

# Visualización de Bifurcaciones de Sistemas no Lineales

Claudio Delrieux<sup>1,2</sup> y Mirta Padín<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Departamento de Ing. Eléctrica, Universidad Nacional del Sur, Bahía Blanca

<sup>2</sup>Departamento de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad Nacional de la Patagonia Austral, Río Gallegos

## 1. Introducción

La Visualización Científica es una de las tecnologías derivadas de las Ciencias de la Computación que actualmente está modificando la metodología de investigación científica. Por *visualización* se entiende el empleo de técnicas derivadas de la Computación Gráfica utilizadas para la representación de datos científicos de diverso tipo, los cuales pueden provenir de simulaciones, mediciones, etc. [2, 3]. Una de sus áreas de aplicación más importante es en el estudio de la dinámica de sistemas no lineales [1, 7]. En efecto, gran parte de los modelos matemáticos que describen los aspectos de la realidad que son objeto de estudio, se caracterizan por no tener soluciones analíticas cerradas. Las ecuaciones del modelo describen la evolución temporal de sus variables, pero la complejidad de las mismas impide una adecuada predicción del comportamiento del sistema a partir de una determinada condición inicial. Es decir, los sistemas no lineales, pese a seguir ecuaciones determinísticas, tienen un comportamiento complejo o caótico. Entonces, una mera simulación numérica es insuficiente, dado que el comportamiento cualitativo del sistema puede comprenderse adecuadamente a partir de la estructuración topológica de la evolución temporal de sus trayectorias

Dentro del estudio de los sistemas dinámicos parametrizados, uno de los problemas más significativos consiste en localizar, caracterizar y controlar la bifurcación de puntos críticos con respecto a modificaciones en los valores de los parámetros. Esto es especialmente importante en el control de bifurcaciones, donde se busca un mecanismo de realimentación para modificar las características del comportamiento del sistema cuando se varían los valores de los parámetros. En este trabajo se desarrollan técnicas que permiten representar visualmente estas características de los sistemas dinámicos [6, 8].

## 2. Oscilador con diodo túnel

Consideremos el circuito de un oscilador a diodo túnel descrito por las ecuaciones siguientes [4]:

$$\begin{aligned}x' &= y \\ y' &= f(\mu - y) - x\end{aligned}$$

donde  $\mu$  es el parámetro de bifurcación y la función  $f$  es una función no lineal de suavizado modelada con un polinomio cúbico

$$f(x) = \alpha_3 x^3 - \alpha_2 x^2 + \alpha_1 x$$

donde los coeficientes  $\alpha_i$  son parámetros auxiliares fijados arbitrariamente. Para valores

$$\alpha_3 = 0.333$$

$$\alpha_2 = 1.5$$

$$\alpha_1 = 2,$$

es posible observar que el sistema tiene un ciclo límite cuando  $1 < \mu < 2$  (ver Fig. 1), mientras que tiene un foco para valores de  $\mu$  menores que 1 o mayores que 2.

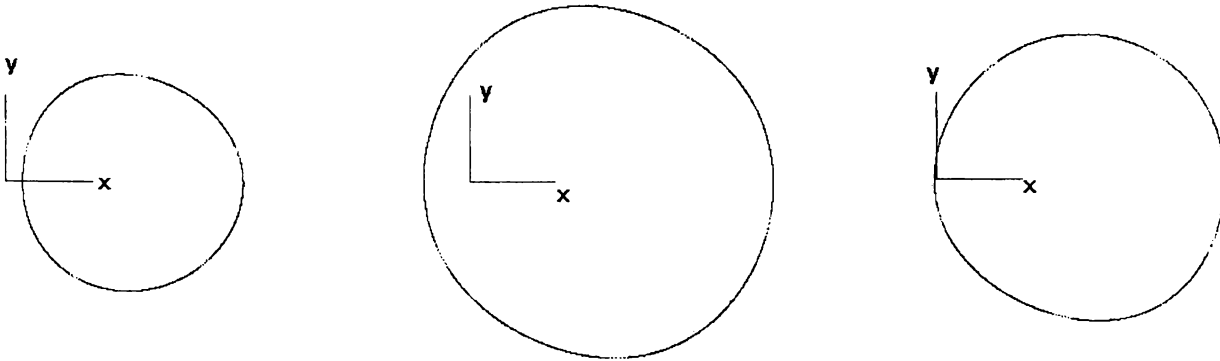


Figura 1. Ciclo límite del sistema para distintos valores de  $\mu=1.1$ ,  $\mu=1.5$  y  $\mu=1.8$ .

La importancia de conocer la topología del diagrama de fases para distintos valores del parámetro es que en las situaciones donde hay un ciclo límite el circuito está oscilando, y es posible diseñar una estrategia para controlar la amplitud de las oscilaciones [5].

### 3. Representación de un diagrama de fases completo

Para poder obtener una mejor comprensión del comportamiento del circuito en función de los distintos valores del parámetro, es que se pensó en representar en un sólido todas las trayectorias estables del sistema en función del parámetro. Esto implica un muestreo de cada ciclo límite, para valores de  $\mu$ . siguiendo una secuencia adecuada, de manera de poder obtener los vértices de una poligonización que represente el volumen deseado.

Los pasos seguidos para obtener dicha poligonización son:

1. Para cada valor de  $\mu$ . (por ejemplo, entre 0.8 y 2.2 con paso 0.05)
  - Elegir una semilla e iterar el sistema una cantidad de veces suficiente como para garantizar que el sistema llegó al atractor.
  - Continuar iterando el sistema hasta que la trayectoria pase por algún punto geoméricamente singular (por ejemplo  $x' = 0$  e  $y' < 0$ ).
  - Continuar iterando hasta encontrar una cantidad de puntos uniformemente distribuida sobre el atractor (por ejemplo, 30 puntos), almacenando cada uno en un arreglo.
2. Tomar cada par de arreglos correspondientes a valores de  $\mu$ . sucesivos, y enviar pares de puntos de cada arreglo formando dos triángulos.
3. Tomar la lista de triángulos y renderizarla.

Los resultados obtenidos pueden verse en la Fig. 2.

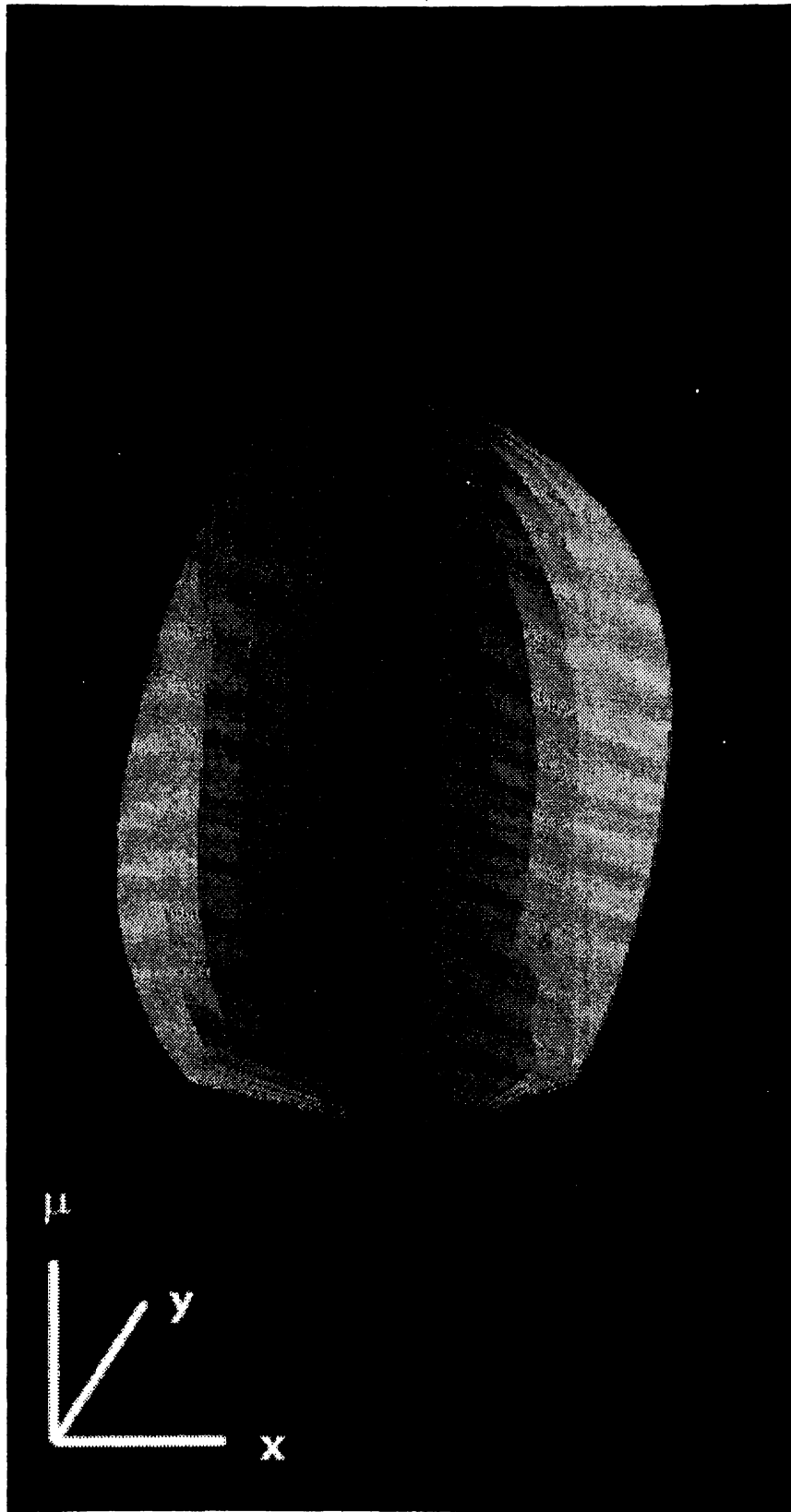


Figura 2. Volumen resultante de agrupar todos los diagramas de fase para distintos valores del parámetro

#### 4. Bibliografía

- [1] B. Cabral y L. Leedom. Imaging Vector Fields Using Line Integral Convolution. ACM Computer Graphics (SIGGRAPH Proceedings), 25(3):263--270, 1993.
- [2] Roger Crawfis, Nelson Max, y Barry Becker. Vector Field Visualization. IEEE Computer Graphics and Applications, 14(5):50--56, 1994.
- [3] S. Cunningham, J. R. Brown, y M. McGrath. Visualization in Science and Engineering Education. In G. M. Nielson y B. D. Shriver, editores, Visualization in Scientific Computing, págs. 48--58. IEEE Computer Society Press, 1990.
- [4] A. I. Mees. dynamics of Feedback Systems. New York: Wiley, 1981.
- [5] J. L. Moiola y M. S. Padín. Amplitude Control of Oscillations in Nonlinear Circuits. En NOLTA 99, International Symposium on Nonlinear Theory and Applications, Hawaii, USA, Nov. 1999. Págs 747-750.
- [6] R. Devaney. A First Course in Chaotic Dynamical Systems. Addison Wesley, MA, 1992.
- [7] Andrés Repetto y Claudio Delrieux. Visualización de Sistemas no Lineales y Caóticos. ICIE99, V International Congress on Information Engineering, FIUBA, Bs. As., Agosto de 1999. Págs. 744-758.
- [8] S. Strogatz. Nonlinear Dynamics and Chaos. Addison-Wesley, 1994.