

## CAPITULO III

MODELOS CUASI-GEOMETRICOS PARA EL ESTUDIO  
DE LA DIFRACCION POR OBJETOS 3-D

### III-1 INTRODUCCION:

Las soluciones de la ecuación de onda escalar, con condiciones de contorno conocidas en un plano, se obtienen a partir de la teoría de Fresnel-Kirchoff/1/. Sin embargo, en muchos casos prácticos, las condiciones de contorno están dadas sobre la superficie de un objeto tridimensional (3-D). Para estos casos, no existe una teoría de difracción que permita resolver la ecuación de onda de Helmholtz. Se han obtenido soluciones exactas sólo para la difracción por algunos objetos 3-D ideales, como una esfera conductora y un cilindro infinito/1/. Pero aún en estos casos las soluciones se presentan como series infinitas de funciones especiales. Esto prácticamente excluye la posibilidad de una interpretación física y visual de los efectos de difracción. Por esta razón se han desarrollado métodos aproximados para el tratamiento de la difracción por cuerpos volumétricos, que combinan el modelo conocido para la difracción bidimensional con consideraciones geométricas.

La teoría geométrica de la difracción propuesta por Keller es particularmente interesante/2/. Puede ser considerada como una extensión de la óptica geométrica, que tiene en cuenta los efectos de difracción. En ella se introduce el concepto de campo de rayo difractado, como complemento de los rayos usuales de la óptica geométrica. Estos rayos se generan por los rayos incidentes que rozan bordes o vértices de la superficie de los

objetos. En la teoría se enuncian leyes de difracción para los rayos difractados que son análogas a las leyes de reflexión y refracción. Además un campo es asociado a cada rayo y el campo total en un punto dado del espacio es la suma de los campos de todos los rayos que pasan por de ese punto. La fase del campo en un rayo es proporcional al camino óptico del rayo desde algún punto de referencia. La amplitud varía de acuerdo con el principio de conservación de la energía en un haz de rayos. El valor inicial del campo en un rayo difractado está determinado por el campo asociado al rayo incidente con el auxilio de un coeficiente de difracción apropiado. Estos coeficientes se determinan a partir de las soluciones de ciertos problemas canónicos, y además, se anulan cuando la longitud de onda tiende a cero. La justificación matemática del modelo de Keller se describe en el marco de la teoría electromagnética. Por presentar a la onda difractada en forma analítica, la teoría resulta ser particularmente conveniente para cálculos numéricos. Sin embargo, las expresiones así obtenidas son engorrosas y este hecho dificulta una interpretación simple de las mismas.

Chugui et al./3/ propusieron un método para calcular la difracción por objetos 3-D que combina ideas de la óptica geométrica y de la óptica ondulatoria. Este método permite una estimación simple de la influencia de la tridimensionalidad del objeto en su figura de difracción de campo lejano. Consiste básicamente en considerar al objeto 3-D como una caja negra,

caracterizada por sus pupilas de entrada y salida. La propagación de la luz entre las pupilas es tratada, o bien en términos de la óptica geométrica, o en los de la difracción de Fresnel, originándose en cada caso métodos aproximados diferentes, a saber: método cuasi-geométrico (QG) y método cuasi-geométrico modificado (QGM). En el trabajo se muestra que el método QGM da lugar a una mejor aproximación a la solución del problema.

Como se discutió en el capítulo I, las representaciones espacio fase, como la WDF, proveen una conexión entre la óptica geométrica y la óptica ondulatoria. Por esta razón, es de esperar que sean también adecuadas para el tratamiento del problema de la difracción de Fraunhofer por objetos 3-D, en el marco de los modelos cuasi-geométricos.

En este capítulo se hace una descripción de los métodos cuasi-geométricos y se establece una relación entre la amplitud difractada por objetos 3-D, y las distintas representaciones E-F, de modo que las propiedades de dichas representaciones puedan ser aplicadas al estudio del comportamiento del campo difractado por estos objetos.

### III-2 DIFRACCION DE FRAUNHOFER POR OBJETOS 3-D: APROXIMACION CUASI-GEOMETRICA

Considérese un objeto de espesor  $Z_0$  iluminado por una

onda plana monocromática de longitud de onda  $\lambda$  (Fig. III-1). Por simplicidad, se hará el análisis para objetos cuya transmitancia en amplitud en el plano  $(\xi, \eta)$  varíe solamente en la dirección  $\xi$ . Las caras anterior y posterior del objeto están ubicadas en los planos  $Z=0$  y  $Z=Z_0$  respectivamente, y sus transmitancias están descritas por las funciones  $f(\xi)$  y  $g(\xi')$ .

El problema consiste en encontrar la distribución de amplitud de luz en cualquier punto del plano de Fraunhofer, es decir en el plano focal de la lente L.

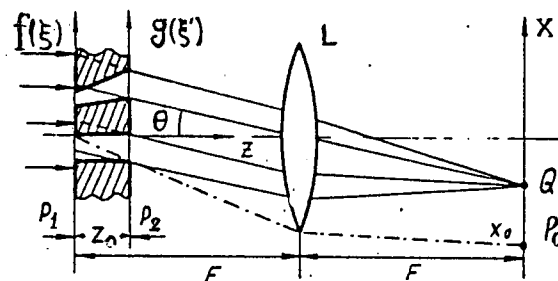


Figura III-1

Para determinar la amplitud de campo en un punto particular Q del plano focal, se examina la traza inversa de los rayos desde el plano focal hacia el plano de entrada. Para ello, se reemplaza la onda que converge hacia ese punto por una onda divergente propagándose de derecha a izquierda. Esta onda es transformada por el objetivo L en una onda plana con un ángulo de incidencia  $\theta = \xi/f$  y luego es modulada por la cara posterior  $g(\xi')$  en el plano  $P_2$ . En la propagación hacia el plano  $P_1$  la onda interactúa con las caras laterales del objeto. Para un objeto

absorbente con caras laterales planas; esta interacción, en una aproximación geométrica, es equivalente a la modulación de la distribución de entrada  $f(\xi)$  por la distribución  $g(\xi+\theta Z_0)$ . Obviamente, esta aproximación cuasi-geométrica será correcta cuando una imagen verdadera de la cara posterior, producida en el plano de entrada, difiera levemente de  $g(\xi')$ . Para esto es necesario que el tamaño de la zona de Fresnel  $\xi = \sqrt{\lambda Z_0}$ , sea mucho menor que el tamaño característico ( $D$ ) de la función binaria  $g(\xi')$  ( $D$  representa al menor intervalo donde la función  $g(\xi')$  no se anula), es decir  $D \gg \xi = \sqrt{\lambda Z_0}$ .

Por lo tanto, la amplitud de campo  $U_{QG}(x)$  en el punto  $Q$  está definida por la función producto  $f(\xi).g(\xi+\theta Z_0)$ . Considerando al objeto iluminado por una onda plana, la amplitud del campo en el plano de Fraunhofer es:

$$U_{QG}(x) = \int f(\xi) g(\xi+Z_0x/F) \exp(-2\pi i x \xi / \lambda F) d\xi. \quad (\text{III-1})$$

Tal como se establece en la referencia /3/, la aproximación QG (ec. (III-1)) describe la difracción de Fraunhofer para un cuerpo volumétrico de espesor  $Z_0$ , sólo cualitativamente. La principal desventaja del método QG reside en que existe una discrepancia entre los resultados que se obtienen a partir de éste, y los que predice la óptica geométrica.

De acuerdo a las leyes de la óptica geométrica, las imágenes de las caras anterior y posterior del objeto son

producidas respectivamente en los planos  $P_1'$  y  $P_2'$  de la Figura III-2. Sin embargo como se desprende del análisis que sigue dichas imágenes no se corresponden con las que se obtienen a partir de la ecuación (III-1).

Suponiendo  $g(\xi') = \text{cte}$ , de la ecuación (III-1) se sigue que:

$$U_{06}(x) = K \int f(\xi) \exp(-2\pi i x \xi / \lambda F) d\xi \equiv \mathcal{F}\{f(\xi)\} \quad (\text{III-2})$$

Esto concuerda con el hecho de que las distribuciones de amplitud en los planos  $P_1$  y  $P_0$  (Fig. III-1) están conectadas por una transformada de Fourier.

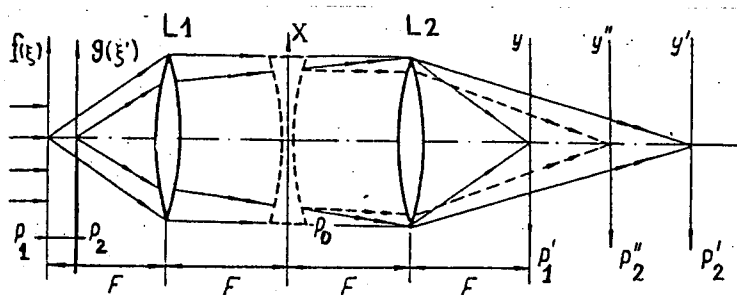


Figura III-2

Haciendo la transformada de Fourier inversa con la lente L2, en el plano  $P_1'$  se obtiene, como es de esperar, la imagen de la cara anterior. Ahora si  $f(\xi) = \text{cte}$ , de la ecuación (III-1) se obtiene:

$$U_{06}(x) = \int g(\xi + Z_0 x / F) \exp(-2\pi i x \xi / \lambda F) d\xi \quad (\text{III-3-a})$$

$$= \exp(2\pi i x^2 Z_0 / \lambda F^2) \mathcal{F}\{g(x)\} \quad (\text{III-3-b})$$

El factor de fase en la ecuación (III-3) es equivalente a la acción de una lente cilíndrica de distancia focal  $F' = -F^2/2Z_0$  (mostrada en la Fig. III-2 con línea de puntos en el plano  $P_0$ ). Si dicha lente es ubicada en el sistema, la imagen de la cara posterior se ubicará, luego de una transformada de Fourier inversa, en el plano  $P_2''$ . Esto contradice las ideas de la óptica geométrica de acuerdo a las cuales la cara posterior debería tener su imagen en el plano  $P_2'$ . En cambio si el factor de fase en la ecuación (III-3) fuese tal, que la distancia focal efectiva fuese el doble, o sea  $F' = -F^2/Z_0$ , los planos  $P_2'$  y  $P_2''$  coincidirían.

Este análisis, muestra que una aplicación directa de la aproximación QG (ec. (III-1)) para el análisis espectral 3-D puede dar resultados que no concuerden con los conceptos de la óptica geométrica. Sin embargo esta discrepancia es solo cuantitativa. En el siguiente punto se analizan las razones para la misma y se propone un método alternativo.

### III-3 METODO CUASI-GEOMETRICO MODIFICADO (QGM)

Al desarrollar la ecuación (III-1) se examinó el trazado de rayos en la Figura III-1 y se estableció que la onda con incidencia  $\theta = \xi/f$  era modulada por la cara posterior del objeto en el plano  $P_2$  y luego era proyectada con un desplazamiento  $\Delta = \theta Z_0$  en el plano  $P_1$ . Una vez multiplicadas las correspondientes



transmitancias, se calculaba la transformada de Fourier del producto  $f(\xi).g(\xi + \theta Z_0)$ .

En realidad, cuando la luz se propaga de  $P_2$  a  $P_1$  ocurre una convolución de la distribución inicial de luz con la respuesta impulso del espacio libre; en consecuencia,  $f(\xi)$  es multiplicada no por  $g(\xi + \theta Z_0)$  sino por su figura de difracción de Fresnel  $\tilde{g}(\xi + \theta Z_0)$ . La inclusión de la difracción de Fresnel conduce a reemplazar el parámetro  $Z_0$  en la ecuación (III-1) por  $Z_0/2$ , dejando la frecuencia límite ( $x_0$  en la Fig. III-1) igual que en el caso QG. Esta conclusión se deriva del siguiente análisis, donde se calcula el espectro 3-D en la aproximación de Fresnel.

Considerando las relaciones entre las distribuciones de amplitud para varios planos del sistema óptico/4/, puede determinarse fácilmente que el espectro en el modelo considerado es igual a:

$$F_{FR}(x) = \exp(2\pi i x^2 Z_0 / 2F^2) \mathcal{F} \left\{ \left[ f(\xi') * \exp(2\pi i \xi'^2 / 2\lambda Z_0) \right] g(\xi') \right\} \quad (III-4)$$

donde  $\exp(ik\xi'^2/2Z_0)$  es la respuesta impulso del espacio libre y \* indica la operación de convolución. Haciendo algunas transformaciones la ecuación (III-4) puede escribirse como:

$$F_{FR}(x) = \int f(\xi) \tilde{g}(\xi + Z_0 x / F) \exp(-2\pi i x \xi / \lambda F) d\xi. \quad (III-5)$$

donde

$$\tilde{g}(\xi) = \int g(\xi') \exp \left\{ (2\pi i/\lambda)(\xi - \xi')^2/2Z_0 \right\} d\xi' , \quad (\text{III-6})$$

es la figura de difracción de Fresnel de la función  $g(\xi')$ .

En lo que sigue, se usará el hecho de que cualquier función binaria  $f(\xi)$  puede representarse como suma de funciones escalón  $H(\xi)$ . Para evitar cálculos complejos, y sin perder generalidad, se supondrá que las funciones  $f(\xi)$  y  $g(\xi')$  son de la forma:

$$f(\xi) = H(\xi) \quad \text{y} \quad g(\xi) = H(\xi' - A). \quad (\text{III-7})$$

Reemplazando (III-7) en (III-6) se obtiene:

$$F_{FR}(x) = \int H(\xi) \tilde{H}(\xi - A + Z_0 x/F) \exp(-2\pi i x \xi/\lambda F) d\xi. \quad (\text{III-8})$$

donde

$$\tilde{H}(\xi) = \int H(\xi') \exp \left\{ (2\pi i/\lambda)(\xi - \xi')^2/2Z_0 \right\} d\xi' , \quad (\text{III-9})$$

es la figura de difracción de  $H(\xi')$ , y está relacionada con la función de Fresnel:

$$Y(x) = \int_0^x \exp(i\pi t^2) dt, \quad (\text{III-10})$$

mediante la siguiente ecuación:

$$\tilde{H}(\xi) = \sqrt{\lambda Z_0} \{ Y(\infty) + Y(\xi/\sqrt{\lambda Z_0}) \} . \quad (\text{III-11})$$

Para  $\xi > 0$ , tanto el módulo como la fase de  $\tilde{H}(\xi)$  tienen oscilaciones amortiguadas (ver Figura III-3). Para  $\xi < 0$  el módulo de  $\tilde{H}(\xi)$  cae rápidamente (línea llena), mientras que la fase crece (línea de puntos).

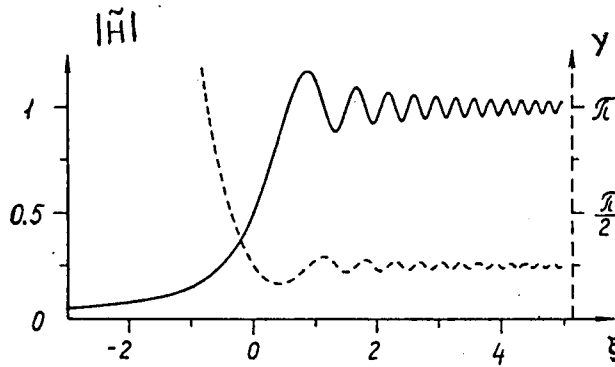


Figura III-3

Considérese al producto  $H(\xi) \cdot \tilde{H}(\xi+a)$  de la ecuación (III-8), donde  $a = (xZ_0/F) - A$ . En la Figura III-4 se representa este producto para los posibles casos  $a > 0$  y  $a < 0$ . De esta figura puede verse que

$$H(\xi) \tilde{H}(\xi+a) = \begin{cases} H(\xi) & \text{si } a > \xi, \\ H(\xi+a) & \text{si } a < -\xi. \end{cases} \quad (\text{III-12})$$

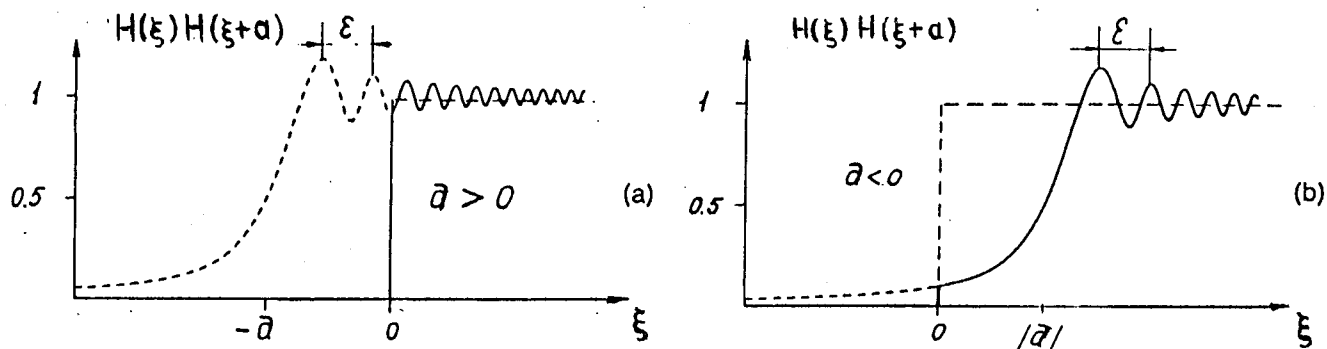


Figura III-4.

y el espectro, usando la aproximación de Fresnel es:

$$F_{rn}(x) = \begin{cases} \mathcal{F}\{H(\xi)\} & x > x_0 \\ \exp(-2\pi i x \xi / \lambda F) \exp(2\pi i x^2 Z_0 / 2\lambda F^2) \mathcal{F}\{H(\xi)\} & x < x_0 \end{cases} \quad \text{(III-13)}$$

donde  $x_0 = AF/Z_0$ .

Mientras que el espectro del objeto calculado por la expresión (III-1) usando la aproximación QG resulta:

$$U_{QG}(x) = \begin{cases} \mathcal{F}\{H(\xi)\} & x > x_0 \\ \exp(-2\pi i x \xi / \lambda F) \exp(2\pi i x^2 Z_0 / \lambda F^2) \mathcal{F}\{H(\xi)\} & x < x_0 \end{cases} \quad \text{(III-14)}$$

Las ecuaciones (III-13) y (III-14) difieren sólo en los factores de fase cuadráticos, que reflejan la influencia del volumen del objeto.  $U_{QG}(x)$  puede transformarse en  $F_{rn}(x)$  simplemente sustituyendo  $Z_0/2$  por  $Z_0$  en la ecuación (III-14); la frecuencia

límite  $x_0 = AF/Z_0$  permanece igual.

Puede demostrarse que el resultado obtenido de este análisis es válido para objetos más complejos que el estudiado. En síntesis el principal resultado derivado de este método consiste en substituir  $Z_0/2$  por  $Z_0$  en la ecuación (III-1), es decir:

$$U_{QGM}(x) = \int f(\xi) g(\xi + Z_0 x / 2F) \exp(-2\pi i x \xi / \lambda F) d\xi. \quad (III-15)$$

La expresión (III-15), da una mejor aproximación cuantitativa al espectro de difracción de Fraunhofer producido por objetos 3-D, como lo muestran los ejemplos calculados en la referencia/3/.

#### III-4 RELACION ENTRE LAS REPRESENTACIONES E-F Y EL METODO QGM:

Considérense nuevamente a las dos funciones binarias  $f(\xi)$  y  $g(\xi')$  que representen, respectivamente, las transmitancias en amplitud, de las caras anterior y posterior del objeto 3-D de la Figura III-1. De acuerdo con la definición del LS (ec. (I-66)), la ecuación (III-15) puede reescribirse de las siguientes dos formas alternativas:

$$U(x) = \begin{cases} Cfg(-Z_0x/2F, x/\lambda F) \\ \exp(i\pi Z_0x^2/\lambda F^2) Cgf(Z_0x/2F, x/\lambda F) \end{cases} \quad (\text{III-16})$$

Como se deduce de (III-16), la distribución de intensidad en el plano de Fourier puede considerarse como el espectro local de  $f(\xi)$  con  $g(\xi')$  como función ventana, o bien como el espectro local de  $g(\xi')$  con  $f(\xi)$  como función ventana. Sin embargo, considerando las restricciones asociadas normalmente a la función ventana (por ejemplo su ancho debe ser menor que el de la función señal) sólo una de las ecuaciones anteriores interpreta verdaderamente el fenómeno físico como espectrograma local, dependiendo esto de cada caso particular.

Suponiendo, por ejemplo, a  $f(\xi)$  como función ventana, la intensidad en el plano de Fourier puede escribirse:

$$I(x) = \begin{cases} |Cfg(Z_0x/2F, x/\lambda F)|^2, \\ Lg(Z_0x/2F, x/\lambda F) \end{cases} \quad (\text{II-17})$$

De la ecuación (III-17), surge la siguiente interpretación: las variaciones de intensidad a lo largo de la coordenada  $x$  corresponden a las mismas variaciones del espectro local 2-D de la función pupila de salida  $g(\xi')$ , a lo largo de la línea  $x=(\lambda Z_0/2)u$ , en el espacio fase  $(x,u)$ .

Si se considera un objeto binario unidimensional de espesor  $Z_0$ , con aperturas de entrada y salida idénticas, es decir  $f(\xi)=g(\xi')$ , el campo resultante es:

$$U(x) = \exp(i\pi Z_0 x^2 / 2\lambda F^2) A(x/\lambda F, Z_0 x/2F). \quad (\text{III-18})$$

Esto es, la intensidad del campo difractado en la aproximación de Fraunhofer puede ser expresado en función del módulo al cuadrado de la AF asociada a la apertura del objeto (A).

Si además la función apertura es simétrica (por ejemplo una doble rendija de ancho  $Z_0$ ) el campo resultante es:

$$U(x) = \exp(i\pi Z_0 x^2 / 2\lambda F^2) W(Z_0 x/4F, x/2\lambda F). \quad (\text{III-19})$$

En este caso la amplitud difractada es proporcional a la WDF de la apertura del objeto 3-D (W).

Por lo tanto las ecuaciones (III-17), (III-18) y (III-19) relacionan en forma compacta la expresión del campo difractado por el objeto 3-D con sus parámetros geométricos; esto es las funciones apertura  $f(\xi)$  y  $g(\xi')$ , y el espesor  $Z_0$ . A partir de estas relaciones, el análisis de los procesos de difracción puede hacerse fácilmente por medio de las funciones E-F.

Para el caso  $f(\xi) \neq g(\xi')$  la intensidad del campo difractado puede encontrarse, por ejemplo, de las variaciones de amplitud del LS asociado con  $g(\xi')$ , usando  $f(\xi)$  como función

ventana, a lo largo de la línea (en el espacio-fase) definida por  $\text{tg } \phi = x/u = \lambda Z_0/2$ . Si el espesor del objeto cambia, la nueva distribución de intensidad difractada se encuentra a través de los valores del mismo LS pero a lo largo de una línea que forme un ángulo  $\phi$  diferente en el espacio  $(x,u)$ . Por otra parte, si la apertura de entrada se altera, la intensidad resultante, será el LS de la función  $g(\xi')$  con una función ventana diferente.

Si se considera el caso  $f(\xi) = g(\xi')$ , las distribuciones de intensidad difractada, para los distintos posibles valores de  $Z_0$ , están contenidas en la representación de la AF de la función  $f(\xi)$ . Para objetos que cumplan esta condición, y además sean simétricos las correspondientes distribuciones de intensidad pueden obtenerse también de la representación de la WDF de la función pupila ó apertura.

### III-5 VISUALIZACION DE LA FIGURA DE DIFRACCION DE OBJETOS 3-D: EJEMPLOS

Para ilustrar como una representación apropiada de los formalismos E-F puede aplicarse al estudio de la figura de difracción de objetos 3-D, se considerarán dos casos: la difracción producida por una rendija volumétrica, y por una doble rendija volumétrica.

Para el primer caso,  $f(\xi) = g(\xi') = \text{rect}(\xi)$ , y por lo tanto



la distribución de amplitud de campo está dada por (III-18), resultando:

$$U_F(x) = \begin{cases} \exp\{i\pi z_0 x^2 / 2\lambda f^2\} [1 - |y|/a] \text{sinc} [(\pi a x / \lambda f) (1 - |y|/a)] ; & |y| \leq a \\ 0 & ; |y| > a \end{cases} \quad (\text{III-20})$$

donde  $a$  es el ancho de la rendija, y la variable espacial  $y$ , está relacionada con el espesor  $Z_0$  por  $y = Z_0 x / 2F$ . Por lo tanto, si se considera la expresión dada por (III-20) como una función  $A(x, y)$  de variables: frecuencia espacial  $u = x / \lambda F$ , y coordenada espacial  $y$ ; la distribución de intensidad en el plano de Fourier puede hallarse a partir de  $|A(u, y)|^2$  (representada en la Figura III-5) a lo largo de las líneas definidas por  $\text{tg } \phi = \lambda Z_0 / 2$ .

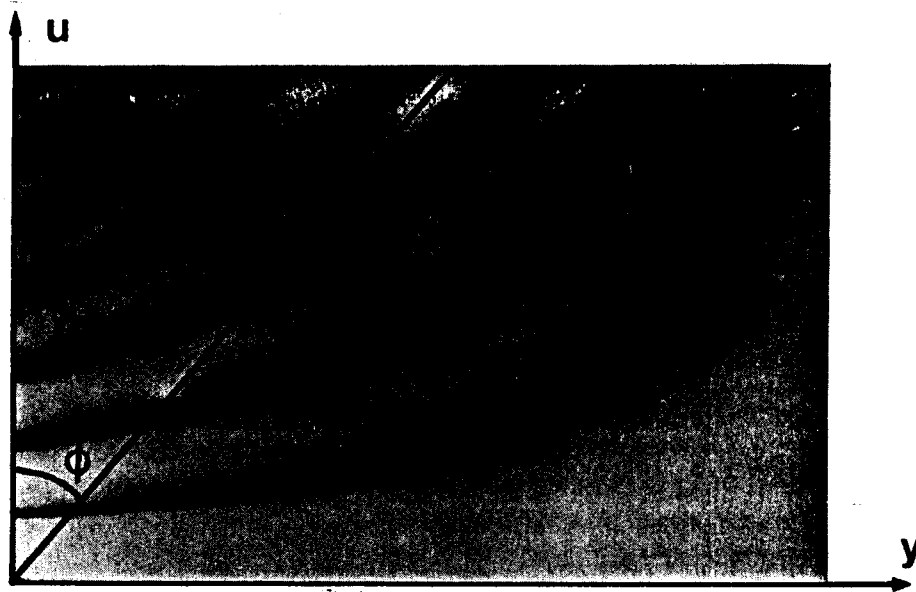


Figura III-5

Si  $Z_0=0$  entonces resulta  $y=0$ , y el corte de la AF a lo largo del eje  $u$ , se reduce a una función seno cardinal, que, como es sabido representa la difracción de Fraunhofer de una rendija plana.

Como segundo ejemplo, considerense dos rendijas volumétricas idénticas de ancho  $a$ , espesor  $Z_0$  y separación  $d$ . En este caso  $f(\xi)=g(\xi')=\text{rect}[(\xi -d/2)/a] + \text{rect}[(\xi +d/2)/a]$  y la distribución de amplitud de campo en el plano de Fourier es:

$$U_F(x) = \begin{cases} \left[ 1 - \frac{(a+d)|y|}{a^2} \right] \cos \frac{\pi a d x}{\lambda f(a+d)} \text{sinc} \left[ \frac{\pi a^2 x}{\lambda f(a+d)} \left( 1 - \frac{(a+d)|y|}{a^2} \right) \right]; & |y| \leq a^2/(a+d). \\ \left[ \left| |y| - \frac{a(d-a)}{(d+a)} \right| \right] / \left[ \frac{2a^2}{(a+d)} \right] \text{sinc} \left[ \frac{\pi x}{\lambda f} \left( |y| - \frac{a(d-a)}{(d+a)} \right) \right]; & a(d-a)/(a+d) \leq |y| \leq ad/(a+d). \\ \left[ \frac{a-|y|}{2a^2/(a+d)} \right] \text{sinc} \left[ \left( \frac{\pi x}{\lambda f} \right) (a-|y|) \right]; & ad/(a+d) \leq |y| \leq a. \\ 0 & \text{en otro lugar} \end{cases} \quad (\text{III-21})$$

De igual modo que en el caso de una única rendija, se considera a la expresión dada por (III-21) como un corte del módulo de la AF:  $|A(u,y)|^2$  a lo largo de una línea en el E-F definida por

$y=(\lambda Z_0/2)u$ . La AF correspondiente a dos rendijas se muestra en la Figura III-6. Nuevamente si  $Z_0=0$ , el corte de la AF coincide con el eje  $u$ , y se obtiene un conjunto de franjas de Young, modulando a una función seno cardinal, igual que en el caso de una doble rendija plana.

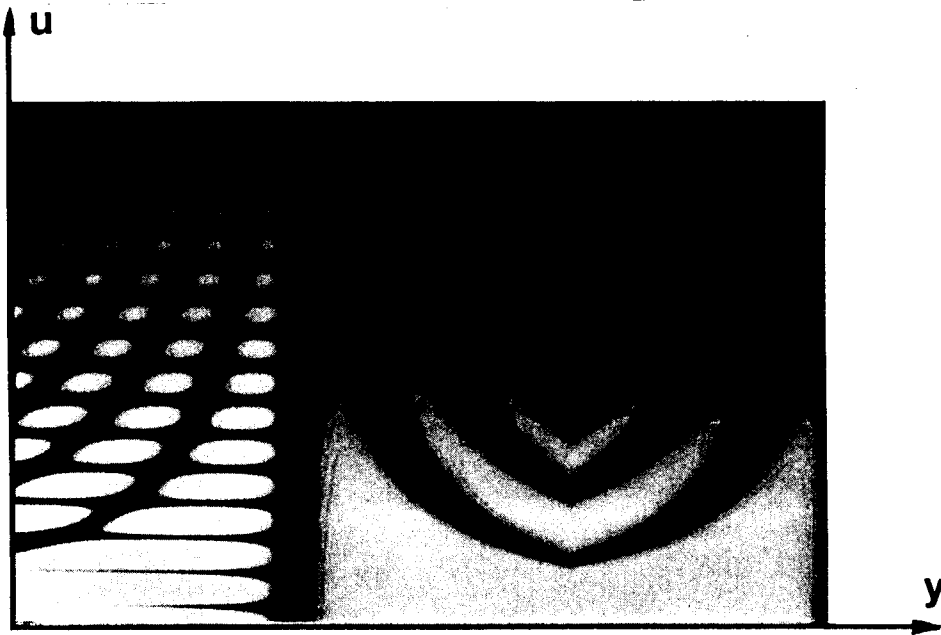


Figura III-6

## REFERENCIAS:

- /III-1/ Born & Wolf, "Principles of Optics", N.Y. Pergamon, 1978.
- /III-2/ J.B.Keller, "Geometrical theory of diffraction", J. Opt. Soc. Am. , 52, (1961), 116.
- /III-3/ Y. Chughi, V.P. Koronkevitch, B.E. Krivenkov and S. Mikhlyaev, "Quasi geometrical method for Fraunhofer diffraction calculations for three-dimensional bodies", J. Opt. Soc. Am., 71, (1981), 483.
- /III-4/ A. Vander Lugt, "Operational notation for the analysis and synthesis of optical data processing systems", Proc. IEEE 54, (1966), 1055.
- /III-5/ W.D. Furlan, E.E. Sicre and M. Garavaglia, "Quasi-Geometrical paraxial approach to Fraunhofer diffraction by thick planar objects using phase-space signal representations", J. Modern Optics, 35, (1988), 735.