

# Compresión de imágenes con wavelets separables y wavelets no-separables

Ana M.C. Ruedin,  
Departamento de Computación,  
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales,  
Universidad de Buenos Aires  
anita@dc.uba.ar

Las wavelets son una herramienta idónea para la compresión de imágenes. Esto es porque aplicando la transformada wavelet se obtiene una representación esparsa de la imagen - la mayoría de los coeficientes son nulos o cercanos a 0. Eliminando los coeficientes pequeños se suprime información que no es distinguible para el ojo humano; se logra una alta tasa de compresión manteniendo la calidad de la imagen reconstruida. Las wavelets pueden ser separables y no-separables. Estas últimas utilizan un submuestreo o decimación diagonal. Explicaremos brevemente la teoría, que es un tanto compleja. Analizaremos con un ejemplo las ventajas de este tipo de submuestreo, y veremos como mejora la calidad de la imagen, utilizando la misma wavelet y para una misma tasa de compresión prefijada.

## 1. Preliminares: wavelets en una dimensión

Una wavelet es una función asociada a una función de escala  $\Phi(x)$ . Escalando y trasladando esta función (traslaciones enteras), se obtiene una base completa del espacio de funciones de cuadrado integrable.

Llamaremos  $V_0$  al espacio generado por  $\Phi(x)$  y por todas sus traslaciones enteras, y  $V_j$  al espacio generado por  $\{\Phi(2^j x - k)\}_k$ .

Además  $\Phi(x)$  debe verificar una ecuación de *dilatación* o *refinamiento*:

$$\Phi(x) = \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \Phi(2x - k)$$

lo cual asegura que los  $V_j$ , llamados espacios de aproximación, sean espacios anidados.

$$\dots \subset V_{-2} \subset V_{-1} \subset V_0 \subset V_1 \subset \dots$$

Elegiremos la función de escala de manera que sea continua, tenga soporte compacto y tal que  $\{\Phi(x - k)\}_k$  sea una familia ortonormal.

Esto último implica que los coeficientes  $h_k$  verifican:  $\sum_k h_k h_{k+2j} = \delta_{j,0}$  para cada  $j \in \mathbb{Z}$ .

Para cada índice  $j$ ,  $W_j$  es el complemento ortogonal de  $V_j$  en  $V_{j+1}$ :  $V_{j+1} = V_j \oplus W_j$

Los espacios  $W_j$  son generados por las traslaciones enteras de una función  $\Psi(x)$  -llamada *wavelet*- y de versiones escaladas de  $\Psi(x)$ .

Dada una función de escala  $\Phi(x)$ , su wavelet asociada se calcula en forma directa.

$$\Psi(x) = \sum_k g_k \Phi(2x - k) \quad g_k = (-1)^k h_{1-k}$$

En aplicaciones prácticas de procesamiento de señales, el espacio  $V_0$  representa la señal  $f(x) = f_0(x)$  en su mayor nivel de resolución. Calculando las proyecciones  $f_{-1}(x), f_{-2}(x), \dots$  de la señal en los espacios  $V_{-1}, V_{-2}, \dots$  se obtienen aproximaciones de menor resolución, mientras que los detalles omitidos  $r_j(x)$  quedan capturados en los espacios  $W_j$ .

Así una señal se descompone en su aproximación más burda  $f_{-L}(x)$  y la suma de todos los componentes de detalle  $r_j(x)$  a escalas diferentes:

$$f = f_0 = f_{-1} + r_{-1} = f_{-2} + r_{-2} + r_{-1} = \dots = f_{-L} + \sum_{j=-L}^{-1} r_j$$

Escribiendo cada componente en la base de su espacio respectivo, se tiene

$$f(x) = \sum_k c_k^{(-L)} \Phi_{-L,k}(x) + \sum_{j=-L}^{-1} \sum_k d_k^{(j)} \Psi_{j,k}(x)$$

donde  $\Phi_{j,k}(x) = 2^{j/2} \Phi(2^j x - k)$  ;  $\Psi_{j,k}(x) = 2^{j/2} \Psi(2^j x - k)$

La transformada wavelet rápida da una manera eficiente de calcular los coeficientes  $c_k^{(-L)}$  y  $d_k^{(-1)}, d_k^{(-2)}, \dots, d_k^{(-L)}$  a partir de los coeficientes  $c_k^{(0)}$  de la señal. La buena localización tiempo-frecuencia de las wavelets hacen que sean herramientas aptas para la compresión de señales, aplicando un umbral a los coeficientes.

En las figuras 1 y 2 se observan ejemplos de funciones de escala y su wavelet asociada: de Haar ( Fig 1) y de Daubechies 4 -llamada así porque tiene 4 coeficientes en la ecuación de dilatación  $[h_0 h_1 h_2 h_3]$  (fig. 2). En este último caso, no se tiene la forma analítica de  $\Phi(x)$  ni de  $\Psi(x)$  : ambas quedan determinadas por los  $h_k$ .

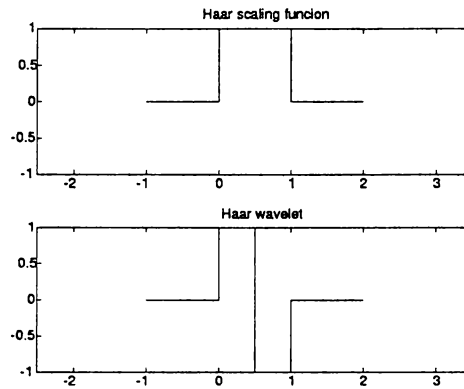


Fig 1

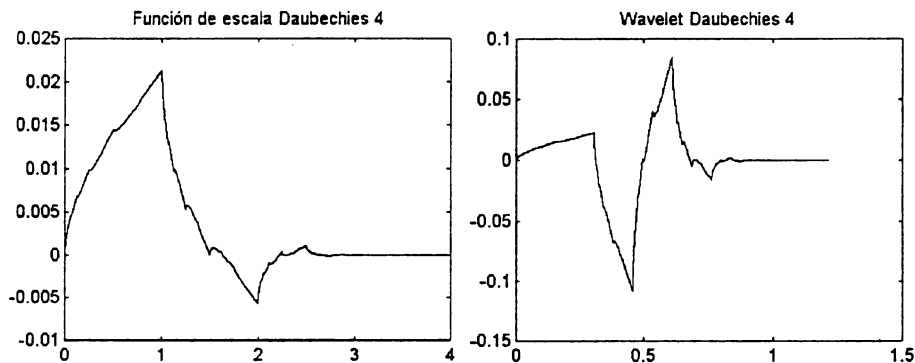
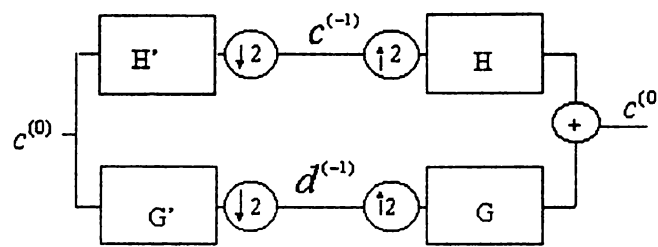


Fig 2



Esquema de análisis y reconstrucción

Los coeficientes de aproximación  $c^{(-1)}$  de la señal se calculan según el esquema anterior, mediante una convolución con el filtro  $H' = [...h_3h_2h_1h_0]$  seguida de un submuestreo, mientras que los coeficientes de detalle  $d^{(-1)}$  se obtienen de un filtrado con  $G'$  seguido de un submuestreo. Se itera este proceso la cantidad de pasos deseada. Para reconstruir la señal inicial a partir de los coeficientes  $c^{(-1)}$  y  $d^{(-1)}$  se utiliza la parte derecha del esquema: sobremuestreo, filtrado y suma.

En el submuestreo (o decimación)  $y = x \downarrow 2$ , que se define como  $y_k = x_{2k}$ , se eliminan las componentes impares de la señal filtrada, conservando las pares.

En el sobremuestreo se expande la señal y se rellenan con ceros los coeficientes impares:

$$y = x \uparrow 2 \quad \hat{y}_k = \begin{cases} x(\frac{k}{2}) & \text{si } k \text{ es par} \\ 0 & \text{si } k \text{ es impar} \end{cases}$$

En el caso Daubechies 4, el filtro  $H$  es:

$$H = [h_0h_1h_2h_3] = \left[ \frac{1+\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}, \frac{3+\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}, \frac{3-\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}, \frac{1-\sqrt{3}}{4\sqrt{2}} \right]$$

A partir de  $H$  se obtiene  $G$ :

$$G = [g_{-2}g_{-1}g_0g_1] = [h_3, -h_2, h_1, -h_0]$$

y los filtros

$$H' = [h_3h_2h_1h_0]$$

$$G' = [g_1, g_0, g_{-1}, g_{-2}]$$

## 2. Wavelets en 2 dimensiones:

### 2.1 Wavelets separables

La manera más fácil de realizar la compresión de una imagen es aplicando la transformada wavelet de una dimensión primero a las filas y luego a las columnas de la imagen. Esto equivale a tomar el producto tensorial de los espacios  $V_j$  y  $W_j$ , y se obtiene una función de escala  $\Phi(x)\Phi(y)$  y 3 wavelets asociadas:  $\Psi(x)\Phi(y)$ ,  $\Phi(x)\Psi(y)$ ,  $\Psi(x)\Psi(y)$ . Las primeras 2 wavelets capturan los detalles verticales y horizontales de la imagen en la escala correspondiente.

En la figura 3 tenemos la imagen original de un teléfono, y la misma imagen representada en diferentes escalas en espacios diferentes.

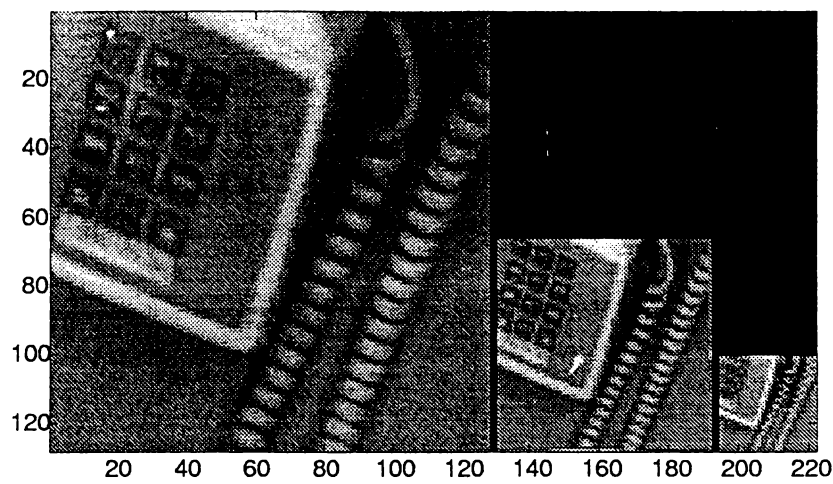


Fig.3

En la figura 4 tenemos la transformada wavelet (un paso) Cada subimagen representa los coeficientes de la imagen original en cada una de las 4 bases (función de escala y wavelets con sus corrimientos enteros). Nota: Los coeficientes de detalle son muy pequeños; para poder observarlos se ajustó el brillo de cada subimagen

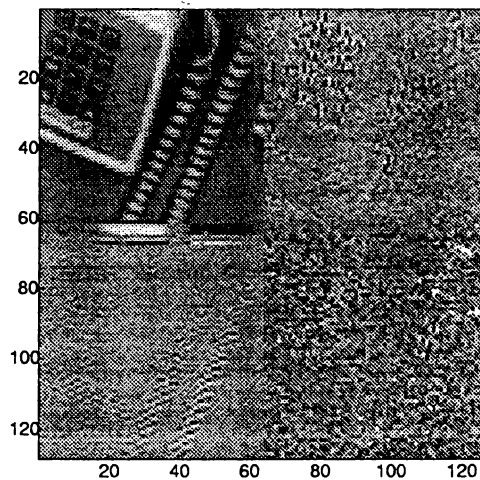


Fig 4

Para nuestra imagen de prueba, se eligió el filtro de Daubechies 4. La transformada wavelet se aplicó (por filas y por columnas ) bajando 3 niveles (3 pasos), y se conservaron el 5% de los coeficientes, eligiendo los mayores en valor absoluto. En la figura 5 tenemos la imagen reconstruida, con un error MSE=156.15. Los errores más notorios están orientados horizontalmente y verticalmente. Volveremos más adelante sobre este resultado.

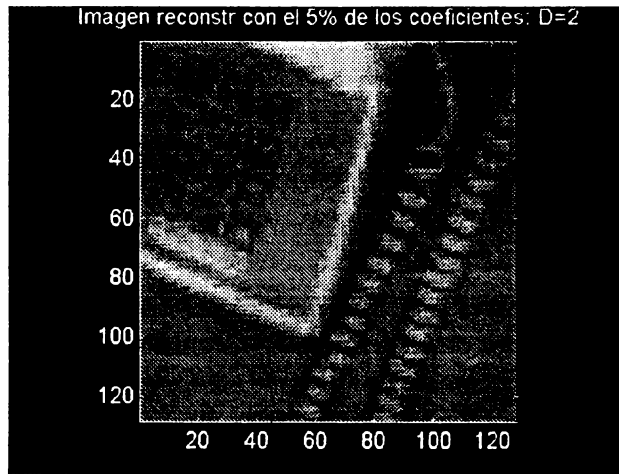


Fig 5

## 2.2 Wavelets (y funciones de escala) no separables

Una manera más general para tratamiento de imágenes es considerar que tanto la función de escala como la wavelet son funciones de 2 variables:

$$\Phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

La ecuación de dilatación es  $\Phi(x) = \sqrt{|\det(D)|} \sum_{k \in \Lambda \subset \mathbb{Z}^2} h_k \Phi(Dx - k)$

y el factor de dilatación 2 es reemplazado por  $D$ , una *matriz de dilatación*, cuyos coeficientes son enteros y cuyos autovalores verifican  $|\lambda_k| > 1$ .

Elegimos  $D = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ . Esta matriz es una simetría o reflexión del plano respecto de

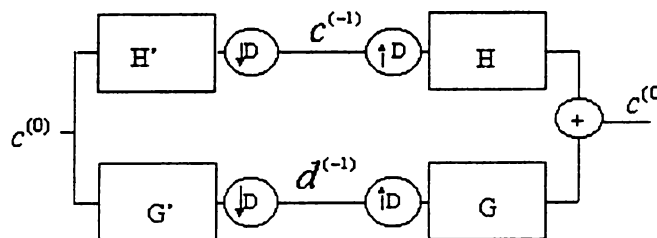
una recta, seguida de una expansión en  $\sqrt{2}$ . El número de wavelets asociadas es igual a  $|\det(D)| - 1 = 1$ , lo cual representa una ventaja con respecto al caso anterior: habrá una sola matriz con coeficientes de detalle, y no 3.

Si la función de escala y sus corrimientos enteros  $\{\Phi(x - k)\}_k$  forman una familia ortonormal, entonces los coeficientes  $h_k$  verifican la condición de ortogonalidad:

$$\sum_{k \in \Lambda \subset \mathbb{Z}^2} h_k h_{k+Dj} = \delta_{j,0} \text{ para cada } j \in \mathbb{Z}^2.$$

Cohen, Daubechies, Kovacevic y Vetterli han propuesto varios ejemplos de filtros bidimensionales que dan origen a funciones de escala y wavelets no-separables. En particular, el filtro unidimensional de Daubechies 4 ya mencionado verifica la condición de ortogonalidad. Es por ello que lo hemos elegido para aplicarlo en el contexto de ambas teorías, y poder comparar los resultados.

El esquema de cálculo de los coeficientes es igual al anterior: primero hay una convolución con un filtro seguida de un submuestreo para cada banda.



El submuestreo, así como el sobremuestreo, en este caso son inducidos por la matriz de

dilatación  $D$ :

Submuestreo:  $y = x \downarrow D$   $y(k) = x(Dk)$  Aquí se eliminan componentes alternativamente en una grilla diagonal, es decir, se suprimen los casilleros negros en el tablero de ajedrez.

$$\text{Sobremuestreo: } y = x \uparrow D \quad y(k) = \begin{cases} x(r) & \text{si } k = Dr \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

En la figura 6 se observa las 2 matrices de coeficientes de aproximación y de detalle  $c^{(-1)}$  y  $d^{(-1)}$ : se obtuvieron a partir de un filtrado de la imagen original con  $H'$  y  $G'$ , y de un submuestreo posterior con la matriz  $D$ : como resultado de esta última operación las imágenes quedan espejadas.

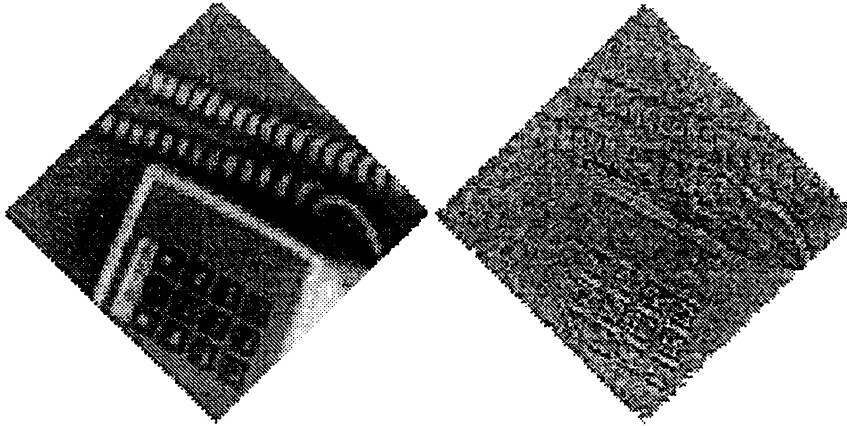


Fig 6

Si se continúa con el proceso y se realiza otro paso, se obtienen ahora 2 matrices orientadas normalmente, cuyos lados miden la mitad del lado de la matriz original.

Si se realiza la reconstrucción a partir del primer paso, los coeficientes de aproximación  $c^{(-1)}$  se deben sobremuestrear con la matriz  $D$ . Esto se aprecia en la figura 7.

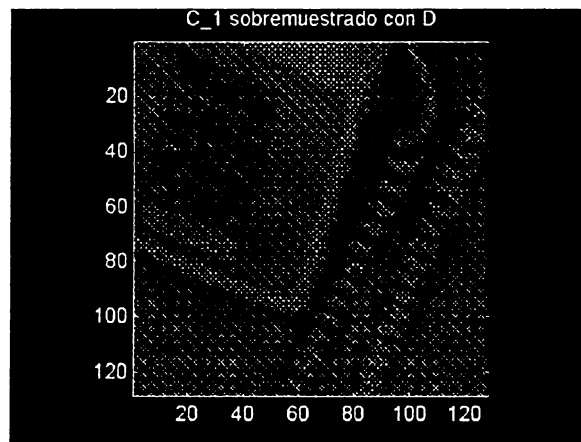


Fig 7

La imagen es espejada -vuelve a su orientación original, aumenta de tamaño y aparecen de color negro los ceros que se insertaron en la grilla diagonal. ( Si se hiciera un submuestreo de esta

imagen, los ceros de la grilla diagonal se suprimirían).

Para la imagen de prueba, se utilizó el mismo filtro Daubechies 4. La transformada wavelet no-separable se aplicó (filtrando una vez, por filas ) bajando 6 niveles (6 pasos), y se conservaron el 5% de los coeficientes, eligiendo los mayores en valor absoluto. En la figura 8 tenemos la imagen reconstruida, con un error MSE=13.44.

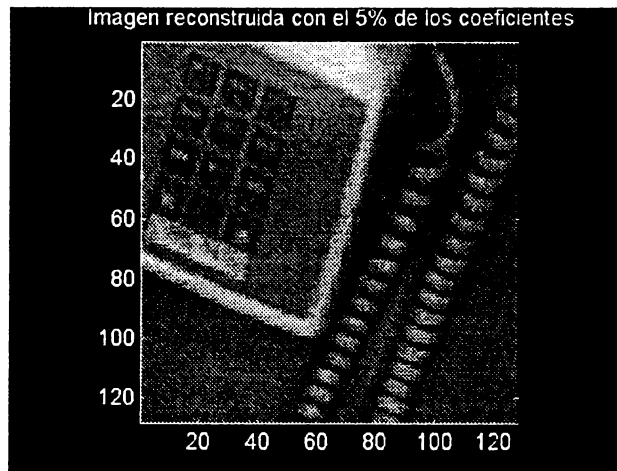


Fig 8

Si se comparan las figuras 5 y 8, es evidente la calidad superior de la última imagen, y el error MSE es mucho menor.

### 3. Conclusiones

Se realizó la compresión de una imagen con transformada wavelet ortogonal. Se aplicó el mismo filtro a una imagen de prueba, en un caso con submuestreo ( y sobremuestreo ) de a 2 , y en el otro con submuestreo diagonal, según la matriz  $D$ . En ambos casos se realizó la cantidad de pasos necesaria hasta que la imagen más pequeña tuvo los lados iguales a  $\frac{1}{8}$  de los lados de la imagen original. En los 2 casos se mantuvo la misma cantidad de coeficientes - lo cual, sin entrar en problemas de cuantización y codificación por entropía, garantiza a priori una tasa de compresión similar. La diferencia entre las imágenes reconstruidas es notable, siendo mejor la que se obtiene a partir del submuestreo diagonal. Intuitivamente se ve que si se introduce un error en la transformada debido a la compresión, se pueden rescatar mejor las propiedades de la imagen si se realizó un submuestreo diagonal que si se eliminaron todas las filas y las columnas impares.

El submuestreo diagonal tiene desventajas que vale la pena mencionar: éstas son una mayor complejidad algorítmica; más pasos a realizar, y la dificultad de almacenar los datos y programar la transformada para que el espacio que ocupa pueda competir con el de la wavelet separable. Sin embargo, ante la calidad visual de la imagen reconstruida lograda en este ejemplo, parece razonable orientar trabajos futuros en tratar de superar estas desventajas.

#### . Bibliografía:

- A. Cohen and I. Daubechies: Non-separable bidimensional wavelet bases, revista Matemática Iberoamericana vol 9 N 1, 1993
- I. Daubechies: "Ten lectures on wavelets " CBMS Lecture notes 61 SIAM, 1992.
- A. Fournier, M. Cohen, W. Sweldens, P. Shroder, et al. : Wavelets and their applications in Computer Graphics, SIGGRAPH '95 Course Notes.
- S. Mallat: A theory of multiresolution signal decomposition: The Wavelet representation.

IEEE Trans. Pattern Analysis Machine Intell., Vol. PAMI-11, No 7, 1989.

-J. Kovacevic and M. Vetterli, Nonseparable multidimensional perfect reconstruction filter banks and wavelet bases for  $\mathbb{R}^n$ , IEEE Transactions on Information Theory, vol 38 n0 2, March 1992.

- Reissell, Leena-Majja : Multiresolution and Wavelets, SIGGRAPH '95 Course Notes.

- G. Strang and T. Nguyen: Wavelets and Filter Banks. Wellesley-Cambridge Press, 1996.

-G. Strang :Wavelets and Dilation Equations. Siam Review 31,1989, pp613-627