equivalentes (9.10-9.11)) se transforman en,

$$\begin{aligned} \partial_\mu \hat{w}^a{}_\nu - \partial_\nu \hat{w}^a{}_\mu - \frac{1}{2}\epsilon^{abc}\{\hat{w}^b{}_\mu, \hat{w}^c{}_\nu\} - \frac{1}{2l^2}\epsilon^{abc}\{\hat{e}^b{}_\mu, \hat{e}^c{}_\nu\} &= 0 & (9.24) \\ \partial_\mu \hat{e}^a{}_\nu - \partial_\nu \hat{e}^a{}_\mu - \frac{1}{2}\epsilon^{abc}\left(\{e^b{}_\mu, w^c{}_\nu\} + \{w^b{}_\mu, e^c{}_\nu\}\right) &= 0 & (9.25) \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta a los tensores de torsión y curvatura introducidos en las ecuaciones (9.10-9.11), la primera ecuación se puede entender como una condición de curvatura no conmutativa contante, escrita en términos de conexiones y la segunda ecuación es la análoga a una condición de torsión nula. Esta ecuación no implica, por supuesto, que la conexión afín sea simétrica.

El mismo *anzätz* aplicado a las ecuaciones (9.12)-(9.13) implica que deben cumplirse las igualdades

$$\begin{aligned} [w^a{}_\mu, w^a{}_\nu] + \frac{1}{l^2}[e^a{}_\mu, e^a{}_\nu] &= 0\,, & (9.26) \\ [e^a{}_\mu, w^a{}_\nu] + [w^a{}_\mu, e^a{}_\nu] &= 0\,. & (9.27) \end{aligned}$$

Encontraremos más adelante soluciones explícitas que satisfacen esta condición. Estas ecuaciones se satisfacen idénticamente para $\theta^{\mu\nu} = 0$.

Representación en términos de métrica:

La ecuaciones (9.24) y (9.25) tienen la misma forma que las ecuaciones de estructura de Cartan, pero donde todos los productos han sido reemplazados por productos estrella. Es entonces natural preguntarse si existe una formulación en términos de métrica para estas ecuaciones, es decir, si podemos encontrar las correspondientes ecuaciones de Einstein.

Supondremos que los vínculos (9.26-9.27) se satisfacen e intentaremos escribir (9.24-9.25) en términos de la métrica y de la conexión afín. (Véase [85]-[90] para otras soluciones de este problema en cuatro dimensiones.)

Definiremos la métrica y la conexión afín como

$$\begin{aligned}\hat{g}_{\mu\nu} &= -\delta_{ab}\, \hat{e}^a{}_\mu * \hat{e}^b{}_\nu\,, &(9.28)\\ \hat{\Gamma}^\mu{}_{\lambda\rho} &= \epsilon^{abc}\hat{e}_a{}^\mu * \hat{w}^b{}_\rho * \hat{e}^c{}_\lambda + \hat{e}_a{}^\mu * \partial_\rho \hat{e}^a{}_\lambda. &(9.29)\end{aligned}$$

En otras palabras, $\hat{g}_{\mu\nu}$ y $\hat{\Gamma}^\rho{}_{\mu\nu}$ representan, como es usual, la métrica y la conexión en una base coordenada. Dado $\hat{e}^a{}_\mu$ y $\hat{w}^a{}_\mu$, las fórmulas escritas arriba determinan completamente $\hat{g}_{\mu\nu}$ y $\hat{\Gamma}^\mu{}_{\nu\rho}$. Si $\hat{e}^a{}_\mu$ y $\hat{w}^a{}_\mu$ satisfacen las ecuaciones de Chern-Simons, nos gustaría encontrar las ecuaciones diferenciales satisfechas por $\hat{g}_{\mu\nu}$ y $\hat{\Gamma}^\mu{}_{\nu\rho}$.

La definición de la conexión afín se puede motivar en la invarianza de gauge de la acción. Bajo transformaciones de gauge $\hat{g}$ la conexión de spin transforma como $\hat{w}^{ab}{}_\mu \to \hat{w}'^{ab}{}_\mu = [\hat{g}^{-1}]^a{}_c * \hat{w}^{cd}{}_\mu * \hat{g}^b{}_d \; + [\hat{g}^{-1}]^a{}_c * \partial_\mu \hat{g}^c{}_b$. Si $\hat{w}' = \hat{\Gamma}^\rho{}_{\lambda\sigma}$ es la conexión en un base coordenada, relacionada con la base tangente a través de la matriz $\hat{g}^a{}_\mu = \hat{e}^a{}_\mu$, la nueva conexión deviene (9.29).

La curvatura en una base de coordenadas es

$$R^\mu{}_{\nu\ \rho\sigma} = \partial_\rho \hat{\Gamma}^\mu{}_{\nu\sigma} - \partial_\sigma \hat{\Gamma}^\mu{}_{\nu\rho} + \hat{\Gamma}^\mu{}_{\epsilon\rho} * \hat{\Gamma}^\epsilon{}_{\nu\sigma} - \hat{\Gamma}^\mu{}_{\epsilon\sigma} * \hat{\Gamma}^\epsilon{}_{\nu\rho}\,, \tag{9.30}$$

y se relaciona con $R^a{}_{\mu\nu}$ por medio de la formula

$$R^\mu{}_{\nu\ \rho\sigma} = \epsilon^{abc}\, \hat{e}_a{}^\mu * R^b{}_{\rho\sigma} * \hat{e}^c{}_\nu. \tag{9.31}$$

Esto se sigue de reemplazar directamente (9.29) en (9.30), y expresa el hecho de que la curvatura es un tensor. Como $R^a{}_{\mu\nu}$ satisface (9.24), encontramos la “ecuación de Einstein no conmutativa”,

$$R^\mu{}_{\nu\ \rho\sigma} = -\frac{1}{l^2}(\delta^\mu{}_\rho \hat{g}_{\sigma\nu} - \delta^\mu{}_\sigma \hat{g}_{\rho\nu}) + \hat{E}^\mu{}_{\nu\ \rho\sigma} \tag{9.32}$$

donde $\hat{g}_{\mu\nu}$ se define en (9.28), y

$$\hat{E}^\mu{}_{\nu\ \rho\sigma} = \frac{1}{2l^2}\hat{e}^\mu{}_a * (\hat{e}^a{}_{[\rho} * \hat{e}^b{}_{\sigma]} - \hat{e}^b{}_{[\sigma} * \hat{e}^a{}_{\rho]}) * \hat{e}_{b\nu}. \tag{9.33}$$

El primer término en (9.32) es la contribución usual de la constante cosmológica a las ecuaciones de Einstein. Recuérdese, sin embargo, que en esta teoría la métrica es no simétrica. El segundo término $\hat{E}^\mu{}_{\nu\ \rho\sigma}$ es un efecto puramente no conmutativo, dependiendo del conmutador de Moyal de las tríadas, y no se puede expresar solamente en términos de la métrica.

Resumiendo, dados $\hat{e}^a{}_\mu$ y $\hat{w}^a{}_\mu$ que satisfagan las ecuaciones de Chern-Simons, entonces la métrica (9.28) y la conexión afín (9.29) satisfacen las ecuaciones de Einstein no conmutativas (9.32). Mostraremos mas abajo una familia de soluciones de estas ecuaciones.

9.3. Soluciones

Todas las soluciones consideradas aquí viven en la topología $M_3 = T^2 \times \mathbb{R}$. Las coordenadas locales en T^2 son $z, \bar{z}$ y $\rho \in \mathbb{R}$. Las componentes del campo de gauge son entonces $\hat{A}_\mu = (\hat{A}_z, \hat{A}_{\bar{z}}, \hat{A}_\rho)$. Tomaremos $\theta^{\rho z} = \theta^{\rho \bar{z}} = 0$ mientras que las coordenadas no conmutativas satisfacen,

$$[z, \bar{z}] = \theta. \tag{9.34}$$

Se debe notar que esta elección de la componentes de $\theta^{\mu\nu}$ y de la variedad $\mathcal{M}$ nos situa en el caso especial estudiado en el capítulo 7.1, es decir cuando $\theta^{\mu\nu}$ no tiene componentes en las direcciones perpendiculares al borde de la variedad. En tal caso y de acuerdo a lo estudiado en dicho capítulo, basta con anular una de las componentes del potencial vector sobre la superficie para tener una acción diferenciable e invariante de gauge. Elegiremos entonces la condición de contorno $\hat{A}_{\bar{z}}|_{\partial\mathcal{M}} = 0$ y $\hat{\bar{A}}_z|_{\partial\mathcal{M}} = 0$.

Debería ser claro que el agujero negro en tres dimensiones [37]-[38] es una solución de las ecuaciones completas no conmutativas, simplemente porque este campo tiene dos vectores de Killing ∂_z y $\partial_{\bar{z}}$, los cuales efectivamente reducen el producto estrella al producto usual.

Para explorar la estructura no conmutativa, necesitamos buscar soluciones más generales. Comenzaremos buscando soluciones a las ecuaciones no conmutativas de Chern-Simons.

La solución quiral

Reescribiremos la ecuación (9.5) en la forma

$$\begin{aligned}
\hat{\mathrm{F}}_{\rho z}[\hat{\mathrm{A}}] + i[\hat{\mathbb{A}}_\rho, \hat{\mathrm{A}}_z] + i[\hat{\mathrm{A}}_\rho, \hat{\mathbb{A}}_z] &= 0\,, \\
\hat{\mathrm{F}}_{\rho \bar{z}}[\hat{\mathrm{A}}] + i[\hat{\mathbb{A}}_\rho, \hat{\mathrm{A}}_{\bar{z}}] + i[\hat{\mathrm{A}}_\rho, \hat{\mathbb{A}}_{\bar{z}}] &= 0\,, \\
\hat{\mathrm{F}}_{z \bar{z}}[\hat{\mathrm{A}}] + i[\hat{\mathbb{A}}_z, \hat{\mathrm{A}}_{\bar{z}}] + i[\hat{\mathrm{A}}_z, \hat{\mathbb{A}}_{\bar{z}}] &= 0\,.
\end{aligned} \tag{9.35}$$

Para resolver estas ecuaciones podemos fijar el gauge a

$$\hat{\mathrm{A}}_\rho = iJ_3, \qquad \hat{\mathbb{A}}_\rho = 0\,. \tag{9.36}$$

Las dos primeras ecuaciones de (9.35) se transforman en

$$\begin{aligned}
\partial_\rho \hat{\mathrm{A}}_z + [\hat{\mathrm{A}}_\rho, \hat{\mathbb{A}}_z] &= 0\,, \\
\partial_\rho \hat{\mathrm{A}}_{\bar{z}} + [\hat{\mathrm{A}}_\rho, \hat{\mathbb{A}}_{\bar{z}}] &= 0\,,
\end{aligned} \tag{9.37}$$

aquí, dado que $\hat{\mathrm{A}}_\rho$ es constante, el conmutador no contiene productos de Moyal. La solución de estas ecuaciones es

$$\hat{\mathrm{A}}_z = d^{-1}\tilde{\mathrm{A}}_z(z, \bar{z})d\,, \qquad \hat{\mathrm{A}}_{\bar{z}} = d^{-1}\tilde{\mathrm{A}}_{\bar{z}}(z, \bar{z})d\,, \tag{9.38}$$

donde $d = e^{i\rho J^3}$ y hemos incluido dos matrices arbitrarias $\tilde{\mathrm{A}}_z(z,\bar{z})$ y $\tilde{\mathrm{A}}_{\bar{z}}(z,\bar{z})$ que son funciones de $z,\bar{z}$ pero no de ρ. La condición de contorno $\hat{A}_{\bar{z}}|_{\partial M} = 0$ implica $\tilde{\mathrm{A}}_{\bar{z}} = 0$, o sea que $\hat{\mathrm{A}}_{\bar{z}} = 0$.

Reescribiendo ahora la ecuación (9.6), tenemos que

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbb{F}}_{\rho z} - i\mathrm{Tr}[\hat{\mathrm{A}}_\rho, \hat{\mathrm{A}}_z] &= 0\,, \\
\hat{\mathbb{F}}_{\rho \bar{z}} - i\mathrm{Tr}[\hat{\mathrm{A}}_\rho, \hat{\mathrm{A}}_{\bar{z}}] &= 0\,, \\
\hat{\mathbb{F}}_{z \bar{z}} - i\mathrm{Tr}[\hat{\mathrm{A}}_z, \hat{\mathrm{A}}_{\bar{z}}] &= 0\,.
\end{aligned} \tag{9.39}$$

Usando $\hat{\mathrm{A}}_{\bar{z}} = 0$ y la condición de gauge (9.36), las dos primeras ecuaciones en (9.39) se escriben

$$\partial_\rho \hat{\mathbb{A}}_z = \partial_\rho \hat{\mathbb{A}}_{\bar{z}} = 0\,, \tag{9.40}$$

Se ve entonces que $\hat{\mathbb{A}}_z$ y $\hat{\mathbb{A}}_{\bar{z}}$ deben ser independientes de ρ. Dada la condición de contorno $\hat{\mathbb{A}}_{\bar{z}}|_{\partial M} = 0$, esto implica que $\hat{\mathbb{A}}_{\bar{z}} = 0$ en todas partes. La ecuación que resta en (9.39) es

$$\partial_{\bar{z}} \hat{\mathbb{A}}_z = 0\,, \tag{9.41}$$

y entonces $\hat{\mathbb{A}}_z = \hat{\mathbb{A}}_z(z)$ es una función analítica arbitraria de z. Con esta solución para el campo $U(1)$, la última ecuación en (9.35) se simplifica, transformándose en

$$\partial_{\bar{z}} \hat{\mathrm{A}}_z = 0\,, \tag{9.42}$$

o sea $\hat{\mathrm{A}}_z = \hat{\mathrm{A}}_z(z)$.

Entonces, la solución general a las ecuaciones (9.5-9.6) con condiciones de contorno $\hat{\mathrm{A}}_{\bar{z}}|_{\partial M} = \hat{\mathbb{A}}_{\bar{z}}|_{\partial M} = 0$, la cual está cercanamente relacionada con el agujero negro en tres dimensiones, es la siguiente solución quiral,

$$\begin{gathered}
\hat{\mathrm{A}}_z = d^{-1}\tilde{\mathrm{A}}_z(z) d\,, \qquad \hat{\mathrm{A}}_\rho = iJ_3 = d^{-1}\partial_\rho d\,, \qquad \hat{\mathbb{A}}_z = \hat{\mathbb{A}}_z(z)\,, \\
\hat{\mathbb{A}}_\rho = \hat{\mathbb{A}}_{\bar{z}} = \hat{\mathrm{A}}_{\bar{z}} = 0\,,
\end{gathered} \tag{9.43}$$

donde $\tilde{\mathrm{A}}_z(z) + i\hat{\mathbb{A}}_z(z)$ es una función arbitraria de z valuada en el álgebra de Lie de $GL(2,\mathbb{C})$. Esta configuración resuelve tanto las ecuaciones conmutativas cuanto las no conmutativas. Se puede también comprobar que se trata de un punto fijo bajo el mapeo de Seiberg y Witten [19]. Un análisis similar para el segundo campo complejo $\hat{\hat{A}}_\mu$ lleva a una solución análoga a (9.43) pero con $\hat{\mathrm{A}}_z(z) \to \hat{\hat{\mathrm{A}}}_{\bar{z}}(\bar{z})$, $\hat{\mathbb{A}}_z(z) \to \hat{\hat{\mathbb{A}}}_{\bar{z}}(\bar{z})$ y $d \to d^{-1}$.

Una transformación de gauge (con elemento del grupo d) lleva la solución a la forma más simple

$$\begin{gathered}
\hat{\mathrm{A}}_z = \tilde{\mathrm{A}}_z(z)\,, \qquad \hat{\mathbb{A}}_z = \hat{\mathbb{A}}_z(z)\,, \\
\hat{\mathrm{A}}_{\bar{z}} = \hat{\mathrm{A}}_\rho = \hat{\mathbb{A}}_{\bar{z}} = \hat{\mathbb{A}}_\rho = 0\,.
\end{gathered} \tag{9.44}$$

Una propiedad importante de (9.44) es la simetría de Kac-Moody bajo transformaciones de gauge holomorfas. Para ver esto, especialicemos al caso $\hat{\mathbb{A}}_z = 0$ y notemos que la configuración (9.44) es invariante de forma bajo transformaciones de gauge que sólo dependen de z. Hagamos $\hat{\lambda} = \hat{\lambda}(z)$. Actuando con la transformación no conmutativa (4.10) se encuentra que,

$$\delta \hat{A}_z = \partial_z \hat{\lambda} + \hat{A}_z * \hat{\lambda} - \hat{\lambda} * \hat{A}_z = \partial_z \hat{\lambda} + \hat{A}_z \hat{\lambda} - \hat{\lambda} \hat{A}_z, \tag{9.45}$$

$$\delta \hat{A}_{\bar{z}} = 0, \tag{9.46}$$

$$\delta \hat{A}_\rho = 0, \tag{9.47}$$

El producto estrella ha sido eliminado porque la solución sólo depende de z. Esta simetría del espacio de soluciones (9.44) es generada por un álgebra de Kac-Moody y juega un rol importante en la comprensión de la entropía del agujero negro en tres dimensiones.

La métrica

En esta sección construiremos la métrica correspondiente a la solución quiral de la sección anterior. Utilizaremos la ecuación (9.28) donde la tríada $\hat{e}^a{}_\mu$ estará construida de acuerdo a (9.8).

Utilizando la solución quiral (9.43) en la definición de la tríada (9.8), nos queda

$$\hat{e}^a_z J_a = \frac{l}{2i} d^{-1} \tilde{\mathrm{A}}_z(z) d\,, \qquad \hat{e}^a_{\bar{z}} J_a = -\frac{l}{2i} d\, \tilde{\bar{\mathrm{A}}}_{\bar{z}}(\bar{z})\, d^{-1}\,,$$
$$\hat{e}^a_\rho J_a = l J_3\,. \tag{9.48}$$

Definimos las componentes de las matrices $SL(2,\mathbb{C})$, $\tilde{\mathrm{A}}_z$ y $\tilde{\mathrm{A}}_{\bar{z}}$ de acuerdo con

$$\tilde{\mathrm{A}}_z = \frac{i}{2} \begin{pmatrix} A^3 & A^+ \\ A^- & -A^3 \end{pmatrix}, \qquad \tilde{\bar{\mathrm{A}}}_{\bar{z}} = \frac{i}{2} \begin{pmatrix} \bar{A}^3 & \bar{A}^+ \\ \bar{A}^- & -\bar{A}^3 \end{pmatrix}. \tag{9.49}$$

Entonces la parte simétrica de la métrica, asociada a la longitud de arco $ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$, es

$$\begin{aligned} ds^2 &= l^2 d\rho^2 - \frac{l^2}{4}\left({A^3}^2 + A^+A^-\right) dz^2 - \frac{l^2}{4}\left({\bar{A}^3}{}^2 + \bar{A}^+\bar{A}^-\right) d\bar{z}^2 \\ &\quad + \frac{l^2}{8}\left(2\{A^3, \bar{A}^3\} + \{A^-, \bar{A}^+\} e^{-2\rho} + \{A^+, \bar{A}^-\} e^{2\rho}\right) dz d\bar{z} \\ &\quad + i l^2 \bar{A}^3 d\bar{z} d\rho - i l^2 A^3 dz d\rho\,. \end{aligned} \tag{9.50}$$

En este punto, estamos interesados en determinar las condiciones que deben ser impuestas a los campos de gauge para obtener una métrica que sea asintóticamente anti de Sitter. Con este fin, seguiremos el método de la ref. [40] extendido al caso no conmutativo. Las componentes no diagonales que contienen ρ deben ser nulas. Esto se puede asegurar tomando

$A^3 = \bar{A}^3 = 0$, lo que extiende al caso no conmutativo la primera condición de reducción de Polyakov. La métrica resultante es

$$ds^2 \;=\; l^2 d\rho^2 - \frac{l^2}{4}A^+A^- dz^2 - \frac{l^2}{4}\bar{A}^+\bar{A}^- d\bar{z}^2 + \frac{l^2}{8}\left(\{\bar{A}^+, A^-\}e^{-2\rho} + \{A^+, \bar{A}^-\}e^{2\rho}\right) dz d\bar{z}\,, \tag{9.51}$$

la cual tiene como forma asintótica ($\rho \to \infty$)

$$ds^2 = l^2 d\rho^2 + \frac{l^2}{8}\{A^+, \bar{A}^-\}e^{2\rho} dz d\bar{z}\,. \tag{9.52}$$

Entonces, para tener una forma AdS es necesario imponer

$$\{A^+, \bar{A}^-\} = 8\,. \tag{9.53}$$

Derivando respecto de z y $\bar{z}$ obtenemos las siguientes relaciones (recuérdese que A^+ es holomorfa y $\bar{A}^-$ es antiholomorfa)

$$\{\partial_z A^+, \bar{A}^-\} = 0\,, \qquad\qquad \{A^+, \partial_{\bar{z}}\bar{A}^-\} = 0\,. \tag{9.54}$$

En el caso usual conmutativo, estas relaciones implican $A^+, \bar{A}^-$ constantes. Para comprobar esto en el caso no conmutativo, obsérvese que, siguiendo [83], se puede escribir

$$\begin{aligned} \hat{f}(z) * \hat{g}(\bar{z}) &= e^{\frac{\theta}{2}\partial\bar{\partial}}\hat{f}(z)\hat{g}(\bar{z})\,, \\ \hat{g}(\bar{z}) * \hat{f}(z) &= e^{-\frac{\theta}{2}\partial\bar{\partial}}\hat{f}(z)\hat{g}(\bar{z})\,, \end{aligned} \tag{9.55}$$

lo cual implica

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\{\hat{f}, \hat{g}\} &= \frac{1}{2}\left(e^{\frac{\theta}{2}\partial\bar{\partial}} + e^{-\frac{\theta}{2}\partial\bar{\partial}}\right)\hat{f}(z)\hat{g}(\bar{z}) = \\ &= \cosh\left(\frac{\theta}{2}\partial\bar{\partial}\right)\hat{f}(z)\hat{g}(\bar{z})\,. \end{aligned} \tag{9.56}$$

Usando esto, la ecuación (9.54) se puede reescribir como

$$\cosh\left(\frac{\theta}{2}\partial\bar{\partial}\right)(\partial_z A^+\bar{A}^-) = 0\,, \qquad\qquad \cosh\left(\frac{\theta}{2}\partial\bar{\partial}\right)(A^+\partial_{\bar{z}}\bar{A}^-) = 0\,. \tag{9.57}$$

Llamando $\{\psi_\lambda\}$ a un conjunto completo de autofunciones del laplaciano $\partial\bar{\partial}$ con autovalores $\{\lambda\}$, se puede escribir $\cosh((\theta/2)\partial\bar{\partial}) = \sum_\lambda \cosh((\theta/2)\lambda)|\psi_\lambda\rangle\langle\psi_\lambda|$. Esto asegura que $\cosh\big(\theta/2\ \partial\bar{\partial}\big)$ no tiene modos cero, y entonces de (9.57) se puede deducir

$$\partial_z A^+\bar{A}^- = 0\,, \qquad\qquad A^+\partial_{\bar{z}}\bar{A}^- = 0\,, \tag{9.58}$$

esto implica que $A^+, \bar{A}^-$ deben ser constantes. Hemos encontrado entonces la segunda condición de reducción, que escribiremos como $A^+ = 2\,, \bar{A}^- = 2\,.$

Concluimos que para tener una métrica asintóticamente AdS en el caso no conmutativo, es necesario imponer sólo las condiciones usuales de reducción de Polyakov, discutidas en [40]. En este caso, la solución quiral (9.43) toma la forma

$$\hat{\mathrm{A}}_z = i\begin{pmatrix} 0 & e^{\rho} \\ \frac{1}{2l}T(z)e^{-\rho} & 0 \end{pmatrix}, \qquad \hat{\mathrm{A}}_\rho = -\bar{\mathrm{A}}_\rho = iJ_3\,, \qquad \hat{\bar{\mathrm{A}}}_{\bar{z}} = i\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2l}\bar{T}(\bar{z})e^{-\rho} \\ e^{\rho} & 0 \end{pmatrix},$$
$$\hat{\mathbb{A}}_z = \hat{\mathbb{A}}_z(z) \qquad \hat{\bar{\mathbb{A}}}_{\bar{z}} = \hat{\bar{\mathbb{A}}}_{\bar{z}}(\bar{z})$$
$$\hat{\mathrm{A}}_{\bar{z}} = \hat{\bar{\mathrm{A}}}_z = \hat{\mathbb{A}}_{\bar{z}} = \hat{\mathbb{A}}_\rho = \hat{\bar{\mathbb{A}}}_z = \hat{\bar{\mathbb{A}}}_\rho = 0\,. \tag{9.59}$$

Con esto, la parte simétrica de la métrica, como se definió en (9.50), deviene

$$ds^2 = l^2 d\rho^2 - \frac{l}{2}Tdz^2 - \frac{l}{2}\bar{T}d\bar{z}^2 + \frac{1}{8}\left(\{\bar{T}, T\}e^{-2\rho} + 8l^2 e^{2\rho}\right) dzd\bar{z}\,. \tag{9.60}$$

Vemos que la única componente de la parte simétrica de la métrica afectada por la no conmutatividad es $\hat{g}^S_{z\bar{z}} = (1/8)\{\bar{T}, T\}\exp(-2\rho)$. Usando (9.55) para reescribir el anticonmutador, esta componente se puede reescribir como

$$\hat{g}^S_{z\bar{z}} = \cosh(\frac{\theta}{2}\partial\bar{\partial})g_{z\bar{z}}\,, \tag{9.61}$$

siendo $g_{\mu\nu}$ la métrica construída en [39] para el caso conmutativo. El operador $\cosh((\theta/2)\partial\bar{\partial})$ actúa como la identidad cuando se aplica a las otras componentes de la métrica, dado que todas las derivadas se anulan,

$$\hat{g}^S_{zz} = \cosh(\frac{\theta}{2}\partial\bar{\partial})g_{zz}\,, \qquad \hat{g}^S_{\bar{z}\bar{z}} = \cosh(\frac{\theta}{2}\partial\bar{\partial})g_{\bar{z}\bar{z}}\,. \tag{9.62}$$

Entonces, la relación entre la solución usual conmutativa y la parte simétrica de la solución no conmutativa se puede escribir en la forma compacta

$$\hat{g}^S_{\mu\nu} = \cosh\left(\frac{\theta}{2}\partial\bar{\partial}\right) g_{\mu\nu}\,. \tag{9.63}$$

La métrica completa $\hat{g}_{\mu\nu} = \hat{g}^S_{\mu\nu} + \hat{g}^A_{\mu\nu}$, donde $\hat{g}^A_{\mu\nu}$ es la parte antisimétrica, satisface las ecuaciones de Einstein no conmutativas (9.32). Nótese que $\hat{g}^A_{\mu\nu}$ es de hecho no nula. Esta contribución no nula proviene de

$$\hat{g}_{z\bar{z}} = \exp\left(\frac{\theta}{2}\partial\bar{\partial}\right) g_{z\bar{z}}\,, \qquad \hat{g}_{\bar{z}z} = \exp\left(-\frac{\theta}{2}\partial\bar{\partial}\right) g_{\bar{z}z}\,. \tag{9.64}$$

lo cual implica

$$\hat{g}^A_{z\bar{z}} = \sinh\left(\frac{\theta}{2}\partial\bar{\partial}\right) g_{z\bar{z}}\,. \tag{9.65}$$

Recuérdese que la derivación de (9.32) a partir de las ecuaciones de Einstein ordinarias esta codificada en la combinación $\hat{E}^{\mu}_{\nu\ \rho\sigma}$ la cual depende del conmutador $[\hat{e}^a_\rho, \hat{e}^b_\sigma]$. En el presente caso, la única contribución no nula a este conmutador es la componente $(\rho = z, \sigma = \bar{z})$, que es proporcional a $[T, \bar{T}] = 2\sinh\left(\frac{\theta}{2}\partial\bar{\partial}\right) T(z)\bar{T}(\bar{z})$.

9.4. Alcances y limitaciones de nuestra teoría

Como los éxitos y puntos abiertos de este capítulo, mencionaremos

- La formulación en términos de métrica de nuestra teoría de la gravitación no conmutativa, conduce a ecuaciones de Einstein que contienen un término adicional que involucra al tensor $E^{\mu}_{\nu\ \rho\sigma}$, cuya definición contiene las tríadas $\hat{e}^a{}_\mu$. Para que las ecuaciones de Einstein queden escritas en forma completamente independiente de estas variables, sería de interés encontrar algún tipo de interpretación geométrica para este tensor.

- Existen en la literatura varias formulaciones de la gravitación no conmutativa [9]-[14], [85]-[90]. Es importante investigar la relación que estas teorías puedan tener con la definición aquí propuesta.

- En otras formulaciones de la gravitación no conmutativa [87]-[90], el determinante la métrica que aparece en el elemento invariante de volumen en la acción de Einstein, presenta problemas de ordenamiento en su desarrollo en serie de potencias. Con nuestra definición de la gravitación no conmutativa, hemos sorteado estos problemas al utilizar la acción de Chern-Simons para definir la dinámica.

- En este capítulo nos hemos centrado en el caso de la gravitación euclídea y con constante cosmológica negativa. La extensión a otros valores de la constante cosmológica o a la signatura minkowskiana parece directa. En cada caso, será necesario ampliar el grupo de gauge que su álgebra de Lie cierre por anticonmutacion

- Se puede objetar que la inclusión de los campos $U(1)$ asociados al generador adicional resulta antinatural. Es ese caso, sería necesario adaptar los resultados de [63]-[65] a la teoría de Chern-Simons, para poder formular una teoría de la gravitación no conmutativa sin generadores adicionales

9.5. Conclusiones

Resumiremos aquí nuestras conclusiones

- Hemos formulado una teoría de Chern-Simons no conmutativa, con grupo de gauge $GL(2, \mathbb{R})$. El límite conmutativo de esta teoría coincide, a nivel clásico, con la forma de

Chern-Simons de la gravitación en $d = 3$ dimensiones euclídeas, sumada a un campo de gauge complejo $U(1)$, desacoplado y con acción de Chern-Simons.

Para $\theta^{\mu\nu}$ finito, si bien el acoplamiento entre el campo $U(1)$ y la parte $SL(2,\mathbb{R})$ es no trivial, hemos propuesto considerar esta teoría como la forma de Chern-Simons de una teoría de gravitación no conmutativa en $d = 3$ dimensiones euclídeas.

- Hemos sido capaces de reformular dicha teoría de Chern-Simons en términos de un *dreibein* y conexión de spin no conmutativos, cuyas ecuaciones de movimiento generalizan las ecuaciones de Einstein en este formalismo.

  Verificamos que es posible definir una acción de Einstein escrita en términos de los campos no conmutativos, de la cual se derivan las correctas ecuaciones de movimiento, sin necesidad de definir algún ordenamiento para el determinante del dreibein, sorteando de esta manera las dificultades que se han discutido en la literatura [87]-[90].

- Encontramos soluciones a nuestras ecuaciones que se corresponden en el límite conmutativo a las soluciones conocidas de la teoría de gravitación en 3 dimensiones, por ejemplo la solución afín y la solución de agujero negro BTZ.

  Además, hemos encontrado un operador que mapea las soluciones de nuestra teoría no conmutativa el las correspondientes soluciones de la teoría conmutativa.