

Representación Mejorada de Trayectorias en Sistemas no Lineales Tridimensionales

Gustavo Ramoscelli y Claudio Delrieux
Departamento de Ingeniería Eléctrica
Universidad Nacional del Sur - Alem 1253 - (8000) Bahía Blanca
claudio@acm.org

1. Introducción

La representación gráfica de espacios vectoriales y el análisis dinámico de sistemas complejos es una rama importante de la visualización. Aquí podemos considerar los campos vectoriales que resultan de simulaciones numéricas, datos experimentales, mediciones, y también sistemas dinámicos analíticamente desarrollados como modelos de determinados aspectos de la realidad. Lamentablemente, la representación gráfica “directa” de las trayectorias en el espacio de fases se puede realizar en sistemas de dos variables. Cuando los sistemas son de tres dimensiones se dificulta la comprensión visual tridimensional de la estructura del diagrama de fases, principalmente porque la representación debe ser proyectada al sistema de coordenadas 2D de la pantalla o impresora. En este trabajo proponemos una representación de las trayectorias de espacios vectoriales y diagramas de fases de sistemas dinámicos tridimensionales. La misma se basa en representar trayectorias en la forma de cilindros extruidos. Dichos cilindros pueden interactuar con el modelo de iluminación 3D, cosa que una trayectoria rectilínea, por ser 1D, no puede hacer. El cilindro extruido puede adquirir atributos gráficos que faciliten una rápida captación y reconstrucción mental de imágenes 3D proyectadas.

2. Representación tradicional de trayectorias

Uno de los procedimientos más usuales para facilitar la comprensión del comportamiento de un sistema dinámico consiste en representar gráficamente las trayectorias u órbitas. Esto se denomina análisis gráfico [7, 10]. Los métodos gráficos también han sido extensamente utilizados para el estudio y análisis de sistemas lineales y no lineales de dos o más dimensiones, especialmente para el estudio de su comportamiento dinámico en el espacio de fases. En este sentido, la herramienta gráfica es de gran utilidad en la caracterización del diagrama de fases de sistemas de gran complejidad, dado que permite localizar y caracterizar los puntos fijos y trayectorias cerradas y sus estabilidades asociadas. La representación por medio de convolución lineal de texturas permite mejorar sensiblemente la calidad del resultado. En este caso se utiliza una textura aleatoria a la cual se le agregan pequeños rectángulos coloreados, la cual es “derrapada” a lo largo de las trayectorias (ver [1, 6]). Lamentablemente, estas técnicas no pueden aplicarse a campos vectoriales tridimensionales con el mismo éxito. Podemos ver en la Figura 1 el resultado de graficar el atractor de Lorenz

$$\begin{aligned}x' &= -ax + ay \\y' &= bx - y - zx \\z' &= -cz + xy\end{aligned}$$

con los parámetros $a = 5$, $b = 15$ y $c = 1$, y utilizando como semilla para la trayectoria el valor $x = 1$, $y = 1$, $z = 1$ y un diferencial finito de 0,02. Si el sistema es desconocido, o se comporta de un modo inusual para ciertos parámetros, etc., entonces la utilidad del gráfico es dudosa o nula. La razón de esto radica en que gran parte de la información geométrica fue destruida en el proceso de la proyección perspectiva. De esa forma, si bien cada punto del diagrama de fases ocupa su lugar correspondiente en la pantalla, cada punto en la pantalla puede provenir de varios lugares diferentes en el espacio de fases, produciéndose una confusión. Este fenómeno no es en absoluto nuevo en la

Computación Gráfica. El estudio de las técnicas que permiten una adecuada representación de entidades 3D en una pantalla 2D comenzó en la década del 70, cuando se comenzaron a desarrollar las técnicas de representación con “realismo” [8, 11]. Entre ellas podemos citar como más importantes los modelos de iluminación y sombreado, y la eliminación de partes ocultas.

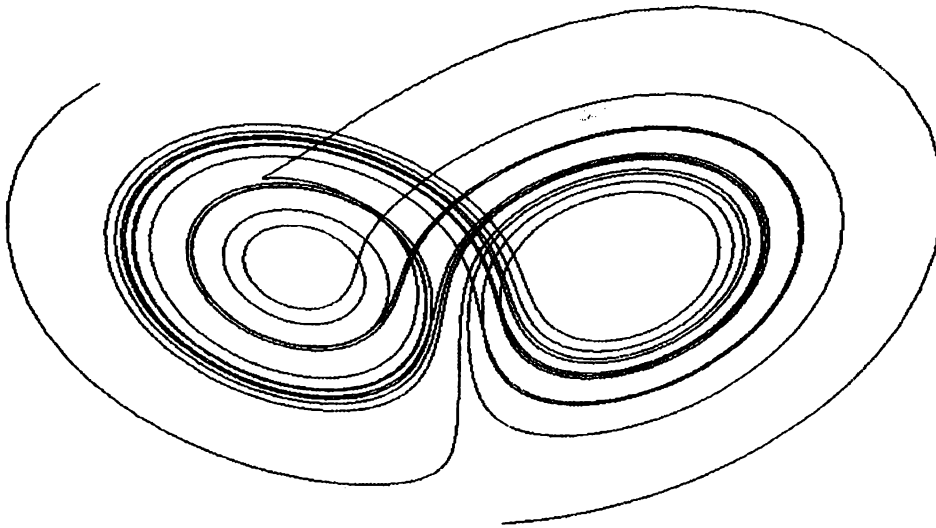


Figura 1. El atractor de Lorenz

3. Representación de trayectorias tridimensionales

La representación de trayectorias tridimensionales como cilindros extruidos parece una forma bastante directa y ventajosa de solucionar el problema mencionado en la Sección anterior, y aparentemente no ha recibido mucha atención en la literatura [2, 5, 9]. Una de las ventajas principales de este método es que sus parámetros geométricos son fácilmente obtenibles. Entre dos muestras sucesivas existe un vector, y por cada muestra pasa un plano normal a dicho vector. Por lo tanto, es posible considerar cada muestra como centro de un círculo de radio arbitrario, ubicado en cada uno de dichos planos (ver Figura 2(a)). Cada vector determina dos círculos paralelos que son en efecto las “tapas” de un cilindro de diámetro arbitrario. Cuando tenemos una sucesión de puntos como ocurre en una trayectoria, entonces es necesario considerar cada vector resultante de la diferencia entre dos muestras sucesivas, y su respectivo cilindro (ver Figura 2(b)).

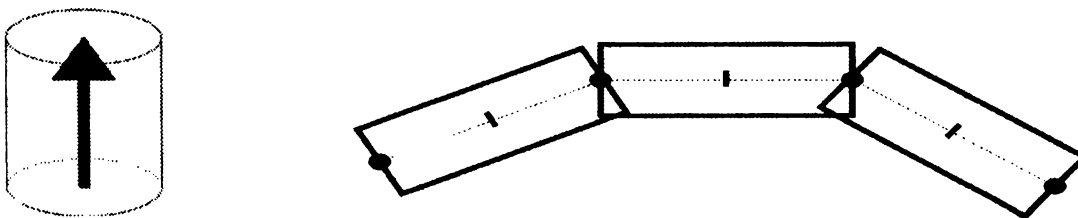


Figura 2: Transformación de una trayectoria en un cilindro extruido.

El resultado de dar este tratamiento al atractor de Lorenz mostrado más arriba puede verse en la Figura 3. En este caso se ha utilizado un modelo de iluminación estándar provisto por OpenGL. Es posible observar que la estructura geométrica del atractor se aprecia a simple vista con gran detalle, sobre todo si se la compara con la Figura 3.

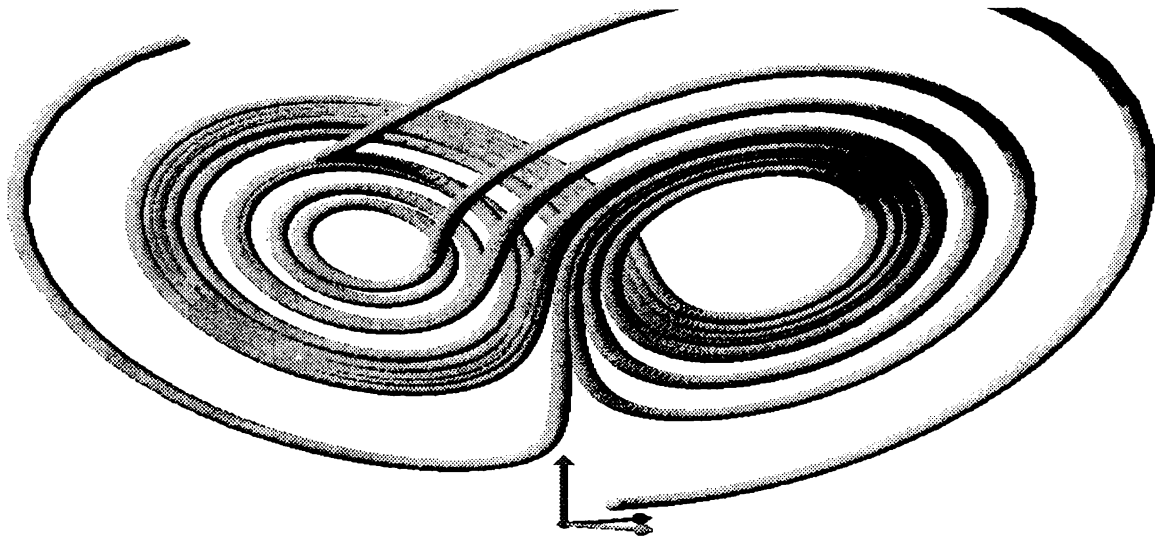


Figura 3. Representación mejorada del atractor de Lorenz.

Esta representación puede ser fácilmente mejorada si se utilizan los parámetros del modelo de iluminación. El uso de OpenGL permite manipular los aspectos gráficos en forma interactiva, pudiendo modularse además muchos otros aspectos del gráfico, como por ejemplo poder mostrar y ocultar el sistema de coordenadas, modificar las transformaciones, modificar los atributos del atractor, el modelo de iluminación, etc. De esa forma es posible obtener rápidamente un resultado que destaque algún aspecto a destacar en el atractor. A partir del modelo geométrico básico proveniente de cilindros extruídos, es posible agregar mejoras a la representación de las características del sistema dinámico. En la Figura 4, por ejemplo, se representa la velocidad paramétrica modificando el espesor de la trayectoria (cuanto más rápido, más delgada la trayectoria) y al mismo tiempo se representa la aceleración tangencial modificando el color de la trayectoria. De esa forma, distintos parámetros diferenciales del sistema dinámico se vuelven visualmente comprensibles.

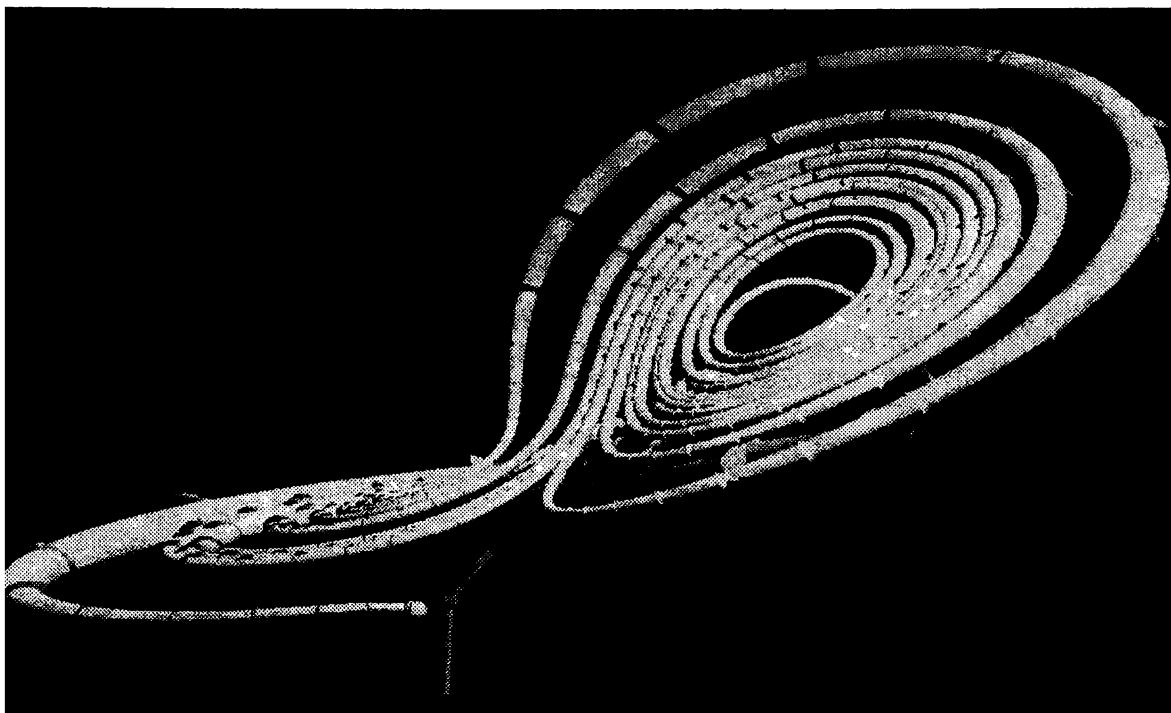


Figura 4. Representación de posición, velocidad y aceleración en el atractor.

Referencias

- [1] B. Cabral y L. Leedom. Imaging Vector Fields Using Line Integral Convolution. *ACM Computer Graphics (SIGGRAPH Proceedings)*, 25(3):263--270, 1993.
- [2] Roger Crawfis, Nelson Max, y Barry Becker. Vector Field Visualization. *IEEE Computer Graphics and Applications*, 14(5):50--56, 1994.
- [3] S. Cunningham, J. R. Brown, y M. McGrath. Visualization in Science and Engineering Education. In G. M. Nielson y B. D. Shriver, editores, *Visualization in Scientific Computing*, págs. 48--58. IEEE Computer Society Press, 1990.
- [4] T. A. Defanti, M. D. Brown, y B. H. McCormick. Visualization: Expanding Scientific and Engineering Research Opportunities. In G. M. Nielson y B. D. Shriver, editores, *Visualization in Scientific Computing*, págs 32--47. IEEE Computer Society Press, Los Alamitos, CA, 1990.
- [5] T. Delmarcelle y L. Hesselink. Visualizing Second-Order Tensor Fields with Hypersstreamlines. *IEEE Computer Graphics and Applications*, 13(4):25--33, 1993.
- [6] Andrés Repetto y Claudio Delrieux. Visualización de Sistemas no Lineales y Caóticos. ICIE99, V International Congress on Information Engineering, FIUBA, Bs. As., Agosto de 1999. Págs. 744-758.
- [7] R. Devaney. *A First Course in Chaotic Dynamical Systems*. Addison Wesley, MA, 1992.
- [8] J. Foley, A. Van Dam, H. Feiner y R. Huges, *Fundamentals of Interactive Computer Graphics* (segunda edición mejorada). Addison-Wesley, Reading, Ma. 1992.
- [9] James Helman y Lambertus Hesselink. Visualizing Vector Field Topology in Fluid Flows. *IEEE Computer Graphics and Applications*, 11(3):36--46, 1991.
- [10] S. Strogatz. *Nonlinear Dynamics and Chaos*. Addison-Wesley, 1994.
- [11] J. Watt y M. Watt. *Advanced Animation and Rendering Techniques: Theory and Practice*. Addison-Wesley, Reading, MA, 1993.