

## CAPITULO IV

APLICACION DE LOS FORMALISMOS E-F AL PROCESAMIENTO  
OPTICO DE IMAGENES.

#### IV-1 INTRODUCCION

Las aberraciones constituyen un problema inherente a los sistemas ópticos formadores de imágenes. En el marco de la teoría de Huygens-Fresnel, estas se describen matemáticamente por medio de la función aberración  $\Omega(x,y)$  que representa la desviación del frente de onda respecto de una esfera perfecta (diferencia de camino óptico), donde  $(x,y)$  son las coordenadas adimensionales en el plano de la pupila de salida.

De acuerdo al tipo de tratamiento, la función aberración se expande generalmente en series de potencia (tratamiento óptico geométrico), o bien en términos de polinomios que formen un conjunto completo en el interior de un círculo unidad (tratamiento según la teoría de difracción)/1/.

Existen varios criterios para especificar la tolerancia de un sistema óptico a las aberraciones y/o a errores de enfoque. Históricamente, el primer criterio fue enunciado por Lord Rayleigh/2/. Según el mismo para que la calidad de una imagen sea aceptable, el máximo apartamiento del frente de onda respecto de un frente de onda esférico debe ser menor que un cuarto de la longitud de onda de la luz incidente. Es decir:

$$\max |\Omega(x,y)| \leq \lambda/4. \quad (\text{IV-1})$$

Nótese que esta condición no impone ninguna restricción individual sobre los coeficientes de aberración en los cuales se expande al frente de onda.

En base al criterio del cuarto de onda, Rayleigh estableció que, para que la calidad de la imagen no sufra un deterioro apreciable, la máxima iluminancia en la imagen dada por un sistema óptico con aberración esférica debe ser por lo menos el 80% de la iluminancia de un objetivo libre de aberraciones. Esta condición sobre las intensidades puede asociarse a la razón de Strehl/1/, que se define comunmente como el cociente entre las intensidades en el foco de la imagen aberrada ( $I_r$ ) y de la imagen libre de aberraciones  $I$ , de la siguiente manera:

$$S = I_r/I \geq 0.8 \quad (IV-2)$$

Trabajos de Barakat/3/ y Mahajan/4/ mostraron que el criterio del cuarto de onda no conduce necesariamente a una razón de Strehl de 0.8. Este criterio es sólo una primera aproximación al estado ideal de un sistema óptico, ya que la distribución de luz en una imagen depende no sólo de la máxima deformación del frente de onda, sino también de la forma del mismo (tipo de aberración).

Cuando la condición (IV-1) se aplica a aberraciones de diferente tipo se obtienen distintos valores para la intensidad en el foco de difracción. Resulta más apropiado entonces, formular un criterio de tolerancia que tenga en cuenta, en cada punto, al

apartamiento respecto del frente de onda ideal. Un criterio de este tipo fue formulado por Marechal/5/, quien usó la relación que existe entre la intensidad en el centro de la esfera de referencia y la varianza del frente de onda respecto de la misma ( $\sigma^2$ ). Para aberraciones pequeñas puede expresarse como:

$$S = (1 - 1/2 \sigma^2). \quad (IV-3)$$

De acuerdo con Marechal puede decirse que un sistema óptico está corregido cuando el valor de la razón de Strehl es mayor o igual que 0.8. Según los cálculos realizados por Mahajan/4/ la ecuación (IV-3) proporciona resultados con un error menor que un 10% si la razón de Strehl es mayor que 0.6. La fórmula de Marechal muestra que la razón de Strehl es máxima cuando la varianza de la aberración es mínima.

Otro de los criterios de calidad de un sistema formador de imágenes puede obtenerse a partir de la teoría de la Función de Transferencia Óptica (OTF). En virtud de que, las propiedades de formación de imágenes de un sistema óptico pueden ser evaluadas por medio de la OTF, esta resulta útil para clarificar resultados que serían difíciles de juzgar a partir de distribuciones de intensidad. Este criterio fue usado por Hopkins/6/ para evaluar el grado de desenfoque de pupilas binarias, y por Mino y Okano/7/ para pupilas sombreadas ("shaded apertures").

Mino y Okano destacan dos condiciones que debe cumplir la OTF de un sistema desenfocado para que la imagen sea confiable: 1) Que la OTF no sea negativa (lo cual conduciría a una inversión de contraste), y 2) Que la OTF sea una función monótona decreciente. Concluyen además, que para aberraciones pequeñas, las pupilas sombreadas, son menos sensibles que las binarias, a la aberración esférica y al desenfoco.

En los formalismos E-F, la función Ambigüedad ha sido usada para el tratamiento de sistemas ópticos con errores de enfoque. Como se vió en la sección (I-3.d), la AF puede usarse para la visualización de la "performance" de un sistema óptico desenfocado. H. Bartelt et al./8/ utilizaron esta propiedad como criterio de tolerancia para errores de enfoque, comparando la performance de distintos tipos de pupilas.

A lo largo de este capítulo, se utilizan los formalismos E-F para analizar la razón de Strehl de sistemas ópticos con desenfoco y aberración esférica. En primer término, se muestra que la AF describe el contenido de frecuencias de la Razón de Strehl. Luego, se obtiene para el mismo criterio una representación en función de la óptica geométrica, usando a la WDF para asociar "amplitudes" a los rayos paraxiales que cortan al eje óptico. Se establece además, que para pupilas simétricas, el valor de la OTF puede ser asociado con la amplitud de un rayo que corte al eje óptico. Se discuten finalmente algunas aplicaciones de estos resultados.

#### IV-2 REPRESENTACION DE LA RAZON DE STREHL EN EL E-F

La Razón de Strehl (RS) además de ser una figura de mérito intuitivamente simple, de un sistema óptico, posee un significado físico que está relacionado directamente con el proceso de formación de imágenes/9/. En primer lugar la RS es, para pequeñas aberraciones, una medida aproximada de la fracción de flujo radiante que está contenida en la parte central brillante de la imagen de un punto fuente. Segundo, debido a que un sistema óptico con iluminación incoherente puede ser considerado como un filtro pasa bajos lineal, puede pensarse a la RS como el área bajo la función de transferencia. Además, la RS puede ser tratada como la correlación estadística de Linfoot/9/, es decir maximizar a la RS, asegura que las regiones de distinta densidad de brillo en la imagen se correspondan con aquellas en el objeto.

Por las razones expuestas, los métodos para la evaluación de la RS son de un gran interés práctico.

##### IV-2-1 CONTENIDO DE FRECUENCIAS DE LA RAZON DE STREHL

Las aberraciones en un sistema óptico con simetría rotacional son representadas por la función aberración esférica:

$$\Omega(r) = f \sum_{p=1}^m \omega_{2p,0} r^{2p}, \quad (\text{IV-4})$$

donde  $\omega_{20,0}$ , es el coeficiente de aberración y  $f$  es un factor de escala en unidades de longitud de onda. Considerando sólo la aberración esférica primaria o de Seidel resulta:

$$\Omega(r) = f(\omega_{20} r^2 + \omega_{40} r^4), \quad (\text{IV-5})$$

donde  $\omega_{20}$  y  $\omega_{40}$  son los coeficientes de desenfoque y aberración esférica primaria, respectivamente.

La PSF de un sistema óptico con estas características es la siguiente:

$$p(r, \omega_{20}, \omega_{40}) = 2\pi \int_0^{\infty} P(\rho) J_0(2\pi r \rho) \exp\left\{2\pi i \left[ \omega_{20} (\rho/\rho_0)^2 + \omega_{40} (\rho/\rho_0)^4 \right]\right\} \rho d\rho. \quad (\text{IV-6})$$

En la ecuación (IV-6),  $P(\rho)$  representa a la amplitud compleja de la pupila apertura,  $J_0$  es la función de Bessel de primer grado y orden cero, y  $\omega_{20} = z(\lambda \rho_0^2/2)$  ( $\rho_0$  es la frecuencia de corte). De acuerdo a la Figura IV-1, el plano focal se encuentra en  $z=0$ .

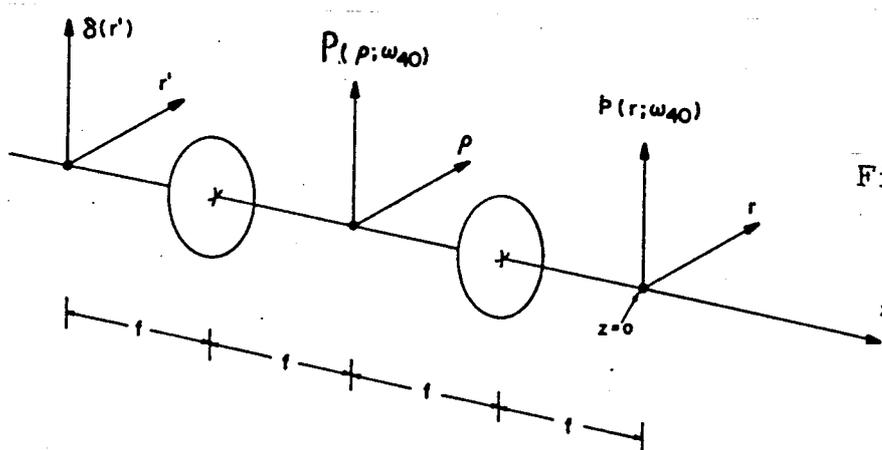


Figura IV-1

Según la óptica geométrica, la PSF sería una versión (reducida pero similar) de la intensidad de la transmitancia en la pupila. Por lo tanto la RS puede escribirse:

$$S(\omega_{20}, \omega_{40}) = \frac{|p(r=0, \omega_{20}, \omega_{40})|^2}{|p(r=0, \omega_{20}=\omega_{40}=0)|^2} \quad (\text{IV-7})$$

Haciendo el siguiente cambio de variables:

$$\xi = (\rho/\rho_0)^2 - 0.5, \quad (\text{IV-8})$$

siendo un parámetro adimensional asociado a una frecuencia espacial ( el cambio de variables de la ecuación (IV-8) transforma cualquier pupila de simetría circular en una pupila rectangular unidimensional que es distinta de cero sólo en el intervalo  $(-1/2, 1/2)$ ). Definiendo la siguiente función pupila generalizada:

$$\tilde{Q}(\xi) = P(\rho) / 2\pi \int_0^{\infty} P(\rho) \rho d\rho, \quad (\text{IV-9})$$

y sustituyendo a la ec. (IV-9) en la ec.(IV-6), la RS puede escribirse:

$$S(\omega_{20}, \omega_{40}) = |Q(\omega_{20}, \omega_{40})|^2 \quad (\text{IV-10})$$

donde

$$Q(\omega_{20}, \omega_{40}) = \int \tilde{Q}(\xi) \exp \left\{ 2\pi i \left[ \omega_{40} \xi^2 + (\omega_{20} + \omega_{40}) \xi \right] \right\} d\xi . \quad (\text{IV-11})$$

En la ecuación (IV-11) se ha omitido un factor de fase multiplicativo, irrelevante para la presente discusión.

Por lo tanto, la RS para un sistema óptico con errores de enfoque y aberración esférica puede ser expresada como una PSF unidimensional. Ahora bien, un sistema óptico como el de la Figura IV-1, puede (en virtud de que el sistema es lineal y espacialmente invariante) ser también representado por su respuesta en frecuencias. Es decir, se puede definir una función de transferencia para dicho sistema, ya que la irradiancia a lo largo del eje óptico es isoplanática y aún más, la irradiancia a la salida es la superposición lineal de las irradiancias a la entrada.

De esta forma, se define a la función de transferencia como:

$$\tilde{S}(\xi, \omega_{40}) = \int S(\omega_{20}, \omega_{40}) \exp(-2\pi i \xi \omega_{20}) d\omega_{20} , \quad (\text{IV-12})$$

donde el coeficiente de desenfoque  $\omega_{20}$ , es usado como variable espacial adimensional y  $\xi$  como frecuencia espacial también adimensional.

La transformada de Fourier en la ecuación (IV-12) puede pensarse como el contenido de frecuencias espaciales de la RS para aberración esférica variable. J.Ojeda-Castañeda et al./10/ aplican la función de transferencia dada por la ec. (IV-12) al cálculo de la distribución de intensidad a lo largo del eje óptico para un sistema telescópico como el de la Figura IV-1. Ellos demuestran que la variable frecuencia en la ec.(IV-12) puede pensarse como una frecuencia espacial adimensional para una variación de irradiancia sinusoidal positiva a lo largo del eje óptico, a la entrada del sistema. La influencia de la aberración esférica en la irradiancia sobre el eje óptico puede ser interpretada en término de las modificaciones de la función de transferencia de la ecuación (IV-12) con  $\omega_{40}$  como parámetro. Estas modificaciones de la función de transferencia pueden visualizarse a través de la AF de la función  $Q(\omega_{20}, \omega_{40})$  de la siguiente forma: la expresión (IV-12),

$$\tilde{S}(\eta, \omega_{40}) = \int |Q(\omega_{20}, \omega_{40})|^2 \exp(-2\pi i \eta \omega_{20}) d\omega_{20} \quad (IV-13)$$

puede expresarse como:

$$\tilde{S}(\eta, \omega_{40}) = \exp(2\pi i \omega_{40} \eta) \int \tilde{Q}(\xi + \eta/2, \omega_{40}) \tilde{Q}^*(\xi - \eta/2, \omega_{40}) \\ \times \exp\{2\pi i (2\omega_{40} \eta) \xi\} d\xi \quad (IV-14)$$

Comparando la ecuación (IV-14) con la definición de la AF (ec.(I-39)), se obtiene:

$$|\tilde{S}(\eta, \omega_{40})| = |A(\eta, x=2\omega_{40}\eta)|. \quad (\text{IV-15})$$

Consecuentemente, una gráfica de la AF muestra los módulos de la función de transferencia (que se asocia a la RS vs. errores de enfoque) como un conjunto de líneas  $x=2\eta\omega_{40}$  para distintos valores de aberración esférica (Fig. IV-2). Si se considera una función de transferencia hipotética que no sea afectada por aberración esférica se obtiene una AF invariante a lo largo de la línea  $x=2\omega_{40}\xi$ .

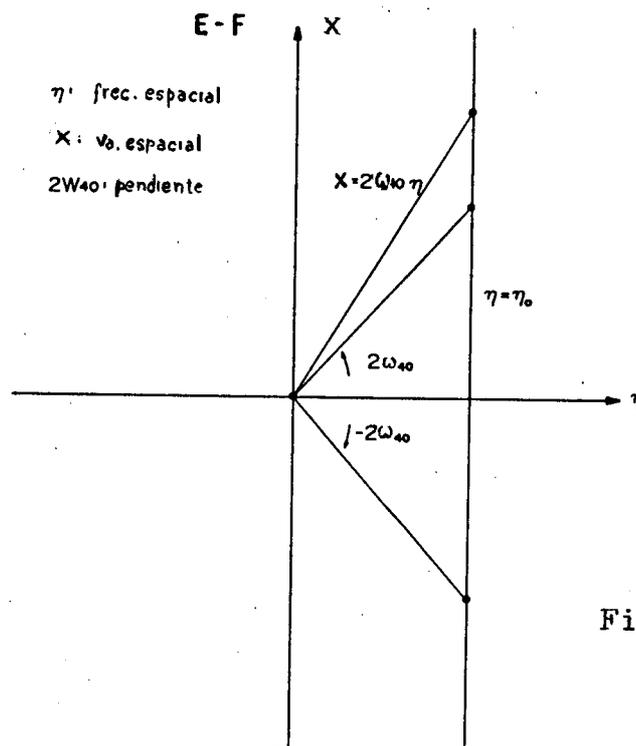


Figura IV-2

Si se desea reducir la influencia de la aberración esférica en la función de transferencia, la AF (para una dada frecuencia) debe decrecer suavemente a medida que  $x$  crezca en valor absoluto, de forma tal que la función de transferencia varíe lentamente con  $\omega_{40}$ .

#### IV-3 FORMULACION DE LA RAZON DE STREHL BASADA EN LA WDF/11/

A partir del análisis de Fourier y del concepto de funciones de transferencia se han desarrollado métodos que constituyen una poderosa herramienta en el análisis de la performance de sistemas ópticos/6,10/.

Sin embargo, cuando los diseñadores de sistemas ópticos tratan de llevar estos resultados a la práctica, se encuentran en principio, con un gran obstáculo. Esto se debe a que los métodos antes mencionados se basan en la óptica ondulatoria; mientras que tradicionalmente, el diseño práctico hace uso de la óptica geométrica. Existen dos buenas razones para esto último: la cantidad de cálculo es mucho menor en la óptica geométrica que en la ondulatoria, y la calidad de las lentes puede predecirse con bastante exactitud a partir del conocimiento de las aberraciones geométricas en la etapa de diseño.

A pesar de que algunos conceptos como la OTF pueden extenderse a la óptica geométrica/12-14/, la relación entre ambas

técnicas es aún insatisfactoria. El propósito de esta sección es presentar a la RS (criterio de calidad basado en la óptica ondulatoria) en términos de rayos de la óptica geométrica.

#### IV-3-1 RAZON DE STREHL PARA EL DESENFQUE

Como se discutió en el capítulo I, dos de las propiedades mas importantes de la WDF son:

i) La irradiancia en cualquier punto  $x$  se obtiene como la proyección de la WDF a lo largo del eje  $u$ , es decir:

$$I(x) = \int W(x,u) du. \quad (IV-16)$$

ii) La WDF de la figura de difracción de Fresnel de una pupila cuya transmitancia está representada por la función  $t(x)$ , es decir:

$$U(x;z) = \int t(y) \exp\{-i\pi(x-y)^2/\lambda z\} dy \quad (IV-17)$$

permanece invariante a lo largo de la línea  $x=\lambda zu$  esto es:

$$\begin{aligned} W(x,y;z) &= \int U(x+x'/2;z) U^*(x-x'/2;z) \exp(-2\pi i u x') dx' \\ &= W_t(x-\lambda zu, u), \end{aligned} \quad (IV-18)$$

donde  $W_t$  es la WDF de la pupila. Esto significa que, en la aproximación paraxial, es posible asociar una "amplitud" con la trayectoria de un rayo de la siguiente manera.

Un rayo paraxial que forma un ángulo  $\theta$  con el eje óptico  $z$ , es asociado con la frecuencia espacial  $u = \theta/\lambda$ . La trayectoria del rayo está dada en cada punto  $x$  por la relación  $x = z\theta = \lambda zu$ .

Por lo tanto, la WDF es invariante a lo largo de la trayectoria de un rayo (ec. (IV-18)) y, ya que la irradiancia es la suma de todos los posibles rayos (ec. (IV-16)) resulta válido considerar a la WDF como la "amplitud" del rayo que pasa por el punto de coordenada  $x$  formando con el eje óptico un ángulo  $\theta = x/z$ . Esta interpretación que fue sugerida por Bastiaans/15/, es aplicada aquí para dar una representación, de la SR para errores de enfoque y aberración esférica en términos de rayos.

Considérese una apertura rectangular unidimensional de ancho  $2X$ ; esto es:

$$t(x) = \text{rect}(x/2X) \quad (\text{IV-19})$$

La WDF de la ecuación (IV-19) es:

$$W_t(x, u) = [X - |x|] \text{rect}(x/2X) \text{sinc} \{4u(x - |x|)\}. \quad (\text{IV-20})$$

Si se considera una lente delgada ubicada en la apertura, la amplitud compleja para planos desenfocados  $z \neq 0$  en la Figura IV-3,

resulta:

$$U(x; z) = \int t(y) \exp(-i\pi y^2/\lambda f) \exp\{-i\pi(x-y)^2/\lambda(f+z)\} dy. \quad (\text{IV-21})$$

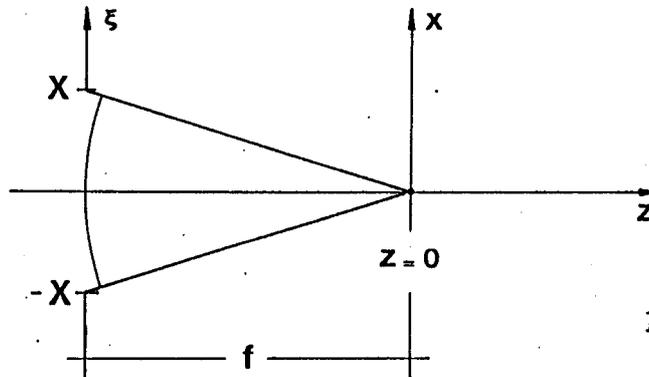


Figura IV-3

Es inmediato demostrar que la WDF de la ecuación anterior es:

$$W(x, u; z) = W_t(x - \lambda(f+z)u, x/\lambda f - zu/f). \quad (\text{IV-22})$$

Consecuentemente, la amplitud de los rayos que cortan al eje óptico para  $z$  variable es:

$$W(x=0, u; z) = W_t(-\lambda(f+z)u, -zu/f). \quad (\text{IV-23})$$

Esto es, la amplitud puede visualizarse como los valores de la WDF de la pupila apertura en coordenadas  $(y, \mu)$ , a lo largo de líneas  $y = [f(f+z)/z]\mu$  (véase la Fig. IV-4). La ecuación (IV-23) implica una rotación mas un cambio de escala de la pupila apertura.

La amplitud para  $z=0$  (plano focal) se encuentra a partir

de los valores de la WDF a lo largo del eje  $y = -fu$  que pasa por el origen de coordenadas, es decir:

$$W(x=0, u; 0) = [x - \lambda f |u|] \text{ rect } u / (2x / \lambda f) . \quad (\text{IV-24})$$

En la apertura ( $z = -f$ ), las amplitudes son los valores de la WDF a lo largo del eje  $\mu = u$ :

$$W(x=0, u; -f) = X \text{ sinc}(4xu) \quad (\text{IV-25})$$

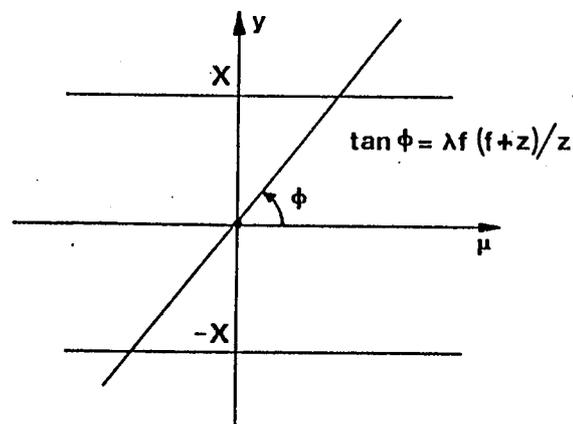


Figura IV-4

En conclusión, para analizar los errores de enfoque debe considerarse lo siguiente: cualquier rayo que intersecta al eje óptico en planos desenfocados  $z \neq 0$ , cruza el plano focal en  $x \neq 0$ ; en otras palabras, para un dado ángulo  $\theta$  (o frecuencia espacial  $u = \theta / \lambda$ ) la contribución en amplitud en un plano cualquiera  $z$  proviene de un rayo que cruza el plano focal en  $x = \lambda zu$  (ver Fig. IV-5).

Por lo tanto, mediante argumentos geométricos sencillos

es posible relacionar los valores de la WDF en el plano focal con aquellos en planos desenfocados y, por medio de la ecuación (IV-16) hallar la RS de la siguiente manera:

$$S = \frac{\int W(x=\lambda zu, u, z=0) du}{\int W(x=0, u, z=0) du} \quad (\text{IV-26})$$

o sea:

$$S = \frac{\int W_t(-\lambda(f+z)u, -zu/f) du}{\int W_t(-\lambda zu, 0) du} \quad (\text{IV-27})$$

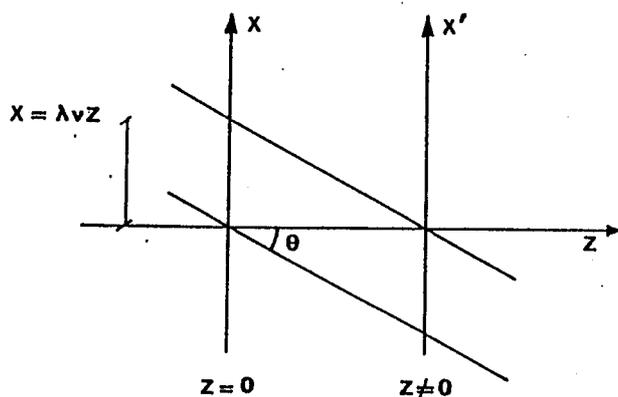


Figura IV-5

#### IV-3-2 CASO BIDIMENSIONAL: ABERRACION ESFERICA DE SEIDEL

Considérese el caso de un sistema con simetría rotacional alrededor del eje óptico, que tenga errores de enfoque  $\omega_{20} \neq 0$  y

aberración esférica  $\omega_{40} \neq 0$ . Como se discutió en la sección IV-2-1, la RS como función de mérito de este sistema óptico puede escribirse (combinando (IV-10) y (IV-11))

$$S(\omega_{20}, \omega_{40}) = \left| \int \tilde{Q}(\xi) \exp \left\{ 2\pi i \left[ \omega_{40} \xi^2 + (\omega_{20} + \omega_{40}) \xi \right] \right\} d\xi \right|^2 \quad (\text{IV-28})$$

donde nuevamente  $Q$  representa a la pupila generalizada de la ecuación (IV-9) y se ha hecho el cambio de variables de la expresión (IV-8). La ecuación anterior puede escribirse como

$$S(\omega_{20}, \omega_{40}) = \iint \tilde{Q}(\xi + \xi'/2) \tilde{Q}^*(\xi - \xi'/2) \exp \left\{ 2\pi i (\omega_{40} (2\xi\xi' + (\omega_{20} + \omega_{40}) \xi')) \right\} d\xi' d\xi, \quad (\text{IV-29})$$

o bien usando la definición de la WDF

$$S(\omega_{20}, \omega_{40}) = \int W(2\omega_{40}\xi + (\omega_{20} + \omega_{40}), \xi) d\xi. \quad (\text{IV-30})$$

Consecuentemente la performance de un sistema óptico como el de la Figura IV-1, puede analizarse estudiando el comportamiento de la WDF  $W(y, \xi)$  asociada a la pupila generalizada (IV-8) y (IV-9) a lo largo de líneas:  $y = 2\omega_{40}\xi + (\omega_{20} + \omega_{40})$ . Esta es una generalización del tratamiento hecho en la sección IV-3-1, que se extiende a pupilas 2-D, de simetría rotacional con errores de enfoque y aberración esférica primaria.

#### IV-3-3 AMPLITUD DE LOS RAYOS A PARTIR DE LA OTF

Para pupilas simétricas, es decir  $T(u)=T(-u)$  la OTF asociada (o sea, la autocorrelación de la función pupila), es:

$$H(\mu) = \int T(u+\mu/2) T^*(u-\mu/2) du. \quad (\text{IV-31})$$

A partir de (IV-31) y de la definición de la WDF (ec. I-1), es claro que la OTF está relacionada con la WDF de la pupila de la siguiente manera:

$$H(\mu) = W_t(x=0, u=\mu/2) \quad (\text{IV-32})$$

Por lo tanto, en virtud de lo discutido en la sección IV-3-1, para pupilas simétricas, el valor de la OTF puede ser asociado con la amplitud de un rayo paraxial que corte al eje óptico. Además la relación

$$S = \int H(\mu) d\mu. \quad (\text{IV-33})$$

puede interpretarse como suma de amplitudes de rayos que cortan al eje óptico formando ángulos:  $\theta = \mu/2$ .

Esta simple interpretación puede aplicarse para expresar un criterio de calidad como el de Hopkins/8/ en términos de rayos

paraxiales. Este criterio establece que el cociente entre la OTF en presencia de aberraciones y/o desenfoque, y la OTF limitada por difracción debe ser mayor o igual que 0.8 para cualquier frecuencia.

En conclusión, se ha establecido un nexo entre un criterio de calidad expresado en el formalismo de la óptica ondulatoria, como el de la OTF, y los elementos usados comunmente por los diseñadores de sistemas ópticos, como son los rayos de la óptica geométrica.

## REFERENCIAS:

- /IV-1/ Born & Wolf, "Principles of Optics", N.Y. Pergamon, 1978.
- /IV-2/ Lord Rayleigh "Wave theory of light" en Collected papers, (Cambridge University Press, Cambridge, 1902). Vol.3
- /IV-3/ R. Baracat, "Rayleigh wavefront criterion", J.Opt.Soc.Am. 55, (1965), 572.
- /IV-4/ V. Mahajan, "Strehl Ratio for primary aberrations: some analytical results for circular and annular pupils" J.Opt.Soc.Am. 72, (1982), 1258.
- /IV-5/ A. Marechal, "Etude des effets combines de la diffraction et des aberrations geometriques sur l'image du point lumineux", Rev. d'Optique, 26, (1947), 257.
- /IV-6/ H. Hopkins, "The frequency response of a defocused optical system", Proc.Roy.Soc. (Londres) A41, (1955), 91.
- /IV-7/ M. Mino y Y. Okano, "Improvement in the OTF of a defocused optical system through the use of shaded apertures.", Appl. Optics 10, (1971), 2219.
- /IV-8/ H. Bartelt, J.O. Castañeda and E.E. Sicre, "Misfocus tolerance seen by simple inspection of the AF", Appl. Opt. 23, (1984), 2693.
- /IV-9/ E. Linfoot, "Fourier methods in optical image evaluation", (Focal, London, 1966), Caps. I-IV.
- /IV-10/ J.O. Castañeda, P. Andrés, E. Montes, "Phase-space representation of the Strehl Ratio: Ambiguity Function" J.Opt.Soc.Am. A 4, (1987), 313.
- /IV-11/ J.O. Castañeda, W. D. Furlan y E. E. Sicre, "Formulación de la razón de Strehl basada en la Función de Distribución de Wigner", 71a. Reunión da la A.F.A., La Cumbre, Octubre de 1986.
- /IV-12/ K. Miyamoto, "On a comparison between wave optics and geometrical optics by using Fourier analysis. I. General Theory" J.Opt.Soc.Am. 48, (1958), 57.
- /IV-13/ K. Miyamoto, "On a comparison between wave optics and geometrical optics by using Fourier analysis. II. Astigmatism,

Coma, Spherical Aberration." J.Opt.Soc.Am. 48, (1958), 567.

/IV-14/ K. Miyamoto, "On a comparison between wave optics and geometrical optics by using Fourier analysis. III. Image evaluation by spot diagram" J.Opt.Soc.Am. 49, (1959), 35.

/IV-15/ M.J.Bastiaans, "The WDF and Hamilton Characteristics of a geometric-optical system.", Optics Comm., 30, (1979), 321.