

T. L.  
8

UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA  
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS  
DEPARTAMENTO DE FÍSICA

ESTRUCTURA NUCLEAR A TEMPERATURA FINITA

TESIS DOCTORAL

MARTA REBOIRO

OSVALDO E. CIVITARESE

DIRECTOR

LA PLATA, 1989.

A Miguel Angel  
y a mis padres.

## INDICE

Introducción.....	1
Capítulo I.	
Interacción de Apareamiento Nuclear a Temperatura Finita.....	9
Introducción.....	10
1.1 Descripción de la Interacción de de Apareamiento Nuclear en la fase superconductora.....	14
1.1.A- Formalismo BCS térmico. Interacción separable.....	14
1.1.B- Formalismo BCS térmico. Interacción no separable.....	26
1.1.C- Formalismo RPA térmico para cuasipartículas.....	32
1.2.A- Descripción de las excitaciones de carácter fermiónico en la fase normal.....	38
1.2.B- Descripción de las excitaciones de carácter bosónico en la fase normal.....	40
1.3- Descripción de la Transición de Fase.....	44
1.4- Aplicaciones.....	46

1.5-	Conclusiones.....	48
------	-------------------	----

## Capítulo II

	Interaccion Multipolar Separable.....	50
	Introducción.....	51
2.1-	Tratamiento de una Interacción Multipolar Separable a través del formalismo de la FTRPA.....	54
2.1.A-	Núcleos no superconductores.....	55
2.1.B-	Núcleos superconductores.....	67
2.2-	Tratamiento de las excitaciones colectivas de una interacción no separable a través del formalismo de la FTRPA.....	73
2.3-	Aplicaciones.....	84
2.4-	Conclusiones.....	86

## Capítulo III

	Comportamiento del parámetro de densidad de niveles nuclear.....	88
	Introducción.....	89
3.1-	Formalismo Teórico.....	92
3.1.A-	Sistema finito de fermiones libres.....	95
3.1.B-	Sistema finito de fermiones que interactúan a través de una fuerza de apareamiento nuclear.....	98

3.1.C- Sistema de bosones sin interacción.....	101
3.2- Contribución de los canales de partícula-partícula al parámetro de densidad de niveles bosónico.....	105
3.3- Aplicaciones.....	108
3.4- Conclusiones.....	113
Conclusiones Generales.....	115
Apéndices.....	119
Leyendas de las Tablas.....	156
Tablas.....	157
Leyendas de las Figuras.....	160
Figuras.....	163
Referencias.....	173
Agradecimientos.....	177

## Introducción

El concepto de temperatura nuclear, fue usado por Bethe<sup>1)</sup> en el año 1936 para describir, en forma estadística, el gran número de niveles de energía accesibles para un núcleo pesado excitado, observados a través de reacciones con captura de neutrones lentos ( la densidad de estos niveles es  $10^6$  veces mas grande que la que corresponde a un problema de partícula independiente, para un núcleo con aproximadamente 100 nucleones <sup>2)</sup>).

Para calcular la densidad de niveles, alrededor de una cierta energía de excitación E, Bethe aproximó el problema al de un gas de Fermi con un número finito de partículas A, correspondiente al número de nucleones en el núcleo. En este modelo, el núcleo compuesto corresponde a una amplia mezcla de estados estacionarios, entre los cuales el neutrón puede repartir su energía. El aspecto más interesante de este cálculo es el crecimiento exponencial de la densidad de niveles,  $\rho(E)$ , con la energía de excitación<sup>3)</sup>:

$$\rho(N, Z, E) = \frac{6^{1/4}}{12} \frac{g}{(gE)^{3/4}} \exp \left[ 2(\pi^2 g E / 6)^{1/2} \right] \quad (1)$$

$$g = \frac{3}{2} \frac{A}{\epsilon_F} \quad [\text{MeV}^{-1}]$$

En la actualidad, la información experimental relacionada con

la densidad de niveles, puede extraerse a partir de los datos provenientes del estudio de colisiones con iones pesados<sup>4)</sup>. En este tipo de colisiones la energía del sistema se distribuye entre los nucleones del núcleo compuesto, a diferencia de lo que ocurre con el bombardeo con protones o neutrones que excitan sólo algunos nucleones del blanco. El núcleo excitado, producido de esta manera, alcanza el equilibrio estadístico en un tiempo del orden de  $10^{-21}$  seg., mucho menor que el tiempo de de-excitación<sup>5)</sup>, que es del orden de  $10^{-10}$  seg., lo que justifica un tratamiento estadístico del problema.

Como la cantidad de niveles de energía aumenta exponencialmente con la energía de excitación del sistema, conviene definir la temperatura nuclear como:

$$T^{-1} = \frac{\partial \ln(\rho(E))}{\partial E} \quad (2)$$

donde T tiene unidades de energía.

Esta temperatura nuclear microscópica, es comparable a la obtenida experimentalmente a partir de la observación de la distribución de energía de los productos de evaporación, producidos cuando el núcleo altamente excitado decae por emisión de partículas<sup>2)</sup>, ya que de esta distribución uno puede obtener la densidad de estados del núcleo residual, y de ésta la temperatura de este último.

Trataremos al núcleo pesado altamente excitado como un sistema cuántico, descrito a través de la mecánica estadística en

el conjunto gran canónico. De esta manera, la energía media y el número de partículas, serán los que fijen la temperatura así como el potencial químico en la condición de equilibrio.

El objeto de este trabajo es describir la estructura de un núcleo a energías de excitación que van desde la decena de MeV a alrededor de 100 MeV, donde aún podemos hablar de núcleo sin tener en cuenta la estructura de los nucleones; estas energías corresponden a temperaturas nucleares de 0 a 3 MeV aproximadamente.

Como sabemos, el espectro de baja energía del núcleo está dominado por los efectos de correlación que dan lugar a la interacción de apareamiento y a la aparición de grados de libertad colectivos, de manera que el comportamiento del sistema se aleja del descrito por un gas de Fermi con un número de partículas fijo. En relación a esto nos interesará calcular el parámetro de densidad de niveles, debido a que este observable mostrará más claramente la desviación del sistema nuclear respecto del gas de Fermi. A energías más altas son los grados de partícula independiente los que predominan, siendo aplicable una estadística de Fermi para el sistema<sup>d)</sup>. La conexión entre la Mecánica Estadística y la Termodinámica nos permitirá el estudio de las entropías y los calores específicos nucleares; y a partir de las discontinuidades en las funciones termodinámicas, podemos estudiar las posibles transiciones de fase del sistema.

Algunos resultados que merecen ser discutidos surgen de la comparación con la termodinámica de sistemas extendidos, cuyo comportamiento es bien conocido. Ejemplo de ello es la comparación de la transición de fase de un núcleo superconductor al estado

normal, con la de un metal que a baja temperatura es superconductor, transición que puede ser descripta por la teoría fenomenológica de Landau-Ginzburg<sup>7)</sup>. Las diferencias que discutiremos surgen del hecho de hacer una estadística con un número finito de configuraciones para un número finito de partículas. En este sentido es importante tener en cuenta lo que sucede con las fluctuaciones alrededor de los valores de equilibrio del sistema. Estas serán considerablemente grandes en la zona de la transición de fase, sin embargo cálculos exactos para sistemas de dos niveles muestran la existencia de transiciones de fase, en coincidencia con el comportamiento señalado por las teorías de campo medio<sup>8)</sup>.

La existencia de resonancias gigantes multipolares, constituídas sobre el estado fundamental del núcleo, es bien conocida desde hace varias décadas. La investigación de estas excitaciones colectivas asociadas al estado fundamental del núcleo ha posibilitado una mejor comprensión de la estructura y la dinámica de éste a baja energía. Los centroides de energía<sup>9)</sup> y los anchos<sup>10)</sup> característicos de estas resonancias han sido descriptos en forma precisa, a través de teorías microscópicas como el formalismo de la Aproximación de Fases al Azar (RPA)<sup>11)</sup> o el formalismo de la Función de Respuesta Nuclear<sup>11)</sup>. Los nuevos experimentos de fusión con iones pesados<sup>12)</sup> y reacciones altamente inelásticas<sup>4)</sup>, revelan un comportamiento semejante en núcleos muy excitados; deduciéndose la existencia de estos modos colectivos a partir del espectro de rayos gama producido en el decaimiento del núcleo compuesto y de los fragmentos producidos en la reacción. Nuestro interés será la formulación de una teoría

microscópica que permita la descripción de resonancias gigantes en núcleos altamente excitados, de manera de describir la interdependencia entre los grados de libertad de partícula independiente, la interacción de apareamiento nuclear y las vibraciones colectivas del sistema. Comenzaremos describiendo los grados de libertad de partícula independiente en el formalismo de Hartree-Fock térmico<sup>13)</sup>, a partir de ello trataremos las excitaciones colectivas a través del formalismo de RPA extendido a Temperatura Finita (FTRPA). Sabemos que a temperatura cero y en sistemas normales, como el  $^{208}\text{Pb}$ , al considerar excitaciones multipolares, las configuraciones que entran en juego son sólo aquellas que tienen en cuenta estados de una partícula y de un agujero (p-h), no pudiendo excitarse configuraciones de partícula-partícula (p-p) o de agujero-agujero (h-h); a temperatura distinta de cero, sin embargo, aumentará el número de configuraciones<sup>1)</sup> debido al hecho que el nivel de Fermi se difunde, lo que implica tener en cuenta el canal p-p y h-h, como se observa en la Figura 1. Una buena medida del número de configuraciones a incluir lo proporciona el cálculo de la regla de suma, pues como es conocido su valor se conserva a temperatura distinta de cero<sup>14)</sup>. Tomaremos en cuenta la aproximación cuasibosónica, de manera que los pares a considerar, aclopados a una dada multipolaridad, respetarán una estadística de Bose-Einstein. Es decir que trataremos a las excitaciones colectivas como fonones, de esta forma las cantidades termodinámicas serán las derivadas de una estadística de Planck. Obviamente, el parámetro de densidad de niveles tomará en cuenta el aumento de las configuraciones al aumentar la temperatura, y

las desviaciones del comportamiento de un núcleo respecto de un sistema de fermiones libres<sup>15)</sup>. Es evidente que al aumentar la temperatura, el espectro se fragmentará, dando lugar al corrimiento de los centroides de energía, y a un aumento en el ancho de las resonancias gigantes dado que se abrirán nuevos canales de decaimiento. Conocer los centroides de energía y las probabilidades de transición electromagnéticas del sistema resulta imprescindible como paso previo al cálculo de los parámetros de restitución y de masa de los modos vibracionales<sup>16)</sup> y la comparación con el ya conocido modelo de la gota líquida, posibilitando una extensión de este último a temperatura finita<sup>17)</sup>. Los resultados del formalismo FTRPA son comparables a los obtenidos a partir del formalismo de la Función de Respuesta Lineal a Temperatura Finita<sup>18,19)</sup> en combinación con la ecuación de Bethe-Salpeter<sup>14)</sup>. A partir de este formalismo se puede obtener la función de distribución de intensidad:

$$S(E) = -\frac{\hbar}{\pi} \int_0^{\infty} d\omega \omega \operatorname{Im} R(\omega) \quad (3)$$

donde  $R(\omega)$  es la función de respuesta del sistema en la aproximación de Bethe-Salpeter.

La función de distribución así obtenida, tiene información tanto de los centroides, como de los anchos de las resonancias gigantes, constituyéndose así en un método alternativo al formalismo FTRPA, en especial cuando el cálculo numérico se dificulta debido a la inclusión de un gran número de configuraciones.

Para completar el estudio de los puntos anteriores resulta

importante el análisis del comportamiento del parámetro de densidad de niveles<sup>2)</sup>. Como ya mencionamos, a temperaturas altas las propiedades del núcleo se describen mediante el bien conocido modelo del gas de Fermi con un número finito de partículas. Un aspecto interesante de esa aproximación, es el hecho de obtener un valor constante para el parámetro de densidad de niveles, este efecto es el resultado de considerar un sistema sin interacciones<sup>15)</sup>. Esta descripción, sin embargo, no es aplicable a un amplio rango de energías de excitación, que se corresponden con temperaturas que varían entre 0 y 2 MeV. En este dominio de temperaturas son importantes los efectos de estructura debidos tanto a la interacción de apareamiento (en núcleos superconductores), como a los grados de libertad colectivos del sistema. En este sentido estamos interesados en estudiar la contribución bosónica al parámetro de densidad de niveles, y en relación a ella la competencia entre los canales de partícula-partícula y agujero-agujero con los canales de partícula-agujero como función de la temperatura<sup>20)</sup>.

La respuesta a estos problemas resulta importante en conexión con la gran disponibilidad de resultados experimentales en colisiones altamente inelásticas y en experiencias de fusión con iones pesados. Otro campo de aplicación importante en este momento, es el de la Astrofísica Nuclear, en este sentido una fórmula de masas dependiente de la temperatura, contribuiría a mejorar las predicciones dentro del marco de los formalismos en curso (por ejemplo, para el caso de ecuaciones de estado en el cálculo de las etapas de la evolución estelar).

El trabajo está organizado de la siguiente manera: en el capítulo I trataremos la interacción de apareamiento a temperatura distinta de cero, utilizando el formalismo de Bardeen, Cooper y Shrieffer a temperatura finita (FTBCS) para describir los grados de libertad fermiónicos, y el formalismo FTRPA para describir las contribuciones bosónicas del sistema, describiremos la termodinámica del problema, y en relación a ella, la transición de fase del estado superfluido del núcleo al estado normal, en analogía con lo que sucede en un sistema extendido. Analizaremos los resultados para una fuerza de apareamiento separable en  $^{116}\text{Sn}$ . En el capítulo II estudiaremos una interacción multipolar. Haremos una descripción de las resonancias gigantes montadas sobre estados distintos del fundamental, para ello usaremos el formalismo de la FTRPA, comparando los resultados con los que provienen del formalismo de la función de respuesta lineal a temperatura finita. En el Capítulo III nos ocuparemos del parámetro de densidad de niveles, teniendo en cuenta tanto grados de libertad fermiónicos como bosónicos; en relación a estos últimos analizaremos la competencia entre los canales de partícula-partícula y agujero-agujero con los canales de partícula-agujero como función de la temperatura. Analizaremos las distintas contribuciones, para un núcleo superconductor como el  $^{90}\text{Zn}$ , y para un núcleo normal como el  $^{208}\text{Pb}$ .

El material presentado en el Capítulo I ha sido consignado en la referencia 31, los resultados del Capítulo II se basan en las referencias 17 y 19, y los del Capítulo III forman parte de la referencia 53.

CAPITULO I

Interacción de Apareamiento Nuclear a Temperatura Finita

## Introducción

La noción de "apareamiento" entre partículas en un sistema se remonta a la introducción hecha por Racah<sup>21)</sup> del número cuántico de senioridad en 1942 para estudios atómicos. La idea se desarrolló en forma independiente en estudios de superconductividad en metales en 1957. En 1959, siguiendo las sugerencias de Bohr, Mottelson y Pines<sup>22,23)</sup>, Belayev<sup>24)</sup> desarrolló la primera aplicación detallada, a los modelos nucleares, de la interacción de apareamiento. Fue Mayer quien mostró que las fuerzas atractivas de corto alcance entre nucleones llevaban a la formación de pares estables de partículas con momento angular cero; la energía potencial mutua de dos partículas en el mismo nivel del "shell model" es cuatro veces mayor cuando están acopladas a momento angular cero que cuando están acopladas a momento angular dos; por lo tanto los núcleos con número par de protones y de neutrones tienen estado fundamental con momento angular cero, mientras que el momento angular del núcleo impar, es en principio igual al momento angular del neutrón o del protón no apareado en el esquema del modelo de capas.

La interacción de apareamiento nuclear es responsable de la disminución de la energía del estado fundamental, de manera que este está separado del primer estado excitado por un "gap" de energía mucho mayor que el esperado en el modelo de capas. A esto se debe la variación sistemática que exhiben las energías de ligadura dependiendo de que  $Z$  (número de protones en el núcleo) y

N (número de neutrones en el núcleo), sean pares o impares; pues, como es conocido, en núcleos con Z y N pares la energía de ligadura aumenta en dos veces el gap, mientras que en núcleos con N par y Z impar, o viceversa, el aumento es del orden del gap de energía. Este efecto persiste hasta temperaturas del orden de un MeV, lo cual es confirmado por experiencias de baja energía ( $E^* = 6$  a 10 MeV) en las cuales se mide la dispersión de masa resultante de la colisión inelástica con iones pesados<sup>25)</sup>, en estas reacciones tanto el proyectil como el blanco transfieren gran cantidad de energía cinética de su movimiento relativo a energía interna de excitación; en el tiempo para el cual ambos núcleos están en contacto, en condiciones de transferir masa, las correlaciones de apareamiento han sido destruidas térmicamente, de manera que la probabilidad de transferencia de pares correlacionados es baja, observándose una pequeña dispersión de masas en los canales de salida de la reacción.

En el rango de temperaturas en el cual trabajaremos, los efectos de campo medio persisten, como se puede verificar a través de la gran literatura disponible al respecto<sup>15,26,27)</sup>. De manera que, la distribución de equilibrio con la cual trabajamos en el conjunto gran canónico, la calcularemos en la aproximación de partícula independiente con el formalismo de Hartree-Fock-Bogoliubov térmico (FT-HFB). La teoría FT-HFB implica un sistema de ecuaciones no lineales que deben ser resueltas en forma autoconsistente iterativamente, a igual que lo que ocurre a temperatura cero, con una diferencia esencial: las probabilidades de ocupación de cuasipartícula no son cero. Un hecho interesante a destacar es que estamos aplicando técnicas de la Mecánica

Estadística a un sistema con espectro variable, ya que las energías asociadas a las cuasipartículas cambian con la temperatura. Un resultado importante es la dependencia del gap de apareamiento con la temperatura; a una dada temperatura  $T_c$ , el gap colapsa produciendo una transición de fase desde el estado de pares de partículas acopladas a momento angular cero, fase superconductor, al estado normal<sup>28,29)</sup>. Este comportamiento ya es conocido en la física del estado sólido, sabemos que a una cierta temperatura  $T_c$ , un material superconductor, en ausencia de campo externo, sufre una transición de fase de segundo orden, pasando de la fase superconductor a la fase normal<sup>30)</sup>. Desde el punto de vista teórico la transición de fase está asociada a las discontinuidades en las funciones termodinámicas; en el caso de una transición de segundo orden, la energía es continua a través de la transición, pero no así su derivada respecto de la temperatura, el calor específico. En este sentido es importante comparar los resultados obtenidos para sistemas finitos, como lo son los núcleos, con los ya conocidos para sistemas extendidos, en particular es de destacar la discusión de los resultados obtenidos en relación con la teoría fenomenológica de Landau-Ginzburg para puntos Lambda ( $\lambda$ )<sup>7)</sup>.

Resulta también necesario para la comprensión del núcleo superconductor, el estudio de los efectos colectivos, asociados a la interacción de apareamiento nuclear a temperatura finita, pues estos muestran, nuevamente, evidencia del bloqueo térmico de la interacción, con la consiguiente inhibición de las contribuciones coherentes de los pares de dos cuasipartículas.

En este capítulo estudiaremos la interacción de apareamiento nuclear a temperatura finita en forma microscópica. Tendremos en cuenta las contribuciones fermiónicas a través del formalismo BCS a temperatura finita (FTBCS), y en relación a ellas, discutiremos la transición de fase del estado superconductor al estado normal; por otro lado, trataremos las contribuciones de pares de partículas en forma coherente como grados de libertad bosónicos, descritos a partir del formalismo de la Aproximación de Fases al Azar a Temperatura Finita (FTRPA), tanto por debajo como por encima de la temperatura crítica asociada a la transición de fase. Estos resultados forman parte de la Ref. 31.

El capítulo está ordenado de la siguiente manera: en el primer punto describiremos la fase superconductora, en primer lugar trataremos los grados de libertad fermiónicos, a través del formalismo FTBCS, considerando el caso de una interacción separable y también el de una interacción no separable; luego trataremos los grados de libertad bosónicos a través del formalismo de la FTRPA para cuasipartículas; y finalmente describiremos las magnitudes termodinámicas que nos interesan. En el segundo punto discutiremos qué sucede en la fase normal, para ello discutiremos el problema de un sistema finito de fermiones a temperatura distinta de cero, y luego describiremos las magnitudes termodinámicas de interés. En el tercer punto analizaremos la transición de fase observada y su comparación con lo que sucede en sistemas extendidos. Terminaremos el capítulo con el análisis de los resultados para un núcleo real como  $^{110}\text{Sn}$ . Finalmente se presentarán las conclusiones de este capítulo.

1.1- Descripción de la Interacción de Apareamiento Nuclear  
en la fase superconductora.

En los núcleos esféricos con capas parcialmente llenas, el efecto más importante de la interacción de dos cuerpos, como ya notamos anteriormente, es el producir correlaciones de apareamiento. Debido a esto, su estudio es indispensable para entender la estructura de los núcleos a temperaturas bajas, donde el comportamiento de éste se aleja del de un gas finito de fermiones.

1.1.A- Formalismo BCS térmico. Interacción Separable.

Como ya mencionamos en la introducción, este formalismo fue desarrollado por Bardeen, Cooper y Schrieffer para atacar el problema de los materiales superconductores<sup>32)</sup> a bajas temperaturas y fue aplicado a la física nuclear por la escuela de Copenhagen, y otros posteriormente.

Comenzaremos tratando un Hamiltoniano de la forma:

$$H = \sum_{jm} \epsilon_j a_{jm}^\dagger a_{jm} - G \sum_{\substack{j,m>0 \\ j',m'>0}} a_{jm}^\dagger a_{j'm'}^\dagger a_{j'm} a_{jm} \quad (1.1-1.a)$$

donde: 
$$a_{jm}^\dagger = (-)^{j-m} a_{j-m}^\dagger \quad (1.1-1.b)$$

El primer término corresponde a la suma sobre energías de partícula independiente, mientras que el segundo término corresponde a la interacción entre pares de nucleones. Cabe mencionar que  $a_{jm}^\dagger$  ( $a_{jm}$ ) es el operador de creación (aniquilación) de una partícula con momento angular total "j" y proyección "m";  $\epsilon_j$  corresponde a la energía de partícula independiente, y G es la constante de apareamiento (fenomenológicamente  $G \cong 20/A$  MeV, siendo A el número de nucleones en el núcleo).

La manera más simple de introducir correlaciones en la función de onda, con el objeto de describir pares de partículas acopladas a momento angular cero, es realizar la transformación de Bogoliubov-Valatin<sup>89,94</sup>.

Definiremos un nuevo conjunto de operadores de creación y de aniquilación, a través de la siguiente transformación canónica:

$$\begin{bmatrix} a_{jm}^\dagger \\ a_{jm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_j & V_j \\ -V_j & U_j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_{jm}^\dagger \\ \alpha_{jm} \end{bmatrix} \quad (1.1-2)$$

donde  $U_j$  y  $V_j$  son cantidades reales, tales que  $U_{jm} = U_{j-m} = U_j$  y  $V_{jm} = V_{j-m} = V_j$ . Al igual que antes :

$$\alpha_{jm}^\dagger = (-)^{j-m} \alpha_{j-m}^\dagger \quad (1.1-3)$$

Los  $\alpha_{jm}^\dagger$  ( $\alpha_{jm}$ ) se comportan como fermiones, es decir que valen las siguientes reglas de anticonmutación:

$$\left\{ \alpha_{jm}^\dagger, \alpha_{j'm'} \right\} = \delta_{jj'} \delta_{mm'} \quad (1.1-4.a)$$

$$\left\{ \alpha_{jm}, \alpha_{j'm'} \right\} = 0 \quad (1.1-4.b)$$

lo que impone la siguiente condición sobre  $U_j$  y  $V_j$  :

$$U_j^2 + V_j^2 = 1 \quad (1.1-5)$$

En forma explícita, los operadores de creación (aniquilación) de cuasipartículas,  $\alpha_{jm}^\dagger$  ( $\alpha_{jm}$ ) son:

$$\alpha_{jm}^\dagger = U_j a_{jm}^\dagger - V_j a_{jm}^- \quad (1.1-6.a)$$

$$\alpha_{jm}^- = V_j a_{jm}^\dagger + U_j a_{jm}^- \quad (1.1-6.b)$$

De manera que para un nivel muy por encima del nivel de Fermi,  $U_j \rightarrow 1$  y  $V_j \rightarrow 0$ , comportándose la cuasipartícula como partícula; mientras que para un nivel por debajo del nivel de Fermi,  $U_j \rightarrow 0$  y  $V_j \rightarrow 1$ , presentando el comportamiento de un agujero.

Para la transformación descripta, el nuevo vacío,  $|BCS\rangle$ , será tal que:

$$\alpha_{jm} |BCS\rangle = 0 \quad (1.1-7)$$

A temperatura cero resulta claro que:

$$\langle \text{BCS} | \alpha_{jm}^\dagger \alpha_{jm} | \text{BCS} \rangle = 0 \quad (1.1-8.a)$$

pero a temperatura distinta de cero, los números de ocupación de cuasipartículas, dejan de ser cero. Aplicando el Teorema de Wick a Temperatura Finita<sup>92)</sup>, obtenemos:

$$\langle \text{BCS} | \alpha_{jm}^\dagger \alpha_{j'm'} | \text{BCS} \rangle = \delta_{jj'} \delta_{mm'} f_j(T) \quad (1.1-8.b)$$

Como veremos más adelante, minimizando la energía libre del sistema, los factores de ocupación térmica,  $f_j(T)$ , son tales que tienden a cero, cuando la temperatura tiende a cero.

En adelante, utilizaremos  $| \rangle$  en lugar de  $| \text{BCS} \rangle$ .

De lo dicho se desprende que el estado fundamental de BCS a  $T=0$ , es reemplazado, a temperatura distinta de cero, por un estado de referencia promedio (que se podría pensar equivalente a un conjunto estadístico definido por la función de partición  $Z(N,T)$ ), a través del cual se pueden calcular los valores de expectación de las magnitudes relevantes.

Como es conocido del formalismo BCS a temperatura cero, la descripción en una base de cuasipartículas no tiene buen número de partículas (es decir  $[H_{\text{BCS}}, N] \neq 0$ , en la aproximación BCS), por lo cual debemos introducir un multiplicador de Lagrange y trabajar con:

$$\hat{H} = \hat{H} - \lambda \hat{N} \quad (1.1-9)$$

en lugar de trabajar con  $H$ , imponiendo la condición:

$$\langle | \hat{N} | \rangle = N_0 \quad (1.1-10)$$

siendo  $\hat{N}$  el operador número dado por:

$$\hat{N} = \sum_{jm} a_{jm}^\dagger a_{jm} \quad (1.1-11)$$

Haciendo la transformación descripta, y ordenando los términos usando el teorema de Wick a temperatura finita<sup>85)</sup>, resulta:

$$\begin{aligned} H_{00} &= \sum_{jm} (\varepsilon_j \lambda) 2\Omega_j \left[ U_j^2 f_j + V_j^2 (1 - f_j) \right] - \Delta(T)^2/G \\ H_{11} &= \sum_{jm} \left\{ (\varepsilon_j \lambda) \left[ U_j^2 - V_j^2 \right] + 2 \Delta(T) U_j V_j \right\} |n_j| \\ H_{20} &= \sum_{jm} \left\{ \Delta(T) \left[ U_j^2 - V_j^2 \right] + 2 (\varepsilon_j \lambda) U_j V_j \right\} (P_j^\dagger + P_j) \\ H_{22} &= - (G/2) \sum_{jj'} \left[ U_j^2 U_{j'}^2 + V_j^2 V_{j'}^2 \right] (P_j^\dagger P_{j'} + P_{j'}^\dagger P_j) \\ H_{40} &= (G/2) \sum_{jj'} \left[ U_j^2 V_{j'}^2 + U_{j'}^2 V_j^2 \right] (P_j^\dagger P_{j'}^\dagger + P_{j'} P_j) \\ H_{31} &= G \sum_{jj'} \left[ U_j^2 - V_{j'}^2 \right] U_j V_{j'} (|n_j| P_{j'} + P_{j'}^\dagger |n_{j'}|) \\ H_{qp-qp} &= - G \sum_{jj'} \left[ U_j V_{j'} U_j V_{j'} \right] |n_j| |n_{j'}| \end{aligned}$$

(1.1-12)

donde hemos despreciado términos en  $V_j^4$  y  $V_j^3 U_j$ . Las definiciones utilizadas para los operadores utilizados en

(1.1-12) son:

$$: n_j : = \sum_m : \alpha_{jm}^\dagger \alpha_{jm} : \quad (1.1-13-a)$$

$$P_j^\dagger = \sum_{m>0} \alpha_{jm}^\dagger \alpha_{jm}^\dagger \quad (1.1-13-b)$$

$$P_j = (P_j^\dagger)^\dagger \quad (1.1-13-c)$$

con ":" indicamos producto normal.

Por ahora, en la aproximación BCS, nos interesan solamente los términos  $\mathcal{H}_{00}$ ,  $\mathcal{H}_{11}$  y  $\mathcal{H}_{20}$ .

$\mathcal{H}_{00} + \lambda N_0$  representará la energía media del sistema. Los  $U_j$  y los  $V_j$  que nos interesan, son aquellos que minimizan  $\mathcal{H}_{00}$ . De manera que variando  $\mathcal{H}_{00}$  respecto de  $U_j$  y teniendo en cuenta (1.1-5), resulta:

$$2U_j^2 = 1 + (\epsilon_j - \lambda)/E_j \quad (1.1-14-a)$$

$$2V_j^2 = 1 - (\epsilon_j - \lambda)/E_j \quad (1.1-14-b)$$

siendo,  $E_j$ , la energía de cuasipartícula:

$$E_j = \sqrt{(\epsilon_j - \lambda)^2 + \Delta(T)^2} \quad (1.1-15)$$

y donde el gap de energía,  $\Delta(T)$ , a sido definido como:

$$\Delta(T) = G \sum_j \Omega_j U_j V_j (1 - 2f_j) \quad (1.1-16)$$

con:  $\Omega_j = j + 1/2$

En el Apéndice A hemos detallado el procedimiento anterior.

Si se coloca (1.1-14-a) y (1.1-14-b) en (1.1-16) podemos escribir la siguiente ecuación de dispersión:

$$\frac{1}{G} = \sum_j (\Omega_j/2E_j) \operatorname{tanh}(E_j/2T) \quad (1.1-17)$$

Resulta interesante comparar este resultado con el obtenido para un sólido superconductor<sup>33)</sup>, (ver Apéndice B):

$$\frac{1}{G} = 2 \int_0^{\hbar\omega_{cr}} \frac{d\varepsilon}{2E} \operatorname{tanh}(E/2T) \quad (1.1-18)$$

donde  $\omega_{cr}$  fija el punto de corte de la interacción, es decir que para  $\varepsilon > \omega_{cr}$ , el término de interacción se anula.

La analogía existente entre la física de problemas de sistemas finitos con la de sistemas extendidos, se pone en evidencia a partir de la confrontación de las expresiones (1.1-17) y (1.1-18).

## Propiedades Termodinámicas del sistema

Como habíamos anticipado, calcularemos los números de ocupación térmicos,  $f_j(T)$ , minimizando la energía libre del sistema. Revisemos entonces algunos conceptos de la Mecánica Estadística en el conjunto gran canónico.

La condición de equilibrio en el conjunto gran canónico, para una temperatura  $T$  y un potencial químico  $\lambda$ , queda determinada por la distribución de máxima entropía,  $S$ . Esta condición trae aparejado como requisito que, en el equilibrio térmico, el gran potencial termodinámico,  $\Omega$ , sea mínimo, siendo  $\Omega$ :

$$\begin{aligned}\Omega &= E_0 - TS - \lambda N_0 = \\ &= F - \lambda N_0\end{aligned}\tag{1.1-19}$$

donde  $E_0$  es la energía media del núcleo,  $N_0$  el número medio de partículas,  $F$  la energía libre, y  $S$  la entropía, calculados con la ayuda del operador densidad,  $\hat{\rho}$ :

$$E_0 = \text{Tr} (\hat{\rho} \hat{H})\tag{1.1-20}$$

$$N_0 = \text{Tr} (\hat{\rho} \hat{N})\tag{1.1-21}$$

$$S = - \text{Tr} (\hat{\rho} \ln \hat{\rho})\tag{1.1-22}$$

La minimización del gran potencial termodinámico,  $\Omega$ , se realiza derivando funcionalmente éste con respecto al operador densidad, la condición de estabilidad frente a fluctuaciones de origen térmico, exige que la segunda derivada funcional sea

positiva:

$$\delta\Omega / \delta\rho = 0 \quad (1.1-23-a)$$

$$\delta^2\Omega / \delta\rho^2 > 0 \quad (1.1-23-b)$$

Estos requisitos llevan a la solución bien conocida:

$$\hat{\rho} = Z^{-1} \exp [-\beta(H-\lambda N)] \quad (1.1-24)$$

$$Z = \text{Tr} ( \exp [-\beta(H-\lambda N)] ) \quad (1.1-25)$$

resultando

$$\Omega = - \beta^{-1} \ln Z \quad (1.1-26)$$

Los números de ocupación, correspondientes en este caso a cuasipartículas, se obtienen minimizando el gran potencial termodinámico:

$$\delta\Omega / \delta f_j = 0 \quad (1.1-27)$$

obteniéndose el valor:

$$f_j(T) = 1 / ( 1 + \exp (\beta E_j) ) \quad (1.1-28)$$

Continuando con el cálculo de magnitudes estadísticas calcularemos  $\langle N \rangle$  como

$$\langle N \rangle = \partial(\ln Z) / \partial(\lambda\beta) \quad (1.1-29)$$

obteniendo la siguiente expresión para el número medio de

partículas:

$$\langle N \rangle = \sum_j 2\Omega_j \left[ U_j^2 f_j + V_j^2 (1 - f_j) \right] \quad (1.1-30)$$

Es importante analizar el comportamiento del factor:

$\left[ U_j^2 f_j + V_j^2 (1 - f_j) \right]$  en el límite  $T \rightarrow T_c^{2\phi}$ . Es fácil comprobar que:

$$\lim_{T \rightarrow T_c} \left[ U_j^2 f_j + V_j^2 (1 - f_j) \right] = n_j^F(T) \quad (1.1-31)$$

siendo:

$$n_j^F(T) = 1 / ( 1 + \exp \beta(\epsilon_j - \lambda) ) \quad (1.1-32)$$

De manera que puede pensarse que  $U_j^2$  y  $V_j^2$  representan los números de ocupación debidos a la interacción de apareamiento, mientras que  $V_j^2 (1-f_j)$  y  $U_j^2 f_j$  son los números de ocupación de partícula y de agujero correspondientes a una superficie de Fermi difundida térmicamente. De manera que las distribuciones de pares correlacionados al alcanzar  $T_c$  dan lugar a un sistema de capa abierta con niveles parcialmente ocupados, con número de ocupación  $n_j^F(T)$ .

Las magnitudes termodinámicas que nos interesarán al discutir la transición de fase son la energía media y el calor específico, dados por:

$$E_o = \langle \hat{H} \rangle =$$

$$= \sum_{jm} 2\Omega_j \epsilon_j \left[ U_j^2 f_j + V_j^2 (1 - f_j) \right] - \Delta(T)^2/G$$

(1.1-33)

$$C = d\langle \hat{H} \rangle/dT =$$

$$= \frac{1}{T^2} \sum_j 2\Omega_j f_j (1 - f_j) E_j^2 + \\ + \frac{d\lambda}{dT} \alpha + \Delta(T) \frac{d\Delta(T)}{dT} \beta$$

(1.1-34-a)

donde:

$$\alpha = \left[ \sum_j \Omega_j (\epsilon_j - \lambda) \left\{ \left[ \frac{2f_j(1-f_j)}{T} + \frac{(1-2f_j)}{E_j} \right] - 1 \right\} + N_o \right]$$

$$\beta = \left[ - \sum_j \Omega_j \left\{ \frac{2f_j(1-f_j)}{T} + \frac{(1-2f_j)}{E_j} \right\} + \frac{2}{G} \right]$$

y siendo:

$$d\lambda/dT = [ D ( T A_1 - 2C_1 ) - D_1 ( T A - 2C ) ] [2/(T M)]$$

(1.1-34-b)

$$\Delta(T)(d\Delta(T)/dT) = \\ = - [ D(2D + (T A - 2C)\Delta(T)^2) + D_1(T A_1 - 2C_1) ] [2/(T M)]$$

(1.1-34-c)

con:

$$M = (T A_1 - 2C_1)^2 + 2D(T A - 2C) + (T A - 2C)^2 \Delta(T)^2$$

$$A = \sum_j \Omega_j (1-2f_j) / E_j^3$$

$$C = \sum_j \Omega_j (1-2f_j) / E_j^2$$

$$D = \sum_j \Omega_j (1-2f_j)$$

$$A_1 = \sum_j \Omega_j (1-2f_j) (\epsilon_j - \lambda) / E_j^3$$

$$C_1 = \sum_j \Omega_j (1-2f_j) (\epsilon_j - \lambda) / E_j^2$$

$$D_1 = \sum_j \Omega_j (1-2f_j) (\epsilon_j - \lambda)$$

La expresión (1.1-33) muestra claramente que, para  $T \rightarrow T_c$ ,  $\Delta(T)$  tiende a cero en forma continua, de manera que  $E$  es continua a la temperatura de transición; mientras que (1.1-34-a) muestra una discontinuidad a la temperatura de transición debido al término que acompaña a " $\Delta (d\Delta / dT)$ ". Esta es una muestra de la existencia de una transición de fase de segundo orden.

Una estimación cruda del valor de  $T_c$ , indica que este es del orden de  $\Delta(T=0) / 2$ .

Para concluir con el estudio del formalismo, digamos que el colapso del gap, responsable de la transición de fase, se debe al carácter de "anti-apareamiento" del rearrreglo térmico de las partículas en los niveles de partícula independiente.

## 1.B- Formalismo BCS térmico. Interacción no Separable.

Para corroborar los aspectos generales descriptos para el caso sencillo de una fuerza separable, trataremos el problema más general de una fuerza no separable, siguiendo para ello el formalismo de Baranger<sup>30</sup> el cual es extendido a temperatura finita.

Partimos del Hamiltoniano general:

$$\hat{H} = \hat{H}_{sp} + \hat{H}_i \quad (1.1-35-a)$$

$$H_{sp} = \sum \epsilon_{\alpha} a_{\alpha}^{\dagger} a_{\alpha} \quad (1.1-35-b)$$

$$H_i = \sum_{\alpha\beta\delta\gamma} v_{\alpha\beta\delta\gamma} a_{\alpha}^{\dagger} a_{\beta}^{\dagger} a_{\gamma} a_{\delta} \quad (1.1-35-c)$$

donde  $\epsilon_{\alpha}$  es la energía de partícula independiente,  $a_{\alpha}^{\dagger}$  ( $a_{\alpha}$ ) es el operador que crea (destruye) un fermión en el estado  $\alpha$ , y  $v_{\alpha\beta\delta\gamma}$  representa la interacción, y es tal que respeta las siguientes relaciones de antisimetría:

$$v_{\alpha\beta\delta\gamma} = -v_{\beta\alpha\delta\gamma} = -v_{\alpha\beta\gamma\delta} = v_{\beta\alpha\gamma\delta} \quad (1.1-36)$$

Vamos a escribir  $H_i$  de manera que exhiba sus propiedades de invarianza frente a rotaciones y frente a reflexiones. Esto es posible si se acoplan dos partículas, digamos  $\alpha$  y  $\beta$ , a momento angular  $J$ , y las otras dos a momento angular  $J$ , también. De esta forma:

$$v_{\alpha\beta\delta\gamma} = - (1/2) \sum_{J M} G(\alpha\beta\delta\gamma) \langle j_{\alpha} m_{\alpha} j_{\beta} m_{\beta} | J M \rangle \langle j_{\gamma} m_{\gamma} j_{\delta} m_{\delta} | J M \rangle$$

(1.1-37)

donde los  $\langle | \rangle$  son coeficientes de reacoplamiento.

A partir de exigir que  $H_i$  sea hermítico e invariante frente a inversiones temporales surge que:

$$\begin{aligned} G(abcdJ) &= G(cdabJ) \\ &= -\vartheta(abJ) G(bacdJ) \\ &= -\vartheta(cdJ) G(abdcJ) \\ &= \vartheta(abdcJ) G(badcJ) \end{aligned}$$

(1.1-38)

siendo:

$$\vartheta(abJ) = (-)^{j_a + j_b + J}$$

(1.1-39)

La relación entre  $G$  y los elementos de matriz de  $H_i$  en los cálculos del modelo de capas es:

$$\langle abJM | H | cdJM \rangle = -\sigma_{ab} \sigma_{cd} G(abcdJ)$$

(1.1-40-a)

$$\sigma_{ab} = \begin{cases} 1 & \text{si } a = b \\ \sqrt{2} & \text{si } a \neq b \end{cases}$$

(1.1-40-b)

Pero no hay razón para acoplar  $\alpha$  y  $\beta$  juntos, y  $\gamma$  y  $\delta$  juntos. También puede haber acoplamientos  $\alpha$  y  $\gamma$  a  $J'M'$ ,  $\beta$  y  $\delta$  a  $J'M'$ ; o  $\alpha$  y  $\delta$  a  $J''M''$ , y  $\beta$  y  $\gamma$  a  $J''M''$ . Esto conduce a definir  $F$ :

$$v_{\alpha\beta\delta\gamma} = - (1/2) \sum_{J'M'} F(\alpha\gamma\delta\beta J') s_{\gamma} \langle j_{\alpha} m_{\alpha} j_{\gamma} m_{\gamma} | J' M' \rangle$$

$$s_{\beta} \langle j_{\delta} m_{\delta} j_{\beta} \bar{m}_{\beta} | J' M' \rangle$$

(1.1-41-a)

$$v_{\alpha\beta\delta\gamma} = (1/2) \sum_{J''M''} F(\alpha\delta\gamma\beta J'') s_{\delta} \langle j_{\alpha} m_{\alpha} j_{\delta} m_{\delta} | J'' M'' \rangle$$

$$s_{\beta} \langle j_{\gamma} m_{\gamma} j_{\beta} m_{\beta} | J'' M'' \rangle$$

(1.1-41-b)

con

$$s_{\gamma} = (-)^{j_{\gamma} - m_{\gamma}}$$

$$\bar{m}_{\gamma} = - m_{\gamma}$$

La relación de F con G involucra un coeficiente de Racah:

$$F(\alpha\beta\delta\gamma J') = \sum_J (2J+1) W(j_{\alpha} j_{\beta} j_{\gamma} j_{\delta}; JJ') G(\beta\alpha\gamma\delta J)$$

(1.1-42)

y respeta las siguientes propiedades de simetría:

$$F(acdbJ') = F(dbacJ') = \theta(abcd)F(cabdJ') \quad (1.1-43)$$

Siguiendo las mismas prescripciones que para una fuerza separable, trabajaremos en la base de cuasipartículas; y teniendo en cuenta que el operador número,  $\hat{N}$ , no conmuta con el Hamiltoniano,  $\hat{H}$ , introduciremos un multiplicador de Lagrange para ajustar el número medio de partículas y trabajaremos con:

$$\hat{H} = \hat{H} - \lambda \hat{N} \quad (1.1-44)$$

Transformando  $\hat{H}$  a la nueva base y usando el Teorema de Wick<sup>82)</sup> resulta:

$$H_{00} = \sum_j \left\{ \left( \eta_j + \frac{1}{2} \mu_j \right) 2\Omega_j \left[ U_j^2 f_j + V_j^2 (1 - f_j) \right] - \frac{1}{2} \Delta_j(T) U_j V_j (1 - 2f_j) \right\}$$

$$H_{11} = \sum_{jm} \left\{ \eta_j \left[ U_j^2 - V_j^2 \right] + 2 \Delta(T) U_j V_j \right\} :n_j:$$

$$H_{20} = \sum_{jm} \left\{ (-1/2) \Delta_j(T) \left[ U_j^2 - V_j^2 \right] + \eta_j U_j V_j \right\} (P_j^\dagger + P_j)$$

$$H_{\text{resto}} = \sum_{\alpha\beta\delta\gamma} v_{\alpha\beta\delta\gamma} :a_\alpha^\dagger a_\beta^\dagger a_\gamma a_\delta:$$

(1.1-45)

donde hemos empleado la notación usada en el punto anterior.

El término  $H_{\text{resto}}$  representa la interacción residual entre cuasipartículas, la que trataremos en el siguiente Capítulo.

En (1.1-45) hemos introducido:

$$\Delta_j(T) = \sum_i G(jjii0) (j+1/2)^{-1/2} (i+1/2)^{1/2} U_j V_j \quad (1.1-46)$$

$$\mu_j = 2(2j+1)^{-1} \sum_i (2J+1) \left[ U_i^2 f_i + V_i^2 (1 - f_i) \right] G(jijjJ) \quad (1.1-47)$$

$$\eta_j = \epsilon_j - \mu_j - \lambda \quad (1.1-48)$$

Los  $U_j$  y los  $V_j$  son tales que que minimizan  $H_{00}$ . De esa condición junto con:

$$U_j^2 + V_j^2 = 1$$

resulta:

$$2U_j^2 = 1 + \eta_j/E_j \quad (1.1-49-a)$$

$$2V_j^2 = 1 - \eta_j/E_j \quad (1.1-49-b)$$

donde:

$$E_j = \sqrt{\eta_j^2 + \Delta_j(T)^2} \quad (1.1-50)$$

Un resultado interesante es el hecho de tener un gap de energía por cada estado, a diferencia de lo que ocurría para una interacción separable. Esto es entendible si se tiene en cuenta que, esta última se obtiene de la primera dándole el mismo peso a todos los elementos de matriz de la interacción, resultando un gap promedio único.

Utilizando los conceptos de Mecánica Estadística descriptos en el punto anterior:

$$f_j(T) = 1 / (1 + \exp(\beta E_j)) \quad (1.1-51)$$

y:

$$\langle N \rangle = \sum_j 2\Omega_j \left[ U_j^2 f_j + V_j^2 (1 - f_j) \right] \quad (1.1-52)$$

cuando T se aproxima a  $T_c$ , sigue siendo válido:

$$\lim_{T \rightarrow T_c} \left[ U_j^2 f_j + V_j^2 (1 - f_j) \right] = n_j^F(T) \quad (1.1-53)$$

pero con la corrección de partícula independiente, dada por  $\mu_j$ .

Al igual que antes, las magnitudes termodinámicas que nos interesan en el tratamiento de la transición de fase son la energía media del sistema y el calor específico; las que ahora tienen la forma:

$$E_o = \sum_j \left\{ \left( \eta_j + \frac{1}{2} \mu_j \right) 2\Omega_j \left[ U_j^2 f_j + V_j^2 (1 - f_j) \right] - \frac{1}{2} \Delta_j(T) U_j V_j (1 - 2f_j) \right\} \quad (1.1-54)$$

$$C = d\langle H \rangle / dT$$

Es fácil comprobar que si tomamos:

$$G(jjiiJ) = \delta_{jj'} \delta_{ii'} \delta_{J0} (j+1/2)^{1/2} (i+1/2)^{1/2} \quad (1.1-56)$$

$$\text{y } F(jjiiJ') = 0$$

obtenemos los resultados hallados en el punto 1.A.

En el Capítulo III utilizaremos estos resultados.

### 1.C- Formalismo RPA Térmico para cuasipartículas.

El colapso del gap, no sólo produce modificaciones en el estado fundamental, sino que cambia las propiedades de los estados excitados descritos por encima de él. Este hecho se observa al estudiar las contribuciones coherentes de dos cuasipartículas, las cuales se ven inhibidas al aumentar la temperatura.

Para estudiar los estados colectivos originados por la interacción de apareamiento, el tratamiento convencional es diagonalizar las contribuciones de dos cuasipartículas (términos  $H_{40}$  y  $H_{22}$  de la expresión (1.1-12), a través del formalismo de la RPA<sup>35)</sup>, extendido a Temperatura Finita. (En el Apéndice D hemos hecho una revisión de este formalismo a temperatura cero).

Siguiendo el procedimiento RPA standard, definimos los bosones:

$$\Gamma_n^\dagger = \sum_j ( X_{jn} P_j^\dagger - Y_{jn} P_j ) \quad (1.1-57-a)$$

$$\Gamma_n = ( \Gamma_n^\dagger )^\dagger \quad (1.1-57-b)$$

obviamente:

$$[ \Gamma_n, \Gamma_{n'}^\dagger ] = \delta_{nn'} \quad (1.1-58)$$

siendo  $P_j^\dagger$  el operador de creación de dos cuasipartículas descrito por (1.1-13-b), y  $X_{jn}$  ( $Y_{jn}$ ) las amplitudes

"adelantadas"(atrasadas) del bosón.

Como es sabido, la ecuación que determina el espectro de excitaciones colectivas,  $\omega_n$ , es:

$$[ H_{RPA}, \Gamma_n^\dagger ] = \omega_n \Gamma_n^\dagger \quad (1.1-59)$$

donde hemos tomado:

$$H_{RPA} = H_{BCS} + H_{22} + H_{40} \quad (1.1-60-a)$$

siendo:

$$H = H_{00} + \sum_j E_j n_j \quad (1.1-60-b)$$

En lo que sigue nos referiremos al caso de la interacción descrita en el punto 1.A. Es decir que trabajaremos con una interacción separable.

La ecuación (1.1-59) conduce a:

$$\left| \begin{array}{cc} -1+G \sum_j \frac{2\Omega_j E_j (U_j^2 - V_j^2)(1-2f_j)}{4E_j^2 - \omega_n^2} & G\omega_n \sum_j \frac{\Omega_j (U_j^2 - V_j^2)(1-2f_j)^2}{4E_j^2 - \omega_n^2} \\ G\omega_n \sum_j \frac{\Omega_j (U_j^2 - V_j^2)(1-2f_j^2)}{4E_j^2 - \omega_n^2} & -1+G \sum_j \frac{2\Omega_j E_j (1-2f_j)}{4E_j^2 - \omega_n^2} \end{array} \right| = 0$$

(1.1-61)

La resolución de la ecuación de dispersión (1.1-61)

proporciona el espectro de excitaciones colectivas del sistema.

La condición de normalización para los bosones, (1.1-58), puede escribirse como:

$$\sum_j (X_{jn}^2 - Y_{jn}^2)(1-2f_j)2\Omega_j = 1 \quad (1.1-62)$$

Las amplitudes  $X_{jn}$  y  $Y_{jn}$  pueden escribirse como:

$$X_{jn} = \Lambda_n [a_n (U_j^2 - V_j^2) - b_n] / (2E_j - \omega_n) \quad (1.1-63-a)$$

$$Y_{jn} = \Lambda_n [a_n (U_j^2 - V_j^2) + b_n] / (2E_j + \omega_n) \quad (1.1-63-b)$$

siendo:

$$a_n = G\omega_n \sum_j \frac{\Omega_j (U_j^2 - V_j^2)(1-2f_j)}{4E_j^2 - \omega_n^2} \quad (1.1-64-a)$$

$$b_n = -1 + G \sum_j \frac{2\Omega_j E_j (U_j^2 - V_j^2)(1-2f_j)}{4E_j^2 - \omega_n^2} \quad (1.1-64-b)$$

y con  $\Lambda_n$  obtenida a partir de (1.1-62):

$$\Lambda_n^{-2} = \sum_j \Omega_j (1-2f_j) \left[ \left[ \frac{a_n (U_j - V_j) - b_n}{2E_j - \omega_n} \right]^2 - \left[ \frac{a_n (U_j - V_j) + b_n}{2E_j + \omega_n} \right]^2 \right] \quad (1.1-65)$$

Obtenido el espectro de excitaciones de dos cuasipartículas,

y las amplitudes adelantadas y retrasadas del fonón , podemos calcular la probabilidad de transferencia de dos cuasipartículas. Esta proporcionará una muestra clara de la inhibición de los efectos colectivos con el aumento de la temperatura. Para ello invertimos la expresión (1.1-57-a). El resultado será:

$$P_j^\dagger = 2\Omega_j(1-f_j) \sum_n ( X_{jn} \Gamma_n^\dagger + Y_{jn} \Gamma_n ) \quad (1.1-66)$$

El operador de transferencia de un par de cuasipartículas lo definiremos como:

$$\tau_j = \sum_j a_{jm}^\dagger a_{jm}^\dagger \quad (1.1-67)$$

el cual escrito en la base de cuasipartículas resulta:

$$\tau_j = \tau_j^{\text{par}} + \tau_j^{\text{qp}} + \tau_j^0 \quad (1.1-68-a)$$

$$\tau_j^{\text{par}} = U_j^2 P_j^\dagger - V_j^2 P_j \quad (1.1-68-b)$$

$$\tau_j^{\text{qp}} = - U_j V_j n_j \quad (1.1-68-c)$$

$$\tau_j^0 = U_j V_j \Omega_j \quad (1.1-68-d)$$

El único término que nos interesa es  $\tau_j^{\text{par}}$ , el cual escrito en función de los bosones  $\Gamma_n$  y  $\Gamma_n^\dagger$ , resulta:

$$\tau_j = 2\Omega_j(1-2f_j) \sum_n \left[ (U_j^2 X_{jn} - V_j^2 Y_{jn}) \Gamma_n^\dagger + (U_j^2 Y_{jn} - V_j^2 X_{jn}) \Gamma_n \right] \quad (1.1-69)$$

De manera que el elemento de matriz que conecta el estado fundamental, con el estado de un bosón será:

$$\langle n=1 \mid \tau_j \mid n=0 \rangle = 2\Omega_j(1-2f_j)(U_j^2 X_{jn} - V_j^2 Y_{jn}) \quad (1.1-70)$$

Claramente el factor  $(1-2f_j)$  inhibe la transferencia para estados cercanos al nivel de Fermi cerca de  $T_c$ .

Hemos tratado el problema de las excitaciones coherentes de dos cuasipartículas, aproximándolas a través del formalismo RPA a temperatura finita, al espectro de un gas de fonones. Es decir que del Hamiltoniano:

$$H = H_{00} + H_{BCS} + H_{22} + H_{40} \quad (1.1-71)$$

hemos pasado a:

$$H = H_{ORPA} + \sum_n \omega_n \Gamma_n^\dagger \Gamma_n \quad (1.1-72)$$

donde:

$$H_{ORPA} = - \sum_{jn} 2\Omega_j \omega_n Y_{jn}^2 (1-2f_j) \quad (1.1-73)$$

De esta forma, el sistema presenta un comportamiento similar al de un gas de fotones:

$$\langle H \rangle = H_{ORPA} + \sum_n \omega_n / (1 - \exp(-\beta\omega_n)) \quad (1.1-74)$$

y el calor específico será:

$$C = \frac{d\langle H \rangle}{dT} \quad (1.1-75)$$

Esta derivada no puede ser hecha analíticamente, ya que no poseemos una expresión explícita de la dependencia de  $\omega_n$  con  $T$ , nos conformaremos con el análisis de resultados numéricos para un núcleo real como el  $^{116}\text{Sn}$ .

2.A- Descripción de las excitaciones de  
carácter fermiónico en la fase normal.

Hemos visto que el gap,  $\Delta(T)$ , depende de la temperatura, y que a una cierta temperatura,  $T_c$ , colapsa. Para temperaturas por encima de  $T_c$ , el sistema de capa abierta va a desplegar características similares a uno normal, pero con una superficie de Fermi difundida. Una muestra clara es el hecho que:

$$\lim_{T \rightarrow T_c} \left[ U_j^2 f_j + V_j^2 (1 - f_j) \right] = n_j^F(T)$$

ya discutido en el punto 1.A.

En la fase normal, pues, los grados de libertad de partícula independiente, se corresponden a los de un sistema de capa abierta parcialmente llena con fermiones que obedecen una estadística de Fermi-Dirac. Es decir que la energía del sistema es:

$$\langle H \rangle = \sum_j 2\Omega_j \epsilon_j n_j^F(T) \quad (1.2-1)$$

$$\langle N \rangle = \sum_j 2\Omega_j n_j^F(T) \quad (1.2-2)$$

$$C_{\text{Fermi}} = \frac{1}{T^2} \left\{ \sum_j 2\Omega_j \epsilon_j^2 n_j^F(T) (1 - n_j^F(T)) - \left[ \sum_j 2\Omega_j \epsilon_j n_j^F(T) (1 - n_j^F(T)) \right]^2 / \sum_j 2\Omega_j n_j^F(T) (1 - n_j^F(T)) \right\} \quad (1.2-3)$$

donde:

$$n_j^F(T) = 1 / (1 + \exp(\beta(\epsilon_j - \lambda))) \quad (1.2-4)$$

siendo  $\epsilon_j$  las energías de partícula independiente.

En esta región, la energía de excitación,  $E^*$  ( $\langle H(T) \rangle - \langle H(0) \rangle$ ), se aproxima a la de un gas de Fermi sin interacción<sup>39)</sup>:

$$E^* = a(T) T^2 \quad (1.2-5)$$

donde  $a(T)$ , es el parámetro de densidad de niveles, el cual estudiaremos en detalle en el Capítulo III.

Discutiremos este efecto al analizar los resultados numéricos obtenidos para  $^{116}\text{Sn}$ .

2.B- Descripción de las excitaciones de  
carácter bosónico en la fase normal.

Al igual que en la fase superfluida, trataremos las excitaciones colectivas del sistema a través del formalismo RPA térmico, es decir, suponiendo que éstas se comportan como bosones. El formalismo que describiremos es extensión de la RPA ordinaria para el canal de partícula-partícula a  $T=0$ <sup>37)</sup>.

Para describir las excitaciones del sistema, deberemos incluir dos tipos de fonones, los de adición y los de remoción:

$$\Gamma_{n,a}^\dagger = \sum_{\omega} a_n(\omega) B^\dagger(\omega) + \sum_{\nu} a_n(\nu) B(\nu) \quad (1.2-6-a)$$

$$\Gamma_{n,r}^\dagger = \sum_{\omega} r_n(\omega) B(\omega) + \sum_{\nu} r_n(\nu) B^\dagger(\nu) \quad (1.2-6-b)$$

el subíndice a(r) indica "adición"("remoción"), indicando  $\omega$  estados de partícula, y  $\nu$  estados de agujero. Los operadores  $B^\dagger(\omega)$ , y  $B^\dagger(\nu)$ , están dados por:

$$B^\dagger(\omega) = \sum_{m>0} a_{\omega m}^\dagger a_{\omega m}^\dagger \quad (1.2-7-a)$$

$$B^\dagger(\nu) = \sum_{m>0} a_{\nu m}^\dagger a_{\nu m} \quad (1.2-7-b)$$

Los fonones  $\Gamma_{n,a}^\dagger$  y  $\Gamma_{n,r}^\dagger$  satisfacen las propiedades familiares de conmutación:

$$[ \Gamma_{n,a}, \Gamma_{n',a}^\dagger ] = \delta_{nn'} \quad (1.2-8-a)$$

$$[ \Gamma_{n,r}, \Gamma_{n',r}^\dagger ] = \delta_{nn'} \quad (1.2-8-b)$$

De esta manera, tendremos dos contribuciones al espectro de energías colectivas: las de adición ( $\omega_{n,a}$ ), y las de remoción ( $\omega_{n,r}$ ). Estas se obtienen a partir de las ecuaciones usuales de movimiento:

$$[ H, \Gamma_{n,a}^\dagger ] = W_{n,a} \Gamma_{n,a}^\dagger \quad (1.2-9-a)$$

$$[ H, \Gamma_{n,r}^\dagger ] = W_{n,r} \Gamma_{n,r}^\dagger \quad (1.2-9-b)$$

las que dan lugar a la siguientes ecuaciones de dispersión:

$$\sum_{\omega} \frac{\Omega_{\omega} (1-2n_{\omega})}{2e_{\omega} - W_{n,a}} - \sum_{\nu} \frac{\Omega_{\nu} (1-2n_{\nu})}{2e_{\nu} + W_{n,a}} = \frac{1}{G} \quad (1.2-10-a)$$

$$\sum_{\omega} \frac{\Omega_{\omega} (1-2n_{\omega})}{2e_{\omega} + W_{n,r}} - \sum_{\nu} \frac{\Omega_{\nu} (1-2n_{\nu})}{2e_{\nu} - W_{n,r}} = \frac{1}{G} \quad (1.2-10-b)$$

donde  $e = \epsilon - \lambda$ , y  $e = \epsilon + \lambda$ .

Las condiciones (1.2-8-a) y (1.2-8-b) dan lugar a las siguientes relaciones de normalización:

$$\sum_{\omega} a_n(\omega) a_{n'}(\omega) (1-2n_{\omega}) \Omega_{\omega} + \sum_{\nu} a_n(\nu) a_{n'}(\nu) (1-2n_{\nu}) \Omega_{\nu} = \delta_{nn'} \quad (1.2-11-a)$$

$$-\sum_{\omega} r_n(\omega) r_{n'}(\omega) (1-2n_{\omega}) \Omega_{\omega} - \sum_{\nu} r_n(\nu) r_{n'}(\nu) (1-2n_{\nu}) \Omega_{\nu} = \delta_{nn'} \quad (1.2-11-b)$$

pudiendo expresarse:

$$a_n(\omega) = \Lambda_n(a)/(2\varepsilon_\omega - W_{n,a}) \quad (1.2-12-a)$$

$$a_n(\nu) = -\Lambda_n(a)/(2\varepsilon_\nu + W_{n,a}) \quad (1.2-12-b)$$

$$r_n(\omega) = -\Lambda_n(r)/(2\varepsilon_\omega + W_{n,r}) \quad (1.2-12-c)$$

$$r_n(\nu) = \Lambda_n(r)/(2\varepsilon_\nu - W_{n,r}) \quad (1.2-12-d)$$

y donde, gracias a (1.2-11), podemos escribir:

$$\Lambda_n^{-2}(a) = \sum_\omega \Omega_\omega (1-2n_\omega)/(2\varepsilon_\omega - W_{n,a})^2 + \sum_\nu \Omega_\nu (1-2n_\nu)/(2\varepsilon_\nu + W_{n,a})^2 \quad (1.2-13-a)$$

$$\Lambda_n^{-2}(r) = -\sum_\omega \Omega_\omega (1-2n_\omega)/(2\varepsilon_\omega + W_{n,r})^2 - \sum_\nu \Omega_\nu (1-2n_\nu)/(2\varepsilon_\nu - W_{n,r})^2 \quad (1.2-13-b)$$

En función de los nuevos operadores bosónicos, podemos reescribir el Hamiltoniano como:

$$H = H_{ORPA} + \sum_n W_{n,a} \Gamma_{n,a}^\dagger \Gamma_{n,a} + \sum_n W_{n,r} \Gamma_{n,r}^\dagger \Gamma_{n,r} \quad (1.2-14-a)$$

donde:

$$H_{ORPA} = H_{Osp} - \sum_{\omega,n} 2\Omega_\omega W_{n,r} r_n^2(\omega) (1-2n_\omega) - \sum_{\nu,n} 2\Omega_\nu W_{n,a} a_n^2(\nu) (1-2n_\nu) \quad (1.2-14-b)$$

y la energía media del sistema será:

$$\langle H \rangle = H_{ORPA} + \sum_n W_{n,a} / (1 - \exp(-\beta W_{n,a})) + \sum_n W_{n,r} / (1 - \exp(-\beta W_{n,r})) \quad (1.2-15)$$

obteniendo el calor específico simplemente derivando (1.2-15) respecto de la temperatura:

$$C = d\langle H \rangle / dT \quad (1.2-16)$$

### 3. Descripción de la Transición de Fase.

Uno de los problemas más interesantes en Física, es el relacionado con las teorías estadísticas de ecuaciones de estado y transiciones de fase. Estos problemas son importantes tanto en conexión con las propiedades de la materia (como la teoría de líquidos) así como desde el punto de vista académico, en conexión con las discontinuidades en las funciones termodinámicas en los puntos de transición de fase.

Por lo que vimos en el punto 1.A y 1.B, el colapso del gap de apareamiento, da lugar a una transición de segunda especie, puesta de manifiesto por la discontinuidad observada en el calor específico. Cambios de fase de segunda especie son también el paso de un estado superconductor, en un metal, a su fase normal (en ausencia de campo magnético externo), y el paso del Helio superfluido a Helio líquido; en ambos casos el sistema cambia su simetría de manera continua, pero adquiriendo propiedades cualitativamente distintas en el punto de transición. El hecho de que el estado no experimente un salto en el punto de cambio de fase de segunda especie, conduce a que las funciones termodinámicas del sistema (entropía, energía, etc.) se conserven continuas en el punto de transición, por consiguiente no van acompañadas de absorción o emisión de calor; sin embargo las derivadas de las funciones termodinámicas (por ejemplo, la capacidad calorífica del sistema) experimentan un salto en el punto de transición.

Cabe destacar que estamos hablando de transiciones de fase en

un sistema finito. Por ello es interesante una comparación con sistemas extendidos, por ejemplo, comparando con la teoría de Landau y Ginzburg para transiciones de fase de segunda especie<sup>7,28)</sup>. Esta teoría construye la energía libre del sistema como función de un parámetro de orden, el que se anula en la fase más desordenada; los mínimos de la energía libre son los que determinan el valor de dicho parámetro cuando el sistema se encuentra en equilibrio. En el Apéndice C hemos hecho un resumen de los aspectos más importantes de esta teoría, en particular desarrollamos su aplicación al caso de una transición de segundo orden para un sistema superconductor en ausencia de campo magnético externo. El resultado de este cálculo predice la continuidad de la energía libre y de la entropía del sistema a la temperatura de transición, y la discontinuidad del calor específico en ese punto, esta discontinuidad vale:

$$C_s - C_n = V \alpha^2 T_c / b \quad (1.3-1)$$

$$\alpha = 6\pi^2 T_c / 7\zeta(3)\mu = 7.04 T_c / \mu \quad (1.3-2)$$

$$b = \alpha T_c / n \quad (1.3-3)$$

donde  $n$ , es la densidad en el número de partículas ( $n = \rho/m$ ), y  $\mu$  es el potencial químico a  $T=0$  MeV:

$$n = p_F^3 / 3\pi^2 \hbar^3 \quad (1.3-4)$$

$$\mu = p_F^2 / 2m \quad (1.3-5)$$

Compararemos el resultado (1.3-1), hallado en el caso de

sistemas extendidos, con el obtenido para un sistema finito como lo es el núcleo  $^{116}\text{Sn}$ .

### Aplicaciones

El formalismo desarrollado ha sido aplicado a un núcleo real:  $^{116}\text{Sn}$ . Hemos considerado la capa cerrada de 50 neutrones como carozo inerte, y los 16 neutrones restantes interactuando a través de una fuerza de apareamiento separable, con  $G = 0.16$  MeV.

En la Figura 2 mostramos el comportamiento para el gap de apareamiento, poniéndose en evidencia el colapso del mismo a una temperatura del orden de  $\Delta(T=0)/2$  (para nuestro sistema  $T_c = 0.845$  MeV siendo  $\Delta(0) = 1.558$  MeV). Puede apreciarse que el comportamiento del gap con la temperatura se asemeja al comportamiento de los parámetros de orden utilizados en la teoría de Landau-Ginzburg, reflejando una clara analogía con la física de sistemas extendidos.

El comportamiento de las raíces de la RPA se muestran, a ambos lados de la transición de fase, en la Figura 3. Se puede observar el colapso de la primer raíz de la RPA a la temperatura crítica, comportamiento semejante al del gap, poniendo nuevamente de manifiesto la inhibición de las contribuciones de dos cuasipartículas. Por encima de la temperatura crítica, se observa la separación de los modos de adición y de remoción del sistema.

En la Figura 4, se muestra la energía de excitación, correspondiente a los grados de libertad fermiónico y bosónico,

como función de la temperatura. Se observa, como ya anticipamos, la continuidad de ésta en el punto de transición. Si recordamos la expresión (1.1-33) para la energía de excitación fermiónica, y tenemos en cuenta que para la temperatura crítica:

$$\lim_{T \rightarrow T_c} \Delta(T) = 0$$

$$\lim_{T \rightarrow T_c} \left[ U_j^2 f_j + V_j^2 (1 - f_j) \right] = n_j^F(T)$$

es fácil ver que la energía de excitación fermiónica es continua en el punto de transición. Un análisis numérico brinda un resultado similar para la contribución bosónica a la energía de excitación.

La Figura 5, muestra el comportamiento del calor específico como función de la temperatura. Su forma recuerda a los conocidos puntos "λ", el valor de  $(C_s - C_n)$  para nuestro sistema es de aproximadamente 30 unidades, lo cual difiere poco de lo predicho por la Teoría de Landau-Ginzburg para sistemas extendidos, que es del orden de 35 unidades. Lo cual muestra una buena correspondencia entre los resultados hallados en sistemas finitos con los conocidos de sistemas extendidos.

## Conclusiones

Hemos tratados la interacción de apareamiento nuclear en el rango de temperaturas  $0 \text{ MeV} \leq T \leq \text{MeV}$ . Comenzamos haciendo una revisión del formalismo BCS térmico, obteniendo el gap de apareamiento,  $\Delta(T)$ , como función de la temperatura, y viendo que éste colapsa a una temperatura del orden de  $\Delta(T=0)/2$ ; comparamos los resultados analíticos (en el Capítulo III compararemos los resultados numéricos) obtenidos a partir de una fuerza separable con los que provienen de una fuerza no separable, notando que éstos son equivalentes. Para completar el estudio a temperaturas por debajo de  $T_c$ , incluimos las correlaciones de dos cuasipartículas a través del formalismo de la FTRPA, observando también una inhibición de éstas con la temperatura, cayendo la primer energía del espectro de excitaciones colectivas de la misma forma que el gap.

Para temperaturas por encima de  $T_c$  el sistema despliega las propiedades de un sistema fermiónico normal, es decir, la energía de excitación correspondiente es una función cuadrática de la temperatura, y en consecuencia, el calor específico es lineal en  $T$ . Las excitaciones colectivas de dos partículas, descritas por la FTRPA, muestran dos tipos de contribuciones, de adición y de remoción; la energía de excitación bosónica resulta lineal en  $T$ , siendo el calor específico constante. Finalmente debe destacarse que el calor específico total del sistema, a uno y otro

lado de la transición, muestra un comportamiento similar al de los "puntos- $\lambda$ ", bien descritos a través de una teoría fenomenológica como la teoría de Landau-Ginzburg para transiciones de fase.

**CAPITULO II**  
**Interacción Multipolar a temperatura Finita**

## Introducción

Nuestro conocimiento sobre la estructura del núcleo proviene, desde el punto de vista experimental, de la observación y el análisis de la forma en que éste interactúa con pruebas externas, ya sea con el campo electromagnético o con el bombardeo con partículas, o, actualmente, el bombardeo con iones pesados<sup>25)</sup>. Esta información da cuenta de la riqueza de los fenómenos nucleares, poniendo en evidencia que el núcleo presenta tanto grados de libertad de partícula independiente, semejantes a los producidos por los electrones en los átomos, como grados de libertad colectivos, semejantes a los observados en un líquido cuántico. Las excitaciones colectivas, inducidas en esas reacciones, reciben el nombre de resonancias gigantes. Una de las resonancias gigantes mejor conocida, es la resonancia dipolar gigante, que se induce mediante la interacción con campos eléctricos, produciendo el desplazamiento del centro de masa de los protones respecto del de los neutrones<sup>30)</sup>. Desde el punto de vista teórico, estos modos son interesantes porque permiten estudiar fenómenos colectivos en sistemas con un número finito de partículas.

El conocimiento de la existencia de resonancias gigantes, de distinta multipolaridad, construidas sobre el estado fundamental, data de varias décadas atrás<sup>30)</sup>; éstas han sido observadas tanto en el bombardeo del núcleo con protones, neutrones, o partículas

alfa, como en reacciones del tipo  $(e, e')$ . En el presente, la gran disponibilidad de aceleradores de iones pesados, posibilita la observación de un fenómeno similar en núcleos altamente excitados, o núcleos calientes. Se han observado resonancias gigantes tanto en reacciones altamente inelásticas<sup>4)</sup>, como en reacciones de fusión de iones pesados<sup>39)</sup>. Su evidencia ha sido inferida a partir del espectro de rayos gamma producido a partir del núcleo compuesto y sus fragmentos<sup>40)</sup>.

La comprensión de los modos de excitación colectivos, asociados con el estado fundamental del núcleo, ha permitido entender, tanto, la estructura como la dinámica del núcleo, a bajas energías. Las teorías microscópicas utilizadas han permitido una descripción adecuada de los centroides de energías y de los anchos de estas resonancias. Nuestro propósito, es la formulación de una teoría microscópica que permita describir las resonancias gigantes, de distintas multipolaridades, para un núcleo en estado altamente excitado. Es decir, que queremos estudiar excitaciones colectivas montadas sobre estados distintos del fundamental, estados excitados, descriptos en forma estadística a temperatura distinta de cero. La derivación que haremos se basa, en primer lugar, en la descripción de la distribución de equilibrio a través de una teoría de campo medio, obtendremos el comportamiento de los grados de libertad bosónicos, aplicando el formalismo de FTRPA, donde, a diferencia de lo que ocurre a temperatura cero, a temperatura distinta de cero tendremos contribuciones no sólo de los canales de partícula-agujero, sino también de los canales de partícula-partícula y de agujero-agujero (Figura 1).

El Capítulo ha sido organizado de la siguiente forma: en el primer punto se describe el formalismo RPA, extendido a temperatura finita (FTRPA), para una interacción multipolar separable, tanto en el caso de núcleos superconductores como el caso de núcleos normales. En el segundo punto discutiremos el caso de una fuerza nuclear no separable. Finalmente, en el tercer punto, se discuten los resultados obtenidos en cálculos realistas; describiremos el comportamiento de las resonancias de multipolaridad  $\lambda^\pi = 2^+$  y  $3^-$  para  $^{208}\text{Pb}$ , como función de la temperatura, comparando los resultados con los que se obtienen aplicando el formalismo de la Función de Respuesta Lineal a temperatura finita<sup>18,19)</sup> junto con la ecuación de Bethe Salpeter.

El material de este capítulo forma parte de los trabajos citados en las Ref. 17 y 19.

## 1-Tratamiento de una Interacción Multipolar Separable

### a través del formalismo de la FTRPA.

Como sabemos el conjunto gran canónico, el cual está basado en el Hamiltoniano total del sistema, contiene, a una dada temperatura, una gran cantidad de estados de partícula independiente, pero también debido a las correlaciones, estados colectivos. Los grados de libertad fermiónicos, como habíamos anticipado, los trataremos a partir del conocido formalismo de Hartree-Fock térmico<sup>19)</sup>, mientras que los grados de libertad bosónicos los describiremos a través de la FTRPA. Estamos interesados en sentar las bases para el cálculo numérico del formalismo, así como también el estudio de sus propiedades formales. Consideraremos dos casos posibles, el caso de un núcleo de capa cerrada, en el cual la interacción de apareamiento es despreciable, y un núcleo superfluido a temperaturas bajas.

## 2.1.A- Núcleos no superconductores.

En el primer caso partimos del siguiente Hamiltoniano:

$$H = H_{sp} + H_{QA} \quad (2.1-1-a)$$

$$H_{sp} = \sum_{j,t} \epsilon_j(t_z) a_j^\dagger(t_z) a_j(t_z) \quad (2.1-1-b)$$

$$H_{QA} = - \frac{1}{2} \sum_{\substack{t_z, t_{z'} \\ \mu}} \kappa_\lambda(t_z, t_{z'}) Q_{\lambda\mu}^\dagger(t_z) Q_{\lambda\mu}(t_{z'}) \quad (2.1-1-c)$$

donde se ha usado la notación standard<sup>44)</sup>, siendo  $\epsilon_j$  energía de partícula independiente,  $a_j^\dagger(t_z)$  ( $a_j(t_z)$ ) el operador de creación (aniquilación) de una partícula,  $\kappa_\lambda(t_z, t_{z'})$  la constante de acoplamiento de la interacción, mientras que  $t_z$  describe estados de neutrón y de protón, y  $\lambda(\mu)$  la multipolaridad, (la proyección del momento angular) de la interacción.

Para un núcleo de capa cerrada, tomaremos:

$$Q_{\lambda\mu}^\dagger(t_z) = \sum_{j_1 \geq j_2} q_\lambda(j_1, j_2, t_z) ( A_{\lambda\mu}^\dagger(j_1, j_2, t_z) + A_{\lambda\mu}(j_1, j_2, t_z) ) \quad (2.1-2)$$

teniendo en cuenta que:

$$q_\lambda(j_1, j_2, t_z) = \frac{\langle j_1 || Q_\lambda || j_2 \rangle}{\sqrt{2\lambda+1}} \quad (2.1-3)$$

donde,  $\langle \parallel \parallel \rangle$  denota elemento de matriz reducido del operador, y :

$$A^{\dagger}(j_1 j_2, t_z)_{\lambda\mu} = \sum_{m_1, m_2} \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | \lambda\mu \rangle a_{j_1 m_1}^{\dagger} \overline{a_{j_2 m_2}} \quad (2.1-4)$$

Describiremos, ahora, el espectro de excitaciones colectivas. Sabemos que a temperatura cero, la descripción de estas excitaciones en términos de contribuciones coherentes de partícula-agujero (p-h), a través del formalismo de RPA, provee resultados que concuerdan bastante bien con los obtenidos experimentalmente. En el Apéndice D se describe el formalismo de la RPA a temperatura cero. Extenderemos el formalismo a temperatura diferente de cero, para ello debemos tener en cuenta nuevas configuraciones debidas a los canales de partícula-partícula (p-p) y agujero-agujero (h-h)

Consideraremos:

$$\Gamma_{\lambda\mu}^{\dagger}(\omega_n) = \sum_{\substack{j_1 \geq j_2 \\ t_z}} ( X_{\lambda}^n(j_1 j_2, t_z) A^{\dagger}(j_1 j_2, t_z)_{\lambda\mu} + Y_{\lambda}^n(j_1 j_2, t_z) A(j_1 j_2, t_z)_{\lambda\mu} ) \quad (2.1-5-a)$$

como el operador que crea el estado de un fonón de energía  $\omega_n$ , y :

$$\Gamma_{\lambda\mu}(\omega_n) = (\Gamma_{\lambda\mu}^{\dagger}(\omega_n))^{\dagger} \quad (2.1-5-b)$$

como el operador que destruye el estado de un fonón de energía  $\omega_n$ , es decir que:

$$|\lambda\mu, \omega_n\rangle = \Gamma_{\lambda\mu}^\dagger(\omega_n) |RPA\rangle \quad (2.1-6)$$

$$\Gamma_{\lambda\mu}(\omega_n) |RPA\rangle = 0 \quad (2.1-7)$$

donde  $|RPA\rangle$  es el vacío de nuestra teoría. De acuerdo con Rowe<sup>40)</sup> lo podemos escribir explícitamente a partir del vacío de Hartree Fock ( $|HF\rangle$ ) de la siguiente forma:

$$|RPA\rangle = N_0 e^{\hat{Z}} |HF\rangle \quad (2.1-8)$$

donde:

$$\hat{Z} = \frac{1}{2} \sum_{\substack{j_1, j_2 \\ j_1', j_2' \\ t_z}} Z(j_1 j_2, j_1' j_2') A^\dagger(j_1 j_2, t_z)_{\lambda\mu} A(j_1' j_2', t_z)_{\lambda\mu} \quad (2.1-9)$$

siendo  $\hat{Z}$  la matriz:

$$\hat{Z} = Y X^{-1} \quad (2.1-10)$$

donde  $X$  ( $Y$ ) es la matriz de la amplitud adelantada (atrasada) del fonón, y siendo  $N_0$  la constante de normalización.

En las expresiones anteriores,  $X_\lambda^n(k_1 k_2, t_z)$  ( $Y_\lambda^n(k_1 k_2, t_z)$ ) representa la amplitud adelantada (retrasada) del fonón.

La ecuación de movimiento propuesta para el sistema es la

misma que conocemos para  $T=0$  MeV:

$$[ H , \Gamma_{\lambda\mu}^{\dagger}(\omega_n) ] = \omega_n \Gamma_{\lambda\mu}^{\dagger}(\omega_n) \quad (2.1-11-a)$$

$$[ H , \Gamma_{\lambda\mu}(\omega_n) ] = - \omega_n \Gamma_{\lambda\mu}(\omega_n) \quad (2.1-11-b)$$

Recordemos, que en su carácter de operadores bosónicos, los  $\Gamma_{\lambda\mu}^{\dagger}(\omega_n)$  satisface las reglas de conmutación usuales:

$$[ \Gamma_{\lambda\mu}(\omega_n) , \Gamma_{\lambda'\mu'}^{\dagger}(\omega_{n'}) ] = \delta_{nn'} \quad (2.1-12)$$

En nuestro formalismo, consideraremos el par p-h (p-p, h-h), descrito por  $A_{\lambda\mu}^{\dagger}(j_1 j_2 t_z)$ , como un bosón. Esta aproximación, claramente, viola el principio de Pauli: cuando se la usa para linealizar las ecuaciones de movimiento implica una aproximación semejante al método de funciones de Green. En éste último se obtiene una expresión aproximada para las funciones de Green de dos partículas, sumando un conjunto restringido de diagramas, en una expansión perturbativa. Esta aproximación se conoce como "aproximación de cuasi-bosón". De esta forma::

$$\begin{aligned} & \langle RPA | [ A(j_1 j_2 t_z)_{\lambda\mu} , A^{\dagger}(j_1 j_2 t_z)_{\lambda'\mu'} ] | RPA \rangle \cong \\ & \cong \langle HF | [ A(j_1 j_2 t_z)_{\lambda\mu} , A^{\dagger}(j_1 j_2 t_z)_{\lambda'\mu'} ] | HF \rangle = \\ & = \delta_{\lambda\lambda'} \delta_{\mu\mu'} (\delta_{j_1 j_1'} \delta_{j_2 j_2'} - (-)^{j_1+j_2-\lambda} \delta_{j_1 j_2'} \delta_{j_2 j_1'}) (n_{j_1}^F(T) - n_{j_2}^F(T)) \end{aligned}$$

(2.1-13)

donde  $n_j^F(T)$  es el número de ocupación fermiónico del estado "j":

$$n_j^F(T) = \langle HF | a_{jm}^\dagger a_{jm} | HF \rangle \quad (2.1-14)$$

es decir:

$$n_j^F(T) = 1 / ( 1 + \exp(\epsilon_j - \lambda)/T ) \quad (2.1-15)$$

De acuerdo con las ecuaciones de movimiento (2.1-11), las  $\omega_n$  del espectro de excitaciones colectivas, en la aproximación considerada, son autovalores del siguiente determinante<sup>35-55</sup>:

$$\det \begin{vmatrix} 1 - \kappa_\lambda(nn)\theta(\omega_n, n) & \kappa_\lambda(np)\theta(\omega_n, n) \\ \kappa_\lambda(pn)\theta(\omega_n, p) & 1 - \kappa_\lambda(pp)\theta(\omega_n, p) \end{vmatrix} = 0 \quad (2.1-16)$$

donde:

$$\theta(\omega_n, t_z) = \sum_{j_1 \geq j_2} \frac{2E_{j_1 j_2}(t_z)(n_{j_1}(T) - n_{j_2}(T))}{(E_{j_1 j_2}(t_z))^2 - (\omega_n)^2} |q_\lambda(j_1, j_2, t_z)|^2 \quad (2.1-17)$$

siendo:

$$E_{j_1 j_2}(t_z) = (\epsilon_{j_2} - \epsilon_{j_1}) \quad (2.1-18)$$

A partir del espectro podemos describir las magnitudes

termodinámicas relevantes, como veremos en el Capítulo III.

Para completar el estudio de las propiedades del formalismo RPA a temperatura finita, discutiremos brevemente las relaciones de ortogonalidad y completitud.

La relación de ortogonalidad derivada de (2.1-12), puede escribirse como:

$$\sum_{j_1 \geq j_2} ( X_{\lambda}^n(j_1 j_2, t_z) X_{\lambda}^{n'}(j_1 j_2, t_z) - Y_{\lambda}^n(j_1 j_2, t_z) Y_{\lambda}^{n'}(j_1 j_2, t_z) ) \times$$

$$x(n_{j_2}^F(t_z) - n_{j_1}^F(t_z)) = \delta_{nn'} \quad (2.1-19)$$

y la relación de clausura resulta:

$$\sum_n ( X_{\lambda}^n(j_1 j_2, t_z) X_{\lambda}^n(i_1 i_2, t_{z'}) - Y_{\lambda}^n(j_1 j_2, t_z) Y_{\lambda}^n(i_1 i_2, t_{z'}) ) \times$$

$$x(n_{j_1}^F(t_z) - n_{j_2}^F(t_z))^{1/2} (n_{i_1}^F(t_{z'}) - n_{i_2}^F(t_{z'}))^{1/2} =$$

$$= \delta_{j_1 i_1} \delta_{j_2 i_2} \delta_{t_z t_{z'}} \quad (2.1-20)$$

Experimentalmente, las excitaciones de carácter colectivo, se caracterizan por sus probabilidades de transición electromagnéticas, las cuales difieren en dos o más ordenes de magnitud respecto de las excitaciones de partícula independiente. Teniendo en cuenta este efecto, adquiere importancia el cálculo microscópico de las probabilidades de transición del sistema desde los estados excitados de un fonón, (2.1-7), al estado sin fonones, así como también su comportamiento con el aumento de temperatura,

es decir a medida que la energía de excitación disponible en el sistema aumenta.

Para calcular las probabilidades de transición que nos interesan, comenzaremos por invertir la expresión (2.1-5), resultando:

$$Q_{\lambda\mu}^{\dagger}(t_z) = \sum_n \Lambda_{\lambda}(\omega_n, t_z) \cdot \left[ \Gamma_{\lambda\mu}^{\dagger}(\omega_n) + \Gamma_{\lambda\mu}(\omega_n) \right] \quad (2.1-21)$$

donde hemos tomado:

$$\Lambda_{\lambda}(\omega_n, t_z) = \sum_{j_1 \geq j_2} \left( X_{\lambda}^n(j_1, j_2, t_z) + Y_{\lambda}^n(j_1, j_2, t_z) \right) \times \\ \times (n_{j_2}^F(t_z) - n_{j_1}^F(t_z)) q_{\lambda}(j_1, j_2, t_z) \quad (2.1-22)$$

de manera que la probabilidad de transición, para una excitación de multipolaridad  $\lambda$ , desde el estado de cero fonones,  $|0\rangle$ , al estado de un fonón de energía  $\omega_n$ , será:

$$\langle \lambda\mu, \omega_n | Q_{\lambda\mu}^{\dagger}(t_z) | 0 \rangle = \Lambda_{\lambda}(\omega_n, t_z) \quad (2.1-23)$$

De forma que:

$$B(E\lambda, \omega_n)_{\text{electrico}} = (2\lambda+1) \left| \Lambda_{\lambda}(\omega_n, \rho) \right|^2 \quad (2.1-24)$$

$$B(E\lambda, \omega_n)_{\text{masa}} = \sum_{t_z} (2\lambda+1) \left| \Lambda_{\lambda}(\omega_n, t_z) \right|^2 \quad (2.1-25)$$

Nos preocupa, también, la evolución de la regla de suma pesada en energía<sup>49)</sup> como función de la temperatura, ya que sabemos que son las resonancias gigantes las que agotan la mayor parte de ésta en el espectro.

Para un operador general de un cuerpo:

$$F = \sum_{pq} a_p^\dagger a_q \quad (2.1-26)$$

vale la siguiente relación:

$$\begin{aligned} \text{EWSR} &= \sum_{\nu} (E_{\nu} - E_0) |\langle \nu | F | 0 \rangle|^2 = \\ &= \frac{1}{2} \langle 0 | [F, [H, F]] | 0 \rangle \end{aligned} \quad (2.1-27)$$

Thouless ha demostrado que esta regla de suma se satisface si los estados de la izquierda son evaluados a través del formalismo RPA, y los de la derecha usando el estado fundamental de Hartree-Fock. Esto sigue siendo cierto al extender el formalismo RPA a temperatura distinta de cero.

El cálculo de las expresiones (2.1-27), a través de las probabilidades de transición y su comparación con el resultado obtenido mediante los conmutadores (regla de suma no perturbada), permite asegurar, una vez verificada la igualdad, que todas las raíces de la ecuación de dispersión (2.1-16) han sido halladas.

Sabemos además, que ha medida que la temperatura aumenta, se incrementa el número de configuraciones accesibles al sistema, de

manera que las reglas de suma se mantienen constantes con la temperatura. Este hecho es de interés para el cálculo numérico de sistemas reales, ya que el alejamiento de este comportamiento implicará que el espacio de configuraciones con el que se trabaja, no es lo suficientemente grande.

Volviendo al problema que nos interesa, a partir del operador multipolar  $Q_{\lambda\mu}(t_z)$ , podemos escribir la regla de suma no perturbada como:

$$EWSR_{\text{no pert}} = \sum_{\substack{j_1 \geq j_2 \\ t_z}} E_{j_1 j_2}(t_z) |q_{\lambda}(j_1 j_2, t_z)|^2 (n_{j_1}(t_z) - n_{j_2}(t_z)) \quad (2.1-28)$$

y la regla de suma obtenida a partir de la resolución de las ecuaciones de la FTRPA:

$$EWSR_{\text{FTRPA}} = \sum_{n, t_z} \omega_n (2\lambda+1) |A_{\lambda}(\omega_n, t_z)|^2 \quad (2.1-29)$$

En (2.1-29) podemos separar la parte de la regla de suma correspondiente al canal isoescalar, de la correspondiente al isovectorial. En esta forma obtendremos información sobre las resonancias de baja energía en el espectro (correspondientes a los modos isoescalares), y sobre las que se encuentran a mayor energía (modos isovectoriales):

$$\text{EWSR}_{\text{FTRPA}}(\tau=0) = \sum_{n, t_z} \omega_n (2\lambda+1) (\Lambda_\lambda(\omega_n, p) + \Lambda_\lambda(\omega_n, n))^2 \quad (2.1-30-a)$$

$$\text{EWSR}_{\text{FTRPA}}(\tau=1) = \sum_{n, t_z} \omega_n (2\lambda+1) (\Lambda_\lambda(\omega_n, p) - \Lambda_\lambda(\omega_n, n))^2 \quad (2.1-30-b)$$

discutiremos esto en detalle al presentar los resultados para <sup>208</sup>Pb.

El formalismo que hemos descripto nos provee de una descripción precisa de las resonancias gigantes. Partiendo de la suposición que los pares de p-h, p-p y h-h se comportan como bosones, podemos obtener el espectro de excitaciones a partir de (2.1-16). Estudiando cuál de esas raíces agota mayor EWSR, o presenta valores grandes para la probabilidad de transición,  $B(E\lambda)$ , detectamos las resonancias gigantes, pudiendo definir, promediando sobre las excitaciones vecinas, un centroide y un ancho característico. Obtenidos estos últimos es posible comparar con los resultados experimentales.

Los cálculos de energías colectivas y de distribuciones de intensidad en núcleos reales, a través del formalismo de la FTRPA, no son sencillos debido al número relativamente grande de raíces de la correspondiente ecuación de dispersión, necesarias para agotar las reglas de suma relevantes del sistema.

A temperatura cero, el espectro vibracional (fonones) RPA, se obtiene resolviendo la ecuación de dispersión para un número discreto de configuraciones de partícula-agujero,  $(p_2(t_z), p_1(t_z))_{\lambda\mu}$ . A medida que la temperatura aumenta, como los estados de partícula se distribuirán con números de ocupación  $n_j^F(T)$ , las restricciones sobre  $p_2 > p_{\text{Fermi}}$  y  $p_1 < p_{\text{Fermi}}$ , no son válidas, de manera que todas las configuraciones del tipo

$(p_2(t_z), p_1(t_z))_{\lambda\mu}$ , con  $p_2 > p_1$  deberán ser incluidas; de esta forma el número de configuraciones del sistema es función de la temperatura. El cálculo numérico presenta entonces dos dificultades, una de ellas está relacionada con el gran número de configuraciones puestas en juego, la otra está vinculada al hecho que un gran número de pares con energías  $(\epsilon_{p_1}(t_z) - \epsilon_{p_2}(t_z))$  diferirán en una cantidad pequeña, de manera que la búsqueda de raíces se torna inestable.

En este sentido, el formalismo de la Función de Respuesta Lineal extendido a temperatura finita, provee un método alternativo de cálculo. En este formalismo, la función de Respuesta Lineal para un dado operador F (ver apéndice E), es una función continua de la energía  $\omega$ , brindando  $\text{Im } R_F(\omega)$  información sobre la distribución de intensidad del sistema.  $\text{Im } R_F(\omega)$  permite obtener los centroides de las resonancias y sus anchos, sin necesidad de conocer puntualmente el espectro de excitación, minimizando de esta forma el tiempo de cálculo numérico para sistemas nucleares pesados. La regla de suma pesada en energía, se obtiene a través de una integración sencilla:

$$\text{EWSR} = - \frac{\hbar}{\pi} \int_0^{\infty} d\omega \omega \text{Im } R_F(\omega)$$

y su conservación al aumentar la temperatura garantiza trabajar en un rango suficientemente amplio de energía.

Ambos formalismos son equivalentes, cálculos en sistemas reales muestran buena coincidencia en cuanto a las magnitudes de los anchos y de los centroides de las resonancias gigantes<sup>17,19)</sup>, como destacaremos al analizar los resultados del formalismo para  $^{208}\text{Pb}$ .

## 1.8- Nucleos superconductores.

Todos los resultados anteriores son aplicables a núcleos de capa abierta. Para analizarlos, trabajaremos en una base de cuasipartículas similar a la descrita en el Capítulo I. Las excitaciones colectivas, serán debidas a la contribución coherente de dos cuasipartículas acopladas a buen momento angular. Detallaremos el formalismo.

Partiremos del siguiente Hamiltoniano:

$$H = H_{sp} + H_{qq} + H_p \quad (2.1-31-a)$$

$$H_{sp} = \sum_{\substack{j,m \\ t_z}} \varepsilon_j(t_z) a_{jm}^\dagger(t_z) a_{jm}(t_z) \quad (2.1-31-b)$$

$$H_{qq} = - \frac{1}{2} \sum_{\substack{t_z, t_{z'} \\ \mu}} x_\lambda(t_z, t_{z'}) Q_{\lambda\mu}^\dagger(t_z) Q_{\lambda\mu}(t_{z'}) \quad (2.1-31-c)$$

$$H_p = -G \sum_{\substack{j,m > 0 \\ j',m' > 0 \\ t_z}} a_{jm}^\dagger(t_z) a_{j'm'}^\dagger(t_z) a_{j'm'}(t_z) a_{jm}(t_z) \quad (2.1-31-d)$$

Luego de aplicar el formalismo de la FTBCS a  $H_0 + H_p$ , y despreciando los  $H_{22}$  y  $H_{40}$  correspondientes al modo de multipolaridad  $\lambda^\pi = 0^+$ , frente a los provenientes de la interacción multipolar, H puede expresarse como:

$$H = H_{qp} + H_{qq} \quad (2.1-32)$$

donde escribiendo  $H_{\alpha\Omega}$  en la base de cuasipartículas, siendo el operador  $Q_{\lambda\mu}(t_z)$ :

$$Q_{\lambda\mu}(t_z) = Q_{\lambda\mu}^p(t_z) + Q_{\lambda\mu}^s(t_z) \quad (2.1-33-a)$$

$$Q_{\lambda\mu}^p(t_z) = \sum_{j_1 \geq j_2} \frac{P_{\lambda}(j_1 j_2, t_z)}{(1+\delta_{j_1 j_2})^{1/2}} (A^{\dagger}(j_1 j_2, t_z)_{\lambda\mu} + A(j_1 j_2, t_z)_{\lambda\mu}) \quad (2.1-33-b)$$

$$Q_{\lambda\mu}^s(t_z) = \sum_{j_1 \geq j_2} \frac{S_{\lambda}(j_1 j_2, t_z)}{(1+\delta_{j_1 j_2})^{1/2}} (B^{\dagger}(j_1 j_2, t_z)_{\lambda\mu} + B(j_1 j_2, t_z)_{\lambda\mu}) \quad (2.1-33-c)$$

siendo:

$$A^{\dagger}(j_1 j_2, t_z)_{\lambda\mu} = \sum_{m_1, m_2} \langle j_1 m_1 | j_2 m_2 \lambda \mu \rangle \alpha_{j_1 m_1}^{\dagger} \alpha_{j_2 m_2}^{\dagger} \quad (2.1-34-a)$$

$$B^{\dagger}(j_1 j_2, t_z)_{\lambda\mu} = \sum_{m_1, m_2} \langle j_1 m_1 | j_2 m_2 \lambda \mu \rangle \alpha_{j_1 m_1}^{\dagger} \alpha_{j_2 m_2} \quad (2.1-34-b)$$

$$P_{\lambda}(j_1 j_2, t_z) = -q_{\lambda}(j_1 j_2, t_z) (u_{j_1} v_{j_2} + u_{j_2} v_{j_1}) / (1+\delta_{j_1 j_2})^{1/2} \quad (2.1-35-a)$$

$$S_{\lambda}(j_1 j_2, t_z) = q_{\lambda}(j_1 j_2, t_z) (u_{j_1} u_{j_2} - v_{j_2} v_{j_1}) / (1+\delta_{j_1 j_2})^{1/2} \quad (2.1-35-b)$$

el término  $Q_{\lambda\mu}^s$  corresponde a términos de dispersión que no nos interesan, de manera que no lo tendremos en cuenta.

Al igual que antes, nuestro fonón será:

$$\Gamma_{\lambda\mu}^{\dagger}(\omega_n) = \sum_{\substack{j_1 \geq j_2 \\ t_z}} ( X_{\lambda}^n(j_1 j_2, t_z) A^{\dagger}(j_1 j_2, t_z)_{\lambda\mu} + Y_{\lambda}^n(j_1 j_2, t_z) A(j_1 j_2, t_z)_{\lambda\mu} ) \quad (2.1-36-a)$$

$$\Gamma_{\lambda\mu}(\omega_n) = (\Gamma_{\lambda\mu}^{\dagger}(\omega_n))^{\dagger} \quad (2.1-36-b)$$

siendo  $X_{\lambda}^n(j_1 j_2, t_z)$  y  $Y_{\lambda}^n(j_1 j_2, t_z)$  las amplitudes adelantadas y atrasadas respectivamente.

El estado de un fonón será:

$$|\lambda\mu, \omega_n\rangle = \Gamma_{\lambda\mu}^{\dagger}(\omega_n) |RPA\rangle \quad (2.1-37)$$

donde  $|RPA\rangle$  es el vacío del formalismo, es decir:

$$\Gamma_{\lambda\mu}(\omega_n) |RPA\rangle = 0 \quad (2.1-38)$$

Las ecuaciones de movimiento para el sistema son las usuales:

$$[ H, \Gamma_{\lambda\mu}^{\dagger}(\omega_n) ] = \omega_n \Gamma_{\lambda\mu}^{\dagger}(\omega_n) \quad (2.1-39-a)$$

$$[ H, \Gamma_{\lambda\mu}(\omega_n) ] = -\omega_n \Gamma_{\lambda\mu}(\omega_n) \quad (2.1-39-b)$$

verificándose también la condición de conmutación usual entre bosones:

$$[ \Gamma_{\lambda\mu}(\omega_n), \Gamma_{\lambda\mu'}^{\dagger}(\omega_{n'}) ] = \delta_{nn'} \quad (2.1-40)$$

Digamos además que en la aproximación bosónica:

$$\begin{aligned}
 \langle \text{RPA} | [ A(j_1 j_2, t_z) , A^\dagger(j'_1 j'_2, t_z) ] | \text{RPA} \rangle &\cong \\
 \cong \langle \text{BCS} | [ A(j_1 j_2, t_z)_{\lambda \mu} , A^\dagger(j'_1 j'_2, t_z)_{\lambda' \mu'} ] | \text{BCS} \rangle &= \\
 = \delta_{\lambda \lambda'} \delta_{\mu \mu'} (\delta_{j_1 j'_1} \delta_{j_2 j'_2} - (-)^{j_1 + j_2 - \lambda} \delta_{j_1 j'_2} \delta_{j_2 j'_1}) (1 - f_{j_1} - f_{j_2}) & \\
 & \quad (2.1-41)
 \end{aligned}$$

donde  $f_j$  es el número de ocupación de cuasipartícula del estado "j":

$$f_j(T) = \langle \text{BCS} | \alpha_{j_m}^\dagger \alpha_{j_m} | \text{BCS} \rangle \quad (2.1-42-a)$$

es decir:

$$f_j(T) = 1 / ( 1 + \exp(E_j \beta) ) \quad (2.1-42-b)$$

La ecuación a resolver tiene la misma forma que (2.1-16), la diferencia reside en la forma de  $\theta(\omega_n, t_z)$ . En el caso de un núcleo superconductor ésta adopta la forma:

$$\theta(\omega_n, t_z) = \sum_{j_1 \geq j_2} \frac{2E_{j_1 j_2}(t_z)(1-f_{j_1}(t_z)-f_{j_2}(t_z))}{(E_{j_1 j_2}(t_z))^2 - (\omega_n)^2} |P_\lambda(j_1 j_2, t_z)|^2 \quad (2.1-43)$$

siendo:

$$E_{j_1 j_2}(t_z) = (E_{j_2} + E_{j_1}) \quad (2.1-44)$$

donde  $E_j(t_z)$  es la energía de cuasipartícula asociada al nivel  $j$ , la cual ha sido obtenida a partir de la FTBCS.

Las relaciones de ortogonalidad y clausura son similares a las obtenidas antes:

$$\sum_{j_1 \geq j_2} ( X_{\lambda}^n(j_1 j_2, t_z) X_{\lambda}^{n'}(j_1 j_2, t_z) - Y_{\lambda}^n(j_1 j_2, t_z) Y_{\lambda}^{n'}(j_1 j_2, t_z) ) \times \\ \times (1-f_{j_1}(t_z)-f_{j_2}(t_z)) = \delta_{nn'} \quad (2.1-45)$$

$$\sum_n ( X_{\lambda}^n(j_1 j_2, t_z) X_{\lambda}^n(i_1 i_2, t_{z'}) - Y_{\lambda}^n(j_1 j_2, t_z) Y_{\lambda}^n(i_1 i_2, t_{z'}) ) \times \\ \times (1-f_{j_1}(t_z)-f_{j_2}(t_z))^{1/2} (1-f_{i_1}(t_{z'})-f_{i_2}(t_{z'}))^{1/2} = \\ = \delta_{j_1 i_1} \delta_{j_2 i_2} \delta_{t_z t_{z'}} \quad (2.1-46)$$

Lo mismo sucede para las probabilidades de transición y las reglas de suma:

$$B(E\lambda, \omega_n)_{\text{electrico}} = (2\lambda+1) | \Lambda_{\lambda}(\omega_n, \rho) |^2 \quad (2.1-47)$$

$$B(E\lambda, \omega_n)_{\text{masa}} = \sum_{t_z} (2\lambda+1) | \Lambda_{\lambda}(\omega_n, t_z) |^2 \quad (2.1-48)$$

donde ahora:

$$\Lambda_{\lambda}(\omega_n, t_z) = \sum_{j_1 \geq j_2} ( X_{\lambda}^n(j_1 j_2, t_z) + Y_{\lambda}^n(j_1 j_2, t_z) ) \times \\ \times (f_{j_2}(t_z)-f_{j_1}(t_z)) P_{\lambda}(j_1 j_2, t_z) \quad (2.1-49)$$

La regla de suma no perturbada puede escribirse como:

$$EWSR_{\text{no pert}} = \sum_{\substack{j_1 \geq j_2 \\ t_z}} E_{j_1 j_2}(t_z) |P_\lambda(j_1 j_2, t_z)|^2 (1 - f_{j_1}(t_z) - f_{j_2}(t_z)) \quad (2.1-50)$$

la cual, al igual que antes, puede ser comparada con la obtenida a partir de las raíces halladas a través del formalismo de la FTRPA:

$$EWSR_{\text{FTRPA}} = \sum_{n, t_z} \omega_n (2\lambda+1) |A_\lambda(\omega_n, t_z)|^2 \quad (2.1-51)$$

En (2.1-49) podemos separar la parte de la regla de suma correspondiente al canal isoescalar, de la correspondiente al isovectorial, como lo hicimos en el caso de un núcleo normal, es decir:

$$EWSR_{\text{FTRPA}}(\tau=0) = \sum_{n, t_z} \omega_n (2\lambda+1) (A_\lambda(\omega_n, p) + A_\lambda(\omega_n, n))^2 \quad (2.1-52-a)$$

$$EWSR_{\text{FTRPA}}(\tau=1) = \sum_{n, t_z} \omega_n (2\lambda+1) (A_\lambda(\omega_n, p) - A_\lambda(\omega_n, n))^2 \quad (2.1-52-b)$$

La importancia de estos desarrollos se debe a que a través de ellos podemos estudiar núcleos superfluidos en los cuales son importantes los estados colectivos de multipolaridad distinta de  $0^+$ .

2.2-Tratamiento de las excitaciones colectivas  
de una interaccion no separable  
a traves del formalismo de la FTRPA

Volvamos a la interacción descrita en el Capítulo I, punto 1-B. Tomemos el Hamiltoniano dado por la expresión (31), es decir:

$$H = H_{sp} + H_i, \quad (2.2-1)$$

donde:

$$H_{sp} = \sum_{\alpha} \epsilon_{\alpha} a_{\alpha}^{\dagger} a_{\alpha}, \quad (2.2-2-a)$$

$$H_i = \sum_{\alpha\beta\gamma\delta} \gamma_{\alpha\beta\gamma\delta} a_{\alpha}^{\dagger} a_{\beta}^{\dagger} a_{\delta} a_{\gamma}, \quad (2.2-2-b)$$

donde  $H_{sp}$  representa la parte de partícula independiente y  $H_i$  de una fuerza de dos cuerpos respectivamente. La notación usada es la del Capítulo I.

Recordemos que  $\gamma_{\alpha\beta\gamma\delta}$  puede escribirse como:

$$\begin{aligned}
\gamma_{\alpha\beta\gamma\delta} &= -\frac{1}{2} \sum_{J M} G(ab,cd,J) \langle j_{\alpha} m_{\alpha} j_{\beta} m_{\beta} | J M \rangle \cdot \\
&\quad \langle j_{\gamma} m_{\gamma} j_{\delta} m_{\delta} | J M \rangle \\
&= -\frac{1}{2} \sum_{J' M'} F(ac,db,J') s_{\gamma} \langle j_{\alpha} m_{\alpha} j_{\gamma} -m_{\gamma} | J' M' \rangle \cdot \\
&\quad s_{\beta} \langle j_{\delta} m_{\delta} j_{\beta} -m_{\beta} | J' M' \rangle \\
&= +\frac{1}{2} \sum_{J'' M''} F(ad,cb,J'') s_{\delta} \langle j_{\alpha} m_{\alpha} j_{\delta} -m_{\delta} | J'' M'' \rangle \\
&\quad s_{\beta} \langle j_{\gamma} m_{\gamma} j_{\beta} -m_{\beta} | J'' M'' \rangle
\end{aligned}
\tag{2.2-3}$$

donde:

$$s_{\alpha} = (-)^{j_{\alpha} - m_{\alpha}} \tag{2.2-4}$$

y

$$\langle ab, J M | H_i | cd, J M \rangle = \sigma_{ab} \sigma_{cd} G(ab,cd,J) \tag{2.2-5-a}$$

con:

$$\sigma_{ab} = \begin{cases} 1 & \text{si } a \equiv b \\ 2^{1/2} & \text{en caso contrario} \end{cases} \tag{2.2-5-b}$$

donde la relación entre  $F(ab,cd,J)$  y  $G(ab,cd,J)$  es la descrita en el Capítulo I.

Como estamos interesados en la descripción de un núcleo de capa abierta, debemos trabajar en una base de cuasipartículas. En el primer capítulo de este trabajo hemos descrito en detalle la transformación del Hamiltoniano (2.2-1) a la nueva base, resumiremos los puntos esenciales. Partiremos de:

$$H' = H + \lambda_n N_n + \lambda_p N_p \tag{2.2-6-a}$$

$$N_n = \sum_{\alpha(n)} a_{\alpha}^{\dagger} a_{\alpha} \quad (2.2-6-b)$$

$$N_p = \sum_{\alpha(p)} a_{\alpha}^{\dagger} a_{\alpha} \quad (2.2-6-c)$$

con la condición de conservar el valor medio del número de partículas:

$$\langle N_n \rangle = n_n \quad (2.2-7-a)$$

$$\langle N_p \rangle = n_p \quad (2.2-7-b)$$

donde con el símbolo  $\sum_{\alpha(n)}$  ( $\sum_{\alpha(p)}$ ) hemos indicado que la suma se realiza sobre los estados de partícula independiente de neutrón(protón), y  $\lambda_n$  y  $\lambda_p$  son los multiplicadores de Lagrange que garantizan la conservación del número medio de neutrones y protones, respectivamente.

Luego de pasar a la base de cuasipartículas,  $H'$  toma la forma:

$$H_{RPA} = \sum_{\alpha} E_{\alpha} b_{\alpha}^{\dagger} b_{\alpha} + \sum_{\alpha\beta\gamma\delta} \gamma_{\alpha\beta\gamma\delta} : a_{\alpha}^{\dagger} a_{\beta}^{\dagger} a_{\delta} a_{\gamma} : \quad (2.2-8)$$

donde  $E_{\alpha}$  es la energía de la cuasipartícula "a", y  $a_{\alpha}^{\dagger}$  ( $a_{\alpha}$ ) es el operador de creación (aniquilación) de una cuasipartícula.

El espectro de estados de dos cuasipartículas acopladas a buen momento angular, lo podemos describir a través de la FTRPA. Al igual que en los capítulos anteriores, definiremos nuestro

operador de creación de un fonón como:

$$\Gamma_{\lambda\mu}^\dagger(\omega_n) = \sum_{\substack{j_1 \geq j_2 \\ l_z}} \left[ X_\lambda^n(j_1 j_2, t_z) A_{\lambda\mu}^\dagger(j_1 j_2, t_z) - Y_\lambda^n(j_1 j_2, t_z) A_{\lambda\mu}^-(j_1 j_2, t_z) \right] \quad (2.2-10-a)$$

$$\Gamma_{\lambda\mu}(\omega_n) = (\Gamma_{\lambda\mu}^\dagger(\omega_n))^\dagger \quad (2.2-10-b)$$

donde:

$$A_{\lambda\mu}^\dagger(j_1 j_2, t_z) = \sum_{m_1, m_2} \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | \lambda \mu \rangle \alpha_{j_1 m_1}^\dagger \alpha_{j_2 m_2}^\dagger \quad (2.2-11)$$

es el operador de creación de un par de cuasipartículas acopladas a momento angular  $\lambda$  y proyección  $\mu$ .

Como ya vimos, el vacío del formalismo de la FTRPA, será tal que:

$$\Gamma_{\lambda\mu}(\omega_n) |RPA\rangle = 0 \quad (2.2-12)$$

Tendremos en cuenta la aproximación de cuasibosón, ya descripta, de esa manera:

$$\begin{aligned} & \langle RPA | [A_{\lambda\mu}(j_1 j_2, t_z), A_{\lambda'\mu'}^\dagger(i_1 i_2, t_z)] | RPA \rangle \cong \\ & \cong \langle BCS | [A_{\lambda\mu}(j_1 j_2, t_z), A_{\lambda'\mu'}^\dagger(i_1 i_2, t_z)] | BCS \rangle = \\ & = \delta_{\lambda\lambda'} \delta_{\mu\mu'} (\delta_{j_1 i_1} \delta_{j_2 i_2} - (-)^{j_1+j_2-\lambda} \delta_{j_1 i_2} \delta_{j_2 i_1}) (1-f_{j_1} - f_{j_2}) \end{aligned} \quad (2.2-13)$$

donde:

$$f_j = \langle \text{BCS} | \alpha_{jm}^\dagger \alpha_{jm} | \text{BCS} \rangle = \\ = (1 + \exp(\beta E_j))^{-1} \quad (2.2-14)$$

Seguindo el procedimiento habitual, ampliamente descrito en el Apéndice D, las ecuaciones de movimiento a resolver son:

$$[ H', \Gamma_{\lambda\mu}^\dagger(\omega_n) ] = \omega_n \Gamma_{\lambda\mu}^\dagger \quad (2.2-15-a)$$

$$[ H', \Gamma_{\lambda\mu}(\omega_n) ] = -\omega_n \Gamma_{\lambda\mu} \quad (2.2-15-b)$$

resultando la siguiente ecuación matricial:

$$\begin{pmatrix} A & B \\ -B & -A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \omega \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \quad (2.2-16)$$

donde los elementos de matriz de A y B están definidos por:

$$A_{12,34}^{(J)} = ( E_1 + E_2 \delta_{12,34} \\ - G(12,34,J) ( u_1 u_2 u_3 u_4 + v_1 v_2 v_3 v_4 ) \\ - F(12,34,J) ( u_1 v_2 u_3 v_4 + v_1 u_2 v_3 u_4 ) \\ + F(12,43,J) ( u_1 v_2 v_3 u_4 + v_1 u_2 u_3 v_4 ) ) \theta(34,J) \quad (2.2-17-a)$$

$$B_{12,34}^{(J)} = G(12,34,J) ( u_1 u_2 v_3 v_4 + v_1 v_2 u_3 u_4 ) \\ - F(12,34,J) ( u_1 v_2 v_3 u_4 + v_1 u_2 u_3 v_4 ) \\ + F(12,43,J) ( u_1 v_2 u_3 v_4 + v_1 u_2 v_3 u_4 ) \theta(34,J) \quad (2.2-17-b)$$

Para simplificar la notación, hemos reemplazado el par  $(j_1, j_2)$  por (12).

Para completar el formalismo damos las relaciones de completitud, expresión (2.2-18) y las relaciones de clausura, expresión (2.2-19):

$$\sum_{\substack{j_1 \geq j_2 \\ t_z}} \left[ X_{\lambda\mu}^n(j_1, j_2, t_z) X_{\lambda\mu}^{n'}(j_1, j_2, t_z) - Y_{\lambda\mu}^n(j_1, j_2, t_z) Y_{\lambda\mu}^{n'}(j_1, j_2, t_z) \right] (1-f_{j_1} - f_{j_2}) = \delta_{nn'} \quad (2.2-18)$$

$$\sum_n (1-f_{j_1} - f_{j_2})^{1/2} \left[ X_{\lambda\mu}^n(j_1, j_2, t_z) X_{\lambda\mu}^n(i_1, i_2, t_z) - Y_{\lambda\mu}^n(j_1, j_2, t_z) Y_{\lambda\mu}^n(i_1, i_2, t_z) \right] (1-f_{i_1} - f_{i_2})^{1/2} = \delta_{j_1 i_1} \delta_{j_2 i_2} \delta_{t_z} \quad (2.2-19)$$

Estas expresiones son similares, en su estructura, a las obtenidas para el caso de un núcleo superfluido con una fuerza multipolar separable (expresiones (2.2-43) y (2.2-44)). Lo mismo sucede para las probabilidades de transición y para las reglas de suma:

$$B(E\lambda, \omega)_n \text{ eléctrico} = (2\lambda+1) |\Lambda_\lambda(\omega_n, \rho)|^2 \quad (2.2-20)$$

$$B(E\lambda, \omega_n)_{\text{masa}} = \sum_{t_z} (2\lambda+1) |\Lambda_\lambda(\omega_n, t_z)|^2 \quad (2.2-21)$$

donde :

$$\Lambda_\lambda(\omega_n, t_z) = \sum_{j_1 \geq j_2} (X_\lambda^n(j_1 j_2, t_z) + Y_\lambda^n(j_1 j_2, t_z)) \times \\ \times (f_{j_2}(t_z) - f_{j_1}(t_z)) P_\lambda(j_1 j_2, t_z) \quad (2.2-22)$$

La regla de suma no perturbada puede escribirse como:

$$EWSR_{\text{no pert}} = \sum_{j_1 \geq j_2} E_{j_1 j_2}(t_z) |P_\lambda(j_1 j_2, t_z)|^2 (1 - f_{j_1}(t_z) - f_{j_2}(t_z)) \quad (2.2-23)$$

la cual, al igual que antes, puede ser comparada con la obtenida a partir de las raíces halladas a través del formalismo de la FTRPA:

$$EWSR_{\text{FTRPA}} = \sum_{n, t_z} \omega_n (2\lambda+1) |\Lambda_\lambda(\omega_n, t_z)|^2 \quad (2.2-24)$$

En las expresiones anteriores hemos utilizado:

$$P_\lambda(j_1 j_2, t_z) = q_\lambda(j_1 j_2, t_z) (u_{j_1} v_{j_2} + u_{j_2} v_{j_1}) \quad (2.2-25)$$

siendo  $u_\alpha$  y  $v_\alpha$  los elementos de la matriz de transformación entre la base de cuasipartículas y la base de partículas. Mientras que:

$$q_{\lambda}(j_1 j_2, t_z) = \frac{\langle j_1 || Q_{\lambda} || j_2 \rangle}{\sqrt{2\lambda+1}} \quad (2.2-26)$$

donde,  $\langle || \rangle$  denota elemento de matriz reducido del operador  $Q_{\lambda\mu}$ , siendo éste el operador definido en (2.1-33-b).

Hagamos un análisis simple de los elementos de las matrices "A<sub>RPA</sub>" y "B<sub>RPA</sub>". Podemos observar que tanto los elementos de una como los de la otra contienen dos tipos de contribuciones:

Los términos de los elementos de matriz que contienen a G(12,34,J) están acompañados por factores de la forma:

$$\begin{aligned} & u u_{12} u u_{34} \\ & v v_{12} v v_{34} \\ & u u_{12} v v_{34} \\ & v v_{12} u u_{34} \end{aligned} \quad (a)$$

mientras que los términos que contienen F(12,34,J) aparecen acompañados por factores de la forma:

$$\begin{aligned} & u v_{12} u v_{34} \\ & v u_{12} v u_{34} \end{aligned} \quad (b)$$

Señalemos que las expresiones (a) son próximas a la descripción de pares de partícula-partícula. Basta con observar que en el límite de gaps de apareamiento nulos dichas expresiones se anulan si los pares (12) y (34) son pares de partícula-agujero,

ya que en tal caso:

$$\begin{aligned} u_i u_m &\rightarrow 0 && \text{si } \epsilon_i < \epsilon_F \text{ y } \epsilon_m > \epsilon_F \\ v_i v_m &\rightarrow 0 && \text{si } \epsilon_i < \epsilon_F \text{ y } \epsilon_m > \epsilon_F \end{aligned}$$

En cambio los términos que acompañan a  $F(12,34,J)$ , en el mismo límite, son tales que se anulan cuando (12) y (34) son pares de partícula-partícula o agujero-agujero pues:

$$\begin{aligned} u_i v_j &\rightarrow 0 && \text{si } \epsilon_i < \epsilon_F \text{ y } \epsilon_j < \epsilon_F \\ u_n v_m &\rightarrow 0 && \text{si } \epsilon_n > \epsilon_F \text{ y } \epsilon_m > \epsilon_F \end{aligned}$$

A partir del análisis anterior, puede decirse que los términos en  $G(12,34,J)$  de las matrices de la RPA están vinculadas al canal de partícula-partícula de la interacción, mientras que la contribución de los términos en  $F(12,34,J)$  está asociada al canal de partícula-agujero.

Teniendo en cuenta la expresión de  $F(12,34,J)$  y  $G(12,34,J)$  dadas en el Capítulo I, podemos reescribir los elementos de matriz de  $A_{RPA}$  y  $B_{RPA}$  como:

$$\begin{aligned}
A_{12,94}^{(J)} &= (E_1 + E_2) \delta_{12,94} \\
&- G_{pp} \frac{2}{f_{12} f_{94}} V_{12,94}^J (u_1 u_2 u_3 u_4 + v_1 v_2 v_3 v_4) \\
&- G_{ph} \frac{2}{f_{12} f_{94}} \tilde{V}_{12,94}^J (u_1 v_2 u_3 v_4 + v_1 u_2 v_3 u_4) \\
&+ G_{ph} \frac{2}{f_{12} f_{94}} \tilde{V}_{12,49}^J (u_1 v_2 v_3 u_4 + v_1 u_2 u_3 v_4) \\
&\cdot \theta(34, J)
\end{aligned} \tag{2.2-27}$$

$$\begin{aligned}
B_{12,94}^{(J)} &= G_{pp} \frac{2}{f_{12} f_{94}} V_{12,94}^J (u_1 u_2 v_3 v_4 + v_1 v_2 u_3 u_4) \\
&- G_{ph} \frac{2}{f_{12} f_{94}} \tilde{V}_{12,94}^J (u_1 v_2 v_3 u_4 + v_1 u_2 u_3 v_4) \\
&+ G_{ph} \frac{2}{f_{12} f_{94}} \tilde{V}_{12,49}^J (u_1 v_2 u_3 v_4 + v_1 u_2 v_3 u_4) \\
&\cdot \theta(34, J)
\end{aligned} \tag{2.2-28}$$

con:

$$f_{ab} = (1 + \delta_{ab})^{1/2} \tag{2.2-29}$$

$$\theta(ab, J) = (-)^{j_a + j_b + J} \tag{2.2-30}$$

En las expresiones anteriores,  $G_{pp}$  y  $G_{ph}$  representan las constantes de acoplamiento para el canal de partícula-partícula y partícula-agujero respectivamente; mientras que  $V_{ab,cd}^J$  es el elemento de matriz de una fuerza de dos cuerpos entre configuraciones de partícula-partícula, y  $\tilde{V}_{ab,cd}^J$  es el elemento de matriz de una fuerza de dos cuerpos entre

configuraciones de partícula-agujero. La relación entre ambos es bien conocida:

$$\tilde{V}_{ab,cd}^J = (-) \sum_{J'} (2J'+1) \left\{ \begin{matrix} j_a & j_b & J \\ j_c & j_d & J' \end{matrix} \right\} V_{ad,cb}^{J'}$$

De esta manera, hemos tratado los canales monopolar y multipolar de la interacción residual simultáneamente.

En el Capítulo III utilizaremos este formalismo al describir la contribución del canal de partícula-partícula y del canal de partícula-agujero al parámetro de densidad nuclear.

### 2.3-Aplicaciones

Vamos a describir los resultados obtenidos<sup>17)</sup> mediante los cálculos FTRPA para el modo cuadrupolar y el modo octupolar del  $^{208}\text{Pb}$ . Hemos adoptado una parametrización de Nilsson<sup>44)</sup> para las energías de protones y de neutrones a temperatura igual a cero. Basados en el hecho de que los tratamientos autoconsistentes de Hartree-Fock a temperatura finita<sup>19)</sup> resultan prácticamente independientes de T, hemos adoptado los estados de partícula independiente calculados a T=0 para el rango de temperaturas entre 0 MeV y 2 MeV. Con esta base se ha verificado la regla de suma no perturbada a T=0 MeV, tanto para el modo cuadrupolar como para el modo octupolar, coincidiendo con las calculadas en la Ref. 14) a menos de un error del 5%. Con el aumento de la temperatura, la regla de suma se conserva con respecto a su valor a T=0 MeV, observándose desviaciones del orden del 5% para una temperatura del orden de los 2 MeV. Las constantes de acoplamiento utilizadas fueron ajustadas de modo de reproducir el valor de las energías observadas a T=0 MeV, tanto para el modo con  $\lambda^\pi = 2^+$  como para el modo con  $\lambda^\pi = 3^-$ .

Los resultados obtenidos para T=0 MeV se muestran en la Tabla I, mientras que la Tabla II muestra los resultados para T = 2 MeV. Comparando ambas tablas se observa un corrimiento hacia valores más altos de los centroides de energía correspondientes al modo isoescalar, mientras que el correspondiente al modo isovectorial se corre hacia energías más bajas. Como consecuencia del aumento de la temperatura y de la aparición de nuevas configuraciones, se fragmenta el espectro de excitaciones colectivas; ésto hace que la contribución a la regla de suma para

los estados en la cercanía centroide de la resonancia se distribuya entre las nuevas raíces, produciendo un ensanchamiento de la envolvente. Estos resultados son confirmados por los cálculos hechos con el formalismo de la Función de Respuesta Lineal<sup>19)</sup>. En la Tabla III se hace una comparación entre los resultados de ambos formalismos. Como se observa no existe prácticamente diferencia en la energía del pico del centroide, sin embargo en los resultados de la FTRPA la dependencia de éste con la temperatura es más clara, podemos argüir que esto se debe a la búsqueda discreta de las raíces de la ecuación de dispersión. En cuanto a los anchos de las resonancias gigantes, ambos formalismos proporcionan el mismo comportamiento como función de la temperatura. Cabe destacar que en la realización del cálculo a través de la FTRPA se ha utilizado un espacio de 96(190) configuraciones a T=0 MeV, el cual se incremento a 203(430) configuraciones a T=2 MeV para  $\lambda^{\pi}=2^{+}$  ( $3^{-}$ ).

## 2.4-Conclusiones

En este capítulo hemos estudiado la dependencia con la temperatura de los grados de libertad vibracionales. Para ello trabajamos con el formalismo de la RPA extendido a temperatura finita, incluyendo a temperatura distinta de cero tanto configuraciones de p-h como configuraciones de p-p y h-h. En el marco de este formalismo, hallamos las raíces de la ecuación de dispersión, pudiendo describir el espectro de excitaciones colectivas a distintas temperaturas; un hecho importante a destacar es la fragmentación del espectro con el aumento de la temperatura, es decir, la aparición de nuevos estados colectivos debidos al aumento en el número de configuraciones accesibles del problema. Conocido el espectro determinamos las resonancias gigantes como los modos que agotan la mayor parte de la regla de suma, observamos que los modos de baja energía corresponden al canal isoescalar, mientras que los modos de alta energía corresponden al canal isovectorial. La aparición de nuevas raíces con el incremento de la temperatura, implica una redistribución de la regla de suma entre los nuevos modos; de esta forma haciendo el promedio sobre los estados que rodean a aquel que tiene mayor porcentaje de regla de suma, podemos determinar un centroide y un ancho característico para cada resonancia gigante; resulta claro, a partir de estas consideraciones, concluir que estos anchos aumentarán al aumentar la temperatura, disminuyendo en consecuencia el pico de la distribución, ya que la regla de suma total del sistema se conserva. Otro aspecto importante es el corrimiento de los centroides de las resonancias con la

temperatura: el modo isoescalar, de carácter atractivo, se mueven hacia energías más altas debido al efecto de bloqueo térmico, moviéndose el modo isovectorial, de carácter repulsivo, hacia energías más bajas por la misma razón. Cabe mencionar además, que el comportamiento como función de la temperatura de los anchos y de los centroides de las resonancias gigantes es similar al que resulta aplicando el formalismo de la Función de Respuesta Lineal .

**CAPITULO III**

**Estudio de la dependencia térmica del  
Parámetro de Densidad de Niveles.**

## Introducción

El rápido aumento del número de niveles con la energía de excitación, es una característica general de un sistema con un elevado número de grados de libertad. En el caso de un núcleo, al aumentar la energía de excitación el espaciamiento entre el número de niveles se reduce, y la naturaleza de las excitaciones se torna complicada<sup>45,46)</sup>. La existencia de estos niveles se pone de manifiesto al analizar los datos provenientes de experiencias en que se excitan resonancias de neutrones; en ese caso, el espaciamiento promedio entre niveles es  $10^6$  veces menor que en el de partícula independiente, y sus anchos son también  $10^6$  veces menores que los correspondientes a excitaciones de partícula independiente<sup>47)</sup>. El espectro de evaporación de nucleones también brinda información sobre las densidades nucleares, pero con algunas limitaciones debido a las incertezas asociadas con la teoría de reacciones<sup>48,49)</sup>. Hay, además, información experimental proveniente del estudio de resonancias de protones para núcleos livianos y medios. Como lo confirman estas observaciones experimentales resulta útil el empleo de la descripción estadística propuesta en la Introducción General de este trabajo; siendo la densidad de niveles del sistema, la cantidad relevante para describir las propiedades estadísticas del núcleo en función de sus constantes de movimiento (energía de excitación, número de partículas, momento angular, paridad, etc.).

En primera aproximación, el núcleo ha sido representado como

un gas de fermiones sin interacción confinado al volumen nuclear, resultando, en el caso de niveles equidistantes y no degenerados <sup>1,50,51)</sup>, una densidad de estados que varía exponencialmente con la energía de excitación E:

$$\rho(E) \propto \exp(2\sqrt{aE}) / E^{5/4} a^{1/4}$$

donde "a=  $\pi^2 g/6$ " es el llamado parámetro de densidad de niveles nuclear, siendo "g" la densidad de partícula independiente. La dependencia explícita de la densidad de estados con la energía de excitación, surge relacionando ésta última con la temperatura a través de la conocida ley de variación para un sistema de fermiones:

$$E = a T^2$$

en este caso "a" toma un valor constante, que ha sido parametrizado, a partir de datos experimentales, como  $A/8 \text{ MeV}^{-1}$ , representando A el número de nucleones en el núcleo.

Sin embargo a bajas temperaturas el núcleo no puede ser considerado como un sistema de fermiones sin interacción. Basta recordar que en núcleos superfluidos, la interacción de apareamiento juega un papel esencial en la comprensión de las propiedades relevantes del sistema, como vimos en el Capítulo I. Así mismo los modos vibracionales colectivos son dominantes en el espectro de excitación de bajas temperaturas, tanto en núcleos superfluidos como en núcleos normales, esto lo hemos estudiado en

el Capítulo II. Teniendo en cuenta esas consideraciones, resulta evidente la necesidad de introducir modificaciones a la contribución fermiónica al parámetro de densidad de niveles debido a la interacción de apareamiento nuclear en núcleos superfluidos, así como también destacar la importancia de la contribución bosónica a éste, tanto en núcleos normales como superfluidos. Con respecto a la contribución bosónica al parámetro de densidad de niveles, nos interesa estudiar también la competencia entre los canales de p-h y los canales de p-p y h-h como función de la temperatura<sup>20)</sup>. Estos dos últimos puntos resultan de particular interés ya que hasta el presente ha sido muy poco lo que se ha dicho al respecto<sup>52)</sup>.

Este capítulo está organizado de la siguiente forma: en la primera parte se hace una revisión de los aspectos teóricos del problema, estudiamos la contribución de los grados de libertad fermiónicos y de los grados de libertad bosónicos al parámetro de densidad de niveles nuclear. En la segunda parte se discute la importancia en la descripción del parámetro de densidad de niveles bosónico de los canales de p-p y h-h en relación al canal de p-h. En la tercera parte se analizan los resultados obtenidos al aplicar el formalismo en un núcleo superfluido y en un núcleo normal. Finalizamos el capítulo con las conclusiones a los problemas planteados. El material presentado en este trabajo forma parte de un trabajo en preparación<sup>53)</sup>.

## 1-Formalismo Teorico

El problema de la densidad de niveles nucleares, se reduce a determinar el número de modos en que los nucleones pueden distribuirse entre los niveles de partícula independiente para una energía fija del sistema. Esto sugiere un problema combinatorio, pero los cálculos solo podrían hacerse con grandes computadoras<sup>54)</sup> y para energías de excitación bajas, debido a los valores extremadamente grandes que puede alcanzar la densidad de niveles, en especial en núcleos pesados. Por este motivo el método más usado en el cálculo de densidades nucleares, es el método de la función de partición, una herramienta bien conocida en Mecánica Estadística<sup>15-47)</sup>.

En lo que sigue trataremos de describir los aspectos más importantes relacionados con la expresión para la densidad de estados nucleares obtenida a través del empleo de técnicas de la Mecánica Estadística.

Supongamos un núcleo definido por su número de neutrones y protones,  $N$  y  $Z$  respectivamente, y por su energía  $E$ . Las propiedades estadísticas del sistema están descritas por la gran función de partición:

$$e^{-\beta\Omega} = \sum_{N', Z', E'} \exp(\alpha_N N' + \alpha_Z Z' - \beta E') \quad (3.1-1)$$

donde  $\alpha_N$ ,  $\alpha_Z$  y  $\beta$  son los multiplicadores de Lagrange asociados con el número de partículas y la energía. La suma comprende todos los núcleos con  $N'$  neutrones,  $Z'$  protones y energía  $E'$ . Esta suma la podemos reemplazar por una integral sobre estados de energía  $E'$ :

$$e^{-\beta\Omega} = \sum_{N', Z'} \int dE' \omega(E', N', Z') \exp(\alpha_N N' + \alpha_Z Z' - \beta E') \quad (3.1-2)$$

donde  $\omega(E', N', Z')$  representa la densidad de autovalores para un núcleo  $(N', Z')$  a una energía  $E'$ , es decir la densidad de estados a esa energía.

La expresión (3.1-2) muestra que la gran función de partición puede ser considerada como la transformada de Laplace de la densidad de estados.

Invirtiendo (3.1-2), podemos obtener  $\omega(E, N, Z)$  como función de la entropía,  $S$ , del sistema:

$$\omega(E, N, Z) = \frac{1}{(2\pi i)^3} \int d\alpha_N \int d\alpha_Z \int d\beta e^S \quad (3.1-3)$$

siendo:

$$S = -\beta\Omega - \alpha_N N - \alpha_Z Z + \beta E \quad (3.1-4)$$

Las integrales de contorno a calcular en (3.1-3) son las conocidas integrales de Darwin-Fowler.

Hasta ahora, la única aproximación introducida fue suponer una densidad continua de estados. Sin embargo, para resolver (3.1-3) haremos una aproximación adicional. Se puede demostrar que las integrales de Darwin-Fowler tienen un punto de ensilladura cuya localización queda determinada por la siguiente condición:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial S}{\partial \alpha_N} = 0 & & \frac{\partial S}{\partial \alpha_Z} = 0 & & \frac{\partial S}{\partial \beta} = 0 \\
\frac{\partial \Omega}{\partial \alpha_N} = N & & \frac{\partial \Omega}{\partial \alpha_Z} = Z & & \frac{\partial \Omega}{\partial \beta} = -E
\end{aligned}
\tag{3.1-5}$$

conviene entonces elegir un contorno de integración que pase por ese punto. Expandiendo S alrededor del punto de ensilladura y reteniendo sólo el término cuadrático en el desarrollo resulta:

$$\rho(E, N, Z) = \exp(S) / (2\pi)^{3/2} D^{1/2}
\tag{3.1-6}$$

donde:

$$D = \begin{vmatrix}
\frac{\partial^2 \Omega}{\partial \alpha_N^2} & \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \alpha_N \partial \alpha_Z} & \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \alpha_N \partial \beta} \\
\frac{\partial^2 \Omega}{\partial \alpha_N \partial \alpha_Z} & \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \alpha_Z^2} & \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \alpha_Z \partial \beta} \\
\frac{\partial^2 \Omega}{\partial \alpha_N \partial \beta} & \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \alpha_Z \partial \beta} & \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \beta^2}
\end{vmatrix}$$

$$\tag{3.1-7}$$

La coincidencia de los resultados en la aproximación de punto de ensilladura, con los datos experimentales resulta bastante buena, aún a energías de excitación bajas<sup>2)</sup>. Además el método posee una elegancia intrínseca, la que se manifiesta en la forma en la que las condiciones de contorno del problema son introducidas, ya que aparecen en forma sencilla a través de la localización del punto de ensilladura (ec. (3.1-5)).

Aplicaremos el formalismo desarrollado a tres sistemas distintos, los dos primeros ya han sido analizados, pueden consultarse las referencias<sup>2,15)</sup>, sin embargo resulta conveniente recordar los resultados fundamentales. En primer lugar se describirá el comportamiento de la densidad de estados de un sistema finito de fermiones sin interacción, a continuación se tratará un sistema de fermiones que interactúan a través de la fuerza de apareamiento nuclear. Para concluir, se presentan los resultados analíticos correspondientes al caso de un sistema de bosones sin interacción, con un espectro de energía que no varía con la temperatura.

**1-a) Sistema finito de fermiones libres.**

---

Analicemos la expresión (3.1-6) en el caso de suponer al núcleo como un sistema formado por fermiones que no interactúan entre ellos.

La entropía del sistema tendrá una contribución de los protones y una contribución de los neutrones:

$$S = S(p) + S(n) \quad (3.1-8)$$

donde:

$$S(t_z) = - \sum_i [n_i(t_z) \ln(n_i(t_z)) + (n_i(t_z)+1) \ln(n_i(t_z)+1)] \quad (3.1-9)$$

siendo  $n_i(t_z)$  el número de ocupación del estado  $i$ :

$$n_i(t_z) = 1 / ( 1 + \exp(\beta \epsilon_i - \alpha_{t_z}) ) \quad (3.1-10)$$

Finalmente, teniendo en cuenta las expresiones (3.1-5) y (3.1-6) obtenemos:

$$\rho(E, N, Z) = \exp(S) / (4\pi^{3/2} T^{5/2} \sqrt{g_N^F g_Z^F a^F}) \quad (3.1-11)$$

donde:

$$g^F = \sum_i g_i^F / T \quad (3.1-12-a)$$

$$g_i = n_i (1 - n_i) \quad (3.1-12-b)$$

$$\begin{aligned} a^F &= (dS/dT)/2 \\ &= (1/2T^3) \sum_i g_i \epsilon_i^2 - (1/Tg^F) (\sum_i g_i \epsilon_i)^2 \end{aligned} \quad (3.1-12-c)$$

La cantidad " $a^F$ " es el parámetro de densidad de niveles correspondiente a un sistema fermiónico sin interacción.

Es fácil comprobar que al aumentar la temperatura, la expresión (3.1-12-c) tiende a un valor constante, " $a_0$ ":

$$a_0 = \pi^2 g_0 / 6 \quad (3.1-13)$$

siendo  $g_0$  el valor al cual tiende  $g^F$  en el límite de altas temperaturas.

En este límite la densidad de niveles puede expresarse como<sup>15)</sup>:

$$\rho(E, N, Z) = (6^{1/4}/24) (g_o^2/g_{oN}g_{oZ})^{1/2} g_o (g_o E)^{-5/4} \exp(2\sqrt{a_o E}) \quad (3.1-14)$$

donde:

$$g_o = g_{oN} + g_{oZ}$$

En el límite de altas temperaturas recuperamos la dependencia cuadrática de la energía como función de la temperatura, característica de un gas de fermiones libres sin interacción:

$$E = a T^2 \quad (3.1-15)$$

a la vez que:

$$S = 2 \sqrt{a E} \quad (3.1-16)$$

Como se ve en la ecuación (3.1-13), el parámetro de densidad de niveles es independiente de la temperatura, coincidiendo en buena aproximación con la conocida parametrización empírica que le asigna el valor:  $a_o = A/8 \text{ MeV}^{-1}$  en el régimen de altas temperaturas.

Estos resultados son aplicables al caso de núcleos normales, es decir núcleos de capa cerrada o próximos a la clausura de capas.

1-b) Sistema finito de fermiones que interactúan a través de una fuerza de apareamiento nuclear.

Si estudiamos un núcleo de capa abierta con un número par de partículas, la interacción de apareamiento, responsable de la aparición de un gap de energía en el espectro de excitaciones, no es despreciable. La dependencia con la temperatura de ese "gap" de energía será la que de lugar a las principales diferencias con el caso anterior.

La descripción del parámetro de densidad de niveles para un núcleo superconductor, es un problema que puede ser resuelto en forma simple con ayuda del formalismo BCS. Después de pasar a la base de cuasipartículas, y de diagonalizar el Hamiltoniano, el resultado es un espectro de cuasipartículas dependiente de la temperatura <sup>31)</sup>, este espectro obedece la estadística de Fermi-Dirac, como vimos en el Capítulo I de este trabajo, en consecuencia la gran función de partición puede escribirse como:

$$\mathcal{Z} = \prod_j (1 + \exp(-\beta E_j)) \quad (3.1-17)$$

donde  $E_j$  representa la energía de la  $j$ -ésima cuasipartícula. La entropía del sistema está dada por:

$$S^{\text{BCS}} = - \sum_i [r_i \ln(r_i) + (r_i + 1) \ln(r_i + 1)] \quad (3.1-18)$$

donde:

$$f_j = 1 / ( 1 + \exp(E_j \beta) ) \quad (3.1-19)$$

Haciendo uso de las expresiones (3.1-6) y (3.1-7), el resultado para un sólo tipo de cuasipartículas (tanto neutrones como protones) será:

$$\rho^{\text{BCS}}(E) = \exp(S^{\text{BCS}}) / (2\pi)^{9/2} (D^{\text{BCS}})^{1/2} \quad (3.1-20)$$

donde el cálculo de  $D^{\text{BCS}}$  da por resultado:

$$D^{\text{BCS}} = ( 2D_1 + \Delta^2 (T A_1 - 2C_1) ) 2E_2 - (2D_2)^2 \quad (3.1-21)$$

con:

$$2D_1 = \sum_j f_j (1-f_j) \quad (3.1-22-a)$$

$$2A_1 = \sum_j f_j (1-f_j) / E_j^3 \quad (3.1-22-b)$$

$$2C_1 = \sum_j f_j (1-f_j) / E_j^2 \quad (3.1-22-c)$$

$$2D_2 = \sum_j f_j (1-f_j) (\epsilon_j - \lambda) \quad (3.1-22-d)$$

$$2E_2 = \sum_j f_j (1-f_j) E_j^2 \quad (3.1-22-e)$$

De la misma manera que antes el parámetro de densidad de niveles puede escribirse como:

$$a^{\text{BCS}} = (dS^{\text{BCS}}/dT)/2 = \quad (3.1-23)$$

$$= 2\beta^3 [ E_2 - 2\beta (F_1/F_2) ] \quad (3.1-24)$$

donde:

$$F_1 = D_2^2 (A_1 - 2\beta C_1) - D_1^2 (\Delta^2 A_1 + 2\beta B_1) - 2D_1 D_2 (A_2 - 2\beta C_2) \quad (3.1-25-a)$$

$$F_2 = (A_1 - 2\beta C_1) (\Delta^2 A_1 + 2\beta B_1) + (A_2 - 2\beta C_2)^2 \quad (3.1-25-b)$$

$$2A_2 = \sum_j (1-f_j) (\epsilon_j - \lambda) / E_j^3 \quad (3.1-25-c)$$

$$2C_2 = \sum_j (1-f_j) (\epsilon_j - \lambda) / E_j^2 \quad (3.1-25-d)$$

$$B_1 = D_1 - \Delta^2 C_1 \quad (3.1-25-e)$$

y finalmente, la densidad de estados puede escribirse como:

$$\rho^{\text{BCS}}(E) = \exp(S^{\text{BCS}}) / 2\pi T^2 \sqrt{g^{\text{BCS}} \bar{a}^{\text{BCS}}} \quad (3.1-26)$$

$$g^{\text{BCS}} = \beta [ 2D_1 + \Delta^2 (TA_1 - 2C_1) ] \quad (3.1-27-a)$$

$$\bar{a}^{\text{BCS}} = \beta^3 [ 2E_2 - (2D_2)^2 / (2D_1 + \Delta^2 (TA_1 - 2C_1)) ] \quad (3.1-27-b)$$

En el caso de un sistema superfluido tanto en neutrones como en protones, la densidad de niveles tendrá la forma<sup>15)</sup>:

$$\omega^{\text{BCS}}(E) = \exp(S^{\text{BCS}}) / (2\pi)^3 T^{5/2} \sqrt{g_N^{\text{BCS}} g_Z^{\text{BCS}} (\bar{a}_N^{\text{BCS}} + \bar{a}_Z^{\text{BCS}})} \quad (3.1-28)$$

Podemos anticipar que el colapso del gap de apareamiento será responsable de un pico en el comportamiento del parámetro de densidad de niveles a temperaturas próximas a la temperatura de transición ; mientras que para sistemas normales, el máximo se producirá a una temperatura correspondiente con una energía de excitación del orden de la energía de separación entre capas activas.

### 1-c) Sistema de bosones sin interacción.

Veamos ahora que sucede si utilizamos el método anterior en el caso de un sistema de bosones que no interactúan entre ellos, con un espectro de energías fijo. Para ello recordemos que el potencial termodinámico del problema es:

$$\Omega = \sum_i \ln [ 1 - \exp(\mu - \varepsilon_i) \beta ] \quad (3.1-29)$$

donde  $\varepsilon_i$  representa la energía de la  $i$ -ésima partícula, y  $\mu$  el multiplicador de Lagrange asociado con la conservación del número de partículas.

La entropía tiene la forma:

$$S = \sum_i [-n_i \ln(n_i) + (n_i + 1) \ln(n_i + 1)] \quad (3.1-30)$$

donde ahora,  $n_i$ , representa el número de ocupación para fonones:

$$n_i = 1 / ( \exp(\epsilon_i - \mu) - 1 ) \quad (3.1-31)$$

Luego de un álgebra simple, haciendo uso de las expresiones (3.1-6) y (3.1-7) obtenemos la siguiente expresión:

$$\rho(E) = \exp(S) / 2\pi T^2 \sqrt{4 g^B a^B} \quad (3.1-32)$$

donde hemos definido:

$$g^B = \sum_i g_i / T \quad (3.1-33-a)$$

$$g_i = n_i (1 + n_i) \quad (3.1-33-b)$$

$$\begin{aligned} a^B &= (dS/dT) / (4T^2) = \\ &= (1/4T^3) \left[ -\sum_i g_i \epsilon_i^2 + (1/Tg^B) \left( \sum_i g_i \epsilon_i \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (3.1-33-c)$$

Al definir el parámetro de densidad bosónico hemos tenido en cuenta que, para temperaturas bajas, el calor específico de un gas de bosones libres presenta una dependencia cúbica con la temperatura, de manera que la energía de excitación del sistema es de la forma:

$$E = a^B T^4$$

Cabe destacar que debido a la forma de los números de ocupación bosónicos, la principal contribución de estos grados de libertad se producirá a temperaturas bajas.

Como vimos en los capítulos anteriores, en el caso de núcleos reales, el espectro de excitaciones de tipo bosónicas, cambia con la temperatura. Sin embargo, el estudio de núcleos como el  $^{208}\text{Pb}$  y  $^{60}\text{Zn}$  mostrará que lo dicho anteriormente sigue siendo válido.

Como mencionamos en la introducción, nuestro propósito es analizar la contribución fermiónica y bosónica al parámetro de densidad de niveles en núcleos normales y en núcleos superconductores. A tal fin reseñaremos brevemente las expresiones que utilizaremos en los cálculos numéricos:

#### Contribución fermiónica al parámetro de densidad de niveles

En el cálculo del parámetro de densidad de niveles fermiónico, utilizaremos la expresión (3.1-12-c) o (3.1-24) según se trate de un núcleo normal o un núcleo superfluido, respectivamente.

#### Contribución bosónica al parámetro de densidad de niveles

En el Capítulo I obtuvimos el espectro de excitaciones colectivas debidas a los términos residuales de la interacción de apareamiento, a través de la FTRPA. En el Capítulo II calculamos el espectro debido a una interacción multipolar separable, y de una fuerza no separable en la aproximación de la FTRPA. En ambos casos el Hamiltoniano que representa las excitaciones de tipo bosónico es de la forma:

$$H = H_0 + \sum_n \omega_n \Gamma_n^\dagger \Gamma_n \quad (3.1-35)$$

donde  $\Gamma_n^\dagger$  ( $\Gamma_n$ ) es el operador de creación (aniquilación) de un fonón. Haciendo uso de los métodos de la Mecánica Estadística, la energía media del sistema resulta:

$$\langle H \rangle = H_0 + \sum_i \omega_i n_i \quad (3.1-36)$$

donde  $n_i$ , es el número de ocupación para el fonón en el  $i$ -ésimo estado:

$$n_i = (\exp(\beta\omega_i) - 1)^{-1} \quad (3.1-37)$$

siendo la entropía del sistema de fonones:

$$S = \sum_i [-n_i \ln(n_i) + (n_i + 1) \ln(n_i + 1)] \quad (3.1-38)$$

En este caso no podemos obtener una expresión analítica para  $a^B(T)$ , como lo hicimos en (169), debido a que no conocemos la dependencia explícita de las energías  $\omega_i$  con la temperatura; en su lugar nos conformaremos con el cálculo numérico del parámetro de densidad de niveles bosónico, a través de la expresión:

$$a^B = (dS/dT)/(4T^2) \quad (3.1-39)$$

Completaremos la discusión del tema al analizar los resultados obtenidos para  $^{208}\text{Pb}$  y  $^{60}\text{Zn}$ .

### 3.2-Contribución de los canales de partícula-partícula al parámetro de densidad de niveles bosónico

En el Apéndice D presentamos un resumen de los aspectos más sobresalientes del formalismo de la RPA a temperatura cero. En dicho apéndice describimos el formalismo teórico para el caso de excitaciones de partícula-agujero, para el caso de excitaciones de partícula-partícula, y también para el caso de excitaciones de dos cuasipartículas. Este formalismo lo hemos extendido a temperatura finita. En el primer Capítulo de este trabajo, estudiamos tanto el comportamiento de las excitaciones de dos cuasipartículas en la fase superfluida del núcleo, como el comportamiento de las excitaciones de partícula-partícula y agujero-agujero en la fase normal. En el segundo Capítulo nos ocupamos explícitamente de las excitaciones del tipo de partícula-agujero (si bien a temperatura distinta de cero la difusión del nivel de Fermi implica tener en cuenta configuraciones de partícula-partícula y agujero-agujero, como se ve en la Figura 1, éstas no han sido introducidas a través de distintas constantes de acoplamiento a temperatura cero). En este capítulo queremos calcular la contribución al parámetro de densidad de niveles bosónico de los canales de partícula-partícula y agujero-agujero cuando son introducidos simultáneamente junto con el canal de partícula-agujero.

En vista de lo propuesto procederemos de la siguiente manera: partiremos del caso general de una interacción no separable. En el Capítulo I hemos descrito la forma de obtener el espectro de cuasipartículas del sistema y sus propiedades sobresalientes; en

el Capítulo II hemos estudiado el efecto de las excitaciones colectivas del sistema, teniendo en cuenta el modo de multipolaridad  $\lambda^{\pi}=0^+$  junto con los modos vibracionales de distintas multipolaridades. Como vimos a través de las expresiones (2.2-27) y (2.2-28) esta interacción proporciona contribuciones tanto del canal de partícula-partícula como del canal de partícula-agujero a los modos colectivos de excitación, resultando adecuada a nuestros propósitos. Como es natural obtendremos el parámetro de densidad de niveles fermiónico a través de la expresión (3.1-24), luego de haber calculado la entropía del sistema en la aproximación BCS; asimismo después de obtener el espectro de carácter bosónico y la entropía asociada a éste, calcularemos el parámetro de densidad bosónico a través de (3.1-39); analizaremos como se modifica este último al variar la constante de acoplamiento del canal de partícula-partícula al dejar fija la constante del canal de partícula-agujero. Trabajaremos con una interacción- $\delta$  independiente del isospin, en ese caso:

$$V_{ab,cd} = \frac{\hat{j}}{4\pi} R_{ab,cd} (-)^{j_b - j_d - 1} \begin{bmatrix} j_a & j_b & J \\ 1/2 & -1/2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} j_c & j_d & J \\ 1/2 & -1/2 & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{2} \left[ 1 + (-)^{l_a + l_b - J} \right] , \quad (3.2-1)$$

$$\begin{aligned} \tilde{V}_{ab,cd} &= (-) \frac{\hat{j}}{8\pi} R_{ab,cd} \cdot \\ &\left\{ (-)^{l_a+l_c} \begin{pmatrix} j_a & j_b & J \\ 1/2 & 1/2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_c & j_d & J \\ 1/2 & 1/2 & -1 \end{pmatrix} + \right. \\ &(-)^{j_b+j_d} \begin{pmatrix} j_a & j_b & J \\ 1/2 & -1/2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_c & j_d & J \\ 1/2 & -1/2 & 0 \end{pmatrix} \left. (-)^{l_a+l_b-J} \right\}, \end{aligned} \quad (3.2-2)$$

donde la parte radial de la función de onda es:

$$R_{ab,cd} = \int_0^{\text{inf}} r^2 R_a(r) R_b(r) R_c(r) R_d(r) dr \quad (3.2-3)$$

y:

$$\hat{j} = [ (2j_a+1) (2j_b+1) (2j_c+1) (2j_d+1) ]^{1/2} \quad (3.2-4)$$

Analizaremos los resultados obtenidos al tratar un núcleo real,  $^{60}\text{Zn}$ .

## Aplicaciones

En primer lugar, vamos a presentar el cálculo del parámetro de densidad de niveles en el núcleo  $^{208}\text{Pb}$  (de doble capa cerrada). Para ello hemos utilizado los resultados obtenidos en el capítulo anterior, recordemos que en dicho capítulo se obtuvo a través del formalismo de la FTRPA el espectro de excitaciones colectivas del sistema como función de la temperatura, y a partir de él sabemos como calcular las magnitudes termodinámicas del núcleo con ayuda de técnicas de la Mecánica Estadística. La contribución fermiónica al parámetro de densidad de niveles la obtuvimos a través de la expresión (3.1-12-c), es decir:

$$a^{\text{F}}(T) = (dS^{\text{F}}/dT)/2$$

mientras que la contribución bosónica al parámetro de densidad de niveles la calculamos a partir de:

$$a^{\text{B}}(T) = (dS^{\text{B}}/dT)/(4T^2)$$

La Figura 6 muestra en líneas punteadas, curva (c), la contribución fermiónica al parámetro de densidad de niveles, mientras que las curvas continuas corresponden a las contribuciones bosónicas de los modos  $\lambda^{\pi} = 2^{+}$  y  $3^{-}$ , curvas (a) y (b) respectivamente.

El estudio de los resultados indica que los grados de libertad bosónicos y de partícula independiente determinan, en forma separada, la dependencia con la temperatura del parámetro de

densidad de niveles. A bajas temperaturas,  $T < 0.5$  MeV, la contribución bosónica es dominante, mientras que a temperaturas superiores a los 0.5 MeV, la contribución fermiónica es la importante. Esto está relacionado al hecho de que en los núcleos pesados como el  $^{208}\text{Pb}$  los modos vibracionales ocurren a energías menores que el espaciamiento entre capas, pudiendo bloquearse a temperaturas bajas comparadas con las de excitación de partícula independiente. Cabe destacar que a temperaturas altas, la contribución fermiónica tiende al conocido valor  $A/8 \text{ MeV}^{-1}$ , lo que significa que las funciones termodinámicas alcanzan el límite para el sistema degenerado de fermiones sin interacción, es decir que la energía de excitación es proporcional a  $T^2$ , y la entropía es lineal en  $T$ .

Discutiremos ahora los resultados obtenidos en un núcleo superfluido como el  $^{60}\text{Zn}$ . Al igual que en el caso del  $^{208}\text{Pb}$ , utilizaremos una parametrización de Nilson para los niveles de partícula independiente<sup>44)</sup> a temperatura cero, la que no modificamos a lo largo del cálculo, ya que sabemos que varía muy poco con la temperatura. Hemos trabajado con una fuerza de dos cuerpos no separable, la interacción- $\delta$  independiente en isospin. Calculamos el espectro de cuasipartículas en el marco del formalismo BCS descrito en el Capítulo I, punto 1-B, a partir de él obtuvimos la contribución fermiónica a la entropía, y con ella el parámetro de densidad fermiónico de acuerdo con la expresión (3.1-24):

$$a^{\text{BCS}}(T) = (dS^{\text{BCS}}/dT)/2$$

A continuación analizamos a través de la FTRPA el espectro de excitación de dos cuasipartículas acopladas a momento angular 2 y paridad positiva, para ello hemos diagonalizado la matriz de la FTRPA con el método propuesto por Cholesky. Las constantes de acoplamiento de la interacción fueron ajustadas de manera de reproducir el valor experimental del primer estado con multipolaridad  $\lambda^{\pi}=2^{+}$  ( $G_{pp}=G_{ph}=133$  MeV). A partir de la entropía del sistema obtuvimos el parámetro de densidad de niveles bosónico de la misma forma que para el  $^{208}\text{Pb}$ .

La Figura 7 reproduce el cálculo del parámetro de niveles fermiónico. En ella se observa que para un núcleo superfluido, la contribución fermiónica tampoco es relevante a bajas temperaturas. A medida que la temperatura aumenta los gaps de energía, asociados a cada estado, disminuyen debido al bloqueo térmico de la interacción de apareamiento, y como resultado de esto el espaciamiento entre niveles de cuasipartículas es menor, facilitándose la ocupación de niveles más alejados, con el consiguiente aumento del parámetro de densidad de niveles. Próximo a la temperatura para la cual los gaps colapsan se observa un pico en éste, el cual podemos asociar a la transición de fase del estado superfluido al estado normal. Cabe destacar que a temperaturas superiores a la del colapso de los gaps ( $T \cong 1.2$  MeV) el parámetro de densidad de niveles bosónico se comporta como el correspondiente al  $^{208}\text{Pb}$ , es decir, al aumentar la temperatura tiende al valor  $A/B$   $\text{MeV}^{-1}$ , indicando que el sistema se comporta como un sistema de fermiones sin interacción. Es importante

mencionar además, que el comportamiento de  $a^{BCS}(T)$  para una interacción no separable como la que estamos describiendo, es similar al hallado en el caso de una fuerza de apareamiento monopolar separable <sup>15)</sup>.

En las Figuras 8-a y 8-b se reproduce el comportamiento del parámetro de densidad bosónico. El pico que se observa a baja temperatura corresponde básicamente a las contribuciones del canal de partícula-agujero, es decir es comparable al pico de baja temperatura observado en el <sup>208</sup>Pb proveniente de una fuerza multipolar separable; el segundo pico está asociado con el canal de partícula-partícula y la transición del sistema de la fase superfluida a la fase normal. La comprobación de lo anterior es sencilla, basta con hacer  $G_{ph}=0$ , en ese caso desaparece el primer pico, mientras que el segundo no se modifica.

Nos interesa analizar el comportamiento del pico de baja temperatura al variar  $G_{pp}$  dejando fija  $G_{ph}$ . La Figura 8-a) reproduce este comportamiento para  $G_{pp}/G_{ph}=0.25, 0.5, 0.75$  y  $1$ , mientras que en la Figura 8-b):  $G_{pp}/G_{ph}=1, 1.25, 1.50$  y  $1.75$ . Cabe señalar que la variación de  $G_{pp}$  no cambia el valor de la primera energía de excitación colectiva, ni la probabilidad de transición asociada (se observan desviaciones menores a 10 %, esto significa que es el canal de partícula-agujero el principal responsable del espectro vibracional). La observación de las figuras muestra que el aumento de  $G_{pp}$  en relación con  $G_{ph}$  produce un incremento en magnitud del parámetro de densidad de niveles, el efecto contrario se produce cuando  $G_{pp}$  disminuye en relación con  $G_{ph}$ . Esto se entiende, si se tiene en cuenta que el aumento de  $G_{pp}$  respecto de

$G_{ph}$  implica dar un peso mayor a la contribución de ese canal, aun a temperaturas bajas. El análisis de estos resultados permite decir que el canal de partícula-partícula no es despreciable, sino que por el contrario debe ser tenido en cuenta, ya que su inclusión produce modificaciones sustanciales en la magnitud del parámetro de densidad de niveles bosónico. Esto está de acuerdo con la Ref. 18, en ella se presentan resultados obtenidos en un modelo esquemático, mostrando la importancia de la inclusión de este canal para lograr un aumento sustancial del parámetro de densidad de niveles a temperaturas bajas, en coincidencia con la tendencia observada en experiencias recientes.

## Conclusiones

En este capítulo nos hemos ocupado del parámetro de densidad de niveles, al hacerlo tuvimos en cuenta no sólo la contribución de los grados de libertad fermiónicos, sino también como contribuyen los grados de libertad bosónicos. Analizamos un núcleo normal,  $^{208}\text{Pb}$ , y un núcleo superfluido,  $^{60}\text{Zn}$ . En relación a la contribución fermiónica al parámetro de densidad de niveles, cabe destacar que a temperaturas bajas no es significativa, siendo la contribución bosónica la relevante; digamos además que el parámetro de densidad de niveles fermiónico en el caso de un núcleo superfluido presenta un pico en la proximidad de la temperatura para la cual los diferentes gaps colapsan, desplegando por encima de ésta las propiedades de un sistema normal, con la conocida tendencia al valor  $A/8 \text{ MeV}^{-1}$  al aumentar la temperatura. En cuanto al parámetro de densidad de niveles bosónico es evidente la aparición, en sistemas superconductores, de un pico relacionado con la transición de la fase superconductora a la fase normal; en cuanto al pico de baja temperatura éste varía de acuerdo con la intensidad del canal de partícula-partícula. El aumento de  $G_{pp}$  produce un significativo incremento en la magnitud del parámetro de densidad de niveles, debido a que el peso de las configuraciones de partícula-partícula es mayor; este resultado muestra la importancia de este canal aun a temperaturas bajas. Tengamos en cuenta, además, el hecho que las energías del espectro prácticamente no varían al cambiar  $G_{pp}$ , esto permitirá ajustar este canal de manera de reproducir correctamente los resultados experimentales.

Esto pone en evidencia, nuevamente, que para lograr una descripción confiable de la estructura nuclear, deben ponerse en juego tanto grados de libertad fermiónicos, asociados a las excitaciones de partícula independiente, como grados de libertad bosónicos, relacionados a las excitaciones colectivas del núcleo.

## Conclusiones Generales

A lo largo de este trabajo hemos tratado distintos temas concernientes a mejorar la comprensión de la estructura de un núcleo excitado. Para ello hemos introducido conceptos de la Mecánica Estadística, entre ellos el concepto de temperatura nuclear, el cual relacionamos con la energía de excitación disponible en el sistema. Todo esto está justificado debido al gran número de configuraciones capaces de ser excitadas a energías intermedias y altas. En nuestro estudio describimos la distribución de equilibrio térmico por medio de teorías de campo medio a temperatura finita como la teoría de Hartree-Fock y la de Hartree-Fock-Bogoliubov, y a partir de ellas hemos analizado la interacción de apareamiento nuclear, una interacción multipolar separable, y una fuerza no separable. Los grados de libertad puestos en juego corresponden tanto a grados de libertad fermiónicos como bosónicos. Haremos una reseña de los aspectos más importantes de los resultados obtenidos.

En el Capítulo I tratamos el problema de la interacción de apareamiento nuclear a temperatura finita. Vimos que los efectos de bloqueo térmico son responsables del colapso gap de apareamiento, y de la consiguiente transición desde la fase superconductora a la fase normal. Comprobamos que se trata de una transición de fase de segundo orden, la que comparamos con las conocidas transiciones de segundo orden en sistemas extendidos, de

ello surgió la verificación de varias similitudes, en particular la semejanza del calor específico con el observado en las transiciones de punto- $\lambda$ . Analizamos también cuál es la contribución de los grados de libertad bosónicos por debajo y por encima de la temperatura de transición, observando una apreciable contribución al calor específico total de la fase superconductor, así como la tendencia a un valor constante del calor específico bosónico en la fase normal, éste último comportamiento es similar al hallado en sólidos a altas temperaturas.

A lo largo del Capítulo II, hemos estudiado la dependencia con la temperatura de los grados de libertad vibracionales, a través del formalismo de la RPA extendido a temperatura finita. En el marco de dicho formalismo hemos obtenido el espectro de excitaciones colectivas como función de la temperatura, pudiendo identificar las resonancias gigantes del sistema como aquellos estados que agotan la mayor parte de la regla de suma. El análisis de los centroides y anchos característicos de dichas resonancias permitió detectar un corrimiento hacia energías más altas del centroide isoescalar debido al bloqueo térmico del canal atractivo, y hacia energías más bajas del centroide isovectorial, debido al bloqueo térmico del canal repulsivo; así como también un incremento de los anchos en ambas resonancias con el aumento de la temperatura, debido a la aparición de nuevos estados en el espectro de excitaciones colectivas. La comparación de estos resultados con los que provienen del formalismo de la función de respuesta lineal brindan una muestra clara de la equivalencia de ambos formalismos, resultando este último más adecuado para el

cálculo numérico en casos de núcleos pesados para los cuales el número de configuraciones a incluir es elevado. El desarrollo del Formalismo de la Función de Respuesta Lineal a Temperatura Finita y su aplicación al  $^{208}\text{Pb}$  forma parte de la Ref. 55).

Por último, en el Capítulo III hemos analizado el comportamiento del parámetro de densidad de niveles nuclear. Al respecto cabe destacar que, a temperaturas bajas es la contribución bosónica a éste la que predomina, mientras que a temperaturas superiores a 1 MeV el sistema despliega las propiedades de un sistema de fermiones que no interactúan entre sí. Este hecho pone de manifiesto la importancia de la inclusión de los grados de libertad bosónicos en el estudio de un sistema nuclear. Hemos discutido también como se modifica el parámetro de densidad de niveles bosónico al incluir explícitamente el canal de partícula-partícula, observando un notable incremento en el pico de éste cuando se aumenta la constante de acoplamiento de ese canal, permaneciendo el espectro de excitaciones colectivas prácticamente invariante frente a este cambio; es decir que la inclusión de este canal no es despreciable y permite mejorar los resultados para el comportamiento de la contribución bosónica al parámetro de densidad de niveles sin modificar el espectro de excitación ni las probabilidades de transición electromagnéticas asociadas.

La información obtenida es relevante para el análisis de los datos obtenidos a partir de reacciones con iones pesados, como lo son las colisiones altamente inelásticas y las experiencias de

fusión. Otro campo de aplicación de los resultados es el de la Astrofísica Nuclear, donde las energías características ponen de manifiesto la necesidad de tener en cuenta la modificación de la estructura nuclear debido al gran número de configuraciones que pueden ser excitadas.

Como vemos el campo de aplicación de los resultados es amplio. En lo que sigue completaremos los resultados concernientes al problema de los anchos en resonancias gigantes, para ello se tendrán en cuenta configuraciones de dos partículas-dos agujeros<sup>56</sup>, comparando con los resultados provenientes de la discretización del continuo utilizando estados de Gamow. Nos interesa también la extracción de valores macroscópicos (coeficientes térmicos, términos de masa y de restitución, etc.) a partir de cálculos microscópicos, en particular nos interesa obtener una fórmula de masas dependiente de la temperatura, para el modelo de la gota líquida con vistas a ser aplicada a problemas de Astrofísica Nuclear.

## Apendice A

### Cálculo variacional del formalismo BCS

Como ya discutimos en el Capítulo I, el fenómeno de superconductividad nuclear, puede entenderse como generado por fuerzas atractivas entre nucleones, las que dan lugar a la formación de pares estables acoplados a momento angular cero. De manera que el Hamiltoniano que consideraremos será:

$$H = \sum_{jm} \epsilon_j a_{jm}^\dagger a_{jm} - G \sum_{\substack{j, m > 0 \\ j', m' > 0}} a_{jm}^\dagger a_{jm} a_{j'm'}^\dagger a_{j'm'} \quad (\text{A-1-a})$$

donde:  $a_{jm}^\dagger = (-)^{j-m} a_{j-m}^\dagger$  (A-1-b)

Siguiendo el procedimiento de Bogoliubov, podemos realizar una transformación canónica a una nueva base de fermiones:

$$\begin{pmatrix} \alpha_{jm}^\dagger \\ \alpha_{jm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_j & -V_j \\ V_j & U_j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{jm}^\dagger \\ a_{jm} \end{pmatrix} \quad (\text{A-2})$$

donde  $U_j$  y  $V_j$  pueden ser elegidos de manera que sean reales y positivos. Imponiendo como condición que los  $\alpha_{jm}^\dagger$  ( $\alpha_{jm}$ ) obedezcan las reglas usuales de anticonmutación para fermiones, resulta una condición adicional para los  $U_j$  y  $V_j$ :

$$U_j^2 + V_j^2 = 1 \quad (\text{A-3})$$

Para obviar el problema de tener en cuenta la constancia en el número de partículas, trabajaremos con:

$$H = H - \lambda N \quad (A-4)$$

siendo:

$$N = \sum_{jm} a_{jm}^\dagger a_{jm} \quad (A-5)$$

y siendo " $\lambda$ " un vínculo a ajustar teniendo en cuenta que el valor medio de las partículas ( $\langle N \rangle$ ) debe ser igual al número de partículas en el sistema.

Después de pasar a la base de cuasipartículas, y ordenar términos vía el teorema de Wick a Temperatura Finita<sup>32)</sup> el resultado es:

$$H = H_{00} + H_{11} + H_{20} + H_{40} + H_{22} + H_{31} + H_{qp-qp} \quad (A-6-a)$$

donde:

$$H_{00} = \sum_{jm} (\epsilon_j - \lambda) 2\Omega_j \left[ U_j^2 f_j + v_j^2 (1 - f_j) \right] - \Delta(T)^2/G$$

$$H_{11} = \sum_{jm} \left\{ (\epsilon_j - \lambda) \left[ U_j^2 - v_j^2 \right] + 2 \Delta(T) U_j v_j \right\} :n_j:$$

$$H_{20} = \sum_{jm} \left\{ \Delta(T) \left[ U_j^2 - v_j^2 \right] + 2 (\epsilon_j - \lambda) U_j v_j \right\} (P_j^\dagger + P_j)$$

$$H_{22} = - (G/2) \sum_{jj'} \left[ U_j^2 U_{j'}^2 + v_j^2 v_{j'}^2 \right] (P_j^\dagger P_{j'} + P_{j'}^\dagger P_j)$$

$$H_{40} = (G/2) \sum_{jj'} \left[ U_j^2 v_{j'}^2 + U_{j'}^2 v_j^2 \right] (P_j^\dagger P_{j'}^\dagger + P_{j'} P_j)$$

$$H_{31} = G \sum_{jj'} \left[ U_j^2 - v_{j'}^2 \right] U_j v_{j'} ( :n_j: P_{j'} + P_{j'}^\dagger :n_{j'}: )$$

$$H_{qp-qp} = - G \sum_{jj'} \left[ U_j v_{j'} U_j v_{j'} \right] :n_j: :n_{j'}:$$

(A-6-b)

como ya vimos en el Capítulo I.

Resulta claro que  $H_{00}$  es el valor medio de  $H$ .

Los coeficientes  $U_j$  y  $V_j$  se eligen de manera que  $H_{00}$ , es decir la energía media del sistema, sea mínima:

$$(\delta H_{00} / \delta U_j) = 0 \quad (A-7)$$

De esta condición surge que:

$$2(\epsilon_j - \lambda) U_j V_j = \Delta (U_j^2 - V_j^2) \quad (A-8)$$

donde se definió:

$$\Delta = G \sum_j \Omega_j U_j V_j (1 - 2f_j) \quad (A-9)$$

siendo  $f_j$  el número de ocupación térmico determinado a partir de exigir que la entropía sea máxima. Es decir:

$$f_j(T) = 1 / (1 + \exp(\beta E_j))$$

Resolviendo (A-3) y (A-8) resulta:

$$2U_j^2 = (1 + (\epsilon_j - \lambda) / (\Delta^2 + (\epsilon_j - \lambda)^2)^{1/2}) \quad (A-10-a)$$

$$2V_j^2 = (1 - (\epsilon_j - \lambda) / (\Delta^2 + (\epsilon_j - \lambda)^2)^{1/2}) \quad (A-10-b)$$

Llevando (A-10) a la expresión de la energía de cuasipartículas:

$$E_j = (\epsilon_j - \lambda)(U_j^2 - V_j^2) + 2\Delta U_j V_j \quad (\text{A-11})$$

obtenemos:

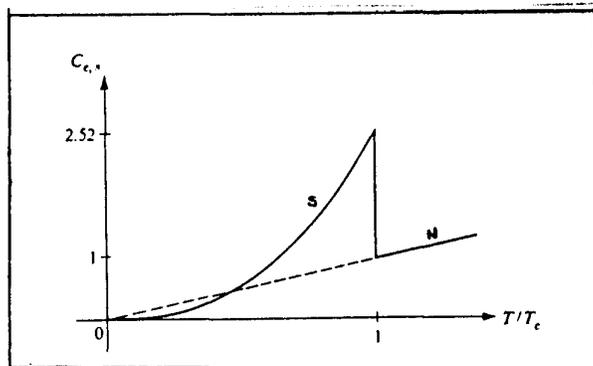
$$E_j = (\Delta^2 + (\epsilon_j - \lambda)^2)^{1/2} \quad (\text{A-12})$$

La expresión (A-8) muestra además que el término  $H_{20}$  de  $H$  es idénticamente nulo.

## Apendice B

Un fenómeno bien conocido de la Física del estado sólido, es el de la superconductividad. Enfriando una muestra de material por debajo de una cierta temperatura crítica, éste adquiere propiedades singulares como la anulación de su resistencia eléctrica.

La comparación del calor específico de superconductores con el correspondiente a un material normal se muestra esquemáticamente en la figura:



Integrando el calor específico respecto a la temperatura, puede verse que el material superconductor posee una energía media

más baja que el material normal.

Para explicar esta anomalía en el calor específico del superconductor, se propuso la existencia de un "gap" de energía entre el estado fundamental del sistema y su primer estado excitado. De acuerdo con eso, en lugar de tener una variación cuadrática para la energía, esta variará como  $e^{-\Delta/T}$ , donde " $\Delta$ " denota el gap de energía. La confirmación de la existencia de este gap surge de experiencias con micro-ondas. La energía necesaria para excitar el material a través del gap puede medirse como función de la temperatura, observándose una disminución de éste a medida que la temperatura aumenta.

El efecto de superconductividad está relacionado con la interacción entre los electrones y los fonones de la red. Los fonones son responsables de la modificación de la energía de los electrones, y de la modificación de la interacción entre los electrones, de manera que ésta se vuelve atractiva bajo ciertas circunstancias. El Hamiltoniano que tiene en cuenta tales efectos es:

$$H = \sum_{\vec{p}, \alpha} (p^2/2m) a_{\vec{p}, \alpha}^\dagger a_{\vec{p}, \alpha} - (g/V) \sum_{\vec{p}, \vec{p}'} a_{\vec{p}', +}^\dagger a_{-\vec{p}', -}^\dagger a_{-\vec{p}, -} a_{\vec{p}, +} \quad (B-1)$$

donde "g" es la constante de acoplamiento, y "V" el volumen de la muestra. Con  $\alpha$  rotulamos el spin, y con  $\vec{p}$  el momento del electrón.

Para resolver el problema de la diagonalización de (B-1) pasamos a una nueva base de operadores fermiónicos:

$$\begin{bmatrix} \alpha_{p,+}^\dagger \\ \alpha_{-p,-} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_p & -V_p \\ V_p & U_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{p,+}^\dagger \\ a_{-p,-} \end{bmatrix} \quad (\text{B-2})$$

con la condición:

$$U_p^2 + V_p^2 = 1 \quad (\text{B-3})$$

Trabajando con  $H' = H - \lambda N$ , al igual que en el Apéndice A, y pasando a la nueva base resulta:

$$\begin{aligned} H' = & 2 \sum_p \eta_p V_p + \sum_p \eta_p (U_p - V_p) (\alpha_{p,+}^\dagger \alpha_{p,+} + \alpha_{-p,-}^\dagger \alpha_{-p,-}) + \\ & + \sum_p \eta_p U_p V_p (\alpha_{p,+}^\dagger \alpha_{-p,+}^\dagger + \alpha_{-p,-} \alpha_{p,+}) - (g/V) \sum_{p',p} B_{p',p}^\dagger B_p \end{aligned} \quad (\text{B-4-a})$$

$$B_p = U_p^2 \alpha_{-p,-} \alpha_{p,+} - V_p^2 \alpha_{p,+}^\dagger \alpha_{-p,+}^\dagger + U_p V_p (-\alpha_{p,+}^\dagger \alpha_{p,+} + \alpha_{-p,-} \alpha_{-p,-}^\dagger) \quad (\text{B-4-b})$$

La minimización de  $\langle H' \rangle$  respecto de "u<sub>p</sub>", junto con la condición (B-3) permite determinar u<sub>p</sub> y v<sub>p</sub>.

Podemos definir el gap de energía, Δ, como:

$$\Delta = (g/V) \sum_p U_p V_p (1 - n_{p,+} + n_{p,-}) \quad (\text{B-5})$$

donde  $n_{\vec{p},\alpha}$  es el número de ocupación térmico del sistema.

La entropía para este sistema es:

$$S = - \sum_{\vec{p},\alpha} [n_{\vec{p},\alpha} \ln(n_{\vec{p},\alpha}) + (1-n_{\vec{p},\alpha}) \ln(1-n_{\vec{p},\alpha})] \quad (\text{B-6})$$

Luego de este procedimiento las expresiones obtenidas resultan similares a las calculadas en el Capítulo I para un sistema finito:

$$2U_p^2 = ( 1 + (\epsilon_p - \lambda) / (\Delta^2 + (\epsilon_p - \lambda)^2)^{1/2} ) \quad (\text{B-7-a})$$

$$2V_p^2 = ( 1 - (\epsilon_p - \lambda) / (\Delta^2 + (\epsilon_p - \lambda)^2)^{1/2} ) \quad (\text{B-7-b})$$

Las expresiones (B-7) colocadas en (B-5) llevan a:

$$(g/2V) \sum_p (1 - n_{\vec{p},+} - n_{\vec{p},-}) / (\Delta^2 + (\epsilon_p - \lambda)^2)^{1/2} = 1 \quad (\text{B-8})$$

Para situaciones de equilibrio, los números de ocupación de cuasipartículas son independientes del spin y responden a una estadística de Fermi-Dirac, es decir:

$$n_{\vec{p},+} = n_{\vec{p},-} = ( 1 + \exp (E_p \beta) )^{-1} \quad (\text{B-9})$$

siendo:

$$E_p = (\Delta^2 + (\epsilon_p - \lambda)^2)^{1/2} \quad (\text{B-10})$$

Pasando de la suma a la integral en (B-8), resulta:

$$(g/2) \int_0^{p_{\max}} \frac{(1 - 2n_p)}{E_p} \frac{d^3 p}{(2\pi\hbar)^3} = 1 \quad (\text{B-11})$$

Como los electrones responsables del efecto superconductor son aquellos próximos al nivel de Fermi, Bardeen, Cooper y Shrieffer propusieron la introducción de una frecuencia de corte  $\omega_{cr}$ , de manera que la integral (B-11) puede escribirse como:

$$(g/2) \int_0^{\hbar\omega_c} \text{tanh}(E/2T) \frac{d\varepsilon}{(2E)} = 1 \quad (\text{B-12})$$

Trabajando con esta expresión a  $T=0$  MeV obtenemos:

$$\Delta_0 = 0.64 \hbar\omega_c \exp(-1/g\nu_F) \quad (\text{B-13})$$

donde  $\varepsilon$  es una energía próxima al nivel de Fermi,  $\lambda$ , y  $\nu_F$  es la densidad de estados cerca del nivel de Fermi ( $\nu_F = mp_F/2\pi^2 \hbar^3$ ).

Es fácil ver que la menor energía de excitación del sistema es  $\Delta$ , correspondiente al caso  $\vec{p} = \vec{p}_F$ . En otras palabras los estados excitados del sistema están separados del estado fundamental por un gap de energía, pero como las cuasipartículas aparecen de a pares este gap será "2 $\Delta$ ".

La magnitud del gap,  $\Delta$ , depende de la temperatura. A partir de (B-12) puede inferirse que para temperaturas bajas:

$$\Delta = \Delta_0 \left( 1 - (2\pi T/\Delta_0)^{1/2} \exp(-\Delta_0/T) \right) \quad (\text{B-14})$$

Cerca del punto de transición  $\Delta$  es pequeño, pudiéndose probar que se anula a una temperatura,  $T_c$ , del orden de:

$$T_c \cong 0.57 \Delta_0$$

Asimismo, cerca de esa temperatura podemos aproximar el gap de energía como:

$$\Delta = 3.06 T_c \left( 1 - T/T_c \right)^{1/2} \quad (\text{B-15})$$

Un cálculo importante, es la diferencia de la energía libre de la fase superconductora respecto de la fase normal:

$$F_s - F_n = -V \frac{2m p_F T^2}{7\zeta(3)\hbar^3} \left[ 1 - \frac{T}{T_c} \right] \quad (\text{B-16})$$

de manera que la diferencia en la entropía de ambas fases es:

$$S_s - S_n = -V \frac{4m p_F T}{7\zeta(3)\hbar^3} \left[ 1 - \frac{T}{T_c} \right] \quad (\text{B-17})$$

y finalmente, cuando  $T = T_c$ , el salto en el calor específico es:

$$C_s - C_n = V \frac{4m p_F T_c}{7\zeta(3)\hbar^3} \quad (\text{B-18})$$

Es decir que la teoría propuesta explica la existencia de la discontinuidad en el calor específico, siendo  $C_p > C_n$ .

De manera que a medida que la temperatura se aproxima a  $T_c$ , los procesos de interacción entre cuasipartículas se vuelven importantes, y son responsables de la ocurrencia de singularidades en las cantidades termodinámicas. La continuidad de la entropía en la temperatura crítica, y la discontinuidad del calor específico, implica que tal transición es de segundo orden.

## Apendice C

### Teoría de Landau-Ginzburg para transiciones de fase

La teoría de Landau-Ginzburg es una teoría de campo medio que describe una gran variedad de transiciones de fase. La idea esencial es expresar la energía libre del sistema en serie de potencias de un parámetro de orden. Los signos de los primeros coeficientes en la expansión son los que determinan si el sistema sufrirá una transición de fase, y cual es el orden de la misma.

La teoría de Landau-Ginzburg construye la energía libre como función de un parámetro de orden, siendo los mínimos de ésta los que dan el valor del parámetro de orden cuando el sistema se encuentra en equilibrio térmico.

Para un sistema a temperatura y volumen constante, la energía libre de Helmholtz tiene la forma:

$$F = E - TS \quad (C-1)$$

donde E es la energía del sistema y S su entropía. En el marco de esta teoría F puede escribirse como:

$$F = \sum_n^N C_n(T) \eta^n \quad (C-2)$$

siendo  $\eta$  el parámetro de orden, el cual se anula en la fase más simétrica.

$N$  es cuatro para transiciones de segundo orden y seis para transiciones de primer orden. Si no hay campos actuando sobre el sistema,  $C_n$  es cero cuando  $n$  es impar.

La condición para una transición de segundo orden es que cerca de la temperatura de transición,  $T_c$ ,  $C_2$  tome la forma:

$$C_2(T) = \alpha (T - T_c) \quad (C-3)$$

donde  $\alpha$  es positivo y constante; mientras que  $C_4$  debe ser positivo.

En cambio para una transición de primer orden, debe cumplirse :

$$C_4 > 0 \text{ y } C_6 > 0$$

siendo el punto de transición tal que:

$$C_2(T_c) = C_4(T_c) = 0 ; C_6 > 0$$

A cada temperatura el valor de equilibrio de  $\eta$  se determina minimizando  $F$ , es decir:

$$\delta F / \delta \eta = 0 \quad (C-4-a)$$

$$\delta^2 F / \delta \eta^2 > 0 \quad (C-4-b)$$

Aplicamos la teoría de L-G al caso de una transición de segundo orden en un sistema superconductor.

En ese caso, el parámetro de orden natural de la fase superconductor será la función de onda del par de electrones superconductores,  $\Psi$ . Podemos escribir:

$$F_s = F_n + aV |\Psi|^2 + bV |\Psi|^4/2 \quad (C-5)$$

el valor de equilibrio de  $|\Psi|^2$  para  $T < T_c$  se determina a partir de (C-4):

$$|\Psi|^2 = - a/b \quad (C-6-a)$$

donde "a" tiene la forma:

$$a = \alpha(T-T_c) \quad (C-6-b)$$

resultando:

$$F_s - F_n = - V (\alpha/2b)(T-T_c) \quad (C-7)$$

de manera que la discontinuidad en el calor específico a la temperatura crítica es:

$$C_s - C_n = V \alpha T_c / b \quad (C-8)$$

La comparación de las expresiones (C-8) y (B-18) permite dar

valores a los coeficientes "α" y "b":

$$\alpha = 6\pi^2 T_c / 7\zeta(3)\mu = 7.04 T_c / \mu \quad (\text{C-9-a})$$

$$b = \alpha T_c / n \quad (\text{C-9-b})$$

donde  $n$ , es la densidad en el número de partículas ( $n = \rho/m$ ), y  $\mu$  es el potencial químico a  $T=0$  MeV:

$$n = p_F^3 / 3\pi^2 \hbar^3 \quad (\text{C-10-a})$$

$$\mu = p_F^2 / 2m \quad (\text{C-10-b})$$

## Apendice D

### D-1 Formalismo de la aproximación de fases al azar.

#### Canal de partícula-agujero

Si partimos de un conjunto de estados excitados del Hamiltoniano H, podemos escribir:

$$H | \nu \rangle = \hbar \omega_\nu | \nu \rangle \quad (D-1)$$

es posible definir operadores  $\Gamma_\nu^\dagger$  y  $\Gamma_\nu$  tales que:

$$|\nu\rangle = \Gamma_\nu^\dagger |0\rangle \quad (D-2-a)$$

$$\Gamma_\nu |0\rangle = 0 \quad (D-2-b)$$

Colocando (D-2-a) en la ecuación de Schrödinger, expresión (D-1), obtenemos la siguiente ecuación de movimiento:

$$[ H , \Gamma_\nu^\dagger ] |0\rangle = \hbar \omega_\nu \Gamma_\nu^\dagger |0\rangle \quad (D-3)$$

donde hemos supuesto que:

$$H |0\rangle = 0$$

Multiplicando a izquierda por un estado arbitrario,  $\langle 0 | \delta \Gamma$ , resulta:

$$\langle 0 | [\delta \Gamma, [H, \Gamma_{\nu}^{\dagger}]] | 0 \rangle = \hbar \omega_{\nu} \langle 0 | [\delta \Gamma, \tau_{\nu}^{\dagger}] | 0 \rangle \quad (D-4)$$

Si aproximamos  $|0\rangle$  por  $|HF\rangle$ , y  $\Gamma_{\nu}^{\dagger}$  por el operador colectivo de partícula-agujero:

$$\Gamma_{\nu}^{\dagger} = \sum_{mi} c_{mi}^{\nu} a_m^{\dagger} a_i \quad (D-5)$$

la ecuación (D-4) conduce a:

$$\sum_{mi} c_{mi}^{\nu} \langle HF | [a_j^{\dagger} a_n, [H, a_m^{\dagger} a_i]] | HF \rangle = \hbar \omega_{\nu} c_{nj}^{\nu} \quad (D-6)$$

que corresponde a la aproximación de Tamm-Dancoff.

No hay ninguna razón por la cual no podamos usar en (D-5) un operador más general. Si pensamos en un estado fundamental distinto del de Hartree-Fock,  $|HF\rangle$ , no sólo debemos tener en cuenta estados que crean un par, sino también estados que destruyen un par. Podemos tomar:

$$\Gamma_{\nu}^{\dagger} = \sum_i X_{mi}^{\nu} a_m^{\dagger} a_i - \sum_i Y_{mi}^{\nu} a_i^{\dagger} a_m \quad (D-7)$$

de esta forma el vacío de RPA,  $|RPA\rangle$ , será tal que:

$$\Gamma_{\nu} |RPA\rangle = 0 \quad (D-8)$$

A partir de (D-4) obtenemos dos conjuntos de ecuaciones:

$$\langle \text{RPA} | [a_i^\dagger a_m, [H, \Gamma_\nu^\dagger]] | \text{RPA} \rangle = \hbar\omega_\nu \langle \text{RPA} | [a_i^\dagger a_m, \Gamma_\nu^\dagger] | \text{RPA} \rangle \quad (\text{D-9-a})$$

$$\langle \text{RPA} | [a_m^\dagger a_i, [H, \Gamma_\nu^\dagger]] | \text{RPA} \rangle = \hbar\omega_\nu \langle \text{RPA} | [a_m^\dagger a_i, \Gamma_\nu^\dagger] | \text{RPA} \rangle \quad (\text{D-9-b})$$

donde  $\hbar\omega_\nu$ , es la energía del estado excitado  $|\nu\rangle$ . Estas ecuaciones contienen valores de espectación de cuatro fermiones, los cuales son difíciles de calcular, debido al hecho que todavía no sabemos quien es  $|\text{RPA}\rangle$ .

Nos conformaremos con la aproximación, comunmente llamada de cuasi-bosón. Si suponemos que el estado correlacionado no difiere mucho del obtenido a través de la aproximación de Hartree-Fock, podemos reemplazar  $|\text{RPA}\rangle$  por  $|\text{HF}\rangle$ . Esta aproximación viola el principio de exclusión de Pauli. La bondad de la aproximación de cuasi-bosón puede chequearse a partir de cálculos realistas. En esta aproximación, " $X_{mi}^\nu$ " y " $Y_{mi}^\nu$ " tienen un significado directo: su valor absoluto elevado al cuadrado da la probabilidad de encontrar los estados " $a_m^\dagger a_i |0\rangle$ " y " $a_i^\dagger a_m |0\rangle$ " en el estado excitado  $|\nu\rangle$ , respectivamente, es decir:

$$\langle 0 | a_i^\dagger a_m | \nu \rangle \cong \langle \text{HF} | [a_i^\dagger a_m, \Gamma_\nu^\dagger] | \text{HF} \rangle = X_{mi}^\nu \quad (\text{D-10-a})$$

$$\langle 0 | a_m^\dagger a_i | \nu \rangle \cong \langle \text{HF} | [a_m^\dagger a_i, \Gamma_\nu^\dagger] | \text{HF} \rangle = Y_{mi}^\nu \quad (\text{D-10-b})$$

La ecuación (D-9) puede escribirse en forma matricial, resultando:

$$\begin{pmatrix} A & B \\ B^* & A^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X^\nu \\ Y^\nu \end{pmatrix} = \hbar\omega_\nu \begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & -U \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X^\nu \\ Y^\nu \end{pmatrix} \quad (D-11)$$

con:

$$(X^\nu)_{mi} = X^\nu_{mi} \quad (D-12-a)$$

$$(Y^\nu)_{mi} = Y^\nu_{mi} \quad (D-12-b)$$

$$A_{minj} = \langle HF | [a_i^\dagger a_m, [H, a_n^\dagger a_j]] | HF \rangle \quad (D-12-c)$$

$$B_{minj} = \langle HF | [a_i^\dagger a_m, [H, a_j^\dagger a_n]] | HF \rangle \quad (D-12-d)$$

$$U_{minj} = \langle HF | [a_i^\dagger a_m, a_n^\dagger a_j] | HF \rangle \quad (D-12-e)$$

siendo "A" una matriz hermítica y "B" una matriz simétrica.

Si hacemos  $Y_{mi}^\nu = 0$ , obtenemos nuevamente la aproximación de Tamm-Dancoff. Es decir que  $Y_{mi}^\nu$ , será una buena medida de las correlaciones del estado fundamental. Si las amplitudes retrasadas del fonón,  $Y_{mi}^\nu$ , fueran grandes en comparación con las amplitudes avanzadas,  $X_{mi}^\nu$ , la aproximación de cuasi-bosón dejaría de ser válida.

## Normalización y relaciones de clausura

Como la matriz de RPA no es hermítica, sus autovalores no pueden ser ortogonales en el sentido usual. Esperamos una clase diferente de relaciones de ortogonalidad, obtenida a partir de la condición de ortogonalidad impuesta a los estados  $|\nu\rangle$ :

$$\begin{aligned} \langle \nu | \nu' \rangle &= \delta_{\nu\nu'} = \langle \text{RPA} | [\Gamma_\nu, \Gamma_{\nu'}^\dagger] | \text{RPA} \rangle \cong \\ &\cong \langle \text{HF} | [\Gamma_\nu, \Gamma_{\nu'}^\dagger] | \text{HF} \rangle \end{aligned} \quad (\text{D-13})$$

o bien:

$$\delta_{\nu\nu'} = \sum_{mi} (X_{mi}^{\nu*} X_{mi}^{\nu'} - Y_{mi}^{\nu*} Y_{mi}^{\nu'}) U_{mimi} \quad (\text{D-14})$$

Para obtener la relación de clausura introduciremos la siguiente notación matricial:

$$\begin{aligned} x &= \begin{pmatrix} X & Y^* \\ Y & X^* \end{pmatrix} & \eta &= \begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & -U \end{pmatrix} \\ S &= \begin{pmatrix} A & B \\ B^* & A^* \end{pmatrix} & \Omega &= \begin{pmatrix} \theta & 0 \\ 0 & -\theta \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{D-15})$$

con:

$$\theta_{\nu\nu'} = \delta_{\nu\nu'} \hbar\omega_\nu$$

En función de estas matrices, la ecuación de dispersión puede escribirse como:

$$S\kappa = \eta\kappa\Omega \quad (D-16)$$

Después de un álgebra sencilla resulta:

$$[\Omega, \kappa^\dagger \eta \kappa] = 0 \quad (D-17)$$

pudiendo elegir:

$$\kappa^\dagger \eta \kappa = \eta \quad (D-18)$$

esta elección respeta la condición de ortogonalidad (D-14).

Multiplicando (D-18) por  $\eta$ , y teniendo en cuenta que  $\eta\kappa\eta$  es la matriz inversa de  $\kappa^\dagger$ , obtenemos la condición de clausura:

$$\kappa\eta\kappa^\dagger = \eta \quad (D-19)$$

o bien:

$$\delta_{mim'i'} = \sum_{\nu} (X_{mi}^{\nu*} X_{m'i'}^{\nu} - Y_{mi}^{\nu*} Y_{m'i'}^{\nu}) U_{mim'i'} \quad (D-20)$$

### Construcción del estado fundamental de la RPA

Podemos construir el estado fundamental de la RPA,  $|RPA\rangle$ , a

partir del vacío de Hartree-Fock, utilizando el teorema de Thouless:

$$|RPA\rangle = N_0 \exp(Z) |HF\rangle \quad (D-21)$$

$$Z = (1/2) \sum_{\substack{m_i \\ n_j}} Z_{m_i n_j} B_{m_i}^\dagger B_{n_j}^\dagger \quad (D-22)$$

con:  $B_{m_i}^\dagger = a_m^\dagger a_i$

y siendo:

$$Z = Y^\dagger X^{\dagger-1} \quad (D-23)$$

### D-2 Formalismo RPA para el canal de partícula-partícula

El formalismo de la RPA para el canal de partícula-partícula (p-p) describe estados excitados en sistemas con  $A \pm 2$  nucleones, siendo  $A$  el número de nucleones en el núcleo original.

Los operadores equivalentes a los usados en el caso del canal de partícula-agujero (p-h), expresión (D-7), son elegidos de manera que:

$$\Gamma_{\alpha, \nu}^\dagger |A, 0\rangle = |A+2, \nu\rangle \quad (D-24-a)$$

$$\Gamma_{r,\lambda}^\dagger |A,0\rangle = |A-2,\nu\rangle \quad (D-24-b)$$

es decir:

$$\Gamma_{a,\nu}^\dagger = \sum_{m<n} X_{a,mn}^\nu a_m^\dagger a_n^\dagger - \sum_{i<j} Y_{a,ij}^\nu a_j^\dagger a_i^\dagger \quad (D-25-a)$$

$$\Gamma_{r,\lambda}^\dagger = \sum_{m<n} X_{r,mn}^\lambda a_m a_n - \sum_{i<j} Y_{r,ij}^\lambda a_j a_i \quad (D-25-b)$$

Tenemos pues, dos tipos de bosones: uno asociado a las excitaciones en el sistema con A+2 nucleones, (D-25-a), y otro asociado a las excitaciones en el sistema de A - 2 nucleones (D-25-b). Estos dos tipos de bosones dan lugar a las siguientes ecuaciones de movimiento:

$$[H, \Gamma_{a,\nu}^\dagger] |0\rangle = \hbar \omega_\nu \Gamma_{a,\nu}^\dagger \quad (D-26-a)$$

$$[H, \Gamma_{r,\lambda}^\dagger] |0\rangle = \hbar \omega_\nu \Gamma_{r,\lambda}^\dagger \quad (D-26-b)$$

Estas ecuaciones pueden escribirse de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} (\hbar \omega_\nu - \epsilon_m - \epsilon_n) X_{a,mn}^\nu &= \\ &= \sum_{m'<n'} v_{mnm'n'} X_{a,m'n'}^\nu - \sum_{i'<j'} v_{mni'j'} Y_{a,i'j'}^\nu \end{aligned}$$

$$(-\hbar \omega_\nu + \epsilon_i + \epsilon_j) Y_{a,ij}^\nu =$$

$$= - \sum_{m' < n'} v_{ijm'n'} X_{a,m'n'}^\nu + \sum_{i' < j'} v_{iji'j'} Y_{a,i'j'}^\nu \quad (D-27-a)$$

$$(\hbar\omega_\lambda - \epsilon_m - \epsilon_n) Y_{r,mn}^\lambda =$$

$$= - \sum_{i' < j'} v_{iji'j'} X_{r,i'j'}^\lambda + \sum_{m' < n'} v_{mnm'n'} Y_{r,m'n'}^\lambda$$

$$(-\hbar\omega_\lambda + \epsilon_i + \epsilon_j) X_{r,ij}^\lambda =$$

$$= \sum_{i' < j'} v_{iji'j'} X_{r,i'j'}^\lambda - \sum_{m' < n'} v_{ijm'n'} Y_{r,m'n'}^\lambda$$

(D-27-b)

pudiéndose expresar, al igual que en el caso de p-h, las amplitudes adelantada y atrasada de los fonones como:

$$X_{a,mn}^\nu = \langle A, 0 | a_m a_n | A+2, \nu \rangle \quad (D-28-a)$$

$$Y_{a,ij}^\nu = \langle A, 0 | a_i a_j | A+2, \nu \rangle \quad (D-28-b)$$

$$X_{r,ij}^\lambda = \langle A-2, \lambda | a_j a_i | A, 0 \rangle \quad (D-28-c)$$

$$Y_{r,mn}^\lambda = \langle A-2, \lambda | a_m a_n | A, 0 \rangle \quad (D-28-d)$$

y siendo  $v_{\alpha\beta\gamma\delta}$  el elemento de matriz de la interacción a estudiar.

El sistema de ecuaciones (D-27) brinda simultáneamente los autoestados de un sistema con  $A \pm 2$  nucleones, a diferencia de lo que sucedía en el caso del canal de p-h, que tenía en cuenta excitaciones correspondientes al mismo número de partículas.

La condición de normalización presenta la misma forma que para el caso de p-h:

$$\delta_{\nu\nu'} = \sum_{m < n} X_{mn}^{\nu*} X_{mn}^{\nu'} - \sum_{i < j} Y_{ij}^{\nu*} Y_{ij}^{\nu'} \quad (D-29-a)$$

$$\delta_{\lambda\lambda'} = - \sum_{m < n} Y_{mn}^{\lambda*} Y_{mn}^{\lambda'} + \sum_{i < j} X_{ij}^{\lambda*} X_{ij}^{\lambda'} \quad (D-29-b)$$

y la condición de clausura es

$$\delta_{rr'} \delta_{ss'} = \sum_{\nu} X_{rs}^{\nu*} X_{r's'}^{\nu} - \sum_{\nu} Y_{rs}^{\nu*} Y_{r's'}^{\nu} \quad (D-30)$$

El formalismo de la RPA de p-p ha sido aplicado satisfactoriamente en núcleos próximos a capa cerrada, describiéndose las excitaciones del sistema con  $A \pm 2$  nucleones. En el Capítulo I hemos extendido el formalismo a temperatura distinta de cero.

### D-3 Formalismo RPA para cuasipartículas

Lejos de los núcleos de capa cerrada, las correlaciones de apareamiento no son despreciables, lo que implica que su efecto sobre la descripción de partícula independiente no pueden ser despreciadas. Sabemos que el estado fundamental de la teoría BCS es adecuado para tratar estas propiedades. Podemos construir una teoría RPA similar al caso de núcleos no superconductores.

Para derivar las ecuaciones correspondientes a este formalismo partiremos del siguiente Hamiltoniano:

$$H = H^0 + H^{11} + H^{40} + H^{22} \quad (D-31)$$

en la expresión (D-31) hemos adoptado la notación usada en el Apéndice A.

Tomaremos al bosón  $\Gamma_{\nu}^{\dagger}$  como :

$$\Gamma_{\nu}^{\dagger} = (1/2) \sum_{k,k'} X_{kk'}^{\nu} \alpha_k^{\dagger} \alpha_{k'}^{\dagger} - \sum_{k,k'} Y_{kk'}^{\nu} \alpha_{k'} \alpha_k \quad (D-32)$$

La ecuación matricial resultante tiene la misma forma que la expresión (D-11), con la salvedad que los índices de suma varían sobre todos los pares ( $k \ll k'$ ) de configuraciones del espacio. Esto significa que tenemos contribuciones de los canales de p-h, p-p y h-h.

A temperatura cero las matrices del formalismo de la RPA para un sistema de cuasipartículas son:

$$(X^\nu)_{kk'} = X_{kk'}^\nu \quad (\text{D-33-a})$$

$$(Y^\nu)_{kk'} = Y_{kk'}^\nu \quad (\text{D-33-b})$$

$$A_{kk' ll'} = \langle \text{HF} | [\alpha_k^\dagger \alpha_{k'}^\dagger, [H, \alpha_l \alpha_{l'}]] | \text{HF} \rangle \quad (\text{D-33-c})$$

$$B_{kk' ll'} = - \langle \text{HF} | [\alpha_k \alpha_{k'}, [H, \alpha_l \alpha_{l'}]] | \text{HF} \rangle \quad (\text{D-33-d})$$

$$U_{kk' ll'} = \langle \text{HF} | [\alpha_k^\dagger \alpha_{k'}^\dagger, \alpha_l \alpha_{l'}] | \text{HF} \rangle \quad (\text{D-33-e})$$

La condición de normalización puede escribirse como:

$$\delta_{\nu\nu'} = \sum_{k, k'} ( X_{kk'}^{\nu*} X_{kk'}^\nu - Y_{kk'}^{\nu*} Y_{kk'}^\nu ) \quad (\text{D-34-a})$$

mientras que la condición de clausura resulta:

$$\delta_{kk'} \delta_{ll'} = \sum_{\nu} ( X_{kk'}^{\nu*} X_{ll'}^\nu - Y_{kk'}^{\nu*} Y_{ll'}^\nu ) \quad (\text{D-35})$$

La extensión de este formalismo a temperatura finita ha sido descrita en el Capítulo I y en el Capítulo II de esta Tesis.

## Apendice E

### Formalismo de la Función de Respuesta Lineal

Al tratar excitaciones colectivas en un sistema nuclear, se parte de la ecuación de Schrödinger estacionaria:

$$H |\nu\rangle = E_\nu |\nu\rangle \quad (\text{E-1})$$

reduciéndose el problema a diagonalizar el Hamiltoniano, al menos en alguna aproximación.

Sin embargo, podemos empezar de manera diferente. Podemos investigar la influencia de un campo externo débil,  $F$ , dependiente del tiempo:

$$F(t) = F \exp(-i\omega t) + F^\dagger \exp(i\omega t) \quad (\text{E-2})$$

sobre el sistema. Supondremos que  $F$  es un operador de un cuerpo

$$F = \sum_{k,l} f_{kl} a_k^\dagger a_l \quad (\text{E-3})$$

El efecto de este campo será introducir pequeñas modificaciones en la densidad nuclear. De este modo, la densidad nuclear oscilará con el campo externo, produciéndose resonancias cuando la frecuencia  $\omega$  sea próxima a la energía de excitación del sistema. En esta forma obtenemos información sobre los estados excitados del sistema, pudiendo además, derivar un formalismo RPA para fuerzas dependientes de la densidad.

## E-1 Derivación de la Función de Respuesta Lineal

Como sabemos, la función de onda de un sistema nuclear,  $|\phi(t)\rangle$ , en un campo externo dependiente del tiempo, no es más estacionaria, y la densidad de un cuerpo:

$$\rho_{kl}(t) = \langle \phi(t) | a_k^\dagger a_l | \phi(t) \rangle \quad (\text{E-4})$$

depende del tiempo.

Queremos calcular esta densidad bajo las siguientes aproximaciones:

i)  $\rho(t)$  corresponde a un determinante de Slater ( $\rho^2 = \rho$ ), y obedece la siguiente ecuación de movimiento:

$$i\hbar \dot{\rho} = [h(\rho) + f(t), \rho] \quad (\text{E-5})$$

esta es la ecuación de Hartree-Fock dependiente del tiempo, donde  $h(\rho)$  es el campo de partícula independiente de Hartree-Fock, y  $f(t)$  es el campo externo dependiente del tiempo.

ii)  $f(t)$  es débil, de modo que solamente introduce pequeñas oscilaciones alrededor de la densidad estacionaria  $\rho^0$ , que es solución estacionaria de la ecuación de Hartree-Fock:

$$0 = [h(\rho^0), \rho^0] \quad (\text{E-6})$$

de modo que:

$$\rho(t) = \rho^0 + \delta\rho(t) \quad (\text{E-7})$$

donde:

$$\delta\rho(t) = \rho^1 \exp(-i\omega t) + \rho^1 \exp(i\omega t) \quad (\text{E-8})$$

Trabajaremos en la base en que  $\rho^0$  y  $h(\rho^0)$  son diagonales, es decir:

$$\rho_{kl}^0 = \delta_{kl} \rho_k^0 = \begin{cases} 0 & \text{para partículas} \\ 1 & \text{para agujeros} \end{cases} \quad (\text{E-9})$$

$$(h_0) = (h(\rho^0))_{kl} = \delta_{kl} \epsilon_k \quad (\text{E-10})$$

Reemplazando la expresión (E-7) en (E-5), resulta:

$$i\hbar \dot{\delta\rho} = [h, \delta\rho] + [(\delta h / \delta \rho) \delta \rho, \rho^0] + [f, \rho^0] \quad (\text{E-11})$$

donde:

$$(\delta h / \delta \rho) \delta \rho = \sum_{m,i} \left[ \left( \frac{\partial h}{\partial \rho_{mi}} \right)_{\rho=\rho^0} \delta \rho_{mi} + \left( \frac{\partial h}{\partial \rho_{im}} \right)_{\rho=\rho^0} \delta \rho_{im} \right] \quad (\text{E-12})$$

En (E-12) los elementos de las contribuciones de los canales de

p-p y h-h a temperatura cero se anulan, obteniendo la siguiente ecuación matricial:

$$\left( \begin{bmatrix} A & B \\ B^* & A^* \end{bmatrix} - \hbar\omega \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \rho^{(1)ph} \\ \rho^{(1)hp} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} f^{ph} \\ f^{hp} \end{bmatrix} \quad (6)$$

(E-13)

siendo:

$$A_{minj} = (\epsilon_m - \epsilon_i) \delta_{mn} \delta_{ij} + \partial h_{mi} / \partial \rho_{nj} \quad (E-14-a)$$

$$B_{minj} = \partial h_{mi} / \partial \rho_{jn} \quad (E-14-b)$$

Las matrices A y B se corresponden exactamente a las matrices obtenidas en el formalismo de la RPA, discutido en el Apéndice D.

La ecuación de respuesta lineal, es una ecuación inhomogénea, que puede ser resuelta invirtiendo el miembro de la izquierda de (E-13); encontrando así una conexión lineal entre el campo F y el cambio en la densidad nuclear:

$$\rho_{kl}^1 = \sum_{p,q} R_{kl,pq}(\omega) f_{pq} \quad (E-15)$$

donde  $R_{klpq}(\omega)$  se conoce como la Función de Respuesta Lineal. Esta función depende de la frecuencia del campo externo, y presenta polos en las autofrecuencias del sistema, que un campo débil  $f$  es capaz de excitar. Para encontrar estas resonancias ( $\omega = \Omega_\nu$ ) debemos mirar las soluciones de la ecuación homogénea (E-13), la que puede escribirse como:

$$(S - \hbar\omega \eta) \rho^{\dagger} = 0 \quad (\text{E-16})$$

donde hemos adoptado la notación del Apéndice D.

La fórmula (E-16) no es más que la ecuación del formalismo de la RPA, y sus soluciones dan las amplitudes:

$$\rho_{pq}^{\dagger}(\Omega) = \langle 0 | a_p^{\dagger} a_q | \nu \rangle \quad (\text{E-17})$$

El conocimiento de los modos propios del sistema, es decir las energías  $\Omega_{\nu}$ , y las amplitudes X e Y del formalismo de la RPA, permite hallar una expresión para la Función de Respuesta Lineal. De este modo, a partir de

$$\rho^{\dagger} = \hbar^{-1} \chi (\Omega - \omega)^{-1} \eta \chi^{\dagger} f \quad (\text{E-18})$$

la Función de Respuesta Lineal resulta

$$R_{pp'q'q}(\omega) = (\hbar^{-1}) \sum_{\nu > 0} \left[ \frac{\langle 0 | a_q^{\dagger} a_p | \nu \rangle \langle \nu | a_{p'}^{\dagger} a_{q'} | 0 \rangle}{\omega - \Omega_{\nu} + i\eta} - \frac{\langle 0 | a_{p'}^{\dagger} a_{q'} | \nu \rangle \langle \nu | a_q^{\dagger} a_p | 0 \rangle}{\omega + \Omega_{\nu} + i\eta} \right]$$

(E-19)

donde  $|0\rangle$  y  $|\nu\rangle$  son autoestados estacionarios no perturbados.

Si introducimos la Función de Respuesta Lineal  $R_{pq,p'q'}^0(\omega)$  para un sistema sin interacción:

$$R_{pq,p'q'} = \delta_{pp'} \delta_{qq'} \frac{\rho_q^0 - \rho_p^0}{\omega - \epsilon + \epsilon + i\eta} \quad (\text{E-20})$$

podemos derivar, en la aproximación RPA otra expresión para  $R_{pq,p'q'}(\omega)$ . Con ayuda de la ecuación de linealización de Bethe-Salpeter obtenemos:

$$R_{pq,p'q'}(\omega) = R_{pq,p'q'}^0(\omega) + \sum_{\substack{p_1 q_1 \\ p_2 q_2}} R_{pq,p_1q_1}^0(\omega) H_{int}(p_1q_1, p_2q_2) R_{p_2q_2,p'q'}(\omega) \quad (\text{E-21})$$

La extensión de este formalismo a temperatura finita, puede hacerse en forma sencilla a través de la introducción de una matriz diagonal con factores de ocupación térmicos:

$$\tau = \begin{pmatrix} (n_{j_1}(T) - n_{j_2}(T)) & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & -(n_{j_1}(T) - n_{j_2}(T)) \end{pmatrix} \quad (\text{E-22})$$

Luego de algún álgebra el resultado es

$$R_{pq, p'q'}(\omega) = (\hbar^{-1}) \sum_{\nu > 0} \left[ \frac{\langle 0 | a_q^\dagger a_p | \nu \rangle \langle \nu | a_{p'}^\dagger a_{q'} | 0 \rangle}{\omega - \Omega_\nu + i\eta} - \frac{\langle 0 | a_{p'}^\dagger a_{q'} | \nu \rangle \langle \nu | a_q^\dagger a_p | 0 \rangle}{\omega + \Omega_\nu + i\eta} \right] (n_p - n_q)$$

(E-23)

donde  $n_j(T)$  es el número de ocupación térmico.

De esta forma es que la Función de Respuesta Lineal no perturbada tiene la forma:

$$R_T^0(\omega)_{pq, p'q'} = \delta_{pp'} \delta_{qq'} (n_p(T) - n_q(T)) .$$

$$\left[ \frac{1}{\omega - \epsilon_p + \epsilon_q + i\eta} - \frac{1}{\omega + \epsilon_p - \epsilon_q + i\eta} \right]$$

(E-24)

Haciendo uso, nuevamente, de la Ecuación de linealización de Bethe-Salpeter, obtenemos:

$$R_{T, pq, p'q'}(\omega) = R_{T, pq, p'q'}^0(\omega) + \sum_{\substack{p_1 q_1 \\ p_2 q_2}} R_{pq, p_1 q_1}^0(\omega) H_{int}(p_1 q_1, p_2 q_2) R_{p_2 q_2, p'q'}(\omega)$$

(E-25)

## E-2 Cálculo de Probabilidades de Transición

Una propiedad muy útil de la Función de Respuesta Lineal, radica en el hecho que su parte imaginaria está relacionada con la probabilidad total de transición. Si definimos:

$$\begin{aligned} R_F(\omega) &= \text{Tr} (f^\dagger \rho^1(\omega)) = \\ &= \sum_{\substack{pq \\ p'q'}} f_{pq}^\dagger R_{pq p'q'}(\omega) f_{p'q'} \end{aligned} \quad (\text{E-26})$$

podemos verificar que para  $\omega > 0$ :

$$\text{Im} R_F(\omega) = -\pi \sum_{\nu > 0} |\langle \nu | F | 0 \rangle|^2 \delta(\hbar\omega - \hbar\Omega_\nu) \quad (\text{E-27})$$

obteniendo la regla de suma pesada en energía a través de una simple integral:

$$\begin{aligned} S &= \int_0^\infty d\omega \omega \text{Im} R_F(\omega) = \\ &= \sum_{\nu > 0} |\langle \nu | F | 0 \rangle|^2 \hbar\Omega_\nu \end{aligned} \quad (\text{E-28})$$

donde  $|\langle \nu | F | 0 \rangle|^2$  es el residuo de  $R_F(\omega)$  en el polo  $\omega = \Omega_\nu$ .

### Leyendas de las Tablas.

Tabla 1: Soluciones RPA para los modos  $\lambda^{\pi}=2^{+}$  y  $3^{-}$  en  $^{208}\text{Pb}$ , a  $T=0$  MeV. Los centroides de energía,  $\bar{E}$ , se muestran en la segunda columna. La tercera y cuarta columna corresponden al porcentaje de EWSR correspondiente al modo isoescalar ( $\tau=0$ ) y al modo isovectorial ( $\tau=1$ ), respectivamente. Las últimas dos columnas muestran los momentos multipolares eléctrico,  $B(E\lambda)$ , y de masa,  $B(E\lambda)_{\text{masa}}$ . La notación para unidades de partícula independiente es s.p.u.

Tabla 2: Soluciones RPA para los modos  $\lambda^{\pi}=2^{+}$  y  $3^{-}$  en  $^{208}\text{Pb}$ , a  $T=2$  MeV. El significado de cada columna es el mismo que en la tabla anterior.

Tabla 3: Comparación de los resultados obtenidos mediante el formalismo de la RPA con los provenientes del formalismo de la Función de Respuesta Lineal, para los modos isoescalar ( $\tau=0$ ) e isovectorial ( $\tau=1$ ) de multipolaridad  $\lambda^{\pi}=2^{+}$  y  $3^{-}$  en  $^{208}\text{Pb}$ , a  $T=0$  MeV y a  $T=2$  MeV. Con  $\bar{E}$  denotamos el pico del centroide de la resonancia gigante, y con  $\Gamma$  su ancho.

Tabla 1

$\lambda^\pi$	$\bar{E}$	$f(\tau=0)$	$f(\tau=1)$	$B(E\lambda)_{elec.}$ (s. p. u.)	$B(E\lambda)_{mag.}$ (s. p. u.)
$2^+$	4.130	16.4	0.3	10.62	29.30
	8.015	51.4	0.3	19.91	46.58
	22.760	6.3	85.5	7.60	29.13
$3^-$	2.610	13.	0.2	27.91	74.22
	16.780	15.5	0.1	5.87	13.65
	29.190	9.2	64.5	6.44	37.05

Table 2

$\lambda^n$	$\bar{E}$	$f(\tau=0)$	$f(\tau=1)$	$B(E\lambda)_{elec.}$ (s.p.u.)	$B(E\lambda)_{mag.}$ (s.p.u.)
$2^+$	4.570	4.3	0.2	2.10	6.67
	8.380	46.6	0.2	16.53	38.30
	22.500	6.5	80.6	6.65	26.48
$3^-$	3.330	8.2	0.1	12.84	34.13
	16.820	14.7	0.2	5.26	12.09
	28.790	8.3	52.2	4.60	28.55

Tabla 3

$\lambda^r$	$\tau$	T	FTRPA		Respuesta Lineal	
			$\bar{E}$	$\Gamma$	$\bar{E}$	$\Gamma$
$2^+$	0	0.	8.015	1.5	8.09	2.21
		2.	8.380	1.7	8.38	2.47
	1	0.	22.76	1.1	22.76	2.84
		2.	22.50	1.3	22.50	3.02
$3^-$	0	0.	16.780	5.	14.06	8.71
		2.	16.820	5.4	14.56	9.84
	1	0.	29.19	1.8	29.66	3.39
		2.	28.790	2.1	29.45	3.83

## Leyendas de las Figuras

Figura 1-a: Excitaciones de dos fermiones a  $T=0$  MeV en un núcleo de capa cerrada. Sólo puede excitarse el canal de partícula-agujero (p-h).

Figura 1-b: Excitaciones de dos fermiones a  $T \neq 0$  MeV en un núcleo de capa cerrada. Pueden excitarse el canal de partícula-partícula (p-p) y el canal de agujero-agujero (h-h) además del canal de partícula-agujero (p-h).

Figura 2: Gap de apareamiento  $\Delta(T)$ , como función de la temperatura en el  $^{116}\text{Sn}$ .

Figura 3: Dependencia con la temperatura de las soluciones de la RPA en el  $^{116}\text{Sn}$ . La línea punteada indica el valor de  $T_c$ . En la fase normal ( $T > T_c$ ) las líneas sólidas corresponden a los modos de adición y las líneas con puntos corresponden a los modos de remoción.

Figura 4: Energía de excitación  $E^*$  de los grados de libertad fermiónicos (F) y bosónicos (RPA) como función de la temperatura en  $^{116}\text{Sn}$ . La suma de ambas se denota por Total. La línea punteada corresponde a la temperatura de transición del sistema.

Figura 5: Calor específico C como función de la temperatura en  $^{116}\text{Sn}$ . La contribución fermiónica (F) y bosónica (RPA) se muestran con círculos llenos y círculos vacíos, respectivamente, a ambos lados de la temperatura de transición  $T_c$ , la que se denota en línea punteada. La línea sólida corresponde al valor total de C.

Figura 6: Contribuciones fermiónica y bosónica al parámetro de densidad de niveles como función de la temperatura en  $^{208}\text{Pb}$ . La contribución para los modos vibratoriales de multipolaridad  $\lambda^{\pi}=2^+$  y  $3^-$  se denota como (a) y (b), respectivamente, y sus magnitudes se proporcionan en la escala de la izquierda. La contribución fermiónica se denota por (c) y sus valores se proporcionan en la escala de la derecha.

Figura 7: Contribución fermiónica al parámetro de densidad de niveles como función de la temperatura en  $^{60}\text{Zn}$ .

Figura 8-a: Contribución bosónica al parámetro de densidad de niveles en  $^{60}\text{Zn}$  como función de la temperatura. La relación del valor de la constante de acoplamiento del canal de partícula-partícula respecto de la del canal de partícula-agujero,  $G_{pp}/G_{ph}$ , vale 1 para la curva denotada por X, 0.75 para  $\blacklozenge$ , 0.50 para  $\blacktriangle$ , y 0.25 para  $\blacksquare$ .

Figura 8-b: Contribución bosónica al parámetro de densidad de niveles en  $^{60}\text{Zn}$  como función de la temperatura. La relación del valor de la constante de acoplamiento del canal de partícula-partícula respecto de la del canal de partícula-agujero,  $G_{pp}/G_{ph}$ , vale 1 para la curva denotada por X, 1.25 para  $\blacklozenge$ , 1.50 para  $\blacktriangle$ , y 1.75 para  $\blacksquare$ .

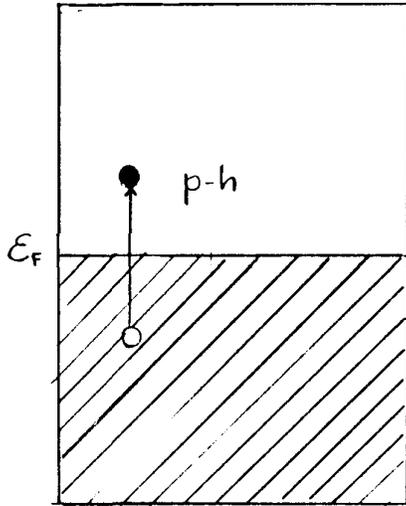


Figura 1-a.

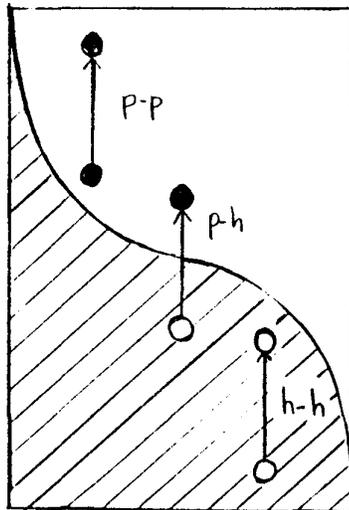


Figura 1-b.

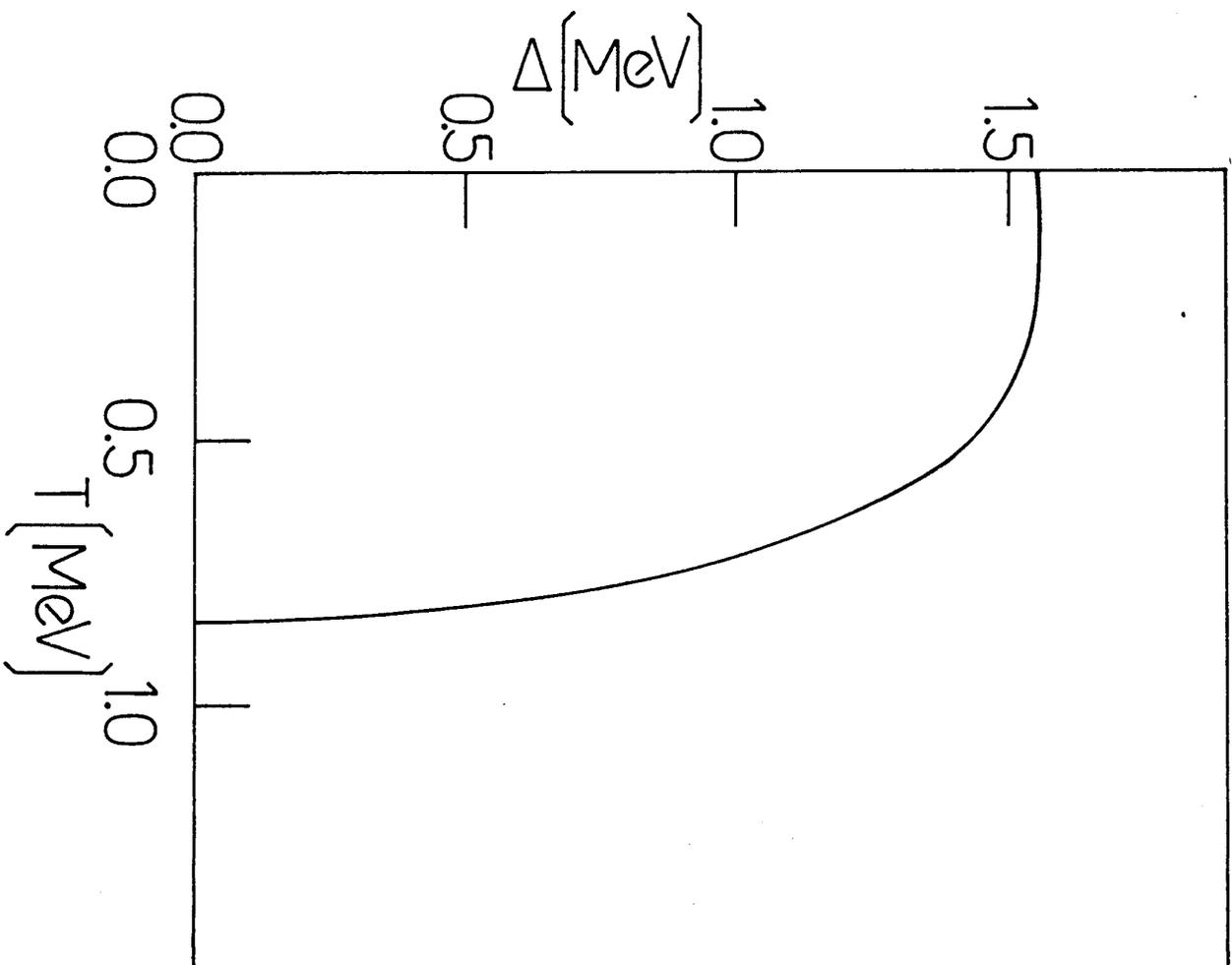


Figura 2 -

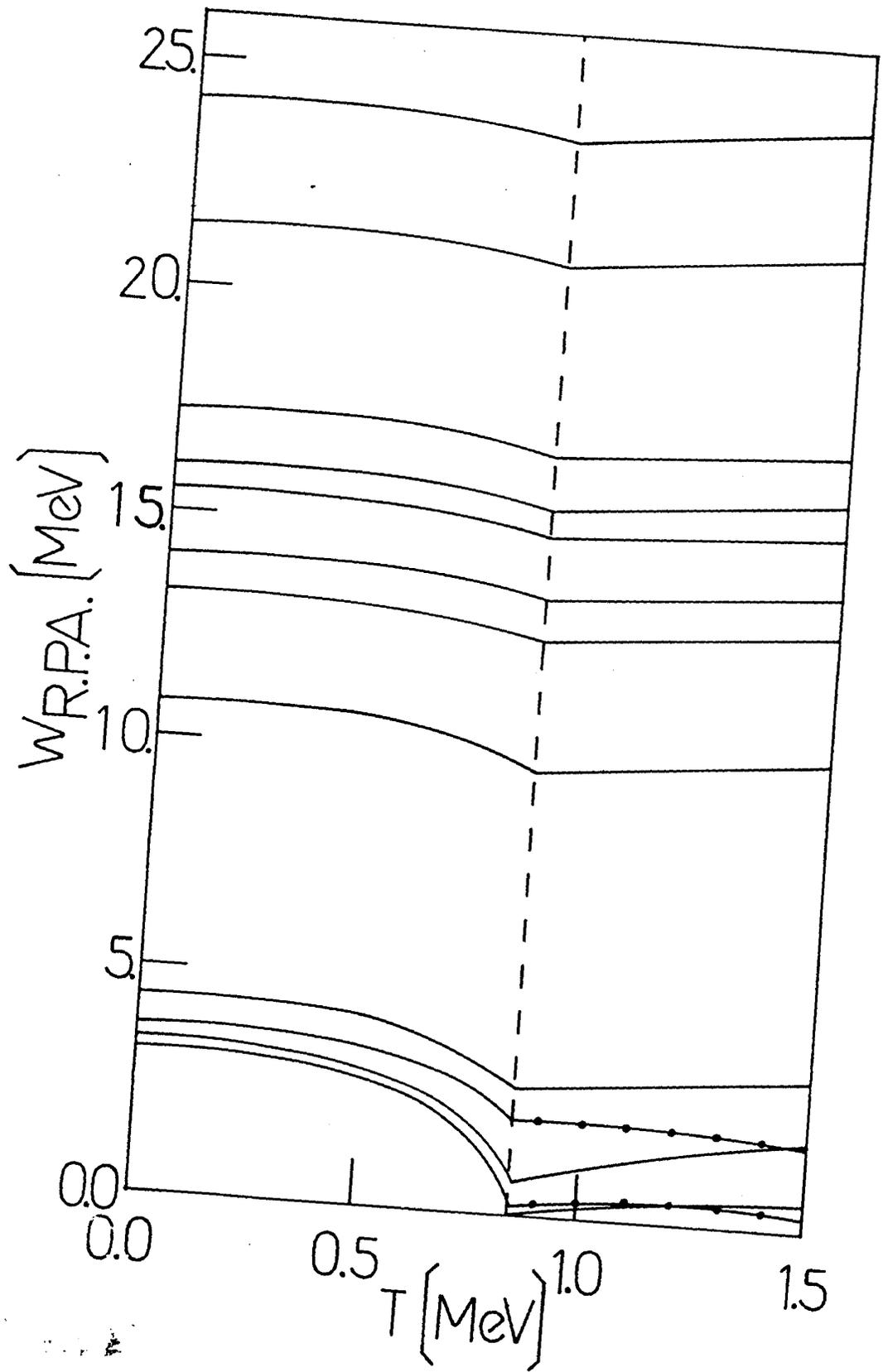


Figura 3.

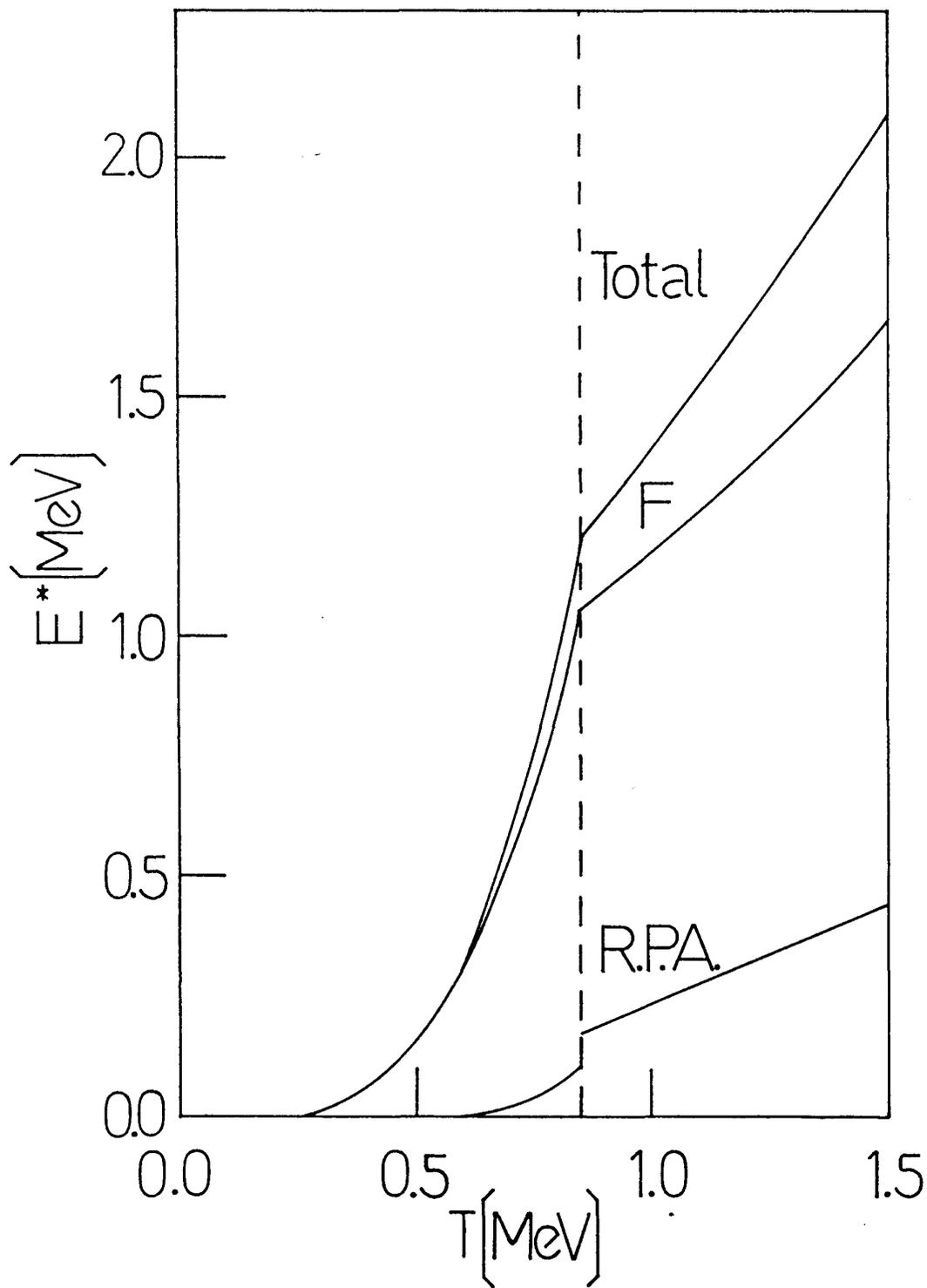


Figura 4.

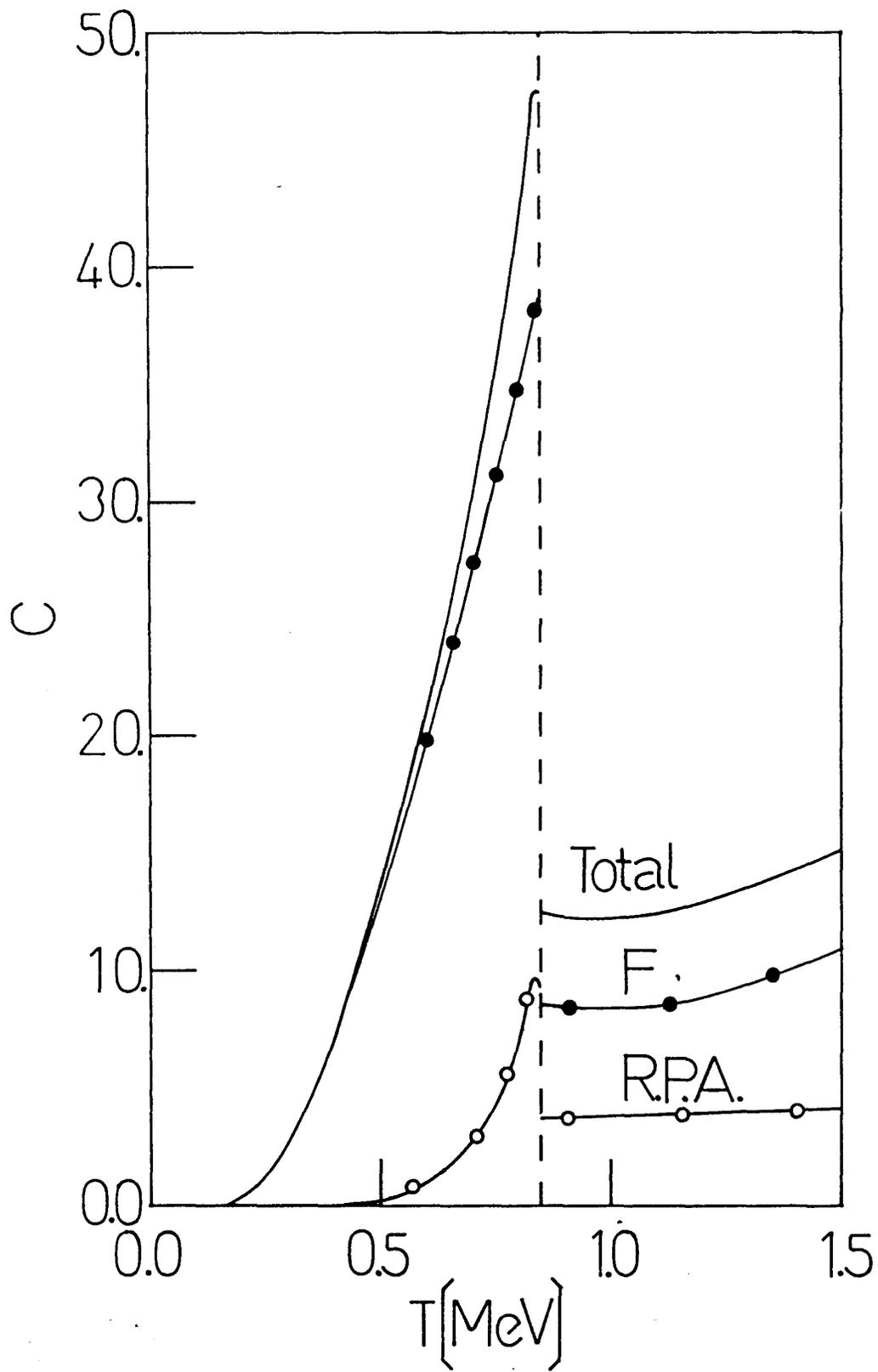


Figura 5.

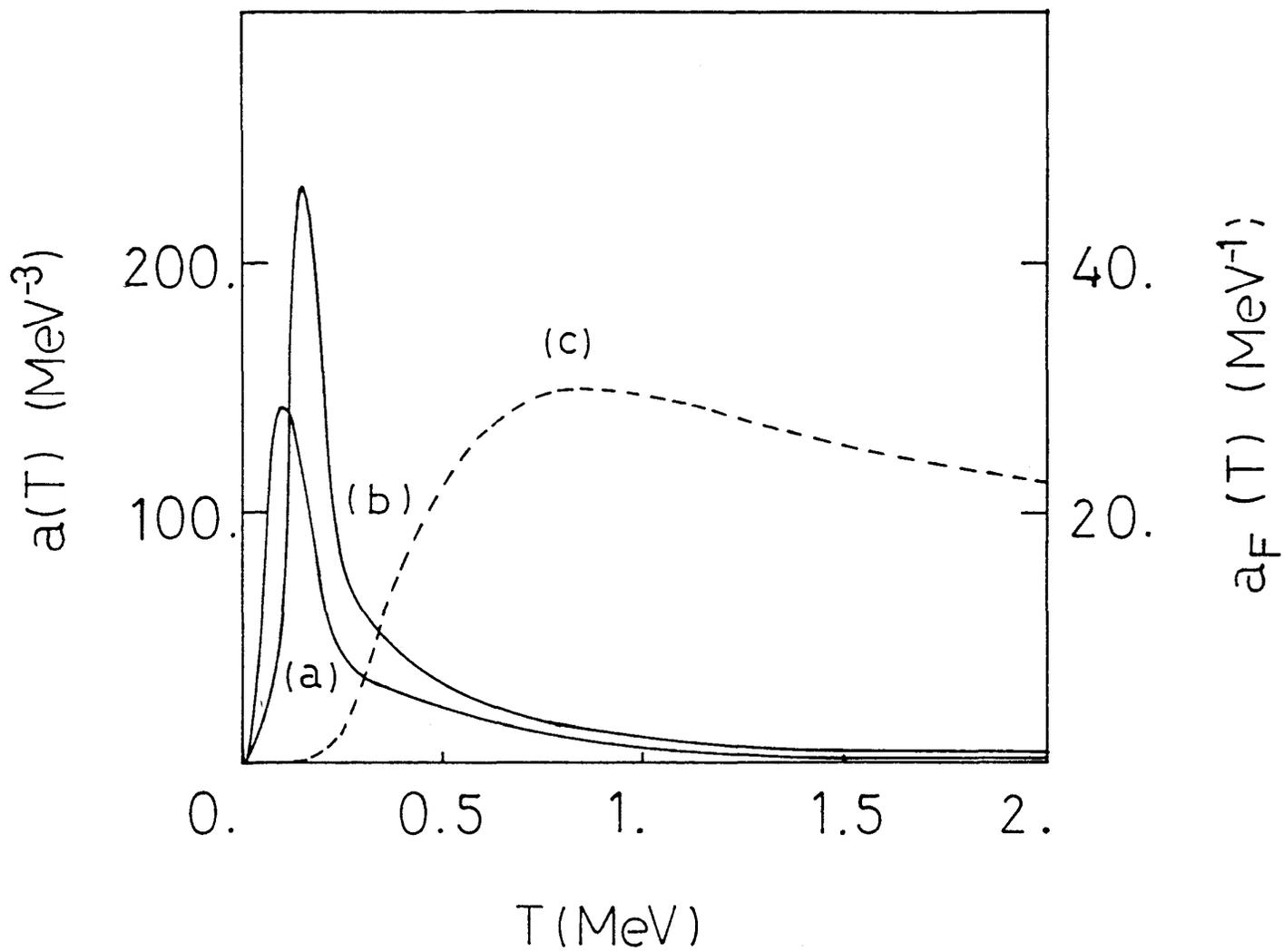


Figura 6.

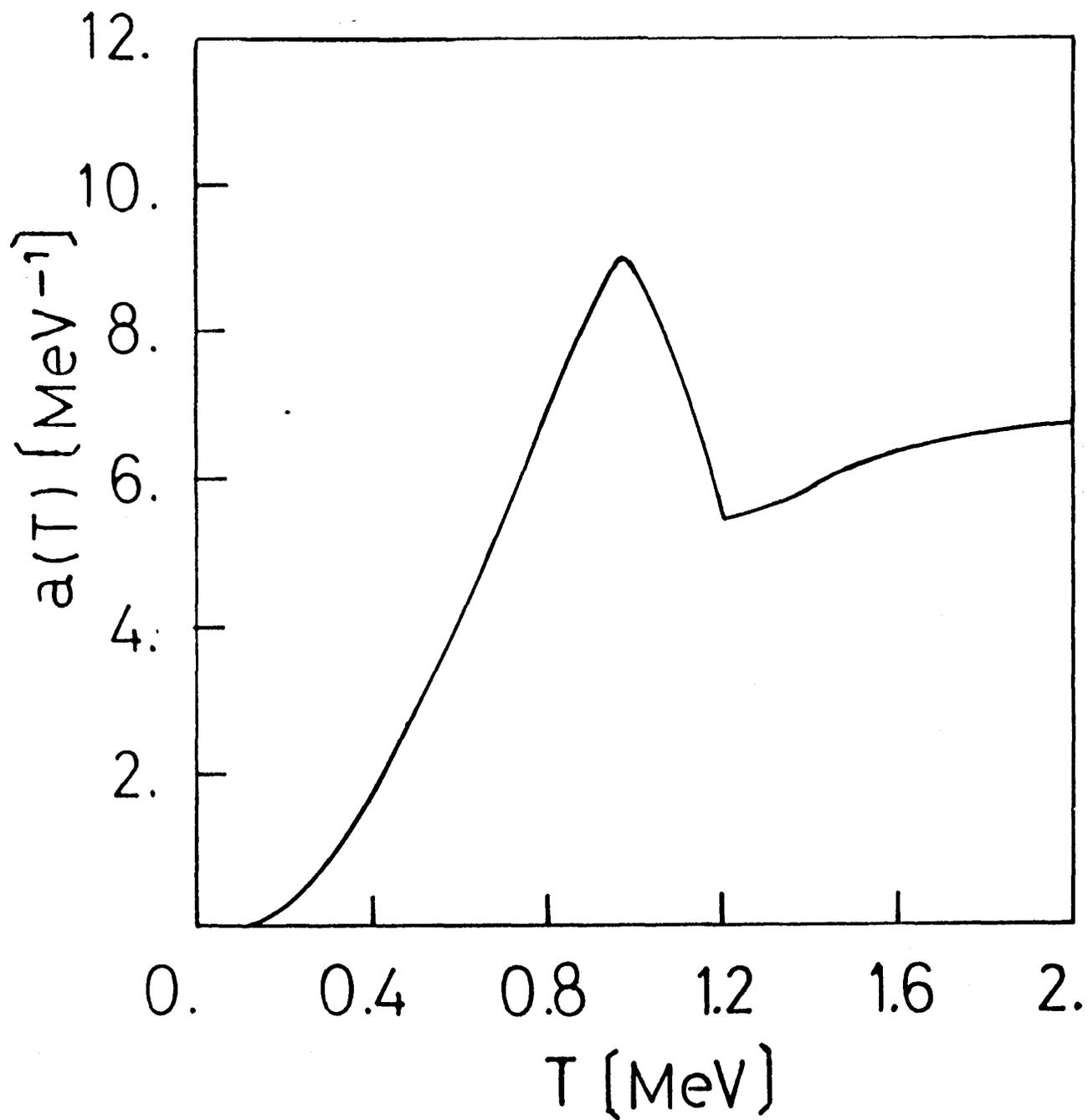


Figura 7.

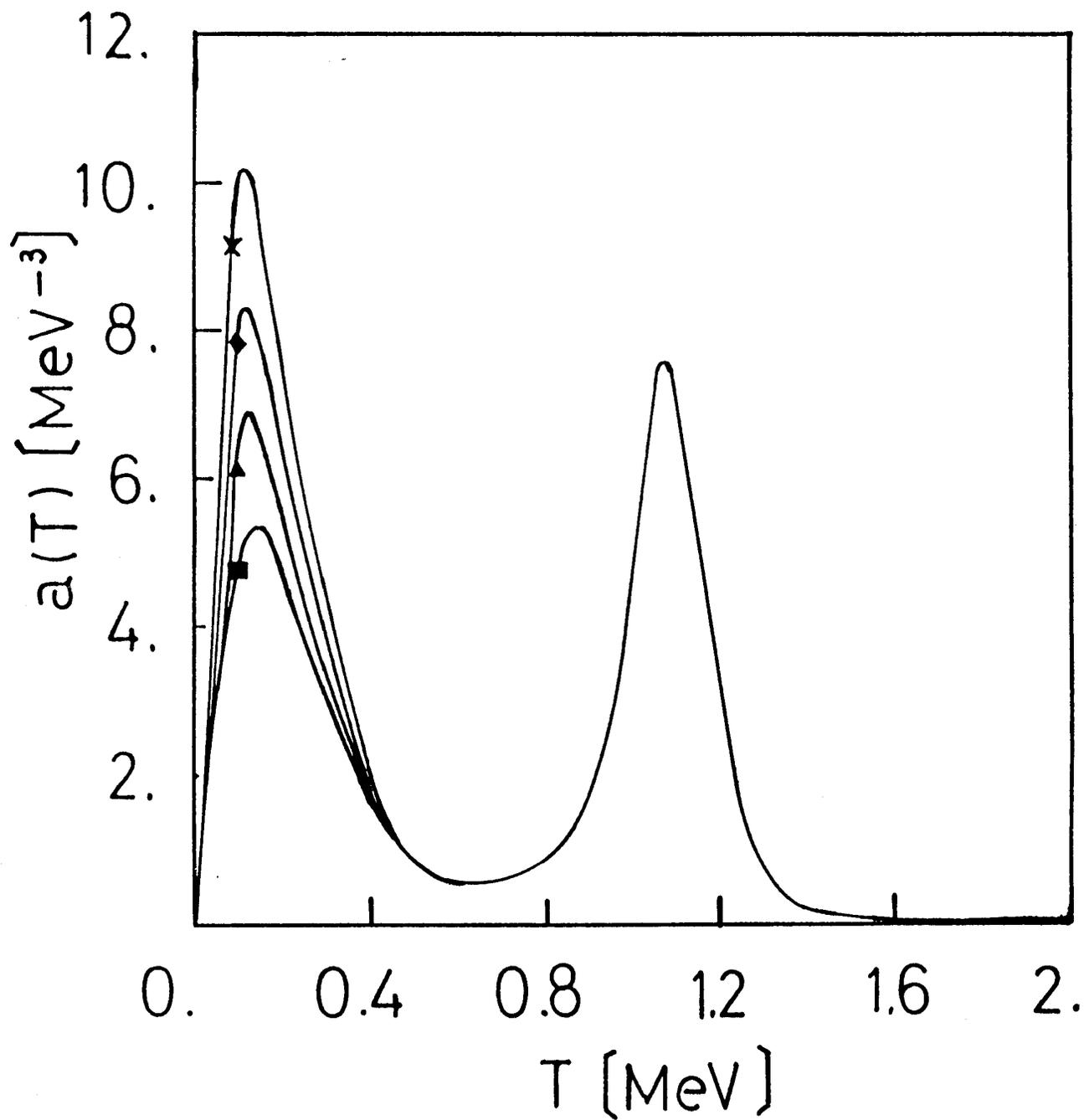


Figura 8-a.

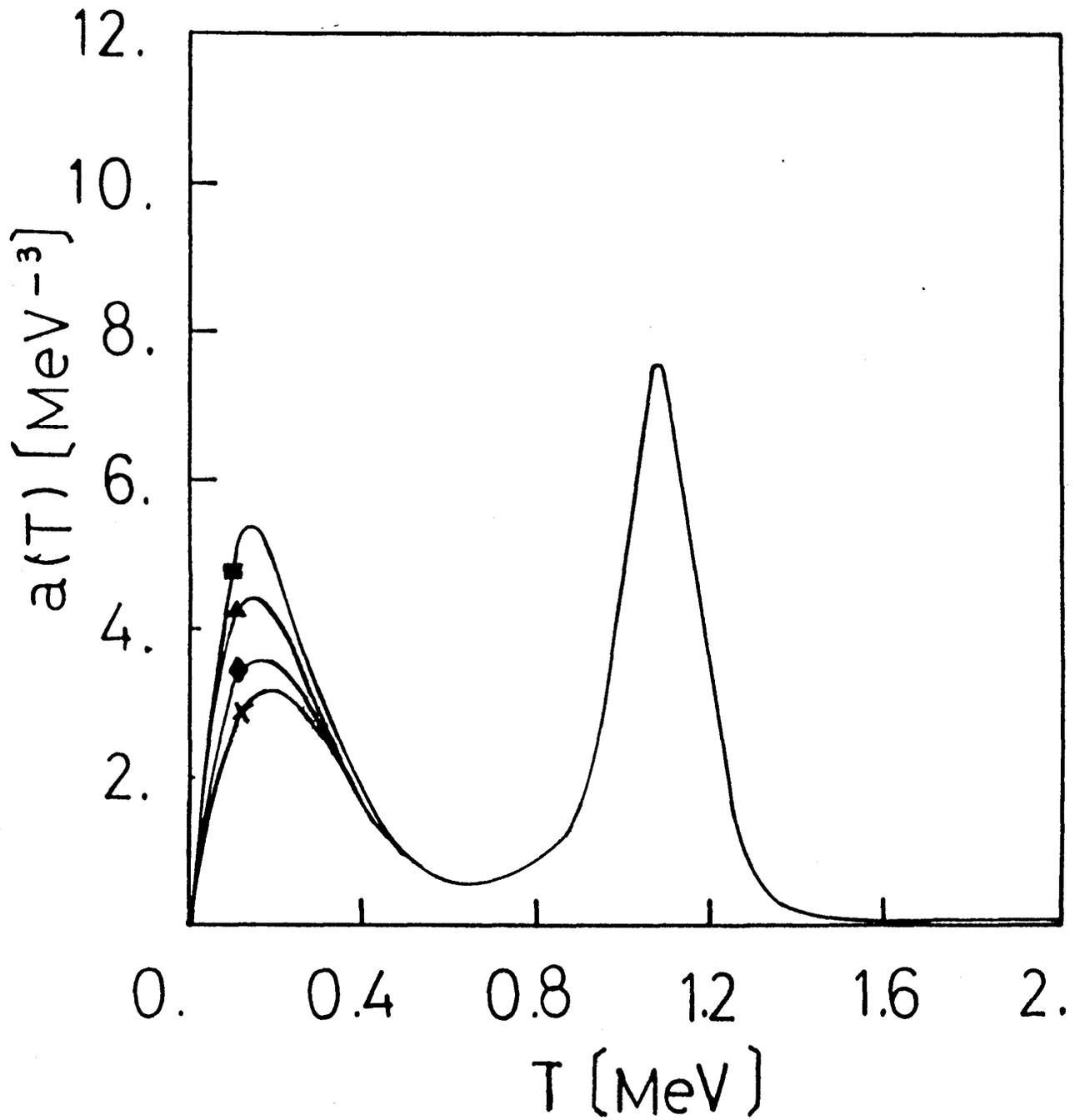


Figura 8-b

## Referencias

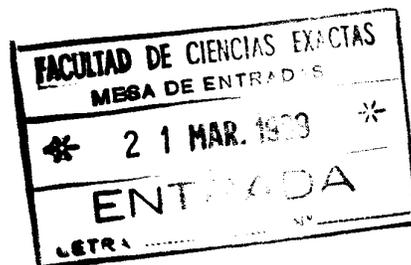
- 1) H.A. Bethe, Phys. Rev. **50**(1936)332; Rev. Mod. Phys. **9**(1937)69; Phys. Rev. **53**(1938)675.
- 2) J. R. Huizenga, L. G. Moretto, Ann. Rev. Nucl. Science **22**, (1972)427, y referencias allí citadas.
- 3) A. Bohr, B. Mottelson, *Nuclear Structure Vol. I*, (New York, Benjamin, 1969), p 156-181.
- 4) J. E. Draper et al., Phys. Rev. Lett. **49**(1982)434.  
G. Nebia et al., Phys. Lett. **B176**(1986)14.  
W. Hennerici et al., Nucl. Phys. **A396**(1983)329.  
C. A. Gossett et al., Phys. Rev. Lett. **54**(1985)1486.  
A. M. Sandorfi et al., Phys. Lett. **B130**(1983)19.
- 5) G. F. Bertsch, R. A. Broglia, Phys. Today **39**(1986)44.
- 6) L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Física Estadística*, (Reverte, España, 1978), Vol.5, pág. 1-36.
- 7) M. Lifshitz and L. P. Pitaevskii, *Statistical Physics. Part 2*, (Pergamon Press, 1980), pág. 178-179.
- 8) E. Davis, H. G. Muller, Phys. Lett. **B196**(1987)277.
- 9) J. Wambach, V. R. Mishra and C. H. Li, Nucl. Phys. **A380**(1982)285; y referencias allí citadas.
- 10) G. F. Bertsch, P. F. Bortignon and R. A. Broglia, Rev. Mod. Phys. **55**(1983)287.
- 11) P. Ring and P. Shuck, *The Nuclear Many-Body Problem*, (Springer-Verlag, New York, 1980), pág. 283-321.
- 12) J. O. Newton et al, Phys. Rev. Lett. **86**(1981)1383.

- 13) A. Goodman, Nucl. Phys. A352(1981)30..  
K. Tanabe, K. Sugawara Tanabe and H. J. Mang, Nucl. Phys. A357(1981)20..
- 14) O. Civitarese, R. A. Broglia and C. H. Dasso, Ann. Phys. (N.Y.) 156(1984)142.
- 15) O. Civitarese, A. L. De Paoli, Nucl. Phys. A440(1985)480.  
O. Civitarese, A. L. De Paoli, Z. Phys. A309(1982)177.  
O. Civitarese, A. L. De Paoli, Z. Phys. A311(1983)317.
- 16) A. Bohr, B. Mottelson, *Nuclear Structure*, (Benjamin, Reading, MA, 1975), Vol. 2, pág. 645-661.
- 17) F. Alasia, O. Civitarese and M. Reboiro, Phys. Rev. C36(1987)2555.
- 18) H. M. Sommermann, Ann. Phys. (N.Y.) 151(1983)163.
- 19) F. Alasia, O. Civitarese and M. Reboiro, aceptado para su publicación a Phys. Rev. C.
- 20) N. Vinh Mau, preprint, diciembre de 1987.
- 21) C. Racah, Phys. Rev. 62(1942)438.
- 22) A. Bohr, B. Mottelson, Pines, Phys. Rev. 110(1958)936.
- 23) B. Mottelson, *The Many Body Problem*, University of Grenoble, 1952 (Lectures at Les Houches Summer School. Dumond, Paris, 1959), pág. 259.
- 24) S. T. Belyaev, Mat. Fys. Medd 31(1959)11.
- 25) R. A. Broglia and A. Winther, Comm. Nucl. Part. Phys. 6 (1979)179, y referencias allí citadas.
- 26) M. Brack and P. Quentin, Nucl. Phys. A361(1981)35.
- 27) M. Brack and P. Quentin, Phys. Scripta A10(1974)163.
- 28) O. Civitarese, G.G. Dussel and R. P. J. Perazzo, Nucl. Phys. A404(1983)15.
- 29) R. E. Prange, Nucl. Phys. A28(1961)376.

- 30) M. Lifshitz and L. P. Pitaevskii, *Statistical Physics. Part 2*, (Pergamon Press, 1980), pág. 153-163.
- 31) F. Alasia, O. Civitarese and M. Reboiro, *Phys. Rev. C* 35(1987)812.
- 32) J. Bardeen, L. N. Cooper and J. R. Schrieffer, *Phys. Rev.* 106(1957)162.
- 33) N. N. Bogoliubov, *Nuovo Cimento* 7(1958)794.
- 34) J. G. Valatin, *Nuovo Cimento* . 7(1958)843.
- 35) D. J. Thouless, *The Quantum Statistical Mechanics of Many Body Systems*, (Prentice Hall, 1963), pág. 38-42.
- 36) M. Baranger, *Phys. Rev.* 120(1960)957.
- 37) D. R. Bes and R. A. Broglia, *Nucl. Phys.* 80(1966)289.
- 38) J. O. Newton, *Phys. Rev. Lett.* 46(1981)1383.
- 39) G. C. Baldwin and G. S. Klaiber, *Phys. Rev.* 71(1947)3.  
G. C. Baldwin and G. S. Klaiber, *Phys. Rev.* 73(1948)1156.
- 40) A. Pittman and Th. Walcher, *Phys. Lett.* B36(1971)563.  
S. Fukuda and Y. Torizuka, *Phys. Rev. Lett.* 29(1972)1109.  
M. B. Lewis and F. E. Bertrand, *Nucl. Phys.* A196(1972)337.
- 41) D. R. Bes , A. Broglia and B. Nilsson, *Phys. Rep.* C16 (1968)1.
- 42) D. J. Rowe, *Rev. Mod. Phys.* 40(1968)153.
- 43) A. Bohr, B. Mottelson, *Nuclear Structure Vol. I*, (New York, Benjamin, 1969), p 156-181.
- 44) S. G. Nilsson et al., *Nucl. Phys.* A131(1969)1.
- 45) R. Hasse and P. Shuck, *Phys. Lett.* B179(1986)313.  
P. F. Bortignon and C. H. Dasso, *Phys. Lett.* B189(1987)381.  
E. Surand and P. Shuck, *Phys. Lett.* B164(1986)212.
- 46) G. Nebbia et al., *Phys. Lett.* B176(1986)20.

- 47) A. Bohr, B. Mottelson, *Nuclear structure*, (Benjamin, New York, 1969), Vol. 1, pág. 156-181.
- 48) M. Maruyama, *Nucl. A131*, (1969)127.
- 49) A. V. Ignatyuk, V. S. Stavinskii, Yu. N. Shubin, *Sov. Nucl. Phys.* 11(1970)563.
- 50) D. W. Lang, K. J. Le Couteur, *Proc. Phys. Soc. London A67*, (1954)585.
- 51) I. Kaneström, *Nucl. Phys.* 83, (1966)380.
- 52) V. S. Ramamurthy, *Workshop on applied nuclear theory and nuclear model calculations for nuclear technology applications*. Trieste, Italia, 1988.
- 53) F. Alasia, O. Civitarese and M. Reboiro, en preparación.
- 54) M. Hermann and G. Reffo, *Workshop on applied nuclear theory and nuclear model calculations for nuclear technology applications*. Trieste, Italia, 1988.
- 55) F. Alasia, "*Tesis Doctoral*".
- 56) F. Alasia, O. Civitarese, A. Dumrauf and M. Reboiro, en preparación.

*Federico*



Agradezco al Prof. Dr. Osvaldo E. Civitarese por la confianza y la permanente colaboración brindada durante la realización de este trabajo de tesis, y a mis compañeros de trabajo por el sincero apoyo recibido a lo largo de estos años.