

**CAPITULO III**

**Estudio de la dependencia térmica del  
Parámetro de Densidad de Niveles.**

## Introducción

El rápido aumento del número de niveles con la energía de excitación, es una característica general de un sistema con un elevado número de grados de libertad. En el caso de un núcleo, al aumentar la energía de excitación el espaciamiento entre el número de niveles se reduce, y la naturaleza de las excitaciones se torna complicada<sup>45,46)</sup>. La existencia de estos niveles se pone de manifiesto al analizar los datos provenientes de experiencias en que se excitan resonancias de neutrones; en ese caso, el espaciamiento promedio entre niveles es  $10^6$  veces menor que en el de partícula independiente, y sus anchos son también  $10^6$  veces menores que los correspondientes a excitaciones de partícula independiente<sup>47)</sup>. El espectro de evaporación de nucleones también brinda información sobre las densidades nucleares, pero con algunas limitaciones debido a las incertezas asociadas con la teoría de reacciones<sup>48,49)</sup>. Hay, además, información experimental proveniente del estudio de resonancias de protones para núcleos livianos y medios. Como lo confirman estas observaciones experimentales resulta útil el empleo de la descripción estadística propuesta en la Introducción General de este trabajo; siendo la densidad de niveles del sistema, la cantidad relevante para describir las propiedades estadísticas del núcleo en función de sus constantes de movimiento (energía de excitación, número de partículas, momento angular, paridad, etc.).

En primera aproximación, el núcleo ha sido representado como

un gas de fermiones sin interacción confinado al volumen nuclear, resultando, en el caso de niveles equidistantes y no degenerados <sup>1,50,51)</sup>, una densidad de estados que varía exponencialmente con la energía de excitación E:

$$\rho(E) \propto \exp(2\sqrt{aE}) / E^{5/4} a^{1/4}$$

donde "a=  $\pi^2 g/6$ " es el llamado parámetro de densidad de niveles nuclear, siendo "g" la densidad de partícula independiente. La dependencia explícita de la densidad de estados con la energía de excitación, surge relacionando ésta última con la temperatura a través de la conocida ley de variación para un sistema de fermiones:

$$E = a T^2$$

en este caso "a" toma un valor constante, que ha sido parametrizado, a partir de datos experimentales, como  $A/8 \text{ MeV}^{-1}$ , representando A el número de nucleones en el núcleo.

Sin embargo a bajas temperaturas el núcleo no puede ser considerado como un sistema de fermiones sin interacción. Basta recordar que en núcleos superfluidos, la interacción de apareamiento juega un papel esencial en la comprensión de las propiedades relevantes del sistema, como vimos en el Capítulo I. Así mismo los modos vibracionales colectivos son dominantes en el espectro de excitación de bajas temperaturas, tanto en núcleos superfluidos como en núcleos normales, esto lo hemos estudiado en

el Capítulo II. Teniendo en cuenta esas consideraciones, resulta evidente la necesidad de introducir modificaciones a la contribución fermiónica al parámetro de densidad de niveles debido a la interacción de apareamiento nuclear en núcleos superfluidos, así como también destacar la importancia de la contribución bosónica a éste, tanto en núcleos normales como superfluidos. Con respecto a la contribución bosónica al parámetro de densidad de niveles, nos interesa estudiar también la competencia entre los canales de p-h y los canales de p-p y h-h como función de la temperatura<sup>20)</sup>. Estos dos últimos puntos resultan de particular interés ya que hasta el presente ha sido muy poco lo que se ha dicho al respecto<sup>52)</sup>.

Este capítulo está organizado de la siguiente forma: en la primera parte se hace una revisión de los aspectos teóricos del problema, estudiamos la contribución de los grados de libertad fermiónicos y de los grados de libertad bosónicos al parámetro de densidad de niveles nuclear. En la segunda parte se discute la importancia en la descripción del parámetro de densidad de niveles bosónico de los canales de p-p y h-h en relación al canal de p-h. En la tercera parte se analizan los resultados obtenidos al aplicar el formalismo en un núcleo superfluido y en un núcleo normal. Finalizamos el capítulo con las conclusiones a los problemas planteados. El material presentado en este trabajo forma parte de un trabajo en preparación<sup>53)</sup>.

## 1-Formalismo Teorico

El problema de la densidad de niveles nucleares, se reduce a determinar el número de modos en que los nucleones pueden distribuirse entre los niveles de partícula independiente para una energía fija del sistema. Esto sugiere un problema combinatorio, pero los cálculos solo podrían hacerse con grandes computadoras<sup>54)</sup> y para energías de excitación bajas, debido a los valores extremadamente grandes que puede alcanzar la densidad de niveles, en especial en núcleos pesados. Por este motivo el método más usado en el cálculo de densidades nucleares, es el método de la función de partición, una herramienta bien conocida en Mecánica Estadística<sup>15-47)</sup>.

En lo que sigue trataremos de describir los aspectos más importantes relacionados con la expresión para la densidad de estados nucleares obtenida a través del empleo de técnicas de la Mecánica Estadística.

Supongamos un núcleo definido por su número de neutrones y protones,  $N$  y  $Z$  respectivamente, y por su energía  $E$ . Las propiedades estadísticas del sistema están descritas por la gran función de partición:

$$e^{-\beta\Omega} = \sum_{N', Z', E'} \exp(\alpha_N N' + \alpha_Z Z' - \beta E') \quad (3.1-1)$$

donde  $\alpha_N$ ,  $\alpha_Z$  y  $\beta$  son los multiplicadores de Lagrange asociados con el número de partículas y la energía. La suma comprende todos los núcleos con  $N'$  neutrones,  $Z'$  protones y energía  $E'$ . Esta suma la podemos reemplazar por una integral sobre estados de energía  $E'$ :

$$e^{-\beta\Omega} = \sum_{N', Z'} \int dE' \omega(E', N', Z') \exp(\alpha_N N' + \alpha_Z Z' - \beta E') \quad (3.1-2)$$

donde  $\omega(E', N', Z')$  representa la densidad de autovalores para un núcleo  $(N', Z')$  a una energía  $E'$ , es decir la densidad de estados a esa energía.

La expresión (3.1-2) muestra que la gran función de partición puede ser considerada como la transformada de Laplace de la densidad de estados.

Invirtiendo (3.1-2), podemos obtener  $\omega(E, N, Z)$  como función de la entropía,  $S$ , del sistema:

$$\omega(E, N, Z) = \frac{1}{(2\pi i)^3} \int d\alpha_N \int d\alpha_Z \int d\beta e^S \quad (3.1-3)$$

siendo:

$$S = -\beta\Omega - \alpha_N N - \alpha_Z Z + \beta E \quad (3.1-4)$$

Las integrales de contorno a calcular en (3.1-3) son las conocidas integrales de Darwin-Fowler.

Hasta ahora, la única aproximación introducida fue suponer una densidad continua de estados. Sin embargo, para resolver (3.1-3) haremos una aproximación adicional. Se puede demostrar que las integrales de Darwin-Fowler tienen un punto de ensilladura cuya localización queda determinada por la siguiente condición:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial S}{\partial \alpha_N} = 0 & \quad \frac{\partial S}{\partial \alpha_Z} = 0 & \quad \frac{\partial S}{\partial \beta} = 0 \\
\frac{\partial \Omega}{\partial \alpha_N} = N & \quad \frac{\partial \Omega}{\partial \alpha_Z} = Z & \quad \frac{\partial \Omega}{\partial \beta} = -E
\end{aligned}
\tag{3.1-5}$$

conviene entonces elegir un contorno de integración que pase por ese punto. Expandiendo S alrededor del punto de ensilladura y reteniendo sólo el término cuadrático en el desarrollo resulta:

$$\rho(E, N, Z) = \exp(S) / (2\pi)^{3/2} D^{1/2}
\tag{3.1-6}$$

donde:

$$D = \begin{vmatrix}
\frac{\partial^2 \Omega}{\partial \alpha_N^2} & \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \alpha_N \partial \alpha_Z} & \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \alpha_N \partial \beta} \\
\frac{\partial^2 \Omega}{\partial \alpha_N \partial \alpha_Z} & \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \alpha_Z^2} & \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \alpha_Z \partial \beta} \\
\frac{\partial^2 \Omega}{\partial \alpha_N \partial \beta} & \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \alpha_Z \partial \beta} & \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \beta^2}
\end{vmatrix}$$

$$\tag{3.1-7}$$

La coincidencia de los resultados en la aproximación de punto de ensilladura, con los datos experimentales resulta bastante buena, aún a energías de excitación bajas<sup>2)</sup>. Además el método posee una elegancia intrínseca, la que se manifiesta en la forma en la que las condiciones de contorno del problema son introducidas, ya que aparecen en forma sencilla a través de la localización del punto de ensilladura (ec. (3.1-5)).

Aplicaremos el formalismo desarrollado a tres sistemas distintos, los dos primeros ya han sido analizados, pueden consultarse las referencias<sup>2,15)</sup>, sin embargo resulta conveniente recordar los resultados fundamentales. En primer lugar se describirá el comportamiento de la densidad de estados de un sistema finito de fermiones sin interacción, a continuación se tratará un sistema de fermiones que interactúan a través de la fuerza de apareamiento nuclear. Para concluir, se presentan los resultados analíticos correspondientes al caso de un sistema de bosones sin interacción, con un espectro de energía que no varía con la temperatura.

#### 1-a) Sistema finito de fermiones libres.

Analicemos la expresión (3.1-6) en el caso de suponer al núcleo como un sistema formado por fermiones que no interactúan entre ellos.

La entropía del sistema tendrá una contribución de los protones y una contribución de los neutrones:

$$S = S(p) + S(n) \quad (3.1-8)$$

donde:

$$S(t_z) = - \sum_i [n_i(t_z) \ln(n_i(t_z)) + (n_i(t_z)+1) \ln(n_i(t_z)+1)] \quad (3.1-9)$$



siendo  $n_i(t_z)$  el número de ocupación del estado  $i$ :

$$n_i(t_z) = 1 / ( 1 + \exp(\beta \epsilon_i - \alpha_{t_z}) ) \quad (3.1-10)$$

Finalmente, teniendo en cuenta las expresiones (3.1-5) y (3.1-6) obtenemos:

$$\rho(E, N, Z) = \exp(S) / (4\pi^{3/2} T^{5/2} \sqrt{g_N^F g_Z^F a^F}) \quad (3.1-11)$$

donde:

$$g^F = \sum_i g_i^F / T \quad (3.1-12-a)$$

$$g_i = n_i (1 - n_i) \quad (3.1-12-b)$$

$$\begin{aligned} a^F &= (dS/dT)/2 \\ &= (1/2T^3) \sum_i g_i \epsilon_i^2 - (1/Tg^F) (\sum_i g_i \epsilon_i)^2 \end{aligned} \quad (3.1-12-c)$$

La cantidad " $a^F$ " es el parámetro de densidad de niveles correspondiente a un sistema fermiónico sin interacción.

Es fácil comprobar que al aumentar la temperatura, la expresión (3.1-12-c) tiende a un valor constante, " $a_0$ ":

$$a_0 = \pi^2 g_0 / 6 \quad (3.1-13)$$

siendo  $g_0$  el valor al cual tiende  $g^F$  en el límite de altas temperaturas.

En este límite la densidad de niveles puede expresarse como<sup>15)</sup>:

$$\rho(E, N, Z) = (6^{1/4}/24) (g_o^2/g_{oN}g_{oZ})^{1/2} g_o (g_o E)^{-5/4} \exp(2\sqrt{a_o E}) \quad (3.1-14)$$

donde:

$$g_o = g_{oN} + g_{oZ}$$

En el límite de altas temperaturas recuperamos la dependencia cuadrática de la energía como función de la temperatura, característica de un gas de fermiones libres sin interacción:

$$E = a T^2 \quad (3.1-15)$$

a la vez que:

$$S = 2 \sqrt{a E} \quad (3.1-16)$$

Como se ve en la ecuación (3.1-13), el parámetro de densidad de niveles es independiente de la temperatura, coincidiendo en buena aproximación con la conocida parametrización empírica que le asigna el valor:  $a_o = A/8 \text{ MeV}^{-1}$  en el régimen de altas temperaturas.

Estos resultados son aplicables al caso de núcleos normales, es decir núcleos de capa cerrada o próximos a la clausura de capas.

1-b) Sistema finito de fermiones que interactúan a través de una fuerza de apareamiento nuclear.

Si estudiamos un núcleo de capa abierta con un número par de partículas, la interacción de apareamiento, responsable de la aparición de un gap de energía en el espectro de excitaciones, no es despreciable. La dependencia con la temperatura de ese "gap" de energía será la que de lugar a las principales diferencias con el caso anterior.

La descripción del parámetro de densidad de niveles para un núcleo superconductor, es un problema que puede ser resuelto en forma simple con ayuda del formalismo BCS. Después de pasar a la base de cuasipartículas, y de diagonalizar el Hamiltoniano, el resultado es un espectro de cuasipartículas dependiente de la temperatura <sup>31)</sup>, este espectro obedece la estadística de Fermi-Dirac, como vimos en el Capítulo I de este trabajo, en consecuencia la gran función de partición puede escribirse como:

$$\mathcal{Z} = \prod_j (1 + \exp(-\beta E_j)) \quad (3.1-17)$$

donde  $E_j$  representa la energía de la  $j$ -ésima cuasipartícula. La entropía del sistema está dada por:

$$S^{BCS} = - \sum_i [r_i \ln(r_i) + (r_i + 1) \ln(r_i + 1)] \quad (3.1-18)$$

donde:

$$f_j = 1 / ( 1 + \exp(E_j \beta) ) \quad (3.1-19)$$

Haciendo uso de las expresiones (3.1-6) y (3.1-7), el resultado para un sólo tipo de cuasipartículas (tanto neutrones como protones) será:

$$\rho^{\text{BCS}}(E) = \exp(S^{\text{BCS}}) / (2\pi)^{9/2} (D^{\text{BCS}})^{1/2} \quad (3.1-20)$$

donde el cálculo de  $D^{\text{BCS}}$  da por resultado:

$$D^{\text{BCS}} = ( 2D_1 + \Delta^2 (T A_1 - 2C_1) ) 2E_2 - (2D_2)^2 \quad (3.1-21)$$

con:

$$2D_1 = \sum_j f_j (1-f_j) \quad (3.1-22-a)$$

$$2A_1 = \sum_j f_j (1-f_j) / E_j^3 \quad (3.1-22-b)$$

$$2C_1 = \sum_j f_j (1-f_j) / E_j^2 \quad (3.1-22-c)$$

$$2D_2 = \sum_j f_j (1-f_j) (\epsilon_j - \lambda) \quad (3.1-22-d)$$

$$2E_2 = \sum_j f_j (1-f_j) E_j^2 \quad (3.1-22-e)$$

De la misma manera que antes el parámetro de densidad de niveles puede escribirse como:

$$a^{\text{BCS}} = (dS^{\text{BCS}}/dT)/2 = \quad (3.1-23)$$

$$= 2\beta^3 [ E_2 - 2\beta (F_1/F_2) ] \quad (3.1-24)$$

donde:

$$F_1 = D_2^2(A_1 - 2\beta C_1) - D_1^2(\Delta^2 A_1 + 2\beta B_1) - 2D_1 D_2 (A_2 - 2\beta C_2) \quad (3.1-25-a)$$

$$F_2 = (A_1 - 2\beta D_1)(\Delta^2 A_1 + 2\beta B_1) + (A_2 - 2\beta C_2)^2 \quad (3.1-25-b)$$

$$2A_2 = \sum_j (1-f_j)(\epsilon_j - \lambda)/E_j^3 \quad (3.1-25-c)$$

$$2C_2 = \sum_j (1-f_j)(\epsilon_j - \lambda)/E_j^2 \quad (3.1-25-d)$$

$$B_1 = D_1 - \Delta^2 C_1 \quad (3.1-25-e)$$

y finalmente, la densidad de estados puede escribirse como:

$$\rho^{\text{BCS}}(E) = \exp(S^{\text{BCS}}) / 2\pi T^2 \sqrt{g^{\text{BCS}} \bar{a}^{\text{BCS}}} \quad (3.1-26)$$

$$g^{\text{BCS}} = \beta [ 2D_1 + \Delta^2 (TA_1 - 2C_1) ] \quad (3.1-27-a)$$

$$\bar{a}^{\text{BCS}} = \beta^3 [ 2E_2 - (2D_2)^2 / (2D_1 + \Delta^2 (TA_1 - 2C_1)) ] \quad (3.1-27-b)$$

En el caso de un sistema superfluido tanto en neutrones como en protones, la densidad de niveles tendrá la forma<sup>15)</sup>:

$$\omega^{\text{BCS}}(E) = \exp(S^{\text{BCS}}) / (2\pi)^3 T^{5/2} \sqrt{g_N^{\text{BCS}} g_Z^{\text{BCS}} (\bar{a}_N^{\text{BCS}} + \bar{a}_Z^{\text{BCS}})} \quad (3.1-28)$$

Podemos anticipar que el colapso del gap de apareamiento será responsable de un pico en el comportamiento del parámetro de densidad de niveles a temperaturas próximas a la temperatura de transición ; mientras que para sistemas normales, el máximo se producirá a una temperatura correspondiente con una energía de excitación del orden de la energía de separación entre capas activas.

### 1-c) Sistema de bosones sin interacción.

Veamos ahora que sucede si utilizamos el método anterior en el caso de un sistema de bosones que no interactúan entre ellos, con un espectro de energías fijo. Para ello recordemos que el potencial termodinámico del problema es:

$$\Omega = \sum_i \ln [ 1 - \exp(\mu - \varepsilon_i) \beta ] \quad (3.1-29)$$

donde  $\varepsilon_i$  representa la energía de la  $i$ -ésima partícula, y  $\mu$  el multiplicador de Lagrange asociado con la conservación del número de partículas.

La entropía tiene la forma:

$$S = \sum_i [-n_i \ln(n_i) + (n_i + 1) \ln(n_i + 1)] \quad (3.1-30)$$

donde ahora,  $n_i$ , representa el número de ocupación para fonones:

$$n_i = 1 / ( \exp(\epsilon_i - \mu) - 1 ) \quad (3.1-31)$$

Luego de un álgebra simple, haciendo uso de las expresiones (3.1-6) y (3.1-7) obtenemos la siguiente expresión:

$$\rho(E) = \exp(S) / 2\pi T^2 \sqrt{4 g^B a^B} \quad (3.1-32)$$

donde hemos definido:

$$g^B = \sum_i g_i / T \quad (3.1-33-a)$$

$$g_i = n_i (1+n_i) \quad (3.1-33-b)$$

$$\begin{aligned} a^B &= (dS/dT)/(4T^2) = \\ &= (1/4T^3) \left[ -\sum_i g_i \epsilon_i^2 + (1/Tg^B) (\sum_i g_i \epsilon_i)^2 \right] \end{aligned} \quad (3.1-33-c)$$

Al definir el parámetro de densidad bosónico hemos tenido en cuenta que, para temperaturas bajas, el calor específico de un gas de bosones libres presenta una dependencia cúbica con la temperatura, de manera que la energía de excitación del sistema es de la forma:

$$E = a^B T^4$$

Cabe destacar que debido a la forma de los números de ocupación bosónicos, la principal contribución de estos grados de libertad se producirá a temperaturas bajas.

Como vimos en los capítulos anteriores, en el caso de núcleos reales, el espectro de excitaciones de tipo bosónicas, cambia con la temperatura. Sin embargo, el estudio de núcleos como el  $^{208}\text{Pb}$  y  $^{60}\text{Zn}$  mostrará que lo dicho anteriormente sigue siendo válido.

Como mencionamos en la introducción, nuestro propósito es analizar la contribución fermiónica y bosónica al parámetro de densidad de niveles en núcleos normales y en núcleos superconductores. A tal fin reseñaremos brevemente las expresiones que utilizaremos en los cálculos numéricos:

#### Contribución fermiónica al parámetro de densidad de niveles

En el cálculo del parámetro de densidad de niveles fermiónico, utilizaremos la expresión (3.1-12-c) o (3.1-24) según se trate de un núcleo normal o un núcleo superfluido, respectivamente.

#### Contribución bosónica al parámetro de densidad de niveles

En el Capítulo I obtuvimos el espectro de excitaciones colectivas debidas a los términos residuales de la interacción de apareamiento, a través de la FTRPA. En el Capítulo II calculamos el espectro debido a una interacción multipolar separable, y de una fuerza no separable en la aproximación de la FTRPA. En ambos casos el Hamiltoniano que representa las excitaciones de tipo bosónico es de la forma:



$$H = H_0 + \sum_n \omega_n \Gamma_n^\dagger \Gamma_n \quad (3.1-35)$$

donde  $\Gamma_n^\dagger$  ( $\Gamma_n$ ) es el operador de creación (aniquilación) de un fonón. Haciendo uso de los métodos de la Mecánica Estadística, la energía media del sistema resulta:

$$\langle H \rangle = H_0 + \sum_i \omega_i n_i \quad (3.1-36)$$

donde  $n_i$ , es el número de ocupación para el fonón en el  $i$ -ésimo estado:

$$n_i = (\exp(\beta\omega_i) - 1)^{-1} \quad (3.1-37)$$

siendo la entropía del sistema de fonones:

$$S = \sum_i [-n_i \ln(n_i) + (n_i + 1) \ln(n_i + 1)] \quad (3.1-38)$$

En este caso no podemos obtener una expresión analítica para  $a^B(T)$ , como lo hicimos en (169), debido a que no conocemos la dependencia explícita de las energías  $\omega_i$  con la temperatura; en su lugar nos conformaremos con el cálculo numérico del parámetro de densidad de niveles bosónico, a través de la expresión:

$$a^B = (dS/dT)/(4T^2) \quad (3.1-39)$$

Completaremos la discusión del tema al analizar los resultados obtenidos para  $^{208}\text{Pb}$  y  $^{60}\text{Zn}$ .

### 3.2-Contribución de los canales de partícula-partícula al parámetro de densidad de niveles bosónico

En el Apéndice D presentamos un resumen de los aspectos más sobresalientes del formalismo de la RPA a temperatura cero. En dicho apéndice describimos el formalismo teórico para el caso de excitaciones de partícula-agujero, para el caso de excitaciones de partícula-partícula, y también para el caso de excitaciones de dos cuasipartículas. Este formalismo lo hemos extendido a temperatura finita. En el primer Capítulo de este trabajo, estudiamos tanto el comportamiento de las excitaciones de dos cuasipartículas en la fase superfluida del núcleo, como el comportamiento de las excitaciones de partícula-partícula y agujero-agujero en la fase normal. En el segundo Capítulo nos ocupamos explícitamente de las excitaciones del tipo de partícula-agujero (si bien a temperatura distinta de cero la difusión del nivel de Fermi implica tener en cuenta configuraciones de partícula-partícula y agujero-agujero, como se ve en la Figura 1, éstas no han sido introducidas a través de distintas constantes de acoplamiento a temperatura cero). En este capítulo queremos calcular la contribución al parámetro de densidad de niveles bosónico de los canales de partícula-partícula y agujero-agujero cuando son introducidos simultáneamente junto con el canal de partícula-agujero.

En vista de lo propuesto procederemos de la siguiente manera: partiremos del caso general de una interacción no separable. En el Capítulo I hemos descripto la forma de obtener el espectro de cuasipartículas del sistema y sus propiedades sobresalientes; en

el Capítulo II hemos estudiado el efecto de las excitaciones colectivas del sistema, teniendo en cuenta el modo de multipolaridad  $\lambda^{\pi}=0^+$  junto con los modos vibracionales de distintas multipolaridades. Como vimos a través de las expresiones (2.2-27) y (2.2-28) esta interacción proporciona contribuciones tanto del canal de partícula-partícula como del canal de partícula-agujero a los modos colectivos de excitación, resultando adecuada a nuestros propósitos. Como es natural obtendremos el parámetro de densidad de niveles fermiónico a través de la expresión (3.1-24), luego de haber calculado la entropía del sistema en la aproximación BCS; asimismo después de obtener el espectro de carácter bosónico y la entropía asociada a éste, calcularemos el parámetro de densidad bosónico a través de (3.1-39); analizaremos como se modifica este último al variar la constante de acoplamiento del canal de partícula-partícula al dejar fija la constante del canal de partícula-agujero. Trabajaremos con una interacción- $\delta$  independiente del isospin, en ese caso:

$$V_{ab,cd} = \frac{\hat{j}}{4\pi} R_{ab,cd} (-)^{j_b - j_d - 1} \begin{bmatrix} j_a & j_b & J \\ 1/2 & -1/2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} j_c & j_d & J \\ 1/2 & -1/2 & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{2} \left[ 1 + (-)^{l_a + l_b - J} \right] , \quad (3.2-1)$$

$$\begin{aligned} \hat{V}_{ab,cd} = & (-) \frac{\hat{j}}{8\pi} R_{ab,cd} \cdot \\ & \left\{ (-)^{l_a+l_c} \begin{pmatrix} j_a & j_b & J \\ 1/2 & 1/2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_c & j_d & J \\ 1/2 & 1/2 & -1 \end{pmatrix} + \right. \\ & \left. (-)^{j_b+j_d} \begin{pmatrix} j_a & j_b & J \\ 1/2 & -1/2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_c & j_d & J \\ 1/2 & -1/2 & 0 \end{pmatrix} (-)^{l_a+l_b-J} \right\}, \end{aligned} \quad (3.2-2)$$

donde la parte radial de la función de onda es:

$$R_{ab,cd} = \int_0^{\text{inf}} r^2 R_a(r) R_b(r) R_c(r) R_d(r) dr \quad (3.2-3)$$

y:

$$\hat{j} = [ (2j_a+1) (2j_b+1) (2j_c+1) (2j_d+1) ]^{1/2} \quad (3.2-4)$$

Analizaremos los resultados obtenidos al tratar un núcleo real,  $^{60}\text{Zn}$ .

## Aplicaciones

En primer lugar, vamos a presentar el cálculo del parámetro de densidad de niveles en el núcleo  $^{208}\text{Pb}$  (de doble capa cerrada). Para ello hemos utilizado los resultados obtenidos en el capítulo anterior, recordemos que en dicho capítulo se obtuvo a través del formalismo de la FTRPA el espectro de excitaciones colectivas del sistema como función de la temperatura, y a partir de él sabemos como calcular las magnitudes termodinámicas del núcleo con ayuda de técnicas de la Mecánica Estadística. La contribución fermiónica al parámetro de densidad de niveles la obtuvimos a través de la expresión (3.1-12-c), es decir:

$$a^{\text{F}}(T) = (dS^{\text{F}}/dT)/2$$

mientras que la contribución bosónica al parámetro de densidad de niveles la calculamos a partir de:

$$a^{\text{B}}(T) = (dS^{\text{B}}/dT)/(4T^2)$$

La Figura 6 muestra en líneas punteadas, curva (c), la contribución fermiónica al parámetro de densidad de niveles, mientras que las curvas continuas corresponden a las contribuciones bosónicas de los modos  $\lambda^{\pi} = 2^{+}$  y  $3^{-}$ , curvas (a) y (b) respectivamente.

El estudio de los resultados indica que los grados de libertad bosónicos y de partícula independiente determinan, en forma separada, la dependencia con la temperatura del parámetro de

densidad de niveles. A bajas temperaturas,  $T < 0.5$  MeV, la contribución bosónica es dominante, mientras que a temperaturas superiores a los 0.5 MeV, la contribución fermiónica es la importante. Esto está relacionado al hecho de que en los núcleos pesados como el  $^{208}\text{Pb}$  los modos vibracionales ocurren a energías menores que el espaciamiento entre capas, pudiendo bloquearse a temperaturas bajas comparadas con las de excitación de partícula independiente. Cabe destacar que a temperaturas altas, la contribución fermiónica tiende al conocido valor  $A/8 \text{ MeV}^{-1}$ , lo que significa que las funciones termodinámicas alcanzan el límite para el sistema degenerado de fermiones sin interacción, es decir que la energía de excitación es proporcional a  $T^2$ , y la entropía es lineal en  $T$ .

Discutiremos ahora los resultados obtenidos en un núcleo superfluido como el  $^{60}\text{Zn}$ . Al igual que en el caso del  $^{208}\text{Pb}$ , utilizaremos una parametrización de Nilsson para los niveles de partícula independiente<sup>44)</sup> a temperatura cero, la que no modificamos a lo largo del cálculo, ya que sabemos que varía muy poco con la temperatura. Hemos trabajado con una fuerza de dos cuerpos no separable, la interacción- $\delta$  independiente en isospin. Calculamos el espectro de cuasipartículas en el marco del formalismo BCS descrito en el Capítulo I, punto 1-B, a partir de él obtuvimos la contribución fermiónica a la entropía, y con ella el parámetro de densidad fermiónico de acuerdo con la expresión (3.1-24):

$$a^{\text{BCS}}(T) = (dS^{\text{BCS}}/dT)/2$$

A continuación analizamos a través de la FTRPA el espectro de excitación de dos cuasipartículas acopladas a momento angular 2 y paridad positiva, para ello hemos diagonalizado la matriz de la FTRPA con el método propuesto por Cholesky. Las constantes de acoplamiento de la interacción fueron ajustadas de manera de reproducir el valor experimental del primer estado con multipolaridad  $\lambda^{\pi}=2^{+}$  ( $G_{pp}=G_{ph}=133$  MeV). A partir de la entropía del sistema obtuvimos el parámetro de densidad de niveles bosónico de la misma forma que para el  $^{208}\text{Pb}$ .

La Figura 7 reproduce el cálculo del parámetro de niveles fermiónico. En ella se observa que para un núcleo superfluido, la contribución fermiónica tampoco es relevante a bajas temperaturas. A medida que la temperatura aumenta los gaps de energía, asociados a cada estado, disminuyen debido al bloqueo térmico de la interacción de apareamiento, y como resultado de esto el espaciamiento entre niveles de cuasipartículas es menor, facilitándose la ocupación de niveles más alejados, con el consiguiente aumento del parámetro de densidad de niveles. Próximo a la temperatura para la cual los gaps colapsan se observa un pico en éste, el cual podemos asociar a la transición de fase del estado superfluido al estado normal. Cabe destacar que a temperaturas superiores a la del colapso de los gaps ( $T \cong 1.2$  MeV) el parámetro de densidad de niveles bosónico se comporta como el correspondiente al  $^{208}\text{Pb}$ , es decir, al aumentar la temperatura tiende al valor  $A/B$   $\text{MeV}^{-1}$ , indicando que el sistema se comporta como un sistema de fermiones sin interacción. Es importante

mencionar además, que el comportamiento de  $a^{BCS}(T)$  para una interacción no separable como la que estamos describiendo, es similar al hallado en el caso de una fuerza de apareamiento monopolar separable <sup>15)</sup>.

En las Figuras 8-a y 8-b se reproduce el comportamiento del parámetro de densidad bosónico. El pico que se observa a baja temperatura corresponde básicamente a las contribuciones del canal de partícula-agujero, es decir es comparable al pico de baja temperatura observado en el  $^{208}\text{Pb}$  proveniente de una fuerza multipolar separable; el segundo pico está asociado con el canal de partícula-partícula y la transición del sistema de la fase superfluida a la fase normal. La comprobación de lo anterior es sencilla, basta con hacer  $G_{ph}=0$ , en ese caso desaparece el primer pico, mientras que el segundo no se modifica.

Nos interesa analizar el comportamiento del pico de baja temperatura al variar  $G_{pp}$  dejando fija  $G_{ph}$ . La Figura 8-a) reproduce este comportamiento para  $G_{pp}/G_{ph}=0.25, 0.5, 0.75$  y  $1$ , mientras que en la Figura 8-b):  $G_{pp}/G_{ph}=1, 1.25, 1.50$  y  $1.75$ . Cabe señalar que la variación de  $G_{pp}$  no cambia el valor de la primera energía de excitación colectiva, ni la probabilidad de transición asociada (se observan desviaciones menores a 10 %, esto significa que es el canal de partícula-agujero el principal responsable del espectro vibracional). La observación de las figuras muestra que el aumento de  $G_{pp}$  en relación con  $G_{ph}$  produce un incremento en magnitud del parámetro de densidad de niveles, el efecto contrario se produce cuando  $G_{pp}$  disminuye en relación con  $G_{ph}$ . Esto se entiende, si se tiene en cuenta que el aumento de  $G_{pp}$  respecto de



$G_{ph}$  implica dar un peso mayor a la contribución de ese canal, aun a temperaturas bajas. El análisis de estos resultados permite decir que el canal de partícula-partícula no es despreciable, sino que por el contrario debe ser tenido en cuenta, ya que su inclusión produce modificaciones sustanciales en la magnitud del parámetro de densidad de niveles bosónico. Esto está de acuerdo con la Ref. 18, en ella se presentan resultados obtenidos en un modelo esquemático, mostrando la importancia de la inclusión de este canal para lograr un aumento sustancial del parámetro de densidad de niveles a temperaturas bajas, en coincidencia con la tendencia observada en experiencias recientes.

## Conclusiones

En este capítulo nos hemos ocupado del parámetro de densidad de niveles, al hacerlo tuvimos en cuenta no sólo la contribución de los grados de libertad fermiónicos, sino también como contribuyen los grados de libertad bosónicos. Analizamos un núcleo normal,  $^{208}\text{Pb}$ , y un núcleo superfluido,  $^{60}\text{Zn}$ . En relación a la contribución fermiónica al parámetro de densidad de niveles, cabe destacar que a temperaturas bajas no es significativa, siendo la contribución bosónica la relevante; digamos además que el parámetro de densidad de niveles fermiónico en el caso de un núcleo superfluido presenta un pico en la proximidad de la temperatura para la cual los diferentes gaps colapsan, desplegando por encima de ésta las propiedades de un sistema normal, con la conocida tendencia al valor  $A/8 \text{ MeV}^{-1}$  al aumentar la temperatura. En cuanto al parámetro de densidad de niveles bosónico es evidente la aparición, en sistemas superconductores, de un pico relacionado con la transición de la fase superconductora a la fase normal; en cuanto al pico de baja temperatura éste varía de acuerdo con la intensidad del canal de partícula-partícula. El aumento de  $G_{pp}$  produce un significativo incremento en la magnitud del parámetro de densidad de niveles, debido a que el peso de las configuraciones de partícula-partícula es mayor; este resultado muestra la importancia de este canal aun a temperaturas bajas. Tengamos en cuenta, además, el hecho que las energías del espectro prácticamente no varían al cambiar  $G_{pp}$ , esto permitirá ajustar este canal de manera de reproducir correctamente los resultados experimentales.

Esto pone en evidencia, nuevamente, que para lograr una descripción confiable de la estructura nuclear, deben ponerse en juego tanto grados de libertad fermiónicos, asociados a las excitaciones de partícula independiente, como grados de libertad bosónicos, relacionados a las excitaciones colectivas del núcleo.