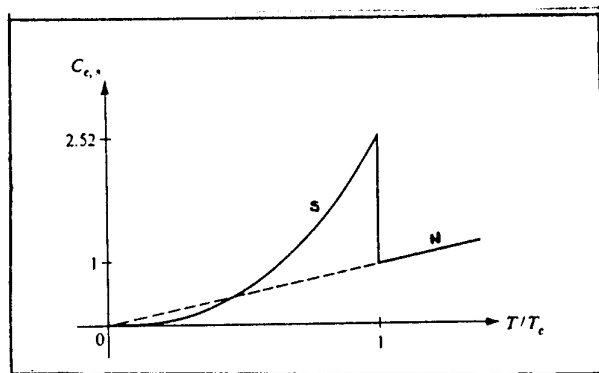


## Apendice B

Un fenómeno bien conocido de la Física del estado sólido, es el de la superconductividad. Enfriando una muestra de material por debajo de una cierta temperatura crítica, éste adquiere propiedades singulares como la anulación de su resistencia eléctrica.

La comparación del calor específico de superconductores con el correspondiente a un material normal se muestra esquemáticamente en la figura:



Integrando el calor específico respecto a la temperatura, puede verse que el material superconductor posee una energía media

más baja que el material normal.

Para explicar esta anomalía en el calor específico del superconductor, se propuso la existencia de un "gap" de energía entre el estado fundamental del sistema y su primer estado excitado. De acuerdo con eso, en lugar de tener una variación cuadrática para la energía, esta variará como  $e^{-\Delta/T}$ , donde " $\Delta$ " denota el gap de energía. La confirmación de la existencia de este gap surge de experiencias con micro-ondas. La energía necesaria para excitar el material a través del gap puede medirse como función de la temperatura, observándose una disminución de éste a medida que la temperatura aumenta.

El efecto de superconductividad está relacionado con la interacción entre los electrones y los fonones de la red. Los fonones son responsables de la modificación de la energía de los electrones, y de la modificación de la interacción entre los electrones, de manera que ésta se vuelve atractiva bajo ciertas circunstancias. El Hamiltoniano que tiene en cuenta tales efectos es:

$$H = \sum_{\vec{p}, \alpha} (p^2/2m) a_{\vec{p}, \alpha}^\dagger a_{\vec{p}, \alpha} - (g/V) \sum_{\vec{p}, \vec{p}'} a_{\vec{p}', +}^\dagger a_{-\vec{p}', -}^\dagger a_{-\vec{p}, -} a_{\vec{p}, +} \quad (B-1)$$

donde "g" es la constante de acoplamiento, y "V" el volumen de la muestra. Con  $\alpha$  rotulamos el spin, y con  $\vec{p}$  el momento del electrón.

Para resolver el problema de la diagonalización de (B-1) pasamos a una nueva base de operadores fermiónicos:

$$\begin{bmatrix} \alpha_{p,+}^\dagger \\ \alpha_{-p,-} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_p & -V_p \\ V_p & U_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{p,+}^\dagger \\ a_{-p,-} \end{bmatrix} \quad (\text{B-2})$$

con la condición:

$$U_p^2 + V_p^2 = 1 \quad (\text{B-3})$$

Trabajando con  $H' = H - \lambda N$ , al igual que en el Apéndice A, y pasando a la nueva base resulta:

$$\begin{aligned} H' = & 2 \sum_p \eta_p V_p + \sum_p \eta_p (U_p - V_p) (\alpha_{p,+}^\dagger \alpha_{p,+} + \alpha_{-p,-}^\dagger \alpha_{-p,-}) + \\ & + \sum_p \eta_p U_p V_p (\alpha_{p,+}^\dagger \alpha_{-p,+}^\dagger + \alpha_{-p,-} \alpha_{p,+}) - (g/V) \sum_{p',p} B_{p',p}^\dagger B_p \end{aligned} \quad (\text{B-4-a})$$

$$B_p = U_p^2 \alpha_{p,-p,-} \alpha_{p,+} - V_p^2 \alpha_{p,+}^\dagger \alpha_{-p,+}^\dagger + U_p V_p (-\alpha_{p,+}^\dagger \alpha_{p,+} + \alpha_{-p,-} \alpha_{p,-}^\dagger) \quad (\text{B-4-b})$$

La minimización de  $\langle H' \rangle$  respecto de " $u_p$ ", junto con la condición (B-3) permite determinar  $u_p$  y  $v_p$ .

Podemos definir el gap de energía  $\Delta$ , como:

$$\Delta = (g/V) \sum_p U_p V_p (1 - n_{p,+} + n_{p,-}) \quad (\text{B-5})$$

donde  $n_{\vec{p},\alpha}$  es el número de ocupación térmico del sistema.

La entropía para este sistema es:

$$S = - \sum_{\vec{p},\alpha} [n_{\vec{p},\alpha} \ln(n_{\vec{p},\alpha}) + (1-n_{\vec{p},\alpha}) \ln(1-n_{\vec{p},\alpha})] \quad (\text{B-6})$$

Luego de este procedimiento las expresiones obtenidas resultan similares a las calculadas en el Capítulo I para un sistema finito:

$$2U_p^2 = ( 1 + (\epsilon_p - \lambda) / (\Delta^2 + (\epsilon_p - \lambda)^2)^{1/2} ) \quad (\text{B-7-a})$$

$$2V_p^2 = ( 1 - (\epsilon_p - \lambda) / (\Delta^2 + (\epsilon_p - \lambda)^2)^{1/2} ) \quad (\text{B-7-b})$$

Las expresiones (B-7) colocadas en (B-5) llevan a:

$$(g/2V) \sum_p (1 - n_{\vec{p},+} - n_{\vec{p},-}) / (\Delta^2 + (\epsilon_p - \lambda)^2)^{1/2} = 1 \quad (\text{B-8})$$

Para situaciones de equilibrio, los números de ocupación de cuasipartículas son independientes del spin y responden a una estadística de Fermi-Dirac, es decir:

$$n_{\vec{p},+} = n_{\vec{p},-} = ( 1 + \exp (E_p \beta) )^{-1} \quad (\text{B-9})$$

siendo:

$$E_p = (\Delta^2 + (\epsilon_p - \lambda)^2)^{1/2} \quad (\text{B-10})$$

Pasando de la suma a la integral en (B-8), resulta:

$$(g/2) \int_0^{p_{\max}} \frac{(1 - 2n_p)}{E_p} \frac{d^3 p}{(2\pi\hbar)^3} = 1 \quad (B-11)$$

Como los electrones responsables del efecto superconductor son aquellos próximos al nivel de Fermi, Bardeen, Cooper y Shrieffer propusieron la introducción de una frecuencia de corte  $\omega_{cr}$ , de manera que la integral (B-11) puede escribirse como:

$$(g/2) \int_0^{\hbar\omega_c} \text{tanh}(E/2T) \frac{d\varepsilon}{(2E)} = 1 \quad (B-12)$$

Trabajando con esta expresión a  $T=0$  MeV obtenemos:

$$\Delta_0 = 0.64 \hbar\omega_c \exp(-1/g\nu_F) \quad (B-13)$$

donde  $\varepsilon$  es una energía próxima al nivel de Fermi,  $\lambda$ , y  $\nu_F$  es la densidad de estados cerca del nivel de Fermi ( $\nu_F = mp_F/2\pi^2 \hbar^3$ ).

Es fácil ver que la menor energía de excitación del sistema es  $\Delta$ , correspondiente al caso  $\vec{p} = \vec{p}_F$ . En otras palabras los estados excitados del sistema están separados del estado fundamental por un gap de energía, pero como las cuasipartículas aparecen de a pares este gap será "2 $\Delta$ ".

La magnitud del gap,  $\Delta$ , depende de la temperatura. A partir de (B-12) puede inferirse que para temperaturas bajas:

$$\Delta = \Delta_0 \left( 1 - (2\pi T/\Delta_0)^{1/2} \exp(-\Delta_0/T) \right) \quad (\text{B-14})$$

Cerca del punto de transición  $\Delta$  es pequeño, pudiéndose probar que se anula a una temperatura,  $T_c$ , del orden de:

$$T_c \cong 0.57 \Delta_0$$

Asimismo, cerca de esa temperatura podemos aproximar el gap de energía como:

$$\Delta = 3.06 T_c \left( 1 - T/T_c \right)^{1/2} \quad (\text{B-15})$$

Un cálculo importante, es la diferencia de la energía libre de la fase superconductor respecto de la fase normal:

$$F_s - F_n = -V \frac{2m p_F T^2}{7\zeta(3)\hbar^3} \left( 1 - \frac{T}{T_c} \right) \quad (\text{B-16})$$

de manera que la diferencia en la entropía de ambas fases es:

$$S_s - S_n = -V \frac{4m p_F T}{7\zeta(3)\hbar^3} \left( 1 - \frac{T}{T_c} \right) \quad (\text{B-17})$$

y finalmente, cuando  $T = T_c$ , el salto en el calor específico es:

$$C_s - C_n = V \frac{4m p_F T_c}{7\zeta(3)\hbar^3} \quad (\text{B-18})$$

Es decir que la teoría propuesta explica la existencia de la discontinuidad en el calor específico, siendo  $C_p > C_n$ .

De manera que a medida que la temperatura se aproxima a  $T_c$ , los procesos de interacción entre cuasipartículas se vuelven importantes, y son responsables de la ocurrencia de singularidades en las cantidades termodinámicas. La continuidad de la entropía en la temperatura crítica, y la discontinuidad del calor específico, implica que tal transición es de segundo orden.