

CAPITULO I

Interacción de Apareamiento Nuclear a Temperatura Finita

Introducción

La noción de "apareamiento" entre partículas en un sistema se remonta a la introducción hecha por Racah²¹⁾ del número cuántico de senioridad en 1942 para estudios atómicos. La idea se desarrolló en forma independiente en estudios de superconductividad en metales en 1957. En 1959, siguiendo las sugerencias de Bohr, Mottelson y Pines^{22,29)}, Belayev²⁴⁾ desarrolló la primera aplicación detallada, a los modelos nucleares, de la interacción de apareamiento. Fue Mayer quien mostró que las fuerzas atractivas de corto alcance entre nucleones llevaban a la formación de pares estables de partículas con momento angular cero; la energía potencial mutua de dos partículas en el mismo nivel del "shell model" es cuatro veces mayor cuando están acopladas a momento angular cero que cuando están acopladas a momento angular dos; por lo tanto los núcleos con número par de protones y de neutrones tienen estado fundamental con momento angular cero, mientras que el momento angular del núcleo impar, es en principio igual al momento angular del neutrón o del protón no apareado en el esquema del modelo de capas.

La interacción de apareamiento nuclear es responsable de la disminución de la energía del estado fundamental, de manera que este está separado del primer estado excitado por un "gap" de energía mucho mayor que el esperado en el modelo de capas. A esto se debe la variación sistemática que exhiben las energías de ligadura dependiendo de que Z (número de protones en el núcleo) y

N (número de neutrones en el núcleo), sean pares o impares; pues, como es conocido, en núcleos con Z y N pares la energía de ligadura aumenta en dos veces el gap, mientras que en núcleos con N par y Z impar, o viceversa, el aumento es del orden del gap de energía. Este efecto persiste hasta temperaturas del orden de un MeV, lo cual es confirmado por experiencias de baja energía ($E^* = 6$ a 10 MeV) en las cuales se mide la dispersión de masa resultante de la colisión inelástica con iones pesados²⁵⁾, en estas reacciones tanto el proyectil como el blanco transfieren gran cantidad de energía cinética de su movimiento relativo a energía interna de excitación; en el tiempo para el cual ambos núcleos están en contacto, en condiciones de transferir masa, las correlaciones de apareamiento han sido destruidas térmicamente, de manera que la probabilidad de transferencia de pares correlacionados es baja, observándose una pequeña dispersión de masas en los canales de salida de la reacción.

En el rango de temperaturas en el cual trabajaremos, los efectos de campo medio persisten, como se puede verificar a través de la gran literatura disponible al respecto^{15,26,27)}. De manera que, la distribución de equilibrio con la cual trabajamos en el conjunto gran canónico, la calcularemos en la aproximación de partícula independiente con el formalismo de Hartree-Fock-Bogoliubov térmico (FT-HFB). La teoría FT-HFB implica un sistema de ecuaciones no lineales que deben ser resueltas en forma autoconsistente iterativamente, a igual que lo que ocurre a temperatura cero, con una diferencia esencial: las probabilidades de ocupación de cuasipartícula no son cero. Un hecho interesante a destacar es que estamos aplicando técnicas de la Mecánica

Estadística a un sistema con espectro variable, ya que las energías asociadas a las cuasipartículas cambian con la temperatura. Un resultado importante es la dependencia del gap de apareamiento con la temperatura; a una dada temperatura T_0 , el gap colapsa produciendo una transición de fase desde el estado de pares de partículas acopladas a momento angular cero, fase superconductora, al estado normal^{28,29)}. Este comportamiento ya es conocido en la física del estado sólido, sabemos que a una cierta temperatura T_c , un material superconductor, en ausencia de campo externo, sufre una transición de fase de segundo orden, pasando de la fase superconductora a la fase normal³⁰⁾. Desde el punto de vista teórico la transición de fase está asociada a las discontinuidades en las funciones termodinámicas; en el caso de una transición de segundo orden, la energía es continua a través de la transición, pero no así su derivada respecto de la temperatura, el calor específico. En este sentido es importante comparar los resultados obtenidos para sistemas finitos, como lo son los núcleos, con los ya conocidos para sistemas extendidos, en particular es de destacar la discusión de los resultados obtenidos en relación con la teoría fenomenológica de Landau-Ginzburg para puntos Lambda (λ)⁷⁾.

Resulta también necesario para la comprensión del núcleo superconductor, el estudio de los efectos colectivos, asociados a la interacción de apareamiento nuclear a temperatura finita, pues estos muestran, nuevamente, evidencia del bloqueo térmico de la interacción, con la consiguiente inhibición de las contribuciones coherentes de los pares de dos cuasipartículas.

En este capítulo estudiaremos la interacción de apareamiento nuclear a temperatura finita en forma microscópica. Tendremos en cuenta las contribuciones fermiónicas a través del formalismo BCS a temperatura finita (FTBCS), y en relación a ellas, discutiremos la transición de fase del estado superconductor al estado normal; por otro lado, trataremos las contribuciones de pares de partículas en forma coherente como grados de libertad bosónicos, descritos a partir del formalismo de la Aproximación de Fases al Azar a Temperatura Finita (FTRPA), tanto por debajo como por encima de la temperatura crítica asociada a la transición de fase. Estos resultados forman parte de la Ref. 31.

El capítulo está ordenado de la siguiente manera: en el primer punto describiremos la fase superconductora, en primer lugar trataremos los grados de libertad fermiónicos, a través del formalismo FTBCS, considerando el caso de una interacción separable y también el de una interacción no separable; luego trataremos los grados de libertad bosónicos a través del formalismo de la FTRPA para cuasipartículas; y finalmente describiremos las magnitudes termodinámicas que nos interesan. En el segundo punto discutiremos qué sucede en la fase normal, para ello discutiremos el problema de un sistema finito de fermiones a temperatura distinta de cero, y luego describiremos las magnitudes termodinámicas de interés. En el tercer punto analizaremos la transición de fase observada y su comparación con lo que sucede en sistemas extendidos. Terminaremos el capítulo con el análisis de los resultados para un núcleo real como ^{110}Sn . Finalmente se presentarán las conclusiones de este capítulo.

1.1- Descripción de la Interacción de Apareamiento Nuclear
en la fase superconductora.

En los núcleos esféricos con capas parcialmente llenas, el efecto más importante de la interacción de dos cuerpos, como ya notamos anteriormente, es el producir correlaciones de apareamiento. Debido a esto, su estudio es indispensable para entender la estructura de los núcleos a temperaturas bajas, donde el comportamiento de éste se aleja del de un gas finito de fermiones.

1.1.A- Formalismo BCS térmico. Interacción Separable.

Como ya mencionamos en la introducción, este formalismo fue desarrollado por Bardeen, Cooper y Schrieffer para atacar el problema de los materiales superconductores⁸²⁾ a bajas temperaturas y fue aplicado a la física nuclear por la escuela de Copenhague, y otros posteriormente.

Comenzaremos tratando un Hamiltoniano de la forma:

$$H = \sum_{jm} \epsilon_j a_{jm}^\dagger a_{jm} - G \sum_{\substack{jm > 0 \\ j', m' > 0}} a_{jm}^\dagger a_{j'm'}^\dagger a_{j'm} a_{j'm'} \quad (1.1-1.a)$$

donde:
$$a_{jm}^\dagger = (-)^{j-m} a_{j-m}^\dagger \quad (1.1-1.b)$$

El primer término corresponde a la suma sobre energías de partícula independiente, mientras que el segundo término corresponde a la interacción entre pares de nucleones. Cabe mencionar que a_{jm}^\dagger (a_{jm}) es el operador de creación (aniquilación) de una partícula con momento angular total "j" y proyección "m"; ϵ_j corresponde a la energía de partícula independiente, y G es la constante de apareamiento (fenomenológicamente $G \cong 20/A$ MeV, siendo A el número de nucleones en el núcleo).

La manera más simple de introducir correlaciones en la función de onda, con el objeto de describir pares de partículas acopladas a momento angular cero, es realizar la transformación de Bogoliubov-Valatin^{33,34}.

Definiremos un nuevo conjunto de operadores de creación y de aniquilación, a través de la siguiente transformación canónica:

$$\begin{bmatrix} a_{jm}^\dagger \\ a_{jm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_j & V_j \\ -V_j & U_j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_{jm}^\dagger \\ \alpha_{jm} \end{bmatrix} \quad (1.1-2)$$

donde U_j y V_j son cantidades reales, tales que $U_{jm} = U_{j-m} = U_j$ y $V_{jm} = V_{j-m} = V_j$. Al igual que antes :

$$\alpha_{jm}^\dagger = (-)^{j-m} \alpha_{j-m}^\dagger \quad (1.1-3)$$

Los α_{jm}^\dagger (α_{jm}) se comportan como fermiones, es decir que valen las siguientes reglas de anticonmutación:

$$\left\{ \alpha_{jm}^\dagger, \alpha_{j'm'} \right\} = \delta_{jj'} \delta_{mm'} \quad (1.1-4.a)$$

$$\left\{ \alpha_{jm}, \alpha_{j'm'} \right\} = 0 \quad (1.1-4.b)$$

lo que impone la siguiente condición sobre U_j y V_j :

$$U_j^2 + V_j^2 = 1 \quad (1.1-5)$$

En forma explícita, los operadores de creación (aniquilación) de cuasipartículas, α_{jm}^\dagger (α_{jm}) son:

$$\alpha_{jm}^\dagger = U_j a_{jm}^\dagger - V_j a_{jm}^- \quad (1.1-6.a)$$

$$\alpha_{jm}^- = V_j a_{jm}^\dagger + U_j a_{jm}^- \quad (1.1-6.b)$$

De manera que para un nivel muy por encima del nivel de Fermi, $U_j \rightarrow 1$ y $V_j \rightarrow 0$, comportándose la cuasipartícula como partícula; mientras que para un nivel por debajo del nivel de Fermi, $U_j \rightarrow 0$ y $V_j \rightarrow 1$, presentando el comportamiento de un agujero.

Para la transformación descripta, el nuevo vacío, $|BCS\rangle$, será tal que:

$$\alpha_{jm} |BCS\rangle = 0 \quad (1.1-7)$$

A temperatura cero resulta claro que:

$$\langle \text{BCS} | \alpha_{jm}^\dagger \alpha_{jm} | \text{BCS} \rangle = 0 \quad (1.1-8.a)$$

pero a temperatura distinta de cero, los números de ocupación de cuasipartículas, dejan de ser cero. Aplicando el Teorema de Wick a Temperatura Finita⁹²⁾, obtenemos:

$$\langle \text{BCS} | \alpha_{jm}^\dagger \alpha_{j'm'} | \text{BCS} \rangle = \delta_{jj'} \delta_{mm'} f_j(T) \quad (1.1-8.b)$$

Como veremos más adelante, minimizando la energía libre del sistema, los factores de ocupación térmica, $f_j(T)$, son tales que tienden a cero, cuando la temperatura tiende a cero.

En adelante, utilizaremos $| \rangle$ en lugar de $| \text{BCS} \rangle$.

De lo dicho se desprende que el estado fundamental de BCS a $T=0$, es reemplazado, a temperatura distinta de cero, por un estado de referencia promedio (que se podría pensar equivalente a un conjunto estadístico definido por la función de partición $Z(N,T)$), a través del cual se pueden calcular los valores de expectación de las magnitudes relevantes.

Como es conocido del formalismo BCS a temperatura cero, la descripción en una base de cuasipartículas no tiene buen número de partículas (es decir $[H_{\text{BCS}}, N] \neq 0$, en la aproximación BCS), por lo cual debemos introducir un multiplicador de Lagrange y trabajar con:

$$\hat{H} = \hat{H} - \lambda \hat{N} \quad (1.1-9)$$

en lugar de trabajar con H , imponiendo la condición:

$$\langle | \hat{N} | \rangle = N_0 \quad (1.1-10)$$

siendo \hat{N} el operador número dado por:

$$\hat{N} = \sum_{jm} a_{jm}^\dagger a_{jm} \quad (1.1-11)$$

Haciendo la transformación descripta, y ordenando los términos usando el teorema de Wick a temperatura finita⁸⁵⁾, resulta:

$$\begin{aligned} H_{00} &= \sum_{jm} (\varepsilon_j \lambda) 2\Omega_j \left[U_j^2 f_j + V_j^2 (1 - f_j) \right] - \Delta(T)^2/G \\ H_{11} &= \sum_{jm} \left\{ (\varepsilon_j \lambda) \left[U_j^2 - V_j^2 \right] + 2 \Delta(T) U_j V_j \right\} |n_j| \\ H_{20} &= \sum_{jm} \left\{ \Delta(T) \left[U_j^2 - V_j^2 \right] + 2 (\varepsilon_j \lambda) U_j V_j \right\} (P_j^\dagger + P_j) \\ H_{22} &= - (G/2) \sum_{jj'} \left[U_j^2 U_{j'}^2 + V_j^2 V_{j'}^2 \right] (P_j^\dagger P_{j'} + P_{j'}^\dagger P_j) \\ H_{40} &= (G/2) \sum_{jj'} \left[U_j^2 V_{j'}^2 + U_{j'}^2 V_j^2 \right] (P_j^\dagger P_{j'}^\dagger + P_{j'} P_j) \\ H_{31} &= G \sum_{jj'} \left[U_j^2 - V_{j'}^2 \right] U_j V_{j'} (|n_j| P_{j'} + P_{j'}^\dagger |n_{j'}|) \\ H_{qp-qp} &= - G \sum_{jj'} \left[U_j V_{j'} U_{j'} V_j \right] |n_j| |n_{j'}| \end{aligned}$$

(1.1-12)

donde hemos despreciado términos en V_j^4 y $V_j^3 U_j$. Las definiciones utilizadas para los operadores utilizados en

(1.1-12) son:

$$: n_j : = \sum_m : \alpha_{jm}^\dagger \alpha_{jm} : \quad (1.1-13-a)$$

$$P_j^\dagger = \sum_{m>0} \alpha_{jm}^\dagger \alpha_{jm}^\dagger \quad (1.1-13-b)$$

$$P_j = (P_j^\dagger)^\dagger \quad (1.1-13-c)$$

con " : : " indicamos producto normal.

Por ahora, en la aproximación BCS, nos interesan solamente los términos \mathcal{H}_{00} , \mathcal{H}_{11} y \mathcal{H}_{20} .

$\mathcal{H}_{00} + \lambda N_0$ representará la energía media del sistema. Los U_j y los V_j que nos interesan, son aquellos que minimizan \mathcal{H}_{00} . De manera que variando \mathcal{H}_{00} respecto de U_j y teniendo en cuenta (1.1-5), resulta:

$$2U_j^2 = 1 + (\epsilon_j - \lambda)/E_j \quad (1.1-14-a)$$

$$2V_j^2 = 1 - (\epsilon_j - \lambda)/E_j \quad (1.1-14-b)$$

siendo, E_j , la energía de cuasipartícula:

$$E_j = \sqrt{(\epsilon_j - \lambda)^2 + \Delta(T)^2} \quad (1.1-15)$$

y donde el gap de energía, $\Delta(T)$, a sido definido como:

$$\Delta(T) = G \sum_j \Omega_j U_j V_j (1 - 2f_j) \quad (1.1-16)$$

con: $\Omega_j = j + 1/2$

En el Apéndice A hemos detallado el procedimiento anterior.

Si se coloca (1.1-14-a) y (1.1-14-b) en (1.1-16) podemos escribir la siguiente ecuación de dispersión:

$$\frac{1}{G} = \sum_j (\Omega_j/2E_j) \operatorname{tanh}(E_j/2T) \quad (1.1-17)$$

Resulta interesante comparar este resultado con el obtenido para un sólido superconductor³³⁾, (ver Apéndice B):

$$\frac{1}{G} = 2 \int_0^{\hbar\omega_{cr}} \frac{d\varepsilon}{2E} \operatorname{tanh}(E/2T) \quad (1.1-18)$$

donde ω_{cr} fija el punto de corte de la interacción, es decir que para $\varepsilon > \omega_{cr}$, el término de interacción se anula.

La analogía existente entre la física de problemas de sistemas finitos con la de sistemas extendidos, se pone en evidencia a partir de la confrontación de las expresiones (1.1-17) y (1.1-18).

Propiedades Termodinámicas del sistema

Como habíamos anticipado, calcularemos los números de ocupación térmicos, $f_j(T)$, minimizando la energía libre del sistema. Revisemos entonces algunos conceptos de la Mecánica Estadística en el conjunto gran canónico.

La condición de equilibrio en el conjunto gran canónico, para una temperatura T y un potencial químico λ , queda determinada por la distribución de máxima entropía, S . Esta condición trae aparejado como requisito que, en el equilibrio térmico, el gran potencial termodinámico, Ω , sea mínimo, siendo Ω :

$$\begin{aligned}\Omega &= E_0 - TS - \lambda N_0 = \\ &= F - \lambda N_0\end{aligned}\tag{1.1-19}$$

donde E_0 es la energía media del núcleo, N_0 el número medio de partículas, F la energía libre, y S la entropía, calculados con la ayuda del operador densidad, $\hat{\rho}$:

$$E_0 = \text{Tr} (\hat{\rho} \hat{H})\tag{1.1-20}$$

$$N_0 = \text{Tr} (\hat{\rho} \hat{N})\tag{1.1-21}$$

$$S = - \text{Tr} (\hat{\rho} \ln \hat{\rho})\tag{1.1-22}$$

La minimización del gran potencial termodinámico, Ω , se realiza derivando funcionalmente éste con respecto al operador densidad, la condición de estabilidad frente a fluctuaciones de origen térmico, exige que la segunda derivada funcional sea

positiva:

$$\delta\Omega / \delta\rho = 0 \quad (1.1-23-a)$$

$$\delta^2\Omega / \delta\rho^2 > 0 \quad (1.1-23-b)$$

Estos requisitos llevan a la solución bien conocida:

$$\hat{\rho} = Z^{-1} \exp [-\beta(H-\lambda N)] \quad (1.1-24)$$

$$Z = \text{Tr} (\exp [-\beta(H-\lambda N)]) \quad (1.1-25)$$

resultando

$$\Omega = - \beta^{-1} \ln Z \quad (1.1-26)$$

Los números de ocupación, correspondientes en este caso a cuasipartículas, se obtienen minimizando el gran potencial termodinámico:

$$\delta\Omega / \delta f_j = 0 \quad (1.1-27)$$

obteniéndose el valor:

$$f_j(T) = 1 / (1 + \exp (\beta E_j)) \quad (1.1-28)$$

Continuando con el cálculo de magnitudes estadísticas calcularemos $\langle N \rangle$ como

$$\langle N \rangle = \partial(\ln Z) / \partial(\lambda\beta) \quad (1.1-29)$$

obteniendo la siguiente expresión para el número medio de

partículas:

$$\langle N \rangle = \sum_j 2\Omega_j \left[U_j^2 f_j + V_j^2 (1 - f_j) \right] \quad (1.1-30)$$

Es importante analizar el comportamiento del factor:

$\left[U_j^2 f_j + V_j^2 (1 - f_j) \right]$ en el límite $T \rightarrow T_c^{2\phi}$. Es fácil comprobar que:

$$\lim_{T \rightarrow T_c} \left[U_j^2 f_j + V_j^2 (1 - f_j) \right] = n_j^F(T) \quad (1.1-31)$$

siendo:

$$n_j^F(T) = 1 / (1 + \exp \beta(\epsilon_j - \lambda)) \quad (1.1-32)$$

De manera que puede pensarse que U_j^2 y V_j^2 representan los números de ocupación debidos a la interacción de apareamiento, mientras que $V_j^2 (1-f_j)$ y $U_j^2 f_j$ son los números de ocupación de partícula y de agujero correspondientes a una superficie de Fermi difundida térmicamente. De manera que las distribuciones de pares correlacionados al alcanzar T_c dan lugar a un sistema de capa abierta con niveles parcialmente ocupados, con número de ocupación $n_j^F(T)$.

Las magnitudes termodinámicas que nos interesarán al discutir la transición de fase son la energía media y el calor específico, dados por:

$$\begin{aligned}
E_0 &= \langle \hat{H} \rangle = \\
&= \sum_{jm} 2\Omega_j \varepsilon_j \left[U_j^2 f_j + V_j^2 (1 - f_j) \right] - \Delta(T)^2/G
\end{aligned}
\tag{1.1-33}$$

$$\begin{aligned}
C &= d\langle \hat{H} \rangle/dT = \\
&= \frac{1}{T^2} \sum_j 2\Omega_j f_j (1 - f_j) E_j^2 + \\
&+ \frac{d\lambda}{dT} \alpha + \Delta(T) \frac{d\Delta(T)}{dT} \beta
\end{aligned}
\tag{1.1-34-a}$$

donde:

$$\begin{aligned}
\alpha &= \left[\sum_j \Omega_j (\varepsilon_j - \lambda) \left\{ \left[\frac{2f_j(1-f_j)}{T} + \frac{(1-2f_j)}{E_j} \right] - 1 \right\} + N_0 \right] \\
\beta &= \left[- \sum_j \Omega_j \left\{ \frac{2f_j(1-f_j)}{T} + \frac{(1-2f_j)}{E_j} \right\} + \frac{2}{G} \right]
\end{aligned}$$

y siendo:

$$d\lambda/dT = [D (T A_1 - 2C_1) - D_1 (T A - 2C)] [2/(T M)]
\tag{1.1-34-b}$$

$$\begin{aligned}
\Delta(T)(d\Delta(T)/dT) &= \\
&= - [D(2D + (T A - 2C)\Delta(T)^2) + D_1(T A_1 - 2C_1)] [2/(T M)]
\end{aligned}
\tag{1.1-34-c}$$

con:

$$M = (T A_1 - 2C_1)^2 + 2D(T A - 2C) + (T A - 2C)^2 \Delta(T)^2$$

$$A = \sum_j \Omega_j (1-2f_j) / E_j^3$$

$$C = \sum_j \Omega_j (1-2f_j) / E_j^2$$

$$D = \sum_j \Omega_j (1-2f_j)$$

$$A_1 = \sum_j \Omega_j (1-2f_j) (\epsilon_j - \lambda) / E_j^3$$

$$C_1 = \sum_j \Omega_j (1-2f_j) (\epsilon_j - \lambda) / E_j^2$$

$$D_1 = \sum_j \Omega_j (1-2f_j) (\epsilon_j - \lambda)$$

La expresión (1.1-33) muestra claramente que, para $T \rightarrow T_c$, $\Delta(T)$ tiende a cero en forma continua, de manera que E es continua a la temperatura de transición; mientras que (1.1-34-a) muestra una discontinuidad a la temperatura de transición debido al término que acompaña a " $\Delta (d\Delta / dT)$ ". Esta es una muestra de la existencia de una transición de fase de segundo orden.

Una estimación cruda del valor de T_c , indica que este es del orden de $\Delta(T=0) / 2$.

Para concluir con el estudio del formalismo, digamos que el colapso del gap, responsable de la transición de fase, se debe al carácter de "anti-apareamiento" del rearrreglo térmico de las partículas en los niveles de partícula independiente.

1.B- Formalismo BCS térmico. Interacción no Separable.

Para corroborar los aspectos generales descriptos para el caso sencillo de una fuerza separable, trataremos el problema más general de una fuerza no separable, siguiendo para ello el formalismo de Baranger³⁰ el cual es extendido a temperatura finita.

Partimos del Hamiltoniano general:

$$\hat{H} = \hat{H}_{sp} + \hat{H}_i \quad (1.1-35-a)$$

$$H_{sp} = \sum \epsilon_\alpha a_\alpha^\dagger a_\alpha \quad (1.1-35-b)$$

$$H_i = \sum_{\alpha\beta\delta\gamma} v_{\alpha\beta\delta\gamma} a_\alpha^\dagger a_\beta^\dagger a_\gamma a_\delta \quad (1.1-35-c)$$

donde ϵ_α es la energía de partícula independiente, a_α^\dagger (a_α) es el operador que crea (destruye) un fermión en el estado α , y $v_{\alpha\beta\delta\gamma}$ representa la interacción, y es tal que respeta las siguientes relaciones de antisimetría:

$$v_{\alpha\beta\delta\gamma} = -v_{\beta\alpha\delta\gamma} = -v_{\alpha\beta\gamma\delta} = v_{\beta\alpha\gamma\delta} \quad (1.1-36)$$

Vamos a escribir H_i de manera que exhiba sus propiedades de invarianza frente a rotaciones y frente a reflexiones. Esto es posible si se acoplan dos partículas, digamos α y β , a momento angular J , y las otras dos a momento angular J , también. De esta forma:

$$v_{\alpha\beta\delta\gamma} = - (1/2) \sum_{J M} G(\alpha\beta\delta\gamma) \langle j_{\alpha} m_{\alpha} j_{\beta} m_{\beta} | J M \rangle \langle j_{\gamma} m_{\gamma} j_{\delta} m_{\delta} | J M \rangle$$

(1.1-37)

donde los $\langle | \rangle$ son coeficientes de recoplamiento.

A partir de exigir que H_i sea hermítico e invariante frente a inversiones temporales surge que:

$$\begin{aligned} G(abcdJ) &= G(cdabJ) \\ &= -\vartheta(abJ) G(bacdJ) \\ &= -\vartheta(cdJ) G(abdcJ) \\ &= \vartheta(abdcJ) G(badcJ) \end{aligned}$$

(1.1-38)

siendo:

$$\vartheta(abJ) = (-)^{j_a + j_b + J}$$

(1.1-39)

La relación entre G y los elementos de matriz de H_i en los cálculos del modelo de capas es:

$$\langle abJM | H | cdJM \rangle = -\sigma_{ab} \sigma_{cd} G(abcdJ)$$

(1.1-40-a)

$$\sigma_{ab} = \begin{cases} 1 & \text{si } a = b \\ \sqrt{2} & \text{si } a \neq b \end{cases}$$

(1.1-40-b)

Pero no hay razón para acoplar α y β juntos, y γ y δ juntos. También puede haber acoplamientos α y γ a $J'M'$, β y δ a $J'M'$; o α y δ a $J''M''$, y β y γ a $J''M''$. Esto conduce a definir F :

$$v_{\alpha\beta\delta\gamma} = - (1/2) \sum_{J'M'} F(\alpha\gamma\delta\beta J') s_{\gamma} \langle j_{\alpha} m_{\alpha} j_{\gamma} m_{\gamma} | J' M' \rangle$$

$$s_{\beta} \langle j_{\delta} m_{\delta} j_{\beta} \bar{m}_{\beta} | J' M' \rangle$$

(1.1-41-a)

$$v_{\alpha\beta\delta\gamma} = (1/2) \sum_{J''M''} F(\alpha\delta\gamma\beta J'') s_{\delta} \langle j_{\alpha} m_{\alpha} j_{\delta} m_{\delta} | J'' M'' \rangle$$

$$s_{\beta} \langle j_{\gamma} m_{\gamma} j_{\beta} m_{\beta} | J'' M'' \rangle$$

(1.1-41-b)

con

$$s_{\gamma} = (-)^{j_{\gamma} - m_{\gamma}}$$

$$\bar{m}_{\gamma} = - m_{\gamma}$$

La relación de F con G involucra un coeficiente de Racah:

$$F(\alpha\beta\delta\gamma J') = \sum_J (2J+1) W(j_{\alpha} j_{\beta} j_{\gamma} j_{\delta}; JJ') G(\beta\alpha\gamma\delta J)$$

(1.1-42)

y respeta las siguientes propiedades de simetría:

$$F(acdbJ') = F(dbacJ') = \theta(abcd)F(cabdJ') \quad (1.1-43)$$

Siguiendo las mismas prescripciones que para una fuerza separable, trabajaremos en la base de cuasipartículas; y teniendo en cuenta que el operador número, \hat{N} , no conmuta con el Hamiltoniano, \hat{H} , introduciremos un multiplicador de Lagrange para ajustar el número medio de partículas y trabajaremos con:

$$\hat{H} = \hat{H} - \lambda \hat{N} \quad (1.1-44)$$

Transformando \hat{H} a la nueva base y usando el Teorema de Wick³²⁾ resulta:

$$H_{00} = \sum_j \left\{ \left(\eta_j + \frac{1}{2} \mu_j \right) 2\Omega_j \left[U_j^2 f_j + v_j^2 (1 - f_j) \right] - \frac{1}{2} \Delta_j(T) U_j v_j (1 - 2f_j) \right\}$$

$$H_{11} = \sum_{j\bar{m}} \left\{ \eta_j \left[U_j^2 - v_j^2 \right] + 2 \Delta(T) U_j v_j \right\} :n_j:$$

$$H_{20} = \sum_{j\bar{m}} \left\{ (-1/2) \Delta_j(T) \left[U_j^2 - v_j^2 \right] + \eta_j U_j v_j \right\} (P_j^\dagger + P_j)$$

$$H_{\text{resto}} = \sum_{\alpha\beta\delta\gamma} v_{\alpha\beta\delta\gamma} :a_\alpha^\dagger a_\beta^\dagger a_\gamma a_\delta:$$

(1.1-45)

donde hemos empleado la notación usada en el punto anterior.

El término H_{resto} representa la interacción residual entre cuasipartículas, la que trataremos en el siguiente Capítulo.

En (1.1-45) hemos introducido:

$$\Delta_j(T) = \sum_i G(jjii0) (j+1/2)^{-1/2} (i+1/2)^{1/2} U_j v_j \quad (1.1-46)$$

$$\mu_j = 2(2j+1)^{-1} \sum_i (2J+1) \left[U_i^2 f_i + v_i^2 (1 - f_i) \right] G(jijjJ) \quad (1.1-47)$$

$$\eta_j = \epsilon_j - \mu_j - \lambda \quad (1.1-48)$$

Los U_j y los V_j son tales que que minimizan H_{00} . De esa condición junto con:

$$U_j^2 + V_j^2 = 1$$

resulta:

$$2U_j^2 = 1 + \eta_j/E_j \quad (1.1-49-a)$$

$$2V_j^2 = 1 - \eta_j/E_j \quad (1.1-49-b)$$

donde:

$$E_j = \sqrt{\eta_j^2 + \Delta_j(T)^2} \quad (1.1-50)$$

Un resultado interesante es el hecho de tener un gap de energía por cada estado, a diferencia de lo que ocurría para una interacción separable. Esto es entendible si se tiene en cuenta que, esta última se obtiene de la primera dándole el mismo peso a todos los elementos de matriz de la interacción, resultando un gap promedio único.

Utilizando los conceptos de Mecánica Estadística descriptos en el punto anterior:

$$f_j(T) = 1 / (1 + \exp(\beta E_j)) \quad (1.1-51)$$

y:

$$\langle N \rangle = \sum_j 2\Omega_j \left[U_j^2 f_j + V_j^2 (1 - f_j) \right] \quad (1.1-52)$$

cuando T se aproxima a T_c , sigue siendo válido:

$$\lim_{T \rightarrow T_c} \left[U_j^2 f_j + V_j^2 (1 - f_j) \right] = n_j^F(T) \quad (1.1-53)$$

pero con la corrección de partícula independiente, dada por μ_j .

Al igual que antes, las magnitudes termodinámicas que nos interesan en el tratamiento de la transición de fase son la energía media del sistema y el calor específico; las que ahora tienen la forma:

$$E_o = \sum_j \left\{ \left(\eta_j + \frac{1}{2} \mu_j \right) 2\Omega_j \left[U_j^2 f_j + V_j^2 (1 - f_j) \right] - \frac{1}{2} \Delta_j(T) U_j V_j (1 - 2f_j) \right\} \quad (1.1-54)$$

$$C = d\langle H \rangle / dT$$

Es fácil comprobar que si tomamos:

$$G(jjii'J) = \delta_{jj'} \delta_{ii'} \delta_{jo} (j+1/2)^{1/2} (i+1/2)^{1/2} \quad (1.1-56)$$

$$\text{y } F(jjii'J) = 0$$

obtenemos los resultados hallados en el punto 1.A.

En el Capitulo III utilizaremos estos resultados.

1.C- Formalismo RPA Térmico para cuasipartículas.

El colapso del gap, no sólo produce modificaciones en el estado fundamental, sino que cambia las propiedades de los estados excitados descritos por encima de él. Este hecho se observa al estudiar las contribuciones coherentes de dos cuasipartículas, las cuales se ven inhibidas al aumentar la temperatura.

Para estudiar los estados colectivos originados por la interacción de apareamiento, el tratamiento convencional es diagonalizar las contribuciones de dos cuasipartículas (términos H_{40} y H_{22} de la expresión (1.1-12), a través del formalismo de la RPA³⁵⁾, extendido a Temperatura Finita. (En el Apéndice D hemos hecho una revisión de este formalismo a temperatura cero).

Siguiendo el procedimiento RPA standard, definimos los bosones:

$$\Gamma_n^\dagger = \sum_j (X_{jn} P_j^\dagger - Y_{jn} P_j) \quad (1.1-57-a)$$

$$\Gamma_n = (\Gamma_n^\dagger)^\dagger \quad (1.1-57-b)$$

obviamente:

$$[\Gamma_n, \Gamma_{n'}^\dagger] = \delta_{nn'} \quad (1.1-58)$$

siendo P_j^\dagger el operador de creación de dos cuasipartículas descrito por (1.1-13-b), y X_{jn} (Y_{jn}) las amplitudes

"adelantadas"(atrasadas) del bosón.

Como es sabido, la ecuación que determina el espectro de excitaciones colectivas, ω_n , es:

$$[H_{RPA}, \Gamma_n^\dagger] = \omega_n \Gamma_n^\dagger \quad (1.1-59)$$

donde hemos tomado:

$$H_{RPA} = H_{BCS} + H_{22} + H_{40} \quad (1.1-60-a)$$

siendo:

$$H = H_{00} + \sum_j E_j |n_j| \quad (1.1-60-b)$$

En lo que sigue nos referiremos al caso de la interacción descrita en el punto 1.A. Es decir que trabajaremos con una interacción separable.

La ecuación (1.1-59) conduce a:

$$\left| \begin{array}{cc} -1+G \sum_j \frac{2\Omega_j E_j (U_j^2 - V_j^2)(1-2f_j)}{4E_j^2 - \omega_n^2} & G\omega_n \sum_j \frac{\Omega_j (U_j^2 - V_j^2)(1-2f_j)^2}{4E_j^2 - \omega_n^2} \\ G\omega_n \sum_j \frac{\Omega_j (U_j^2 - V_j^2)(1-2f_j^2)}{4E_j^2 - \omega_n^2} & -1+G \sum_j \frac{2\Omega_j E_j (1-2f_j)}{4E_j^2 - \omega_n^2} \end{array} \right| = 0 \quad (1.1-61)$$

La resolución de la ecuación de dispersión (1.1-61)

proporciona el espectro de excitaciones colectivas del sistema.

La condición de normalización para los bosones, (1.1-58), puede escribirse como:

$$\sum_j (X_{jn}^2 - Y_{jn}^2) (1-2f_j) 2\Omega_j = 1 \quad (1.1-62)$$

Las amplitudes X_{jn} y Y_{jn} pueden escribirse como:

$$X_{jn} = \Lambda_n [a_n (U_j^2 - V_j^2) - b_n] / (2E_j - \omega_n) \quad (1.1-63-a)$$

$$Y_{jn} = \Lambda_n [a_n (U_j^2 - V_j^2) + b_n] / (2E_j + \omega_n) \quad (1.1-63-b)$$

siendo:

$$a_n = G\omega_n \sum_j \frac{\Omega_j (U_j^2 - V_j^2) (1-2f_j)}{4E_j^2 - \omega_n^2} \quad (1.1-64-a)$$

$$b_n = -1 + G \sum_j \frac{2\Omega_j E_j (U_j^2 - V_j^2) (1-2f_j)}{4E_j^2 - \omega_n^2} \quad (1.1-64-b)$$

y con Λ_n obtenida a partir de (1.1-62):

$$\Lambda_n^{-2} = \sum_j \Omega_j (1-2f_j) \left[\left[\frac{a_n (U_j - V_j) - b_n}{2E_j - \omega_n} \right]^2 - \left[\frac{a_n (U_j - V_j) + b_n}{2E_j + \omega_n} \right]^2 \right] \quad (1.1-65)$$

Obtenido el espectro de excitaciones de dos cuasipartículas,

y las amplitudes adelantadas y retrasadas del fonón , podemos calcular la probabilidad de transferencia de dos cuasipartículas. Esta proporcionará una muestra clara de la inhibición de los efectos colectivos con el aumento de la temperatura. Para ello invertimos la expresión (1.1-57-a). El resultado será:

$$P_j^\dagger = 2\Omega_j(1-f_j) \sum_n (X_{jn} \Gamma_n^\dagger + Y_{jn} \Gamma_n) \quad (1.1-66)$$

El operador de transferencia de un par de cuasipartículas lo definiremos como:

$$\tau_j = \sum_j a_{jm}^\dagger a_{jm}^\dagger \quad (1.1-67)$$

el cual escrito en la base de cuasipartículas resulta:

$$\tau_j = \tau_j^{\text{par}} + \tau_j^{\text{qp}} + \tau_j^0 \quad (1.1-68-a)$$

$$\tau_j^{\text{par}} = U_j^2 P_j^\dagger - V_j^2 P_j \quad (1.1-68-b)$$

$$\tau_j^{\text{qp}} = - U_j V_j n_j \quad (1.1-68-c)$$

$$\tau_j^0 = U_j V_j \Omega_j \quad (1.1-68-d)$$

El único término que nos interesa es τ_j^{par} , el cual escrito en función de los bosones Γ_n y Γ_n^\dagger , resulta:

$$\tau_j = 2\Omega_j(1-2f_j) \sum_n \left[(U_j^2 X_{jn} - V_j^2 Y_{jn}) \Gamma_n^\dagger + (U_j^2 Y_{jn} - V_j^2 X_{jn}) \Gamma_n \right] \quad (1.1-69)$$

De manera que el elemento de matriz que conecta el estado fundamental, con el estado de un bosón será:

$$\langle n=1 \mid \tau_j \mid n=0 \rangle = 2\Omega_j(1-2f_j)(U_j^2 X_{jn} - V_j^2 Y_{jn}) \quad (1.1-70)$$

Claramente el factor $(1-2f_j)$ inhibe la transferencia para estados cercanos al nivel de Fermi cerca de T_c .

Hemos tratado el problema de las excitaciones coherentes de dos cuasipartículas, aproximándolas a través del formalismo RPA a temperatura finita, al espectro de un gas de fonones. Es decir que del Hamiltoniano:

$$H = H_{00} + H_{BCS} + H_{22} + H_{40} \quad (1.1-71)$$

hemos pasado a:

$$H = H_{ORPA} + \sum_n \omega_n \Gamma_n^\dagger \Gamma_n \quad (1.1-72)$$

donde:

$$H_{ORPA} = - \sum_{jn} 2\Omega_j \omega_n Y_{jn}^2 (1-2f_j) \quad (1.1-73)$$

De esta forma, el sistema presenta un comportamiento similar al de un gas de fotones:

$$\langle H \rangle = H_{ORPA} + \sum_n \omega_n / (1 - \exp(-\beta\omega_n)) \quad (1.1-74)$$

y el calor específico será:

$$C = \frac{d\langle H \rangle}{dT} \quad (1.1-75)$$

Esta derivada no puede ser hecha analíticamente, ya que no poseemos una expresión explícita de la dependencia de ω_n con T , nos conformaremos con el análisis de resultados numéricos para un núcleo real como el ^{116}Sn .

2.A- Descripción de las excitaciones de
carácter fermiónico en la fase normal.

Hemos visto que el gap, $\Delta(T)$, depende de la temperatura, y que a una cierta temperatura, T_c , colapsa. Para temperaturas por encima de T_c , el sistema de capa abierta va a desplegar características similares a uno normal, pero con una superficie de Fermi difundida. Una muestra clara es el hecho que:

$$\lim_{T \rightarrow T_c} \left[U_j^2 f_j + V_j^2 (1 - f_j) \right] = n_j^F(T)$$

ya discutido en el punto 1.A.

En la fase normal, pues, los grados de libertad de partícula independiente, se corresponden a los de un sistema de capa abierta parcialmente llena con fermiones que obedecen una estadística de Fermi-Dirac. Es decir que la energía del sistema es:

$$\langle H \rangle = \sum_j 2\Omega_j \epsilon_j n_j^F(T) \quad (1.2-1)$$

$$\langle N \rangle = \sum_j 2\Omega_j n_j^F(T) \quad (1.2-2)$$

$$C_{\text{Fermi}} = \frac{1}{T^2} \left\{ \sum_j 2\Omega_j \epsilon_j^2 n_j^F(T) (1 - n_j^F(T)) - \left[\sum_j 2\Omega_j \epsilon_j n_j^F(T) (1 - n_j^F(T)) \right]^2 / \sum_j 2\Omega_j n_j^F(T) (1 - n_j^F(T)) \right\} \quad (1.2-3)$$

donde:

$$n_j^F(T) = 1 / (1 + \exp(\beta(\epsilon_j - \lambda))) \quad (1.2-4)$$

siendo ϵ_j las energías de partícula independiente.

En esta región, la energía de excitación, E^* ($\langle H(T) \rangle - \langle H(0) \rangle$), se aproxima a la de un gas de Fermi sin interacción³⁹⁾:

$$E^* = a(T) T^2 \quad (1.2-5)$$

donde $a(T)$, es el parámetro de densidad de niveles, el cual estudiaremos en detalle en el Capítulo III.

Discutiremos este efecto al analizar los resultados numéricos obtenidos para ^{116}Sn .

2.B- Descripción de las excitaciones de
carácter bosónico en la fase normal.

Al igual que en la fase superfluida, trataremos las excitaciones colectivas del sistema a través del formalismo RPA térmico, es decir, suponiendo que éstas se comportan como bosones. El formalismo que describiremos es extensión de la RPA ordinaria para el canal de partícula-partícula a $T=0$ ³⁷⁾.

Para describir las excitaciones del sistema, deberemos incluir dos tipos de fonones, los de adición y los de remoción:

$$\Gamma_{n,a}^\dagger = \sum_{\omega} a_n(\omega) B^\dagger(\omega) + \sum_{\nu} a_n(\nu) B(\nu) \quad (1.2-6-a)$$

$$\Gamma_{n,r}^\dagger = \sum_{\omega} r_n(\omega) B(\omega) + \sum_{\nu} r_n(\nu) B^\dagger(\nu) \quad (1.2-6-b)$$

el subíndice a(r) indica "adición"("remoción"), indicando ω estados de partícula, y ν estados de agujero. Los operadores $B^\dagger(\omega)$, y $B^\dagger(\nu)$, están dados por:

$$B^\dagger(\omega) = \sum_{m>0} a_{\omega m}^\dagger a_{\omega m}^\dagger \quad (1.2-7-a)$$

$$B^\dagger(\nu) = \sum_{m>0} a_{\nu m}^- a_{\nu m} \quad (1.2-7-b)$$

Los fonones $\Gamma_{n,a}^\dagger$ y $\Gamma_{n,r}^\dagger$ satisfacen las propiedades familiares de conmutación:

$$[\Gamma_{n,a}, \Gamma_{n',a}^\dagger] = \delta_{nn'} \quad (1.2-8-a)$$

$$[\Gamma_{n,r}, \Gamma_{n',r}^\dagger] = \delta_{nn'} \quad (1.2-8-b)$$

De esta manera, tendremos dos contribuciones al espectro de energías colectivas: las de adición ($\omega_{n,a}$), y las de remoción ($\omega_{n,r}$). Estas se obtienen a partir de las ecuaciones usuales de movimiento:

$$[H, \Gamma_{n,a}^\dagger] = W_{n,a} \Gamma_{n,a}^\dagger \quad (1.2-9-a)$$

$$[H, \Gamma_{n,r}^\dagger] = W_{n,r} \Gamma_{n,r}^\dagger \quad (1.2-9-b)$$

las que dan lugar a la siguientes ecuaciones de dispersión:

$$\sum_{\omega} \frac{\Omega_{\omega} (1-2n_{\omega})}{2e_{\omega} - W_{n,a}} - \sum_{\nu} \frac{\Omega_{\nu} (1-2n_{\nu})}{2e_{\nu} + W_{n,a}} = \frac{1}{G} \quad (1.2-10-a)$$

$$\sum_{\omega} \frac{\Omega_{\omega} (1-2n_{\omega})}{2e_{\omega} + W_{n,r}} - \sum_{\nu} \frac{\Omega_{\nu} (1-2n_{\nu})}{2e_{\nu} - W_{n,r}} = \frac{1}{G} \quad (1.2-10-b)$$

donde $e = \epsilon - \lambda$, y $e = \epsilon + \lambda$.

Las condiciones (1.2-8-a) y (1.2-8-b) dan lugar a las siguientes relaciones de normalización:

$$\sum_{\omega} a_n(\omega) a_{n'}(\omega) (1-2n_{\omega}) \Omega_{\omega} + \sum_{\nu} a_n(\nu) a_{n'}(\nu) (1-2n_{\nu}) \Omega_{\nu} = \delta_{nn'} \quad (1.2-11-a)$$

$$-\sum_{\omega} r_n(\omega) r_{n'}(\omega) (1-2n_{\omega}) \Omega_{\omega} - \sum_{\nu} r_n(\nu) r_{n'}(\nu) (1-2n_{\nu}) \Omega_{\nu} = \delta_{nn'} \quad (1.2-11-b)$$

pudiendo expresarse:

$$a_n(\omega) = \Lambda_n(a)/(2\epsilon_\omega - W_{n,\alpha}) \quad (1.2-12-a)$$

$$a_n(\nu) = -\Lambda_n(a)/(2\epsilon_\nu + W_{n,\alpha}) \quad (1.2-12-b)$$

$$r_n(\omega) = -\Lambda_n(r)/(2\epsilon_\omega + W_{n,r}) \quad (1.2-12-c)$$

$$r_n(\nu) = \Lambda_n(r)/(2\epsilon_\nu - W_{n,r}) \quad (1.2-12-d)$$

y donde, gracias a (1.2-11), podemos escribir:

$$\Lambda_n^{-2}(a) = \sum_\omega \Omega_\omega (1-2n_\omega)/(2\epsilon_\omega - W_{n,\alpha})^2 + \sum_\nu \Omega_\nu (1-2n_\nu)/(2\epsilon_\nu + W_{n,\alpha})^2 \quad (1.2-13-a)$$

$$\Lambda_n^{-2}(r) = -\sum_\omega \Omega_\omega (1-2n_\omega)/(2\epsilon_\omega + W_{n,r})^2 - \sum_\nu \Omega_\nu (1-2n_\nu)/(2\epsilon_\nu - W_{n,r})^2 \quad (1.2-13-b)$$

En función de los nuevos operadores bosónicos, podemos reescribir el Hamiltoniano como:

$$H = H_{ORPA} + \sum_n W_{n,\alpha} \Gamma_{n,\alpha}^\dagger \Gamma_{n,\alpha} + \sum_n W_{n,r} \Gamma_{n,r}^\dagger \Gamma_{n,r} \quad (1.2-14-a)$$

donde:

$$H_{ORPA} = H_{Osp} - \sum_{\omega,n} 2\Omega_\omega W_{n,r} r_n^2(\omega) (1-2n_\omega) - \sum_{\nu,n} 2\Omega_\nu W_{n,\alpha} a_n^2(\nu) (1-2n_\nu) \quad (1.2-14-b)$$

y la energía media del sistema será:

$$\langle H \rangle = H_{ORPA} + \sum_n W_{n,a} / (1 - \exp(-\beta W_{n,a})) + \sum_n W_{n,r} / (1 - \exp(-\beta W_{n,r})) \quad (1.2-15)$$

obteniendo el calor específico simplemente derivando (1.2-15) respecto de la temperatura:

$$C = d\langle H \rangle / dT \quad (1.2-16)$$

3. Descripción de la Transición de Fase.

Uno de los problemas más interesantes en Física, es el relacionado con las teorías estadísticas de ecuaciones de estado y transiciones de fase. Estos problemas son importantes tanto en conexión con las propiedades de la materia (como la teoría de líquidos) así como desde el punto de vista académico, en conexión con las discontinuidades en las funciones termodinámicas en los puntos de transición de fase.

Por lo que vimos en el punto 1.A y 1.B, el colapso del gap de apareamiento, da lugar a una transición de segunda especie, puesta de manifiesto por la discontinuidad observada en el calor específico. Cambios de fase de segunda especie son también el paso de un estado superconductor, en un metal, a su fase normal (en ausencia de campo magnético externo), y el paso del Helio superfluido a Helio líquido; en ambos casos el sistema cambia su simetría de manera continua, pero adquiriendo propiedades cualitativamente distintas en el punto de transición. El hecho de que el estado no experimente un salto en el punto de cambio de fase de segunda especie, conduce a que las funciones termodinámicas del sistema (entropía, energía, etc.) se conserven continuas en el punto de transición, por consiguiente no van acompañadas de absorción o emisión de calor; sin embargo las derivadas de las funciones termodinámicas (por ejemplo, la capacidad calorífica del sistema) experimentan un salto en el punto de transición.

Cabe destacar que estamos hablando de transiciones de fase en

un sistema finito. Por ello es interesante una comparación con sistemas extendidos, por ejemplo, comparando con la teoría de Landau y Ginzburg para transiciones de fase de segunda especie^{7,28)}. Esta teoría construye la energía libre del sistema como función de un parámetro de orden, el que se anula en la fase más desordenada; los mínimos de la energía libre son los que determinan el valor de dicho parámetro cuando el sistema se encuentra en equilibrio. En el Apéndice C hemos hecho un resumen de los aspectos más importantes de esta teoría, en particular desarrollamos su aplicación al caso de una transición de segundo orden para un sistema superconductor en ausencia de campo magnético externo. El resultado de este cálculo predice la continuidad de la energía libre y de la entropía del sistema a la temperatura de transición, y la discontinuidad del calor específico en ese punto, esta discontinuidad vale:

$$C_s - C_n = V \alpha^2 T_c / b \quad (1.3-1)$$

$$\alpha = 6\pi^2 T_c / 7\zeta(3)\mu = 7.04 T_c / \mu \quad (1.3-2)$$

$$b = \alpha T_c / n \quad (1.3-3)$$

donde n , es la densidad en el número de partículas ($n = \rho/m$), y μ es el potencial químico a $T=0$ MeV:

$$n = p_F^3 / 3\pi^2 \hbar^3 \quad (1.3-4)$$

$$\mu = p_F^2 / 2m \quad (1.3-5)$$

Compararemos el resultado (1.3-1), hallado en el caso de

sistemas extendidos, con el obtenido para un sistema finito como lo es el núcleo ^{110}Sn .

Aplicaciones

El formalismo desarrollado ha sido aplicado a un núcleo real: ^{110}Sn . Hemos considerado la capa cerrada de 50 neutrones como carozo inerte, y los 16 neutrones restantes interactuando a través de una fuerza de apareamiento separable, con $G = 0.16$ MeV.

En la Figura 2 mostramos el comportamiento para el gap de apareamiento, poniéndose en evidencia el colapso del mismo a una temperatura del orden de $\Delta(T=0)/2$ (para nuestro sistema $T_c = 0.845$ MeV siendo $\Delta(0) = 1.558$ MeV). Puede apreciarse que el comportamiento del gap con la temperatura se asemeja al comportamiento de los parámetros de orden utilizados en la teoría de Landau-Ginzburg, reflejando una clara analogía con la física de sistemas extendidos.

El comportamiento de las raíces de la RPA se muestran, a ambos lados de la transición de fase, en la Figura 3. Se puede observar el colapso de la primer raíz de la RPA a la temperatura crítica, comportamiento semejante al del gap, poniendo nuevamente de manifiesto la inhibición de las contribuciones de dos cuasipartículas. Por encima de la temperatura crítica, se observa la separación de los modos de adición y de remoción del sistema.

En la Figura 4, se muestra la energía de excitación, correspondiente a los grados de libertad fermiónico y bosónico,

como función de la temperatura. Se observa, como ya anticipamos, la continuidad de ésta en el punto de transición. Si recordamos la expresión (1.1-33) para la energía de excitación fermiónica, y tenemos en cuenta que para la temperatura crítica:

$$\lim_{T \rightarrow T_c} \Delta(T) = 0$$

$$\lim_{T \rightarrow T_c} \left[U_j^2 f_j + V_j^2 (1 - f_j) \right] = n_j^F(T)$$

es fácil ver que la energía de excitación fermiónica es continua en el punto de transición. Un análisis numérico brinda un resultado similar para la contribución bosónica a la energía de excitación.

La Figura 5, muestra el comportamiento del calor específico como función de la temperatura. Su forma recuerda a los conocidos puntos "λ", el valor de $(C_e - C_n)$ para nuestro sistema es de aproximadamente 30 unidades, lo cual difiere poco de lo predicho por la Teoría de Landau-Ginzburg para sistemas extendidos, que es del orden de 35 unidades. Lo cual muestra una buena correspondencia entre los resultados hallados en sistemas finitos con los conocidos de sistemas extendidos.

Conclusiones

Hemos tratados la interacción de apareamiento nuclear en el rango de temperaturas $0 \text{ MeV} \leq T \leq \text{MeV}$. Comenzamos haciendo una revisión del formalismo BCS térmico, obteniendo el gap de apareamiento, $\Delta(T)$, como función de la temperatura, y viendo que éste colapsa a una temperatura del orden de $\Delta(T=0)/2$; comparamos los resultados analíticos (en el Capítulo III compararemos los resultados numéricos) obtenidos a partir de una fuerza separable con los que provienen de una fuerza no separable, notando que éstos son equivalentes. Para completar el estudio a temperaturas por debajo de T_c , incluimos las correlaciones de dos cuasipartículas a través del formalismo de la FTRPA, observando también una inhibición de éstas con la temperatura, cayendo la primer energía del espectro de excitaciones colectivas de la misma forma que el gap.

Para temperaturas por encima de T_c el sistema despliega las propiedades de un sistema fermiónico normal, es decir, la energía de excitación correspondiente es una función cuadrática de la temperatura, y en consecuencia, el calor específico es lineal en T . Las excitaciones colectivas de dos partículas, descritas por la FTRPA, muestran dos tipos de contribuciones, de adición y de remoción; la energía de excitación bosónica resulta lineal en T , siendo el calor específico constante. Finalmente debe destacarse que el calor específico total del sistema, a uno y otro

lado de la transición, muestra un comportamiento similar al de los "puntos- λ ", bien descritos a través de una teoría fenomenológica como la teoría de Landau-Ginzburg para transiciones de fase.