

## CAPITULO I

### INTRODUCCION A LOS FORMALISMOS ESPACIO-FASE

## I-1 INTRODUCCION:

Las representaciones Espacio-Fase (E-F) como la Función de Distribución de Wigner (WDF), la Función Ambigüedad (AF), el Espectrograma Complejo (CS) y el Espectrograma Local (LS), han encontrado en los últimos años diversas aplicaciones en la óptica. Entre otras cabe mencionar: análisis del fenómeno de la difracción y teoría de sistemas ópticos/1,2/, análisis de señales 1-D/3/, teoría de coherencia/4,5/, formación de imágenes/6,7/ y teoría de aberraciones/8,9/.

En este capítulo se dan las definiciones de las funciones E-F antes mencionadas y se enuncian sus propiedades más importantes, estableciéndose además las relaciones matemáticas que existen entre ellas.

## I-2 LA FUNCION DE DISTRIBUCION DE WIGNER

El concepto de WDF fue introducido en 1932 por Wigner/10/ en el contexto de la mecánica cuántica. De Bruijn/11/ hizo una revisión histórica de la WDF y dió también una base matemática para este nuevo tipo de transformaciones. En 1978 fue usado por Bastiaans/2/ para el análisis de señales y sistemas ópticos, y desde entonces se ha usado extensivamente en el tratamiento de diversos tópicos de la óptica moderna.

Se define a la WDF de una función  $f(x)$  como:

$$W(x,u) = \int f(x+x'/2) f^*(x-x'/2) \exp(-2\pi i u x') dx', \quad (I-1)$$

donde (\*) indica complejo conjugado.

(Nota: todas las integrales poseen límites de integración entre  $-\infty$  y  $+\infty$ , a menos que explícitamente se especifique lo contrario).

Existe una definición equivalente empleando la transformada de Fourier de la función  $f(x)$ :

$$W(x,u) = \int F(u+u'/2) F^*(u-u'/2) \exp(2\pi i x u') du'. \quad (I-2)$$

De la comparación entre (I-1) y (I-2) surge que: la WDF del espectro de una dada función  $f(x)$  puede determinarse simplemente de la misma función intercambiando las variables frecuencia espacial ( $u$ ) y coordenada ( $x$ ), teniendo en cuenta el cambio de signo en el exponente. Esto ilustra la simetría entre ambas definiciones (I-1) y (I-2).

La WDF representa a la función en espacio y frecuencia simultáneamente, siendo entonces una representación intermedia entre una puramente espacial  $f(x)$  y una puramente espectral  $F(u)$ . Para una señal 1-D, la WDF definida en el espacio-fase, representa a la variable espacial en un eje y a la energía o al poder espectral (distribución de intensidad del contenido de frecuencias) en el otro eje. Esto es, la WDF de una señal 1-D

puede interpretarse como la distribución de la energía de la señal en el espacio y en la frecuencia espacial al mismo tiempo. En consecuencia, un "display" 2-D de la WDF, daría la distribución de energía de la señal localizada en el plano  $(x,u)$ . Sin embargo esta interpretación no es siempre cierta ya que como se verá mas adelante la WDF no siempre es no negativa.

La descripción de la señal en espacio-frecuencia se asemeja mucho al concepto de rayo de la óptica geométrica donde la posición y dirección de un rayo, también están dados simultaneamente. De alguna forma se puede considerar a  $W(x,u)$  como la "amplitud" de un rayo que pasa por un punto  $x$  (posición), y con una dada frecuencia espacial  $u$  (dirección).

En la siguiente sección se darán algunos ejemplos que ilustran el concepto de la WDF.

#### I-2-1 EJEMPLOS DE LA WDF

##### (a) Fuente puntual

La WDF de una fuente puntual localizada en  $x=x_0$ :

$$f(x) = \delta(x-x_0), \quad (I-3)$$

calculada a partir de la definición (I-1), resulta:

$$W(x, u) = \delta(x-x_0), \quad (I-4)$$

es decir en un único punto  $x=x_0$  todas las frecuencias están presentes, mientras no existan contribuciones de otros puntos. En efecto esto es lo que debería esperarse del espectro local de frecuencias de un único punto fuente.

(b) Onda plana

Considérese una onda plana definida en el dominio espacial por:

$$f(x) = \exp(iu_0x), \quad (I-5)$$

o equivalentemente en el dominio de las frecuencias espaciales por:

$$F(u) = \delta(u-u_0)2\pi \quad (I-6)$$

Una onda plana y un punto fuente son funciones duales entre si; es decir la transformada de Fourier de una función tiene la misma forma que la otra función. Debido a esta dualidad, la WDF de una onda plana es la misma que la de una fuente puntual pero rotada un ángulo de  $90^\circ$  en el espacio fase  $(x, u)$ . Esto es :

$$W(x, u) = \delta(u - u_0) 2\pi \quad (\text{I-7})$$

(c) Señal de fase cuadrática

Una señal de fase cuadrática tal como:

$$f(x) = \exp(i\alpha x^2/2), \quad (\text{I-8})$$

representa, al menos para valores pequeños de  $x$ , una onda esférica con curvatura igual a  $\alpha$ . La WDF para esa señal es:

$$W(x, u) = 2\pi \delta(u - \alpha x). \quad (\text{I-9})$$

De esta última se concluye que en cada punto  $x$  se encuentra presente solo una frecuencia  $u = \alpha x$ . Esto corresponde exactamente a una representación de la onda esférica en términos de rayos de la óptica geométrica.

(d) Señal de fase de variación suave

La WDF de una señal de fase de variación suave:

$$f(x) = \exp(i\phi(x)), \quad (\text{I-10})$$

donde  $\phi(x)$  es una función suficientemente suave de  $x$ , toma la

siguiente forma

$$W(x,u) = 2\pi \delta(u - d\phi/dx). \quad (I-11)$$

Nótese, que en cada punto  $x$  solo una frecuencia  $u = d\phi/dx$  está presente. Además, la ecuación (I-11) es totalmente exacta cuando  $\phi(x)$  varía lineal o cuadráticamente con  $x$  (ejemplos I-2-2 y I-2-3). Esta aproximación es útil en la teoría geométrica de aberraciones/9,12/ y en el tratamiento de las transformaciones geométricas de Bryngdahl/13,14/.

#### I-2-2 PROPIEDADES DE LA WDF.

En esta sección se enunciarán las propiedades mas importantes de la WDF. Otras propiedades pueden hallarse en las referencias /15/ y /16/

##### (a) Fórmulas inversas

Las fórmulas inversas de las (I-1) y (I-2) son respectivamente:

$$f(x_1) f^*(x_2) = \int W[1/2(x_1+x_2), u] \exp\{iu(x_1-x_2)\} du, \quad (I-12)$$

y

$$F(u_1) F^*(u_2) = \int W[x, 1/2(u_1+u_2)] \exp\{ix(u_1-u_2)\} dx. \quad (I-13)$$

Estas relaciones, imponen las condiciones que una función de dos variables debe cumplir para ser una WDF. Una función de  $x$  y  $u$  es una WDF sí y solo sí, las integrales en las expresiones (I-12) y (I-13) son separables. De las expresiones anteriores se concluye que tanto la señal  $f(x)$  como su transformada de Fourier  $F(u)$  pueden reconstruirse a partir de su WDF, a menos de un factor de fase constante.

#### (b) La WDF función real

De las definiciones (I-1) y (I-2) se deduce inmediatamente que la WDF es real (por ser la transformada de Fourier de la función hermitica  $(f(x+x'/2).f^*(x-x'/2))$ ). Este hecho resulta conveniente, en la producción óptica de la WDF, para los dispositivos de detección (dentro del procesamiento de señales); ya que no se necesitan sistemas sofisticados para detectar la WDF de cualquier señal. Desafortunadamente la WDF no es necesariamente no-negativa, lo cual prohíbe su interpretación directa como función de densidad de energía.

#### (c) Limitación en espacio y frecuencia

De las definiciones dadas se deduce que si una función  $f(x)$  está limitada dentro de un cierto intervalo espacial,



entonces, su WDF estará limitada en el mismo intervalo. Similarmente, si el espectro de frecuencias  $F(u)$  se limita a un dado intervalo de frecuencias, la WDF se limitará dentro del mismo intervalo. Esta es una propiedad importante de la WDF ya que otras representaciones E-F como la AF y el LS no la satisfacen.

(d) Corrimientos en espacio y frecuencia

De la definición se infiere que un corrimiento espacial de la función  $f(x)$  conduce directamente al mismo corrimiento de la WDF.

$$f(x-x_0) \rightarrow W(x-x_0, u)$$

Lo mismo sucede para corrimientos en el espectro de frecuencias de la función.

$$F(u-u_0) \rightarrow W(x, u-u_0)$$

Esta propiedad provee un método para estimar corrimientos, tanto en espacio como en frecuencias, de la señal por medio de la observación directa de su WDF.

(e) Algunas igualdades y desigualdades

De la relación:

$$\iint W(x,u) dx du = \int |f(x)|^2 dx = \int |F(u)|^2 du, \quad (I-14)$$

que se deduce inmediatamente de la definición (I-1) se concluye que la integral de la WDF en el plano (x,u) representa la energía total de la señal. El teorema de Parseval está implícito en la relación (I-14)

Una relación importante entre la WDF de dos señales y las señales en sí mismas, ha sido formulada por Moyal/15/; ésta es:

$$\begin{aligned} \iint W_1(x,u) W_2(x,u) dx du &= \left| \int f_1(x) f_2^*(x) dx \right|^2 \\ &= \left| \int F_1(u) F_2^*(u) du \right|^2. \end{aligned} \quad (I-15)$$

Como una aplicación de esta propiedad se verá mas adelante, que la convolución de dos WDF arbitrarias da como resultado el LS.

Las ecuaciones (I-14) y (I-15), junto con la desigualdad de Schwartz conducen a la relación

$$\iint W_1(x,u) W_2(x,u) dx du \leq \left[ \iint W_1(x,u) dx du \right] \left[ \iint W_2(x,u) dx du \right] \quad (I-16)$$

que puede ser considerada el equivalente a la desigualdad de Schwartz para la WDF. Otra desigualdad importante formulada por De Bruijn/16/ es la siguiente

$$\iint (2\pi x^2/\sigma + \sigma u^2/2\pi)^n W(x,u) dxdu \gg n! \iint W(x,u) dxdu \quad (\text{I-17})$$

donde  $\sigma$  es una constante positiva y  $n$  es un entero no-negativo. Para el caso especial  $n=1$  esta desigualdad se reduce a:

$$(2\pi/\sigma) \langle x^2 \rangle + (\sigma/2\pi) \langle u^2 \rangle \gg 1 \quad (\text{I-18})$$

donde,

$$\langle x^2 \rangle = \frac{\iint x^2 W(x,u) dxdu}{\iint W(x,u) dxdu} \quad (\text{I-19})$$

y

$$\langle u^2 \rangle = \frac{\iint u^2 W(x,u) dxdu}{\iint W(x,u) dxdu} \quad (\text{I-20})$$

De la relación (I-17) puede deducirse la desigualdad de Heisemberg/17/:

$$\langle x^2 \rangle \langle u^2 \rangle \gg 1/4 \quad (\text{I-21})$$

Se puede pensar, que la relación (I-21) expresa el hecho que la WDF no puede ser concentrada en un punto.

(f) Magnitudes radiométricas

Diversas integrales de la WDF pueden ser consideradas como magnitudes radiométricas. La integral en la variable  $u$  es proporcional a la intensidad de la señal

$$\int W(x,u) du = |f(x)|^2, \quad (I-22)$$

mientras que la integral sobre la variable espacial  $x$ , es proporcional a la intensidad radiante/18/. Donde la constante de proporcionalidad es:  $\cos^2\alpha$  y  $\alpha$  es el ángulo de observación.

$$\int W(x,u) dx = |F(u)|^2. \quad (I-23)$$

La integral

$$J_z = 1/2\pi \int \sqrt{k^2 - u^2} W(x,u) du, \quad (I-24)$$

(donde  $k=2\pi/\lambda$ ) es proporcional a la emitancia radiante/18/. La magnitud (I-24) combinada con:

$$J_x = 1/2\pi \int u W(x,u) du, \quad (I-25)$$

puede usarse para definir un vector 2-D  $\vec{J}=(J_x, J_z)$ , que es

proporcional al vector geométrico de flujo/19/.

### I-2-3 PROPAGACION DE LA WDF EN SISTEMAS LINEALES/20/

En esta sección se considerará la propagación de la WDF a través de un sistema óptico invariante temporalmente. Este tipo de sistemas, que transforman una señal en el plano de entrada ( $x_1$ ), en otra señal en el plano de salida ( $x_0$ ), puede representarse de cuatro formas diferentes, dependiendo de si la señal es descripta en el dominio espacial o en el dominio de las frecuencias espaciales. Las relaciones entrada-salida equivalentes son:

$$f(x_0) = \int g(x_0, x_1) f_1(x_1) dx_1 \quad (a)$$

$$F(u_0) = \int h(u_0, u_1) F_1(u_1) du_1 \quad (b)$$

$$F(u_0) = \int t(u_0, x_1) f_1(x_1) dx_1 \quad (c)$$

$$f(x_0) = \int \hat{t}(x_0, u_1) F_1(u_1) du_1 \quad (d)$$

(I-26)

La relación (I-26.a), es la representación usual de la transformación en el dominio espacial por medio de la función de punto extendido o función respuesta impulsiva (PSF)  $g(x_0, x_1)$ . La PSF es la respuesta del sistema en el dominio espacial a una señal de entrada  $f_1(x) = \delta(x-x_1)$ . La fórmula (I-26.b) es una

representación similar en el dominio de las frecuencias espaciales donde la función  $h(u_0, u_1)$  es la respuesta del sistema a una señal de entrada  $F_1(u) = \delta(u - u_1)$ . Ya que esta última representa a una onda plana, se llama función de onda extendida ("wave spread function"). Las relaciones (I-23.c) y (I-23.d) son representaciones híbridas E-F del sistema ya que la señal de entrada y la de salida están descritas en dominios diferentes. Estas reciben el nombre de funciones extendidas híbridas ("hybrid spread functions").

Existe una similitud entre las funciones del sistema:  $g, h, t$  y  $\hat{t}$ , y las cuatro funciones características de Hamilton, que describen sistemas ópticos geométricos. Para la WDF, en cambio, hay un solo sistema de representación donde la señal puede ser descrita a la entrada y a la salida de un sistema óptico lineal.

Combinando las ecuaciones (I-26) con la definición de la WDF resulta:

$$W_0(x_0, u_0) = \iint K(x_0, u_0; x_1, u_1) W_1(x_1, u_1) dx_1 du_1, \quad (I-27)$$

en la cual las WDF de las señales de entrada y salida están relacionadas mediante una integral de superposición. La función  $K(x_0, u_0; x_1, u_1)$  está completamente determinada por el sistema y puede expresarse por las funciones (I-26). Por ejemplo:

$$K(x_0, u_0; x_1, u_1) = \iint g(x_0 + x_0'/2, x_1 + x_1'/2) g^*(x_0 - x_0'/2, x_1 - x_1'/2) \\ \times \exp\{-2\pi i(x_0' u_0 - x_1' u_1)\} dx_0' dx_1' \quad (I-28)$$

Existen además expresiones similares para las otras funciones del sistema/20/.

La ecuación (I-28) puede considerarse como la definición de una doble WDF; por lo tanto la función  $K(x_0, u_0, x_1, u_1)$  es la respuesta del sistema en el dominio E-F a una señal de entrada  $F_i(x, u) = \delta(x-x_1) \delta(u-u_1)$ , ésto estrictamente en un sentido formal, ya que no existe una señal que origine una distribución  $\delta(x-x_1) \delta(u-u_1)$ . A este respecto, esta es una WDF algo artificial, que podría considerarse como una representación simbólica de una señal que está más o menos concentrada alrededor del punto  $(x, u)$ , sujeta a las restricciones del principio de incerteza de Heisemberg. No obstante, esta señal de entrada podría considerarse como un único rayo de entrada al sistema en el punto  $x_1$  con una frecuencia  $u_1$  y por lo tanto podría llamarse función de rayo extendido ("ray spread function" (RSF))/20/.

En las siguientes subsecciones se aplicará el concepto de RSF a algunos sistemas ópticos elementales.

(a) Lente delgada

Una lente delgada de distancia focal  $f$  puede ser descripta por la PSF:

$$g(x_0, x_1) = \exp(-ikx_0^2/2f) \delta(x_0 - x_1), \quad (I-29)$$

mientras que la RSF toma la siguiente forma:

$$K(x_0, u_0, x_1, u_1) = \delta(x_1 - x_0) \delta(u_1 - u_0 - kx_0/f). \quad (I-30)$$

Y la relación entre la WDF de entrada y la de salida para una lente delgada es:

$$W_0(x, u) = W_1(x, u + kx/f). \quad (I-31)$$

La ecuación (I-30) representa exactamente el comportamiento óptico geométrico de una lente delgada. Si un rayo incide sobre una lente delgada éste saldrá de la lente desde la misma posición pero su dirección cambiará de acuerdo a la posición donde se encuentre.

(b) Espacio libre en la aproximación de Fresnel

La PSF de una sección del espacio libre de longitud  $z$  en la aproximación de Fresnel es:

$$g(x_0, x_1) = (k/2\pi iz)^{1/2} \exp\{-ik/2z(x_0 - x_1)^2\}, \quad (I-32)$$

y la RSF:

$$K(x_0, u_0, x_1, u_1) = \delta(x_1 - x_0 + zu_0/k) \delta(u_1 - u_0). \quad (I-33)$$



De la comparación de (I-33) con (I-30), se concluye que el comportamiento espacial de un sistema es similar al comportamiento en frecuencias espaciales del otro. Es decir podría argumentarse que ambos sistemas son duales entre si. La relación entrada-salida de la WDF para el espacio libre se reduce a:

$$W_0(x, u) = W_1(x - zu/k, u). \quad (I-34)$$

La relación (I-33) representa nuevamente el comportamiento óptico geométrico de una sección del espacio libre. Si un rayo se propaga en el espacio libre su dirección permanece constante pero su posición cambia de acuerdo a la dirección que este tenga.

(c) Sistema transformador de Fourier

Para un sistema transformador de Fourier la PSF es:

$$g(x_0, x_1) = (\beta/2\pi i)^{1/2} \exp\{-i\beta(x_0 \cdot x_1)\}, \quad (I-35)$$

(donde  $\beta$  es una constante) la RSF toma la forma :

$$K(x_0, u_0, x_1, u_1) = \delta(x_1 + u_0/\beta) \delta(u_1 - \beta u_0), \quad (I-36)$$

y la relación entrada-salida de la WDF es:

$$W_0(x, u) = W_1(-u/\beta, \beta x). \quad (I-37)$$

De la cual se infiere que los dominios espacio-frecuencia espacial, estan intercambiados, tal como debe esperarse de un transformador de Fourier.

Nota: Los resultados obtenidos para luz coherente pueden aplicarse también a luz parcialmente coherente/4/. Esto es reemplazando, en la definición de la WDF al producto  $f(x+x'/2) \cdot f^*(x-x'/2)$  por el "Mutual power spectrum" (MPS)/17/.

### I-3 LA FUNCION AMBIGÜEDAD

La AF definida para aplicaciones en radar por Woodward/21/, fue introducida en la óptica por Papoulis/1/ para el tratamiento de la teoría de la difracción de Fresnel y de la óptica de Fourier, en condiciones de iluminación coherente. Posteriormente Guigay/6/ hizo extensivo el tratamiento para luz parcialmente coherente, mostrando que, para este tipo de iluminación, la intensidad mutua y la AF son representaciones equivalentes.

La definición original de la AF en el dominio temporal para una función compleja general  $f(t)$  es:

$$A(\zeta, \nu) = \int f_1(t) f_2^*(t-\zeta) \exp(-2\pi i \nu t) dt. \quad (I-38)$$

Esta se utiliza en teoría de radar para determinar la velocidad de un blanco móvil y la distancia al mismo. Típicamente, una de las dos funciones ( $f_1$ ), es la función que modula la onda portadora generada en la estación emisora, mientras que la otra ( $f_2$ ), es la señal recibida; la cual, además de tener un ruido aditivo, posee un atraso temporal y un corrimiento Doppler. El factor de fase en la ecuación (I-38), puede interpretarse como una herramienta para detectar la velocidad del móvil, ya que el valor correcto de la frecuencia, llámese  $\nu_1$ , anulará el mismo factor presente en  $f_2$  causado por el corrimiento Doppler. La integral evaluada en  $\nu = \nu_1$ , es entonces una operación de correlación entre dos funciones similares. Esta, es útil para determinar la distancia al blanco por medio del atraso temporal  $\zeta_1$ , y da un pico de amplitud en el punto  $(\zeta_1, \nu_1)$  de la función Ambigüedad.

La AF de una dada señal  $f(x)$  puede ser definida de una forma equivalente, mas simétrica que la (I-38), de la siguiente forma:

$$A(x, u) = \int f(x+x'/2) f^*(x-x'/2) \exp(-2\pi i u x) dx. \quad (I-39)$$

Analogamente a lo que ocurría con la WDF existe una definición equivalente empleando la transformada de Fourier de la función  $f(x)$ :

$$A(x, u) = \int F(u+u'/2) F^*(u-u'/2) \exp(2\pi i u x) du. \quad (I-40)$$

La AF es también una representación intermedia de la señal, entre una puramente espacial  $f(x)$ , y una puramente espectral  $F(u)$ . Para una señal 1-D, la AF definida en el E-F, representa a la auto-correlación en un eje, mientras que en el otro eje representa a la energía o poder espectral de la señal.

En óptica la AF ha tenido múltiples aplicaciones, entre otras en: formación de imágenes/6,7,22/, teoría de OTF/18/ y teoría de sistemas ópticos bilineales/23/

### I-3-1 PROPIEDADES DE LA AF

En esta sección se enuncian las propiedades más importantes de la AF, otras propiedades podrán hallarse en la referencia /24/.

#### (a) Fórmulas inversas

De las ecuaciones (I-39) y (I-40) se deducen las siguientes igualdades:

$$f(x_1) f^*(x_2) = \int A(x_1 - x_2, u) \exp\{iu(x_1 + x_2)/2\} du, \quad (I-41)$$

$$F(u_1) F^*(x_2) = \int A(x, u_1 - u_2) \exp\{-ix(u_1 - u_2)/2\} dx. \quad (I-42)$$

De estas últimas se concluye que tanto  $f(x)$  como su transformada de Fourier pueden determinarse unívocamente a partir de la AF, a menos de una constante. Nótese que una función arbitraria  $A(x, u)$ , no es necesariamente la AF de alguna función  $f(x)$ . Esta última debe cumplir la condición de ser separable como en los términos de la derecha, de las igualdades (I-41) y (I-42).

(b) Normalización

La AF es en general una función compleja. Para evitar llegar a conclusiones controvertidas respecto de las consideraciones energéticas, es conveniente, en ciertos casos, definirla de la siguiente forma:

$$A'(x, u) = (1/I) \int f(x+x'/2) f^*(x-x'/2) \exp(-2\pi i u x) dx \quad (I-43)$$

donde

$$I = \int |f(x')|^2 dx', \quad (I-44)$$

es la energía de  $f(x)$ . Por lo tanto, de (I-43) se obtiene:

$$A'(0,0) = (1/I) \int f(x) f^*(x) dx = 1, \quad (I-45)$$

y con la fórmula de Parseval puede demostrarse que:

$$\iint |A'(x,u)|^2 dx du = 1. \quad (I-46)$$

De las ecuaciones (I-45) y (I-46) se deduce:

$$\iint |A'(x,u)|^2 dx du = |A'(0,0)|^2 = 1, \quad (I-47)$$

que establece que el volumen debajo de la superficie de la AF es independiente de la señal.

(c) Propiedad auto-recíproca

$$\iint |A(v,y)|^2 \exp\{2\pi i(vx-uy)\} dv dy = |A(x,u)|^2. \quad (I-48)$$

Esta propiedad establece que la superficie de la AF,  $|A|^2$ , es su propia transformada de Fourier.

(d) La AF en la visualización de la Función de Transferencia  
Optica OTF/8/

La OTF de un sistema óptico, cuya función pupila generalizada es  $Q(v)$ , se define como:

$$H(u) = \frac{\int Q(v+u/2) Q^*(v-u/2) dv}{\int |Q(v)|^2 dv} , \quad (I-49)$$

donde  $u$  y  $v$  son frecuencias espaciales normalizadas. Para un sistema que sólo tenga errores de enfoque la función pupila generalizada es:

$$Q(u) = P(u) \exp(-ikw_{z0} u^2), \quad (I-50)$$

$k$  es el número de onda,  $w_{z0}$  el coeficiente de desenfoque y  $P$  es la función pupila definida como:

$$P(u) = \begin{cases} 1 & \text{si } u < 1 \\ 0 & \text{si } u > 1 \end{cases} \quad (I-51)$$

La ec.(I-49) puede escribirse como:

$$H(u, w_{z0}) = 0.5 \int P(v+u/2) P^*(v-u/2) \exp\{2\pi i(2w_{z0}/\lambda) uv\} dv, \quad (I-52)$$

o bien de la definición de la AF,

$$H(u, w_{z0}) = A(u, 2uw_{z0}/\lambda) . \quad (I-53)$$

Es decir que el gráfico 2-D de la AF  $A(u,y)$ , asociado a la función pupila  $P(u)$  contiene (a lo largo de las rectas  $y=2uw_20/\lambda$ ), la OTF del sistema para cada valor del desenfoque  $w_20$

(e) Relación con la WDF

La AF y la WDF para una misma señal están relacionadas por una doble transformada de Fourier de la siguiente forma:

$$A(v,y) = \iint W(x,u) \exp \{ -2\pi i(vx-uy) \} dx du. \quad (I-54)$$

Esta propiedad será útil en el capítulo II, donde se describen distintos procesadores ópticos para generar las funciones E-F. En virtud de (I-54), todos los procesadores que se utilizan para generar la AF, también pueden ser adaptados para generar la WDF y reciprocamente.

Utilizando a la ecuación (I-54), la relación (I-47) puede extenderse para mostrar que/24/:

$$\iint |W(x,u)|^2 dx du = \iint |A(v,y)|^2 dv dy, \quad (I-55)$$

es decir que el volumen debajo de la superficie de la WDF, también es independiente de la forma de la función generatriz.



## I-3-2 PROPAGACION DE LA AF EN SISTEMAS LINEALES

Análogamente a lo que ocurría con la WDF. La AF de una señal a la salida de un sistema óptico puede relacionarse con la AF a la entrada del mismo, si se conoce la PSF del sistema. Algunos ejemplos son los siguientes:

Para una lente delgada cuya PSF está representada por la ecuación (I-29), se verifica la siguiente relación entre la AF a la entrada ( $A_i$ ) y la AF a la salida del mismo ( $A_o$ ).

$$A_o(x, u) = A_i(x, u+kx/f). \quad (I-56)$$

Para el espacio libre en la aproximación de Fresnel, a una distancia  $z$  del plano de entrada (PSF ec. (I-32)) se verifica:

$$A_o(x, u) = A_i(x-uz/k, u). \quad (I-57)$$

y finalmente para un transformador de Fourier (PSFec. (I-35))

$$A_o(x, u) = A_i(-u/\beta, \beta x). \quad (I-58)$$

Nótese que la AF permanece inalterada, solo las variables independientes son transformadas. Además las transformaciones coinciden exactamente con las halladas para la WDF. Este es otro aspecto donde se demuestra la equivalencia entre los dos tipos de

representaciones.

#### I-4 EL ESPECTROGRAMA LOCAL

Los ejemplos vistos en la sección I-2-1 sugieren a la interpretación de la WDF como una función que permite obtener información de un area infinitamente pequeña del E-F. Por supuesto que esta interpretación no es del todo legal, pues está en conflicto con el principio de incerteza. Es imposible determinar la frecuencia de una señal dentro de un intervalo espacial infinitamente pequeño. Se obtiene una interpretación mas acertada de la WDF, si se la compara con una función densidad de probabilidad, de la siguiente manera.

Dada una función densidad de probabilidad  $p(z)$ , es claro que el valor de  $p$  en sí mismo no tiene un sentido significativo, en cambio la integral:

$$P(z) = \int_{z-\Delta z}^{z+\Delta z} p(z') dz', \quad (I-53)$$

es la probabilidad de que la variable estocástica  $z'$  se encuentre entre  $z-\Delta z$  y  $z+\Delta z$ .

De la misma forma el Espectrograma Local (LS), función que describe el contenido de frecuencias de una señal dependiendo de su posición, puede ser derivada de la WDF, integrándola en un

área  $\delta x \delta u$ .

Siguiendo el procedimiento original de Bartelt et al./3/, se usará como función de peso al producto de dos gaussianas  $G(x, \delta x)G(u, \delta u)$  donde:

$$G(x, \delta x) = 1/\sqrt{\delta x} \exp \{-2\pi(x/\delta x)^2\} \quad (\text{I-60a})$$

y

$$G(u, \delta u) = 1/\sqrt{\delta u} \exp \{-2\pi(u/\delta u)^2\} \quad (\text{I-60b})$$

El principio de incerteza se satisface si se eligen  $\delta x$  y  $\delta u$ , de modo que cumplan  $\delta x \delta u \geq 1$ . Si la desigualdad anterior toma su mínimo valor ( $\delta x \delta u = 1$ ), se define al LS como:

$$L(x, u, \delta x) = \iint W(x', u') G(x-x'; \delta x) G(u-u'; 1/\delta x) dx' du'. \quad (\text{I-61})$$

Reemplazando en la ecuación anterior la definición de la WDF (ecs. (I-1) y (I-2)) se obtienen respectivamente:

$$L(x, u, \delta x) = \left| \int f(x') G(x-x'; \sqrt{2} \delta x) \exp \{-2 i u x'\} dx' \right|^2 \quad (\text{I-62})$$

$$L(x, u, \delta x) = \left| \int F(u') G(u-u'; \sqrt{2} / \delta x) \exp \{-2 i u' x\} du' \right|^2 \quad (\text{I-63})$$

La figura (I-1) muestra cualitativamente el efecto de diferentes anchos de  $\delta x$  en el espacio fase (arriba),

correspondientes a las ecuaciones (I-62) y (I-63); y en el dominio espacial (abajo), correspondiente a las ecuación (I-60a). Dos casos extremos son: buena resolución espacial y mala resolución en frecuencias espaciales (figuras de la izquierda) y viceversa (figuras de la derecha).

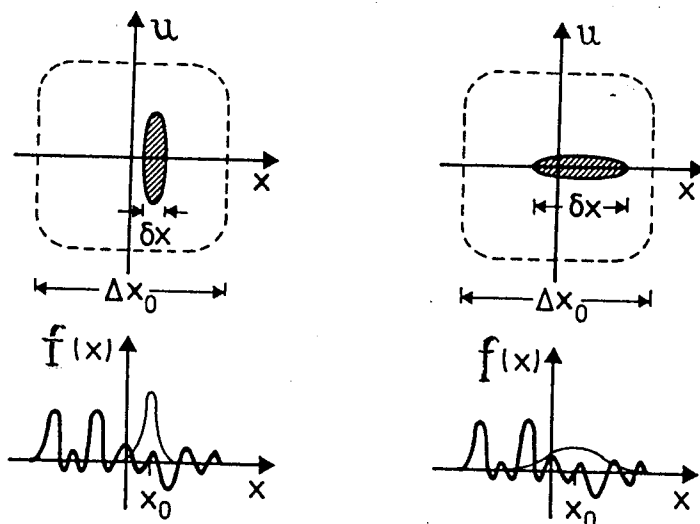


Figura I-1

Se asume que  $f(x)$  es nula fuera del intervalo  $-\Delta x_0/2 < x < \Delta x_0/2$ . La resolución  $\delta x_0$  es la inversa del ancho de banda  $\Delta u_0 = 1/\delta x_0$ . Si se requiere una agudeza muy buena en la resolución espacial, se impone  $\delta x_0 \gg \delta x$ . La gaussiana en la ecuación (I-62) será casi una delta y se obtiene:

$$L(x, u, \delta x) = |f(x)|^2. \quad (I-64)$$

Si en cambio  $\delta x > \Delta x_0$  se obtiene:

$$L(x, u, \delta x) = |F(u)|^2. \quad (I-65)$$

Los estados intermedios  $\delta x_0 < \delta x < \Delta x_0$  pueden ser considerados como espectro de frecuencias locales.

La función gaussiana en las ecuaciones (I-62) y (I-63) puede ser considerada como una "ventana", en el sentido que muestrea pequeñas porciones de la función  $f(x)$  (o  $F(u)$ ).

Aunque el uso de una función ventana gaussiana tiene varias ventajas (entre otras su transformada de Fourier es también gaussiana), puede definirse al LS de una manera mas general de la siguiente forma:

$$Lfg(x, u) = \left| \int f(x') g^*(x' - x) \exp(-2\pi i u x') dx' \right|^2, \quad (I-66)$$

donde la nueva función ventana,  $g(x)$ , es una función mas o menos concentrada alrededor del origen y normalizada, esto es:

$$\int |g(x)|^2 dx = 1. \quad (I-67)$$

(Nota:  $Lfg$  debe leerse espectro local de la función  $f$  tomando a la función  $g$  como ventana.)

Una propiedad interesante del  $Lfg$  es que está relacionado con la WDF de las funciones  $f$  y  $g$  por la siguiente igualdad/25/:

$$Wf(x, u') ** Wg(x, u') = Lfg(x, u'), \quad (I-68)$$

donde \*\* implica una convolucion 2-D con respecto a x y a u'.

## I-5 EL ESPECTROGRAMA COMPLEJO

A pesar de ser útil en muchas aplicaciones ( por ejemplo en el análisis de texturas/26/ y en reconocimiento de sonogramas/3/), el LS no es una descripción completa de una señal, es decir que no existe una transformación lineal de  $Lfg(x,u)$  que pueda sintetizar una función compleja arbitraria  $f(x)$ . Sin embargo considerando a la función que está dentro del modulo de la ecuación (I-66) se obtiene una nueva representación que sí es completa; esta es, el Espectrograma Complejo (CS) de la función  $f(x)$ , y se define como:

$$Cf_g(x,u) = \int f(x') g^*(x'-x) \exp(-2\pi i u'x) dx'. \quad (I-69)$$

Es decir se obtiene una nueva representación espectral local de la señal, que se consigue muestreando a la función  $f(x)$  con una función ventana adecuada  $g(x)$ , y transformando Fourier el producto para varias posiciones de  $g(x)$ . Tal como ocurría con la WDF y la AF, el CS puede también obtenerse a partir de las transformadas de Fourier de  $f(x)$  y  $g(x)$  de la siguiente manera:

$$C_{fg}(x, u) = \int F(u') G^*(u'-u) \exp(2\pi i u' x) du'. \quad (I-70)$$

Al decir que el  $C_{fg}$  es una representación completa de la señal, se infiere que la señal puede ser recuperada a partir de su CS. Esto se efectúa mediante la siguiente fórmula de inversión:

$$f(x') = \iint C_{fg}(x, u) g(x'-x) \exp(-2\pi i u x') dx du. \quad (I-71)$$

El uso de CS en el análisis o procesamiento de señales introduce el artificio de una función ventana. Para ilustrar el efecto de  $g(x)$  en el CS, las funciones  $f(x)$  y  $g(x)$  en la ecuación (I-69) pueden ser intercambiadas para producir  $C_{gf}(x, u)$ . Puede verse que  $C_{gf}$  es básicamente la misma  $C_{fg}$ , o más exactamente:

$$C_{gf}(x, u) = C_{fg}^*(-x, -u), \quad (I-72)$$

Es decir que la función ventana tiene la misma influencia sobre el resultado que la función a ser analizada, con el agravante que diferentes funciones ventanas dan como resultado diferentes representaciones de la señal. Para salvar estos problemas, puede tomarse como función ventana a la misma función  $f(x)$ .

Se verá en el siguiente punto como esta alternativa conduce a las ya conocidas WDF y AF.

### I-5-1 Relación del CS con la AF y la WDF

Si en el CS  $f(x)$  es considerada como ventana de sí misma, es decir  $g(x)=f(x)$  el CS resulta:

$$Cf(x, u') = \exp(-i x' u') \int f(x+x'/2) f^*(x-x'/2) \exp(2\pi i x' u') dx' \quad (I-73)$$

donde se ha hecho un cambio de variables para obtener una representación mas simétrica del Cf.

Comparando (I-73) con la definición de la AF (ec. I-39) se obtiene

$$A(u, x') = \exp(-i\pi u x') Cf(x', u). \quad (I-74)$$

Eligiendo  $g(x)=f(-x)$  el CS resulta:

$$Cf^-(x, u') = \exp(-i\pi x' u') \int f(x/2+x') f^*(x/2-x') \exp(2\pi i x' u') dx' \quad (I-75)$$

de la comparación de esta última, con la definición de la WDF (ec. I-1) resulta la siguiente igualdad

$$W(x, u') = 2 Cf^-(2x, 2u') \exp(-i\pi x u'). \quad (I-76)$$



Es decir que, despreciando un factor de escala, el CS con  $f(x)$  como función ventana da la AF de la función  $f(x)$ . Además, si la función es simétrica,  $f(x)=f(-x)$ , esta AF coincide con la WDF de la misma función.

#### I-6 CONCLUSION:

A lo largo de este capítulo se han presentado los formalismos E-F. Las propiedades que se han discutido sugieren un gran número de aplicaciones de estos formalismos al procesamiento de señales ópticas, algunas de las cuales serán desarrolladas en los capítulos III y IV.

Se ha visto además que existe una relación matemática formal entre las distintas funciones E-F. Esto sugiere que todas ellas podrían ser consideradas como casos particulares de una única función mas general. A tal efecto G. Eichmann & B. Dong /27/ introdujeron el concepto de Función Espacio Fase Generalizada, que, para señales 1-D, permite, mediante el filtrado espacial, o de frecuencias espaciales, representar a la WDF, la AF, a CS y al LS, eligiendo adecuadamente la función filtro.

A lo largo de los siguientes capítulos, se mantendrá la identidad de cada una de las representaciones vistas; respetando los distintos orígenes de las mismas y considerando que esto permite interpretar mas claramente los resultados obtenidos.

## REFERENCIAS:

- /I-1/ A. Papoulis, "Ambiguity Fuction in Fourier Optics", J. Opt. Soc. Am. 64, (1974), 779.
- /I-2/ M.J. Bastiaans, " The Wigner Distribution Function applied to optical signals and systems", Optics Comm. , 25, (1978), 26.
- /I-3/ H. O. Bartelt, K. -H. Brenner and A. W. Lohmann, "The Wigner Distribution Function and its Optical Production", Optics Comm. 32, (1980), 32.
- /I-4/ M. J. Bastiaans, "The Wigner Distribution Function of partially coherent lighth" Opt. Acta, 28, (1981), 1215.
- /I-5/ A. Walther, "Radiometry and coherence", J. Opt. Soc. Am., 58, (1968), 1256.
- /I-6/ J.P. Guigay, "The Ambiguity Fuction in diffraction and isoplanatic imaging by partially coherent beams", Optics Comm., 26, (1978), 136.
- /I-7/ K.H. Brenner and J.O. Castañeda, "Ambiguity Fuction and Wigner Distribution Function applied to partially coherent imaginery" Opt. Acta, 31, (1984), 213.
- /I-8/ K.H. Brenner, A.W. Lohmann and J.O. Castañeda, "The Ambiguity Fuction as a polar display of the OTF", Optics Comm., 44, (1983), 323.
- /I-9/ J.O. Castañeda, W. D. Furlan y E. E. Sicre, "Formulación de la razón de Strehl basada en la Función de Distribución de Wigner", 71a. Reunión de la A.F.A., La Cumbre, Octubre de 1986.
- /I-10/ E. Wigner, "On the quantum correction for the thermodinamic equilibrium", Phys. Rev., 40, (1932), 749.
- /I-11/ N.G. de Bruijn, "A theory of generalized funtions, with applications to Wigner Distributions and Weyl Correspondence", Nieuw Archief voor Wiskunde (3), 21, (1973), 205.
- /I-12/ Born & Wolf, "Principles of Optics", N.Y. Pergamon, 1978.
- /I-13/ O. Bryngdahl, "Geometrical transformations in optics", J. Opt. Soc. Am., 64, (1974), 1092.

- /I-14/ J-Z Jiao, B. Wang and H. Liu, "Wigner Distribution Function and optical geometrical transformation" Appl. Opt. 23, (1984), 1249.
- /I-15/ J.E. Moyal, "Quantum mechanics as a statistical theory". Proc. Cambridge Philos. Soc., 45, (1949), 99.
- /I-16/ N.G. de Bruijn "Uncertainty principles in Fourier Analysis" in Inequalities, O. Shisha Editor (Academic Press, New York, 1967).
- /I-17/ A. Papoulis, "Systems and transformations with applications in Optics", Mc. Graw-Hill, New York, 1968.
- /I-18/ E. Wolf, "Coherence and Radiometry", J. Opt. Soc. Am., 68, (1978), 6.
- /I-19/ R. Winston & W.T. Weston, "Geometrical vector flux and some new nonimaging concentrators", J. Opt. Soc. Am., 69, (1979), 532.
- /I-20/ M.J. Bastiaans, "The Wigner Distribution Function and Hamilton Characteristics of a geometric-optical system.", Optics Comm., 30, (1979), 321.
- /I-21/ P.M. Woodward, "Probability and Information Theory with Applications to Radar", Pergamon, New York, 1953.
- /I-22/ H. Bartlett, J.O. Castañeda and E.E. Sicre, "Misfocus tolerance seen by simple inspection of the Ambiguity Function", Appl. Opt. 23, (1984), 2693.
- /I-23/ J.O. Castañeda and E.E. Sicre, "Bilinear optical systems Ambiguity Function and Wigner Distribution Function representations" Opt. Acta, 31, (1984), 255.
- /I-24/ H.H. Szu and A. Blodgett, "Wigner Distribution Function and Ambiguity Function", Optics in Four Dimensions, (1980), ed. por M. Machado y L. Narducci, AIP Conf. Proc. No.65, N.Y. Am. Inst. Phys., p.355
- /I-25/ R. Bamler and H. Glunder, "The Wigner Distribution Function of 2-D signals coherent -optical generation and display", Opt. Acta, 30, (1983), 1789.
- /I-26/ S.I. Grosz, W.D. Furlan, E.E. Sicre and M. Garavaglia, "Display of the Local Spectrum: A pseudocoloring approach.", Appl. Opt., 26, (1987), 971.

/I-27/ G. Eichmann and B.Z. Dong, "Two dimensional optical filtering of 1-D signals", Appl. Opt., 21, (1982), 3152.