DUPLICADO

114

UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS
DEPARTAMENTO DE FISICA

TESIS DOCTORAL

"TEORIAS ANOMALAS Y CUANTIFICACION ESTOCASTICA"

HUGO SANTOS MONTANI

DIRECTOR DE TESIS: FIDEL A. SCHAPOSNIK

1

INDICE

CAPITULO I

" INTRODUCCION "

Introducción

La teoría de procesos estocásticos juega un rol fundamental en la descripción de sistemas que no se comportan en forma determinista. Tales sistemas ocurren en muchos campos de la ciencia.

A partir de una idea original de G.Parisi y Y.S.Wu, se implementó un método de cuantificación de teorías de campos que también utiliza a los procesos estocásticos. En este contexto intervienen como generadores de valores de expectación cuánticos.

Este nuevo método es una valiosa alternativa a los tradicionales de cuantificación canónica y integración funcional. En efecto, el método de cuantificación estocástica introduce un tratamiento más intuitivo del proceso de cuantificación, sumandose a esto toda la potencialidad de la teoría de procesos estocásticos.

Ya en la cuantificación via integral funcional se introduce la noción de promedio sobre un sistema estadístico, donde el espacio muestral es el espacio de fases o el de configuraciones. En este punto es donde nace la idea central del método: el considerar al sistema cuántico como el estado límite de equilibrio de un proceso estocástico que evoluciona en un tiempo ficticio τ. La transición de la teoría clásica a la teoría cuántica resulta entonces particularmente simple y completamente general.

Para cuantificar una teoría bosónica utilizando el método estocástico, solo se necesita introducir en las variables dinámicas una dependencia en el tiempo ficticio τ y, en las ecuaciones de movimiento, dos nuevos términos: una fuerza aleatoria y una fuerza de fricción. La varianza de la fuerza aleatoria genera las fluctuaciones cuánticas, mientras que la fuerza de fricción, expresada por la derivada de las variables dinámicas respecto del tiempo estocástico τ, es responsable de transformar la "energía", entregada por la fuerza aleatoria, en "calor". En términos termodinámicos, esto significa poner un sistema estadístico en contacto con un reservorio de calor, de modo que el sistema evolucione en el tiempo estocástico hasta alcanzar el equilibrio térmico. La condición fundamental es que dicho estado de equilibrio esté descripto por la distribución de Boltzman e^{-S}, donde S es la acción del sistema original.

Obviamente, el proceso estocástico que tiene a la Teoría Cuántica de Campos como estado límite de equilibrio no es único. En la libertad para elegir este proceso es donde reside una parte de las potencialidades del método.

El éxito del trabajo original de Parsi-Wu reside en haber obtenido un desarrollo perturbativo para una teoría de gauge sin necesidad de fijar el gauge y, por lo tanto, evitando las ambigüedades de Gribov. Desarrollos posteriores sumaron a este importante resultado inicial, nuevas posibilidades de realizar cálculos numéricos y no perturbativos para teorías de campos ordinarias.

Por otra parte, el método incorpora en forma natural una técnica de regularización propia aprovechando la existencia de una nueva coordenada, para evitar las divergencias originadas en el producto de operadores en un mismo punto. Esta técnica, denominada "Regularización Estocástica", se acopla perfectamente al método de cuantificación estocástica, generando así un método poderoso y elegante para trabajar en Teoría Cuántica de Campos.

Dentro de la cuantificación estocástica, un aspecto que no había sido tratado en profundidad es el de cómo las simetrías físicas de una teoría de campos se manifiestan en las ecuaciones estocásticas que intervienen en el método.

Uno de los objetivos de esta Tesis es, justamente, profundizar en este punto explotando la libertad en la elección del proceso estocástico involucrado. Veremos que un análisis cuidadoso del procedimiento de cuantificación permite clarificar el comportamiento del proceso estocástico bajo simetrías de la acción que describe al sistema físico.

El análisis de las simetrías de una teoría y, cómo se ven afectados los métodos de cuantificación (y de regularización), tiene importancia central en Teoría Cuántica de Campos. El estudio de las violaciones de simetrías clásicas por el proceso de cuantificación, fenómeno denominado *anomalía*, es un area de activas investigaciones en esta década. La aparición de anomalías pone en peligro la consistencia, renormalizabilidad y unitariedad de una teoría, por lo que es necesario introducir mecanismos que eliminen este problema. La cancelación de anomalías es un restricción muy fuerte sobre los modelos teóricos. Por ejemplo, el número de teorías de cuerdas viables se ve drásticamente reducido cuando se exije la cancelación de las anomalías gravitatorias y de gauge. El mismo criterio, aplicado al Modelo Estandar, en conexión con las anomalías quirales, conduce a un ajuste del contenido de las familias fermiónicas (quarks y leptones).

A causa de estas anomalías, las teorías de gauge con fermiones de Weyl, en dimensión par, presentan serios obstáculos para su cuantificación. La correspondiente acción efectiva no está definida a menos que se introduzcan nuevos grados de libertad fermiónicos, rompiendo de este modo la invarianza de gauge en forma explícita. Existen varias propuestas para obtener teorías consistentes y unitarias a partir de una teoría de gauge con fermiones de Weyl (Jackiw y Rajaraman[1]; Faddeev y Shatashvili[2]; Babelon, Schaposnik y Viallet[3]). Es importante destacar que en la propuesta de Faddeev y Shatshvili se obtiene una acción efectiva invariante de gauge en la que los elementos del grupo de gauge adquieran status de variables dinámicas. Otras propuestas implican el ajuste del contenido fermiónico, agregado de fermiones auxiliares con masas muy grandes respecto de las masas físicas, etc.

En todos los casos, el cálculo de las corrientes anómalas depende fuertemente del método de regularización: él es quien determina el comportamiento bajo la acción de transformaciones de gauge.

Casi todas las investigaciones en este dominio han sido planteadas en una formulación covariante Lagrangeana, utilizando técnicas de la integral funcional. Una formulación Hamiltoniana, basada en la cuantificación canónica, aún no ha sido presentada en forma completa, a pesar de que existen algunos resultados parciales coincidentes con los que da la formulación Lagrangeana.

De ahí el interés en utilizar una tercera alternativa para cuantificar teorías con anomalías, basada en el método estocástico.

Justamente, este es uno de los objetivos de esta Tesis. En este contexto, utilizando los resultados sobre el tratamiento de simetrías al que nos referimos más arriba, teorías de gauge anómalas en dos y cuatro dimensiones.

La Tesis está organizada de la siguiente manera. En el capítulo II veremos una introducción detallada a los sistemas aleatorios y procesos estocáticos. El objetivo de este capítulo es proporcionar las herramientas necesarias y, a la par, fundamentar la formulación estocástica de los capíulos posteriores.

En el capítulo III introduciremos el método de cuantificación estocástica en Teoría de Campos, los desarrollos perturbativos a partir de la ecuación de Langevin y el método de regularización estocástica.

La cuantificación de campos de gauge y campos fermiónicos se presenta en el capítulo IV, donde introducimos nuestros primeros resultados originales en lo que respecta a simetrías físicas en el método estocástico y cuantificación de fermiones de Weyl (de una sola quiralidad).

En el capítulo V, aplicamos el método de cuantificación estocástica a modelos quirales bidimensionales, presentando nuestra propuesta para obtener, a pesar de las anomalías, una teoría unitaria y consistente. Este capítulo se complementa con el capítulo VI, donde analizamos el problema de las anomalías en teorías de gauge no-abelianas con fermiones de Weyl en cuatro dimensiones, utilizando la propuesta del capítulo anterior. Esto nos permitirá obtener las llamadas anomalías covariante y consistente, de distinto interés físico, por variación de un parámetro de regularización.

Finalmente, en el capítulo VII exponemos nuestras conclusiones sobre los resultados obtenidos.

<u>**Referencias.**</u>

(1)-R.Jackiw, R.Rajaraman; Phys.Rev.Lett. 54 (1985), 1219.

(2)-L.D.Faddeev, S.L.Shatashvili; Phys.Lett.B 167 (1986), 225.

(3)-O.Babelon, F.A.Schaposnik, C.M.Viallet; Phys.Lett.B 177 (1986), 385.

CAPITULO II

" INTRODUCCION A LOS PROCESOS ESTOCASTICOS "

En este capítulo daremos una detallada introducción al cálculo de probabilidades y a la teoría de procesos estocásticos, orientada a fundamentar el Método de Cuantificación Estocástica. Introduciremos las funciones de variables aleatorias y de procesos aleatorios, para luego pasar a describir los procesos markovianos. Construiremos en forma general la ecuación de Fokker-Planck, aplicándola a ecuaciones de fluctuación generales para, finalmente, desarrollar el caso específico de la ecuación de Langevin con fuente de ruido gaussiana (eje del Método de Cuantificación Estocástica) y su ecuación de Fokker-Planck asociada.

I- Introducción al cálculo de probabilidades.

Sea ξ una variable aleatoria y $P(\xi)$ la distribución asociada, sujeta a la condición de normalización :

$$\int d\xi \; P(\xi) = 1 \tag{1.1}$$

El valor medio de cualquier función de ξ está dado por:

$$\langle f(\xi) \rangle = \int d\xi \; P(\xi) \; f(\xi) \tag{1.2}$$

Es usual trabajar con la transformada de Fourier $\theta_{\xi}(u)$ de la distribución $P(\xi)$:

$$\theta_{\xi}(u) = \int d\xi \; e^{iu\xi} \; P(\xi) = \langle \; e^{iu\xi} \; \rangle \tag{1.3}$$

$\theta_{\xi}(u)$ se denomina función característica y como veremos a continuación caracteriza completamente la variable aleatoria ξ.

Los momentos m_n de la variable aleatoria ξ, definidos por la siguiente expresión :

$$m_n = \langle \; \xi^n \rangle_{\xi} \qquad n = 1,2,... \quad , \tag{1.4}$$

son generados por derivación a partir de la función característica:

$$m_n = (-i) \; \frac{d^n}{du^n} \theta_{\xi}(u) \Big|_{u=0} \tag{1.5}$$

Recíprocamente, el conocimiento de los momentos m_n nos permite calcular la función característica, ya que :

$$\theta_\xi(u) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(iu)^n}{n!} m_n \tag{1.6}$$

Tomando el logaritmo de esta expresión se obtiene el desarrollo en cumulantes k_n :

$$\ln \theta_\xi(u) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(i)^n}{n!} k_n \tag{1.7}$$

Comparando (1.6) y (1.7) se obtienen las relaciones entre los cumulantes y los momentos, por ejemplo :

$$\begin{aligned} k_1 &= m_1 \\ k_2 &= m_2 - m_1^2 \\ k_3 &= m_3 - 3m_1m_2 + 2m_1^3 \end{aligned} \tag{1.8}$$

Definiremos algunas cantidades útiles como la varianza o dispersión $\mathbb{D}$ y la desviación estandar σ :

$$\begin{aligned} \mathbb{D} = k_2 &= \langle\xi^2\rangle - \langle\xi\rangle^2 \\ \sigma &= [\mathbb{D}\xi]^{1/2} \end{aligned} \tag{1.9}$$

Es importante estudiar el caso de una variable aleatoria η que es función de otra variable aleatoria ξ, $\eta = g(\xi)$. Suponiendo que conocemos la distribución de ξ, la distribución de probabilidad de η está dada por la relación :

$$P_\eta(y) = \int dx\ \delta[g(x)-y]\ P_\xi(x) \tag{1.10}$$

Estudiemos ahora la correlación entre variables aleatorias. Supongamos que tenemos r variables aleatorias $\xi_1,\xi_2,...,\xi_r$ y sea $P_{\xi_1...\xi_r}(x_1,...,x_r)$la distribución de probabilidad normalizada, es decir :

$$\int d\xi_1...d\xi_r\ P_{\xi_1...\xi_r}(x_1,...,x_r) = 1$$

Por simplicidad consideremos el caso en que tenemos 2 variables aleatorias ξ_1 y ξ_2.

La distribución de probabilidad de una de las variables, por ejemplo ξ_1, está dada por :

$$P(\xi_1) = \int d\xi_2\ P(\xi_1,\xi_2) \tag{1.11}$$

Supongamos que conocemos el valor de una de las variables y la otra permanece indeterminada.Esta situación nos conduce al concepto de distribución o densidad de probabilidad condicional de, por ejemplo, ξ_1 dado el valor de ξ_2 :

$$P(\xi_1|\xi_2) = \frac{P(\xi_1,\xi_2)}{\int d\xi_1\ P(\xi_1,\xi_2)} \tag{1.12}$$

que satisface la condición de normalización :

$$\int d\xi_1\ P(\xi_1|\xi_2) = 1 \tag{1.13}$$

En el caso $P(\xi_1|\xi_2)=P(\xi_1)$, resulta $P(\xi_1,\xi_2)=P(\xi_1)P(\xi_2)$, lo que significa que las variables ξ_1 y ξ_2 son estadísticamente independientes.

La función característica de un problema de r variables aleatorias es:

$$\theta(u_1,u_2,\ldots,u_r)= \langle \exp i(u_1\xi_1+u_2\xi_2 +\ldots+u_r\xi_r)\rangle_{\xi_1\xi_2\ldots\xi_r} \tag{1.14}$$

de modo que los momentos están dados por la siguiente relación :

$$\langle\xi_1\ldots\xi_r\rangle= \frac{1}{i^r}\,\frac{\partial^r\theta(u_1,\ldots,u_r)}{\partial u_1\ldots\partial u_r} \tag{1.15}$$

La fórmula correspondiente para la correlación múltiple de orden r se obtiene reemplazando la función característica por su logaritmo :

$$\mathbb{K}(\xi_1,\ldots,\xi_r) = \frac{1}{i^r}\,\frac{\partial^r \ln\theta(u_1,\ldots,u_r)}{\partial u_1\ldots\partial u_r}\bigg|_{u_1=\ldots=u_r} \tag{1.16}$$

II-Procesos aleatorios.

Consideremos una función aleatoria $\xi(t)$ de un argumento real t que varía en el intervalo [0,T]. Esto significa que en cada valor de t tenemos una variable aleatoria ξ. En estas circunstancias decimos que $\xi(t)$ describe un "proceso aleatorio".

Si tomamos r valores arbitrarios en el intervalo [0,T], los valores $\xi(t_1),\ldots,\xi(t_r)$ constituyen una familia de variables aleatorias. A la densidad de probabilidad de que ξ tome el valor x_1 en el instante

t_1, x_2 en el instante t_2, y así hasta el valor x_r en el instante t_r, la anotaremos como $P_r(x_1,\dots,x_r;t_1,\dots,t_r)$.

P_r satisface las siguientes condiciones :

-condición de simetria

$$P_r(x_1,\dots,x_k,\dots,x_l,\dots,x_r)= P_r(x_1,\dots,x_l,\dots,x_k,\dots,x_r) \qquad (2.1)$$

-condición de compatibilidad

$$P_r(x_1,\dots,x_r;t_1,\dots,t_r)=\int dx_{r+1}\dots dx_{r+k}P_{r+k}(x_1,\dots,x_{r+k};t_1,\dots,t_{r+k}) \qquad (2.2)$$

En algunos casos es posible introducir una probabilidad funcional la cual define una ditribución de probabilidad continua sobre un espacio de funciones apropiado.

La función caracteristica se define como :

$$\theta_r(u_1,\dots,u_r;t_1,\dots,t_r) = \langle \exp i\textstyle\sum_{j=1}^{r} u_j\xi(t_j) \rangle \qquad (2.3)$$

En los casos en que se puede definir una distribución de probabilidad funcional, la suma se transforma en una integral sobre el tiempo.

Los valores medios $\qquad \langle\xi(t_1)\dots\xi(t_r)\rangle = m_r(t_1, \quad ,t_r) \qquad (2.4)$

considerados como funciones de $t_1,\dots,t_r$ son llamadas funciones momento.

Si conocemos las funciones momento podemos reconstruir la función caracteristica :

$$\theta_r(u_1,...,u_r;t_1,...,t_r)=\sum_{j=1}^{r}\frac{i^j}{j!}\sum_{\alpha...\omega=1}^{r} m_j(t_\alpha,...,t_\omega)\ u_\alpha...u_\omega \qquad (2.5)$$

la cual también puede ser escrita en términos de las funciones de correlación :

$$\theta_r(u_1,...,u_r;t_1,...,t_r) = \exp\ \{\ \sum_{j=1}^{r}\frac{i^j}{j!}\sum_{\alpha...\omega=1}^{r} k_j(t_\alpha,...,t_\omega)\ u_\alpha...u_\omega\} \qquad (2.6)$$

Desarrollando (2.6) y comparando con (2.5) se obtiene, por ejemplo :

$$\begin{aligned} m_1 &= k_1(t_1) \\ m_2(t_1,t_2) &= k_2(t_1,t_2) + k_1(t_1)k_2(t_2) \end{aligned} \qquad (2.7)$$

Los procesos aleatorios son también llamados *procesos estocásticos*. Un proceso estocástico se dice que es estacionario si sus características estadísticas son invariantes bajo traslaciones temporales. Por lo tanto, la distribución de probabilidad $P_n(\xi_1,...,\xi_n;t_1,...,t_n)$, los momentos $m_n(t_1,...,t_n)$ y las funciones de correlación $k_n(t_1,...,t_n)$ no dependen de la posición absoluta de los puntos $t_1,...,t_n$ sobre el eje temporal, sino de su posición relativa :

$$k_n(t_1,...,t_n) = k_n(t_1+a,...,t_n+a) \qquad (2.8)$$

eligiendo $a = -t_1$, obtenemos :

$$k_n(t_1,...,t_n)= k_n(t_2-t_1,t_3-t_1,...,t_n-t_1) \qquad (2.9)$$

Para n =1 y n = 2 resulta

$$k_1(t) = m_1(t) = m$$

$$k_2(t_1,t_2) = k_2(t_2-t_1) \qquad k(\tau) = k(-\tau) \tag{2.10}$$

La segunda función de correlación $k(\tau)$ puede ser escrita como :

$$k(\tau) = \sigma^2 R(\tau) \tag{2.11}$$

donde $\sigma = \sigma[\xi(t)] = \sqrt{k(0)}$ es la desviación estandar del proceso $\xi(t)$ y $R(\sigma)$ es el coeficiente de correlación con la propiedad $R(0) = 1$.

Introduzcamos ahora el concepto de densidad espectral $S[\xi,\omega]$ de un proceso estacionario $\xi(t)$:

$$S[\xi,\omega] = 2\int_{-\infty}^{\infty} d\tau \; e^{i\omega\tau} \langle \xi \; \xi_\tau \rangle \tag{2.12}$$

donde $\xi = \xi(t)$ y $\xi_\tau = \xi(t+\tau)$. Para procesos con valor medio cero $S[\xi,\omega]$ es la transformada de Fourier de la función de correlación $k(\tau)$.

Los procesos Gaussianos, de vital importancia en el método de cuantificación estocástica, se definen como aquellos procesos cuyas funciones de correlación de orden mayor que dos se anulan. En este caso usando la expresión (2.7) podemos construir la función característica :

$$\theta_n(u_1,\dots,u_n;t_1,\dots,t_n) = \exp\left(i\sum_{\alpha=1}^{n} k_1(t_\alpha)\, u_\alpha - \frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta=1}^{n} k_2(t_\alpha,t_\beta)\, u_\alpha u_\beta\right) \tag{2.13}$$

y a su vez reconstruir la función de distribución de probabilidad antitransformando Fourier sobre cada variable u_ρ.

En (2.13), el término $\sum_{\alpha,\beta=1}^{n} k_2(t_\alpha,t_\beta)\, u_\alpha u_\beta$

puede ser escrito como : $\left(\sum_{\alpha=1}^{n} [\xi(t_\alpha)-k_1(t_\alpha)]\, u_\alpha\right)^2$

Esta expresión cuadrática semidefinida positiva asegura la convergencia de las integrales sobre u_ρ al antitransformar Fourier (2.13). Teniendo en cuenta esto, se obtiene :

$$P_n(\xi_1,\dots,\xi_n;t_1,\dots,t_n) = \tag{2.14}$$

$$\frac{(2\pi)^{n/2}}{(\det|k_2(t_\alpha,t_\beta)|)^{1/2}} \exp\{-1/2 \sum_{\alpha,\beta=1} [\xi(t_\alpha)-k_1(t_\alpha)]\, a_{\alpha\beta}\, [\xi(t_\beta)-k_1(t_\beta)]\}$$

donde $\det|k_2(t_\alpha,t_\beta)|$ es el determinante de la matriz de correlación y $a_{\alpha\beta}$ es la matriz inversa.

Un proceso descripto por una densidad de probabilidad de la forma (2.18) es llamado Gaussiano o normal.

Si $\xi(t)$ es un proceso gaussiano estacionario y consideramos el caso n=1, obtenemos la densidad de probabilidad unidimensional :

$$P[\xi(t)] = (2\pi\sigma)^{1/2} \exp[-\frac{1}{2\sigma}z(\xi(t)-m)^2] \tag{2.19}$$

ya que la matriz de correlación se reduce a un único coeficiente :

$$a_{11}=1/\sigma^2.$$

III-Procesos Markovianos y procesos relacionados.

Sea $x(t)$ un proceso aleatorio, y sea $x(t_1),...,x(t_n)$ un conjunto de sus valores en instantes consecutivos de tiempo $t_1>t_2>...>t_n$.
La distribución de probabilidad condicional del valor $x(t)$ en el último instante $t=t_1$ es :

$$P[x(t_1)|x(t_2),...,x(t_n)] = P_n[x(t_1),...,x(t_n)]/P_{n-1}[x(t_2),...,(t_n)] \tag{3.1}$$

El proceso $x(t)$ es un proceso de Markov si la distribución de probabilidad condicional (3.1) depende solamente del último valor $x(t_2)$ y no de los precedentes. Por lo tanto :

$$P[x(t_1)|x(t_2),...,x(t_n)] = P_{t1,t2}[x_1,x_2] \tag{3.2}$$

Haciendo uso de la de la condición (2.2) y de la ecuación (3.1) se obtiene la siguiente relación de compatibilidad :

$$\int dx_n\ P[x(t_1)|x(t_2),...,x(t_n)]\ P[x(t_2),...,x(t_n)] = \tag{3.3}$$

$$P[x(t_1)|x(t_2),...,x(t_{n-1})]\ P[x(t_2),...,x(t_n)]$$

Sustituyendo (3.2) en (3.3) podemos ver que para los procesos markovianos esta relación no depende de n .Por lo tanto :

$$P_{t1,t2}[x_1,x_2] = P[x(t_1)|x(t_2)] \tag{3.4}$$

$P_{t1,t2}[x_1,x_2]$ es la probabilidad de transición del estado (x_2,t_2) al estado (x_1,t_1) con $t_1>t_2$.

Iterando la definición de probabilidad condicional obtenemos :

$$P[x(t_1),,...,x(t_n)]=$$

$$P[x(t_1)\,|\,x(t_2),...,x(t_n)]P[x(t_2)\,|\,x(t_3),...,x(t_n)]...P[x(t_{n-1})\,|\,x(t_n)]P[x(t_n)] \qquad (3.5)$$

que en el caso markoviano se escribe de la siguiente forma :

$$P[x(t_1),...,x(t_n)]=P_{t1,t2}[x_1,x_2]\;P_{t2,t3}[x_2,x_3]...P_{tn-1,tn}[x_{n-1},x_n]P[x(t_n)] \qquad (3.6)$$

Esto significa que si conocemos la distribución de probabilidad $P(x_n)$ de una variable aleatoria x_n y conocemos la probabilidad de transición de $x(t)$, podemos conocer la distribución de probabilidad de n variables aleatorias $P[x(t_1),...,x(t_n)]$; es decir que $P[x(t_n)]$ y $P_{t,t'}[x,x']$ describen completamente un proceso markoviano.

La probabilidad de transición $P_{t1,t2}[x_1,x_2]$ debe satisfacer la condición de normalización :

$$\int dx_1\;P_{t1,t2}[x_1,x_2] = 1 \qquad (3.7)$$

Integrando (3.6) respecto de algun punto intermedio, se obtiene la ecuación de Chapman-Kolmogorov :

$$\int dx_2\ P_{t1,t2}[x_1,x_2]\ P_{t2,t3}[x_2,x_3]=P_{t1,t3}[x_1,x_3] \tag{3.8}$$

Estudiemos ahora la evolución temporal de la distribución de probabilidad unidimesional $P[x(t_1)]=P(x_1,t_1)$ en un proceso markoviano. Sea $x(t_2)$ el evento inmediato anterior al $x(t_1)$, entonces

$$P(x_1,t_1) = \int dx_2\ P_{t1,t2}[x_1,x_2]\ P(x_2,t_2) \tag{3.9}$$

Supongamos que t_1 y t_2 están separados por un intervalo infinitesimal τ :

$$t_2 = t \qquad\qquad x_2 = x$$

$$t_1 = t+\tau \qquad\qquad x_1 = x_\tau$$

$$P(x,t+\tau) = P_\tau(x_\tau) \qquad\qquad P_{t1,t2}[x_1,x_2] = P_\tau(x_\tau,x)$$

$$P_\tau(x_\tau) = \int dx\ P_\tau(x_\tau,x)\ P(x) \tag{3.10}$$

Consideremos ahora al incremento $(x-x_\tau)$ como una variable aleatoria. La función característica correspondiente a este proceso es :

$$\theta(u,x) = \langle\ e^{iu(x_\tau-x)}\ \rangle = \int dx_2\ \exp\ [iu(x-x_\tau)]\ P_\tau(x_\tau,x) \tag{3.11}$$

y la transformada inversa da la función de distribución de probabilidad :

$$P_\tau(x_\tau,x) = \frac{1}{2\pi}\int du\ \theta(u,x)\ \exp\ [-iu(x-x_\tau)] \tag{3.12}$$

Llevando esta expresión a (3.10) se tiene :

$$P_\tau(x_\tau) = \frac{1}{2\pi} \int du\, dx\, \theta(u,x) \exp[-iu(x-x_\tau)]\, P(x) \tag{3.13}$$

si desarrollamos la función característica en sus momentos $m_s(x)=\langle(x_\tau-x)^s\rangle$, e integramos explícitamente sobre u se llega a expresar $P_\tau(x_\tau)$ de la siguiente forma :

$$P_\tau(x_\tau) = P(x_\tau) + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{s!} \left(-\frac{\partial}{\partial x}\right)^s [m(x)\, P(x_\tau)] \tag{3.14}$$

Dividiendo por τ y tomando el límite para $\tau \to 0$ se obtiene :

$$\frac{\partial P(x)}{\partial t} = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{s!} \left(-\frac{\partial}{\partial x}\right)^s [K_s(x)\, P(x_t)] \tag{3.15}$$

donde

$$K_s(x) = \lim_{\tau\to 0} \langle(x_\tau-x)^s\rangle/\tau \tag{3.16}$$

siempre y cuando exista este límite. La ecuacion (3.15) es denominada *ecuación estocástica o cinética*.

Los momentos m_s pueden expresarse, a primer orden en τ, en funcion de $K_s(x)$ invirtiendo (3.16) :

$$m_s(x) = K_s(x)\,\tau + O(\tau^2) \tag{3.17}$$

Si en lugar de trabajar con el incremento $x_\tau-x$ consideramos el proceso $\xi(t) = \frac{dx(t)}{dt}$, tal que

$$x_\tau - x = \int_t^{t+\tau} dt'\xi(t') \tag{3.18}$$

los cumulantes k_s pueden expresarse en términos de las funciones de correlación $k_s(t_1,...,t_s)$ del proceso $\xi(t)$:

$$k_s(x) = \int_t^{t+\tau} dt_1 \; ...dt_s \quad k_s(t_1,...,t_s) \qquad (3.19)$$

Por otra parte, de acuerdo con las expresiones (1.8), que relacionan a los cumulantes con los momentos m_s, podemos expresar a los primeros en función de $K_s(x)$ a primer orden en τ :

$$k_s(x) = K_s(x) \; \tau \; + \; O(\tau^2) \qquad (3.20)$$

Comparando estas dos últimas ecuaciones, se obtienen las funciones de correlación $k_s(t_1,...,t_s)_\xi$ en términos $K_s(x)$

$$k_s(t_1,...,t_s)_\xi = K_s(x) \quad \delta(t_1-t_2)...\delta(t_1-t_s) \; + \; A_S \qquad (3.21)$$

donde la función A_s, una vez introducida en (3.20) produce términos de orden τ^2,τ^3, etc. Las funciones $K_s(x)$ se denominan coeficientes de intensidad del proceso $\xi(t)$.

Concluimos entonces, que los procesos markovianos están intimamente relacionados a ciertos procesos aleatorios especiales, cuyas funciones de correlación contienen distribuciónes δ . Este tipo de procesos se denominan "delta correlacionados".

Definimos entonces un proceso estocástico "δ-correlacionado" como aquel proceso cuyas funciones de correlación toman la siguiente forma:

$$k_s(t_1,...,t_s)_\xi \; = \; K_s(x) \; \delta(t_1-t_2)...\delta(t_1-t_s) \qquad (3.22)$$

De modo que los cumulantes son infinitos. En el caso en que el proceso es estacionario, los coeficientes K_s son constantes.
Un caso especial es Gaussiano estacionario δ-correlacionado. Supongamos además que $\xi(t)$ tiene valor medio nulo, entonces la función de correlación de segundo orden es la única que no se anula

$$k_2(t_1-t_2) = K_2 \; \delta(t_1-t_2) \tag{3.23}$$

La densidad espectral de este proceso es :

$$S[\xi,\omega] = 2 \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \; k(\tau) \; e^{i\omega\tau} = 2 \; K_2 \tag{3.24}$$

Por lo tanto $S[\xi,\omega]$ no depende de ω. Un proceso con estas características es denominado "ruido blanco".

IV-La ecuación de Fokker-Planck.

Un proceso markoviano se dice que es continuo, si sus coeficientes de intensidad de orden mayor que dos, son nulos. En este caso la ecuación estocástica (3.15) se reduce a :

$$\frac{\partial P(x)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} [K_1(x) \; P(x)] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} [K_2(x) \; P(x)] \tag{4.1}$$

y se denomina *ecuación de Fokker-Planck* o *ecuación de difusión*.
Introduciendo la corriente de probabilidad $G(x)$, tal que

$$G(x) = K_1(x) \; P(x) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} [K_2(x) \; P(x)] \tag{4.2}$$

podemos escribir la ecuación de Fokker-Planck como la ecuación de conservación de la corriente de probabilidad :

$$\frac{\partial P(x)}{\partial t} + \frac{\partial G(x)}{\partial x} = 0 \qquad (4.3)$$

Para completar el problema planteado por la ecuación (4.1) debemos especificar las condiciones iniciales y de contorno.

Si la condición inicial es una distribución $\delta(x-x_o)$ en la ecuación de Fokker-Planck se puede reemplazar $P(x)$ por la probabilidad de transición $P_{tto}(x,x_o)$, ya que $P(x) = P_{tto}(x,x_o)\, P(x_o)$.

Veamos ahora las condiciones de contorno. Si $x(t)$ puede tomar valores entre $-\infty$ y $+\infty$, integrando la ecuación (4.3) sobre x y teniendo en cuenta que $\int dx\, P(x)=1$, concluimos que :

$$G(-\infty,t)=G(\infty,t). \qquad (4.4)$$

Generalmente también se cumplen las condiciones :

$$G(-\infty,t) = G(\infty,t) = 0$$
$$P(-\infty,t) = P(\infty,t) = 0 \qquad (4.5)$$

Una vez fijadas las condiciones de contorno y las condiciones iniciales, las soluciones de la ecuación de Fokker-Planck quedan unívocamente determinadas. En el caso particular en que los coeficientes $K_1(x)$ y $K_2(x)$ no dependen del tiempo, generalmente la distribución de probabilidad $P(x,t)$ evoluciona hacia una distribución $P_{est}(x)$, la cual no depende de la distribución inicial ni del tiempo t, es decir :

$$\frac{\partial}{\partial t} P_{est}(x) = 0 \qquad (4.6)$$

por lo tanto la corriente de probabilidad será constante :

$$G_{est}(x) = G_{est} = cte. \qquad (4.7)$$

Llevando esto a la ecuación (4.2) se obtiene una ecuación diferencial lineal para $P_{est}(x)$

$$\frac{\partial}{\partial x} [K_2(x)\ P_{est}(x)] - 2\ K_1(x)\ P_{est}(x) = -2\ G_{est} \qquad (4.8)$$

y la solución de esta ecuación es :

$$P_{est}(x) = \frac{C}{K_2(x)} \exp\left(2 \int_z^x dy\, \frac{K_1(x)}{K_2(x)}\right) - 2\, \frac{G_{est}}{K_2(x)} \int_z^x dx'\, \exp\left(\int_z^x dy\, \frac{K_1(x)}{K_2(x)}\right) \qquad (4.9)$$

donde C es una constante de integración y z es el límite de integración, también arbitrario.

Si elegimos las condiciones de contorno (4.5), la solución (4.9) se simplifica :

$$P_{est}(x) = \frac{C}{K_2(x)} \exp\left(2 \int_z^x dy\, \frac{K_1(x)}{K_2(x)}\right) \qquad (4.10)$$

Analizaremos ahora el caso de varios procesos aleatorios, $x_1(t),\ldots,x_n(t)$, descriptos por la probabilidad de transición :

$$P_{tt'}[x_1(t),\ldots,x_m(t);x_1(t'),\ldots,x_m(t')]=\frac{P[x_1,\ldots,x_m;x_1,\ldots,x_m]}{P[x_1,\ldots,x_m]}$$

(4.11)

Para un proceso markoviano continuo, la densidad de probabilidad unidimensional $P[x_1(t),\ldots,x_m(t)]$ satisface la ecuación multidimensional de Fokker-Planck :

$$\frac{\partial P(x_1,\ldots,x_m)}{\partial t} = -\sum_{\alpha=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_\alpha}[K_\alpha(x_1,\ldots,x_m)\; P(x_1,\ldots,x_m)] +$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta=1}^{m}\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}[K_{\alpha\beta}(x_1,\ldots,x_m)P(x_1,\ldots,x_m)]$$

donde los coeficientes K_α y $K_{\alpha\beta}$ son los coeficientes de intensidad definidos por :

$$K_\alpha = \lim_{\tau\to 0}\frac{1}{\tau}\langle x_{\alpha,\tau}-x_\alpha\rangle$$

$$K_{\alpha\beta} = \lim_{\tau\to 0}\frac{1}{\tau}\langle (x_{\alpha,\tau}-x_\alpha)(x_{\beta,\tau}-x_\beta)\rangle \qquad (4.13)$$

Cuando las fluctuaciones son isotrópicas la matriz $K_{\alpha\beta}$ es un múltiplo de la identidad : $K_{\alpha\beta}=K\;\delta_{\alpha\beta}$, y la ecuación de Fokker-Planck puede ser escrita de la forma :

$$\frac{\partial P(x_1,\ldots,x_m)}{\partial t} = -\sum_{\alpha=1}^{m}\frac{\partial G_\alpha}{\partial x_\alpha}$$

(4.14)

$$G_\alpha(x)=K_\alpha(x)P(x)-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}[K(x)P(x)]$$

V-Ecuación de fluctuación.

Sea x(t) un proceso estocástico debido a la acción de otro proceso $\xi(t)$ de modo que su comportamiento puede ser descripto por una ecuación diferencial de primer orden :

$$\frac{\partial x}{\partial t} = \varepsilon \; F[x,\xi(t)] \tag{5.1}$$

llamada ecuación de fluctuación, donde ε es un parámetro pequeño y F una función conocida de los argumentos x y ξ. Asumimos además, que el proceso $\xi(t)$ es estacionario y tiene tiempo de correlación finito.

Comencemos analizando el caso simple en que F no depende de x :

$$\frac{\partial x}{\partial t} = \varepsilon \; \xi(t) \tag{5.2}$$

entonces

$$x(t) = x(0) + \varepsilon \int_0^t dt' \; \xi(t) \tag{5.3}$$

donde x(0) es el valor inicial a t=0.

Si el valor inicial no es aleatorio, las funciones de correlación de x se obtiene a partir de la ecuación (5.3)

$$k_s(t_1,\ldots,t_s)_x = \varepsilon^s \int\ldots\int dt_1\ldots dt_s \, k_s(t_1,\ldots,t_s)_\xi \tag{5.4}$$

y los cumulantes se obtienen poniendo $t_1=\ldots=t_s$.

Ahora podemos construir la función característica del proceso

$x(t)-x(0)$:

$$\theta(u,t) = \exp \{ \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(iu)^s}{s!} k_s \} \tag{5.5}$$

Derivando respecto de t

$$\frac{\partial\theta(u,t)}{\partial t} = \sum \frac{(iu)^s}{s!}\frac{\partial k_s}{\partial t} \ \theta(u,t) \tag{5.6}$$

y teniendo en cuenta que

$$P[x(t)-x(0)] = \frac{1}{2\pi} \int du \ e^{-iu[x-x(0)]} \ \theta(u,t) \tag{5.7}$$

si ahora derivamos (5.7) respecto de t e introducimos (5.6) obtenemos

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \sum \frac{(-1)^s}{s!} \frac{\partial k_s}{\partial t} \frac{\partial^s P}{\partial x^s} \tag{5.9}$$

De este modo hemos obtenido un ecuación del tipo Fokker-Planck para un proceso no markoviano. Si tenemos en cuenta la ecuación (5.4) podemos ver que el cumulante de orden s es proporcional a ε^s. Así, si ε es pequeño podemos quedarnos con los términos de orden más bajo en ε.

Ahora estudiaremos el caso más general de la ecuación de fluctuación:

$$\frac{\partial x}{\partial t} = \varepsilon \ F(x,t) \tag{5.9}$$

con la condición inicial $x(t_o)= x_o$.Consideremos los incrementos

$\Delta(t,x)= x(t)-x_o$ de modo que :

$$\frac{\partial \Delta}{\partial t}= \frac{\partial x}{\partial t} = \varepsilon \; F(x,t) \qquad (5.10)$$

Si se desarrolla $F(x,t)$ en serie de Taylor en torno a x_o y a $\Delta(x,t)$ en serie de potencias de ε :

$$\Delta(x_o,t) = \varepsilon \; \Delta_1(x_o,t) + \varepsilon^2 \; \Delta_2(x_o,t) + \ldots$$

comparando ambos desarrollos y utilizando la ecuación (5.10) se pueden calcular los coeficientes Δ_n:

$$\Delta_1(x_o,t)=\int_{t_o}^{t} dt' F(x_o,t')$$

$$\Delta_2(x_o,t)=\int_{t_o}^{t} dt' \frac{\partial F(x_o,t)}{\partial x} \Delta_1(x_o,t') \qquad (5.11)$$

$$\Delta_3(x_o,t)=\int_{t_o}^{t} dt' \frac{\partial F(x_o,t)}{\partial x} \Delta_2(x_o,t') + \frac{1}{2} \int_{t_o}^{t} dt' \frac{\partial^2 F(x_o,t)}{\partial x^2} \Delta_1^2(x_o,t')$$

....

La función caracteristica de Δ es :

$$\langle e^{iu(x-x_o)} \rangle = 1 + \sum_{s=}^{\infty} \frac{(iu)^s}{s!} \; \langle \; \Delta^s(x-x_o) \; \rangle \qquad (5.12)$$

y por lo tanto su antitransformada de Fourier :

$$P(x|x_o)= [\; 1 + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s!} \; \frac{\partial^s}{\partial x^s} \; \langle \; \Delta^s(x-x_o) \; \rangle \;] \; \delta(x-x_o) \qquad (5.13)$$

Introduzcamos el operador L :

$$L = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s!} \frac{\partial^s}{\partial x^s} < \Delta^s(x-x_o) > \tag{5.14}$$

de este modo (5.13) puede escribirse como :

$$P(x|x_o) = (1 + L) \delta(x-x_o) \tag{5.15}$$

si se deriva esta ecuación respecto de t y se usa la misma ecuación para sustituir la distribución δ se obtiene :

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{\partial L}{\partial t} (1 + L)^{-1} P \tag{5.16}$$

Esta última ecuación estocástica es la correspondiente al proceso Δ.
Cuando el intervalo $t-t_o$ se incrementa las series $\frac{\partial L}{\partial t}(1+L)^{-1}$ convergen a una serie que es independiente del tiempo inicial t_o.
Supongamos que el parámetro ε de la ecuación de fluctuación (5.9) es pequeño y desarrollemos la ecuación estocástica (5.16) a orden ε^2

$$\frac{\partial L}{\partial t} (1+L)^{-1} = -\varepsilon \frac{\partial \langle F \rangle}{\partial x} - \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial x} \mathbb{K}[\frac{\partial F}{\partial x} ,\Delta_1] + \varepsilon^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \mathbb{K}[F,\Delta_1] + O(\varepsilon^3) \tag{5.17}$$

donde $\mathbb{K}$ es la covarianza o función de correlación doble.
Comparando (5.17) con la ecuación de Fokker-Planck (4.1) se identifican los coeficientes correspondientes

$$K_1(x) = \varepsilon \langle F(x) \rangle + \varepsilon^2 \mathbb{K}[\frac{\partial F}{\partial x} ,\Delta_1]$$

$$K_2(x) = 2 \varepsilon^2 \mathbb{K}[F,\Delta_1] \tag{5.18}$$

Si ahora usamos la expresión de los Δ_s en función de F(x)

$$K_1(x) = \varepsilon \langle F(x)\rangle + \varepsilon^2 \int_{t_o-t}^{0} d\tau \ \mathbb{K}[\frac{\partial F}{\partial x}, F_\tau]$$

$$K_2(x) = 2\ \varepsilon^2 \int_{t_o-t}^{c} d\tau \ \mathbb{K}[F(x), F_\tau(x)]$$

$$F_\tau(x) = F(x, t+\tau) \tag{5.19}$$

definiendo :

$$K(x) = 2\ \varepsilon^2 \int_{-\infty}^{0} d\tau \ \mathbb{K}[F(x), F_\tau(x)] \tag{5.20}$$

Entonces, cuando $t-t_o \to \infty$

$$K_\tau(x) \to K(x) \quad y \quad K_1(x) \to M(x) + 1/4\ K'(x) \tag{5.21}$$

donde $$M(x) = \varepsilon \langle F(x)\rangle$$

y $$K'(x) = 4\ \varepsilon^2 \int_{-\infty}^{0} d\tau \ \mathbb{K}[\frac{\partial F}{\partial x}, F_\tau] \tag{5.22}$$

De este modo la ecuación (5.16), a orden ε^2 y para tiempos $t-t_o$ mucho mayores que el tiempo de correlación de la función $F(x,\xi)$ o de la función $\xi(t)$, se puede considerar como la ecuación de Fokker-Planck :

$$\frac{\partial P(x)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} \{[M(x) + \frac{1}{4} K'(x)]\ P(x)\} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} [K(x)\ P(x)] \tag{5.23}$$

Esto significa, que en las condiciones mencionadas el proceso x(t) es aproximadamente markoviano.

De acuerdo con la expresión (3.17)

$$K_1(x) = \lim_{\tau \to 0} \langle (x_\tau - x) \rangle / \tau$$

por lo tanto
$$K_1(x) = \langle \frac{dx}{dt} \rangle = \varepsilon \; \langle F[x(t),\xi(t)] \rangle \qquad (5.24)$$

En esta última ecuación hemos tenido en cuenta la correlación entre los procesos x(t) y ξ(t), mientras que en (5.22) x(t) era considerado como un proceso no correlacionado a ξ(t). El término adicional 1/4 K'(x) da cuenta de la correlación existente entre ambos procesos.

Una situación particularmente importante es aquella en la cual, la función F(x,ξ) es tal que :

$$\int_{-\infty}^{0} d\tau \; K[\frac{\partial F}{\partial x}, F_\tau] = \int_{-\infty}^{0} d\tau \; K[F, \frac{\partial F}{\partial x}] \qquad (5.25)$$

es decir, es simétrica con respecto a la reflexión temporal. En ese caso K'(x) puede ser considerada como la derivada de K(x) respecto de x :

$$K'(x) = \frac{\partial K(x)}{\partial x} \qquad (5.26)$$

y la ecuación de Fokker-Planck toma la forma :

$$\frac{\partial P(x)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} \{[M(x) \; P(x)\} + \frac{1}{4} \frac{\partial}{\partial x} \{K(x) \frac{\partial P(x)}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} [K(x) \; P(x)]\} \qquad (5.27)$$

Si además, M y K no dependen explícitamente del tiempo t, entonces (5.27) tiene la siguiente distribución estacionaria :

$$P_{est}(x) = \frac{C}{\sqrt{K(x)}} \exp \left(2 \int_{x1}^{x} dy \, \frac{M(y)}{K(y)} \right) \tag{5.28}$$

VI-Ecuación de Langevin.

Estudiaremos ahora el caso particular de ecuación de fluctuación, denominada ecuación de Langevin :

$$\frac{\partial x}{\partial t} = \varepsilon \, F[x,\xi(t)] = f(x) + g(x) \, \xi(t) \tag{6.1}$$

donde $f(x)$ y $g(x)$ son funciones conocidas y $\xi(t)$ es una perturbación aleatoria estacionaria con valor medio nulo y coeficiente de intensidad $\varkappa$,

$$\langle \xi(t) \rangle = 0 \qquad\qquad 2 \int_{-\infty}^{0} d\tau \, \langle \xi \xi_{\tau} \rangle = \varkappa \tag{6.2}$$

Entoces, de acuerdo con (5.21) y (5.22)

$$M(x) = f(x) \qquad\qquad K(x) = \varkappa \, g^{2}(x) \tag{6.3}$$

y la ecuación de Fokker-Planck será consecuentemente :

$$\frac{\partial P(x)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} \{ [f(x)P(x)] \} + \frac{1}{4} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \varkappa \, g^{2}(x) \, \frac{\partial P(x)}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} [\varkappa \, g^{2}(x)P(x)] \right\} \tag{6.4}$$

con distribución estacionaria

$$P_{est}(x) = \frac{C}{g(x)} \exp\left(\frac{2}{\varkappa} \int_{x_1}^{x} dy \, \frac{M(y)}{g^2(y)} \right) \tag{6.5}$$

El problema inverso, que consiste en encontrar la correspondiente fluctuación dada la ecuación de Fokker-Planck, tiene solución única si $\xi(t)$ es Gaussiano y δ-correlacionado :

$$\langle \xi_o(t) \rangle = 0 \qquad \langle \xi_o \xi_o(\tau) \rangle = \delta(\tau) \tag{6.6}$$

En tal caso se tiene :

$$g(x) = \sqrt{K_2(x)} \qquad f(x) = K_1(x) - 1/4 \frac{\partial}{\partial x} K_2(x) \tag{6.7}$$

Entonces a una ecuación de Fokker-Planck arbitraria como la (6.4), le corresponde la ecuación de Langevin

$$\frac{\partial x}{\partial t} = K_1(x) - 1/4 \frac{\partial}{\partial x} K_2(x) + \sqrt{K_2(x)}\, \xi_o(t) \tag{6.8}$$

Para concluir esta sección mencionaremos el hecho de que para un ruido Gaussiano las contribuciones de orden ε^3 son nulas.

VII-La ecuación de Langevin con ruido Gaussiano.

La ecuación de Langevin que veremos en esta sección es la que emplearemos en el Método de Cuantificación Estocástica en los capítulos siguientes.

Consideremos un proceso Gaussiano δ-correlacionado cuya distribución probabilidad es :

$$P[\xi(t)] = \exp\left[-\int_0^{\tau} dt\ \xi^2(t)/4\ \right], \tag{7.1}$$

es decir :

$$\langle\xi(t)\rangle = 0$$

$$\langle\xi(t_1)\xi(t_2)\rangle = 2\ K\ \delta(t_1-t_2)$$

Si este proceso es la fuente de ruido de otro proceso descripto por la ecuación de Langevin :

$$\frac{\partial x}{\partial t} = f(x) + \xi(t) \tag{7.2}$$

veremos que la ecuación de Fokker-Planck solo contiene derivadas hasta de segundo orden.

La distribución de probabilidad de x(t) está dada por la relación (1.10) :

$$P(x,t) = \langle\delta[x-x_\xi(t)]\rangle \tag{7.3}$$

donde $x_\xi(t)$ es una solución de la ecuación de Langevin (7.2) forzada por el ruido $\xi(t)$.

Tomando la derivada temporal de (7.3)

$$\frac{dP(x,t)}{dt} = \left\langle\ \frac{\partial\delta(x-x_\xi)}{\partial x_\xi}\ \frac{\partial x_\xi}{\partial t}\ \right\rangle,$$

utilizando la ecuación de Langevin y reemplazando la derivada respecto de x_ξ por la derivada respecto de x :

$$\frac{dP(x,t)}{dt} = - \frac{\partial}{\partial x} < \delta(x-x_\xi)\ f(x_\xi) > - \frac{\partial}{\partial x} <\delta(x-x_\xi)\ \xi(t)>$$

La presencia de la distribución δ permite reemplazar el argumento de f por x de modo tal que :

$$\frac{dP(x,t)}{dt} = - \frac{\partial}{\partial x} [f(x)P(x,t)] - \frac{\partial}{\partial x}<\delta(x-x_\xi)\ \xi(t)> \tag{7.4}$$

Ahora bien, el segundo término de la derecha puede ponerse en una forma muy simple teniendo en cuenta la forma explícita de la distribución del proceso $\xi(t)$, de donde finalmente se obtiene que :

$$<\delta(x-x_\xi)\ \xi(t)> = \frac{2K}{N} \int \mathcal{D}\xi \quad \frac{\delta\ \delta(x-x_\xi)}{\delta\xi(t)} \quad \exp\ [-\int_0^\tau dt\ \xi^2(t)/4\ ]$$

Por lo tanto

$$<\delta(x-x_\xi)\ \xi(t)> = -K \frac{\partial}{\partial x} < \delta(x-x_\xi) \frac{\delta}{\delta\xi(t)} x_\xi(t) > \tag{7.5}$$

Para calcular la derivada funcional de x_ξ respecto de ξ, hay que integrar la ecuación de Langevin respecto del tiempo :

$$x(t) = \int_0^t d\tau\ f(x) + \int_0^t d\tau\ \xi(\tau)$$

de donde se obtiene :

$$\frac{\delta x(t)}{\delta\xi(t)} = \int_0^t d\tau\ \delta(t-\tau) = \theta(0) = 1/2 \tag{7.6}$$

Retornando a (7.5)

$$\langle \delta(x-x_\xi)\ \xi(t)\rangle = -K\ \frac{\partial}{\partial x}\ P(x,t) \qquad (7.7)$$

y ahora a (7.4)

$$\frac{dP(x,t)}{dt} = -\ \frac{\partial}{\partial x}\ [f(x)\ P(x,t)] + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\ P(x,t) \qquad (7.8)$$

Si tenemos en cuenta que $K=\varkappa/2$ podemos comprobar que la ecuación (7.8) coincide con la ecuación (6.4) para el caso en que $g(x)=1$. Esto prueba que las contribuciones de orden mayor que ε^2, para un proceso del tipo(7.1), se anulan.

Referencias.

El contenido de este capitulo es escencialmente un resumen, orientado hacia los requerimientos del Método de Cuantificación Estocástica, de los primeros cuatro capitulos del libro citado en la referencia (1).

A esto también se suman ideas extraidas de otras referencias que, a continuación citaremos como bibliografía valiosa para introducirse en el tema :

1-"Topics in the Theory of Random Noise", vol.I, R.L.Stratonovich; ed. Gordon and Breach (1981).

2-"Stochastic Processes in Physics and Chemistry", N.G. van Kampen; ed. North Holland (1981).

3-"Stochastic Differential Equations", I.I.Gihman, A.V.Skorohod; ed. Springer Verlag (1972).

4-R.Fox, Phys.Rev.A, vol.33, 1 (1986),467.

CAPITULO III

" CUANTIFICACION ESTOCASTICA DE TEORIAS DE CAMPOS "

En este capítulo desarrollaremos el Método de Cuantificación Estocástica de Teorías de Campos. En las dos primeras secciones expondremos las ideas fundamentales y cuantificaremos una teoría correspondiente a un campo escalar, planteando su ecuación de Langevin, y estudiaremos la ecuación de Fokker-Planc correspondiente. En todos los casos hemos extendido en forma inmediata los desarrollos del capítulo anterior al caso de infinitos grados de libertad. Posteriormente, haremos un desarrollo perturbativo a partir de la ecuación de Langevin, introduciendo los diagramas estocásticos. La estructura de este desarrollo diagramático nos dejara la puerta abierta para introducir, en la última sección, el Método de Regularización Estocástica.

I-El método de Parisi-Wu.[1]

En Teória Cuántica de Campos la matriz S queda completamente determinada si se conocen las funciones de Green de todos los ordenes. Si consideramos una teoría de campos en espacio-tiempo euclídeo, descripta por los campos $\phi(x)$, y la cuantificamos utilizando el método de la integral funcional, las funciones de Green están dadas por :

$$G(x_1,\dots,x_n)=\langle\phi_1\dots\phi_n\rangle=\frac{\int\mathcal{D}\phi\ \phi_1\dots\phi_n\ e^{-S(\phi)}}{\int\mathcal{D}\phi\ e^{-S(\phi)}} \qquad (1.1)$$

donde $\phi_k=\phi(x_k)$, $S(\phi)$ es la acción que describe al sistema físico en cuestión y además hemos adoptado el sistema de unidades $\hbar=c=1$.

La expresión (1.1) puede ser interpretada como la función de correlación de n-esimo orden del conjunto de variables aleatorias $\phi(x)$, cuya distribución de probabilidad es :

$$P[\phi]=\frac{e^{-S(\phi)}}{\int\mathcal{D}\phi\ e^{-S(\phi)}} \qquad (1.2)$$

El método de cuantificación estocástica de teorías de campos[1]-[3] parte de considerar al sistema estadistico descripto en el párrafo anterior, como el estado de equilibrio de un sistema estocástico que evoluciona en un parámetro ficticio τ, al cual denominaremos tiempo estocástico para distinguirlo de la coordenada temporal x_4. Para darle a $\phi(x,\tau)$ un caracter estocástico, se lo dota de una dinámica en el tiempo ficticio τ, forzada por una fuente de ruido "blanco", es decir por un proceso aletorio de densidad espectral constante. Esto significa que $\phi(x,\tau)$ describirá un proceso de difusión que obedece una ecuación de fluctuación del tipo (5.1;II).

El contacto con la teoría cuántica de campos se produce al exijir que el sistema evolucione en el tiempo estocástico hasta alcanzar un estado de equilibrio, cuya distribución de probabilidad sea precisamente :

$$P_{eq}(\phi) = \lim_{\tau\to\infty} P(\phi,\tau) = \frac{e^{-S(\phi)}}{\int \mathcal{D}\phi\ e^{-S(\phi)}}, \tag{1.3}$$

de modo tal que el cálculo de funciones de correlación en dicho estado coincida con (1.1).

Concretamente, el método de Parisi-Wu[1] consiste en darle a $\phi(x)$ una dependecia en el tiempo estocático τ :

$$\phi(x) \to \phi(x,\tau) \tag{1.4}$$

y propone que la evolución en τ esté gobernada por una ecuación de Langevin, cuya forma más general es[4)-(6]:

$$\frac{\partial\phi(x,\tau)}{\partial\tau} = -\int dx'\ K(x,x')\ \frac{\delta S[\phi,\tau]}{\delta\phi(x',\tau)} + \eta(x,\tau) \tag{1.5}$$

donde $K(x,x')$ es ahora un núcleo arbitrario y $\eta(x,\tau)$ es un ruido Gaussiano "blanco" :

$$\langle\eta(x,\tau)\rangle = 0$$

$$\langle\eta(x,\tau)\eta(x',\tau')\rangle = 2K(x,x')\ \delta(\tau-\tau') \tag{1.6}$$

De este modo los campos $\phi(x,\tau)$ son variables estocásticas cuya distribución de probabilidad depende de la distribución de la fuente de ruido η es,de acuerdo con la relación (1.10;II),:

$$P(\phi,\tau) = \int \mathcal{D}\eta\ \delta(\phi-\phi_\eta)\ P(\eta,\tau) \tag{1.7}$$

La única restricción sobre el núcleo $K(x,x')$ es que garantice la convergencia de (1.7) a (1.3).

Como vimos en la sección VI del capitulo anterior, un proceso de difusión descripto por la ecuación de Langevin (1.5) tiene asociada la siguiente ecuación de Fokker-Planck :

$$\frac{\partial P(\phi,\tau)}{\partial\tau} = \int dxdy\ \frac{\delta}{\delta\phi(x,\tau)}\ K(x,y)\left(\frac{\delta S[\phi,\tau]}{\delta\phi(y,\tau)} + \frac{\delta}{\delta\phi(y,\tau)}\right)\ P(\phi,\tau) \tag{1.8}$$

Esta ecuación es la extensión a infinitos grados de libertad de la ecuación (4.12)del capitulo anterior.

Se ve fácilmente que la distribución (1.3) es una solución estacionaria de la ecuación de Fokker-Planck (1.8) (comparar con (4.10;II)), pero no está asegurado que sea la única. Es crucial para la validez de este método, que la distribución (1.3) sea la única solución estacionaria, ya que de este modo se garantiza la ergodicidad y la convergencia al estado de equilibrio (1.3) del sistema descripto por la ecuación de Langevin (1.5).

Esta libertad en el término disipativo de la ecuación de Langevin nos permite seleccionar la trayectoria del sistema al estado de equilibrio de acuerdo a nuestra conveniencia, dentro de los límites fijados por las condiciones mencionadas en el párrafo anterior.

II-Cuantificación estocástica de un campo escalar.

Consideremos una teoría de un campo escalar $\phi(x)$,donde x son las coordenadas del espacio-tiempo euclideo, descripta por la acción $S[\phi]$. El método de cuantificación estocástica introduce la dependencia de ϕ sobre el tiempo estocástico τ :

$$\phi(x) \to \phi(x,\tau)$$

Como vimos en la sección anterior, la evolución en este parámetro adicional del campo ϕ está regida por la ecuación de Langevin (1.5) que, en este caso particular, adopta la forma :

$$\frac{\partial\phi(x,\tau)}{\partial\tau} = - \frac{\delta S[\phi,\tau]}{\delta\phi(x,\tau)} + \eta(x,\tau) \tag{2.1}$$

ya que se ha elegido el núcleo $K(x,x')$ más sencillo posible :

$$K(x,x') = \delta(x-x') \ , \tag{2.2}$$

que, como veremos inmediatamente, da el comportamiento apropiado al sistema.

La fuente de ruido Gaussiano $\eta(x,\tau)$ satisface entonces, de acuerdo con (1.6), las siguientes funciones de correlación :

$$\langle\eta(x,\tau)\rangle=0$$

$$\langle\eta(x,\tau)\eta(x',\tau')\rangle= 2\delta(x-x')\ \delta(\tau-\tau') \qquad (2.3)$$

La idea central del método es que las funciones de correlación de este sistema estocástico en el estado de equilibrio reproduzcan las funciones de Green del sistema físico $S[\phi]$, es decir :

$$\lim_{\tau\to\infty} \langle\phi(x_1,\tau)...\phi(x_n,\tau)\rangle=\langle\phi(x_1)...\phi(x_n)\rangle=\frac{\int\mathcal{D}\phi\ \phi(x\ )\ldots\phi_n(x_n)\ e^{-S(\phi)}}{\int\mathcal{D}\phi\ e^{-S(\phi)}}$$

(2.4)

Para verificar que el proceso (2.1) satisface esta condición, estudiaremos la ecuación de Fokker-Planck correspondiente[3],[5] :

$$\frac{\partial P(\phi,\tau)}{\partial\tau}= \int dx\ \frac{\delta}{\delta\phi(x,\tau)}\left(\frac{\delta S[\phi,\tau)}{\delta\phi(x,\tau)} + \frac{\delta}{\delta\phi(x,\tau)}\right) P(\phi,\tau) \qquad (2.5)$$

Sustituyamos $P(\phi,\tau)$ por :

$$P(\phi,\tau)= e^{-S[\phi]/2}\ \hat{P}(\phi,\tau) \qquad (2.6)$$

así obtenemos :

$$\frac{\delta}{\delta\phi(x,\tau)}\, e^{-S[\phi]/2}\, \hat{P}(\phi,\tau) = e^{-S[\phi]/2}\left(-\frac{1}{2}\frac{\delta S[\phi,\tau]}{\delta\phi(y,\tau)} + \frac{\delta}{\delta\phi(y,\tau)}\right)\hat{P}(\phi,\tau) \tag{2.7}$$

Ahora, la ecuación de Fokker-Planck (2.5) se puede escribir como :

$$\frac{\partial\hat{P}(\phi,\tau)}{\partial\tau} = -H_{FP}\hat{P}(\phi,\tau) \tag{2.8}$$

con

$$H_{FP} = Q^{+}Q$$

y

$$Q = \left(\frac{1}{2}\frac{\delta S[\phi,\tau]}{\delta\phi(y,\tau)} + \frac{\delta}{\delta\phi(y,\tau)}\right)$$

$$Q^{+} = \left(\frac{1}{2}\frac{\delta S[\phi,\tau]}{\delta\phi(y,\tau)} - \frac{\delta}{\delta\phi(y,\tau)}\right) \tag{2.9}$$

Por lo tanto, H_{FP} (hamiltoniano de Fokker-Planck) es un operador autoadjunto semidefinido positivo :

$$H_{FP}\varphi_n = \lambda_n\varphi_n \qquad \lambda_n \geq 0 \ , \ \forall\ n \tag{2.10}$$

Expandiendo $\hat{P}(\phi,\tau)$ en las autofunciones φ_n del operador H_{FP}, encontramos como solución de la ecuación (2.8)

$$\hat{P}(\phi,\tau) = \sum_n \varphi_n\, e^{-\lambda n\tau} \tag{2.11}$$

De las relaciones (2.9) se puede ver que la autofunción correspondiente al autovalor cero es :

$$\varphi_0 = e^{-S[\phi]/2} \tag{2.13}$$

Por lo tanto, cuando $\tau\to\infty$ la distribución (2.11) evoluciona a la distribución de equilibrio $e^{-S/2}$:

$$\lim_{\tau\to\infty} \hat{P}(\phi,\tau) = e^{-S[\phi]/2} \tag{2.14}$$

y, teniendo en cuenta la sustitución (2.6), concluimos que la distribución de probabilidad del sistema estocástico descripto por la ecuación de Langevin (2.1), evoluciona al estado de equilibrio correspondiente a la distribución estacionaria e^{-S}:

$$\lim_{\tau\to\infty} P(\phi,\tau) = e^{-S[\phi]} \tag{2.15}$$

De modo que las funciones de correlación

$$\langle\phi(x_1,\tau)\ldots\phi(x_n,\tau)\rangle_\eta = \frac{1}{N}\int\mathcal{D}\phi\ \phi(x_1,\tau)\ldots\phi(x_n,\tau)\ P(\phi,\tau)$$

coinciden con la expresión de Feynmann para las funciones de Green del sistema $S[\phi]$ cuando el sistema estocástico alcanza el estado de equilibrio :

$$\lim_{\tau\to\infty} \langle\phi(x_1,\tau)\ldots\phi(x_n,\tau)\rangle_\eta = \frac{1}{N}\int D\phi\ \phi(x_1)\ldots\phi(x_n)\ e^{-S[\phi]} \tag{2.16}$$

Esta fórmula establece la conexión fundamental entre la Teoría de Campos y la Cuantificación Estocástica.

Hemos comprobado así la equivalencia entre el método de cuantificación estocástica y la cuantificación por integral funcional para el caso general del sistema $S[\phi]$, siendo ϕ un campo escalar. La extensión a un campo vectorial es inmediata[(2),(4)], resultando que para cada componente debe procederse como si se tratase de un campo escalar.

En la sección siguiente realizaremos el cálculo explícito de algunas funciones de correlación.

III-Funciones de correlación y diagramas de Feynman.

Apliquemos el método desarrollado en la sección anterior a una teoría de un campo escalar ϕ de masa m y con interacción $\lambda\phi^4$ [(2),(3)]. La acción que describe a este sistema es :

$$S[\phi]= \int d^4x \left(\frac{1}{2}\ \partial_\mu\phi\ \partial_\mu\phi + \frac{1}{2}\ m^2\phi^2 + \frac{1}{4}\ \lambda\phi^4\right) \tag{3.1}$$

De acuerdo con la prescripción del método de cuantificación estocástica para campos escalares, la ecuación de Langevin más apropiada para este sistema es [ecs.(2.1) y (2.3)]:

$$\frac{\partial\phi(x,\tau)}{\partial\tau} = - \frac{\delta S[\phi,\tau]}{\delta\phi(x,\tau)} + \eta(x,\tau) \tag{3.2}$$

introduciendo la acción (3.1) obtenemos :

$$\frac{\partial\phi(x,\tau)}{\partial\tau} + (-\Box+m^2)\phi(x,\tau) = -\frac{\lambda}{3!}\phi^3(x,\tau) + \eta(x,\tau) \tag{3.3}$$

Es conveniente trabajar con la transformada de Fourier de los campos $\phi(x,\tau)$:

$$\phi(k,\tau)= \int d^4x\ e^{ikx}\ \phi(x,\tau) \tag{3.4}$$

De este modo, la ecuación de Langevin es ahora :

$$\int d^4k\ e^{ikx}\ \frac{\partial\phi(k,\tau)}{\partial\tau} =-\int d^4k\ (k^2+m^2)\phi(k,\tau)\ e^{ikx} +$$

$$-\frac{\lambda}{3!}\int d^4k\ d^4p\ d^4q\ d^4r\ \delta(k+c)\ e^{i(p+q+r)x}\ \phi(p,\tau)\phi(q,\tau)\phi(r,\tau) +$$

$$+\int d^4k\ e^{ikx}\ \eta(k,\tau) \tag{3.5}$$

En el segundo término del mienbro derecho hemos introducido una distribución δ con soporte en $k=-c$, e integrado sobre k para poder factorear esta integración de todos los términos. La constante arbitraria c se elige de módo que podamos eliminar la dependencia en x de la ecuación. Para esto elegimos :

$$c=p+q+r\ ,$$

y así obtenemos la ecuación de Langevin para la transformada de Fourier de los campos :

$$\frac{\partial\phi(k,\tau)}{\partial\tau}=-(k^2+m^2)\phi(k,\tau)-\frac{\lambda}{3!}\int d^4p\ d^4q\ d^4r\ \delta(k-p-q-r)\ \phi(p,\tau)\phi(q,\tau)\phi(r,\tau)$$

$$+\ \eta(k,\tau) \tag{3.5}$$

Transformando esta ecuación diferencial en una ecuación integral e iterando sobre ϕ hasta el orden deseado en la constante de acoplamiento λ, tenemos un desarrollo perturbativo para $\phi(k,\tau)$.

En primer término calculemos la función de Green del operador $(\partial/\partial\tau + k^2+m^2)$, es decir :

$$\frac{\partial G(k,\tau)}{\partial\tau} + (k^2+m^2)G(k,\tau)= \delta(\tau) \qquad (3.6)$$

con la condición $\quad G(k,\tau)=0 \qquad \tau < 0$

Inmediatamente se obtiene

$$G(k,\tau)= e^{-(k^2+m^2)\tau}\ \theta(\tau) \qquad (3.7)$$

donde $\theta(\tau)$ es la función de Heaviside.

La solución general de la ecuación de Langevin para la teoría libre estará dada por la convolución de la función de Green (3.7) con la fuente de ruido η, sumada a una solución de la ecuación homogénea :

$$\phi(k,\tau)= \int_{-\infty}^{\infty} d\tau'\ G(k,\tau')\ \eta(k,\tau') + C\ e^{-(k^2+m^2)\tau} \qquad (3.8)$$

donde C depende de las condiciones iniciales.

Se puede apreciar en esta ecuación que la dependencia de las condiciones iniciales decrece exponencialmente con el tiempo estocástico τ, por lo tanto no tendremos en cuenta esta contribución, nuestro interés está principalmente centrado en el comportamiento del sistema cuando se aproxima al equilibrio $(\tau\to\infty)$.

La solución de la ecuación (3.5) es entonces

$$\phi(k,\tau)=\int d\tau'\ e^{-(k^2+m^2)(\tau-\tau')}\ [\eta(k,\tau)+ \tag{3.9}$$

$$+\frac{\lambda}{3!}\int d^4p\ d^4q\ d^4r\ \delta(k-p-q-r)\phi(p,\tau)\phi(q,\tau)\phi(r,\tau)]$$

La solución a orden cero en la constante de acoplamiento λ es :

$$\phi_0(k,\tau)=\int d\tau'\ G(k,\tau-\tau')\eta(k,\tau')\ , \tag{3.10}$$

insertando esta solución en el segundo término de la derecha de (3.9) obtenemos la solución a primer orden en λ :

$$\phi_1(k,\tau)=\int d\tau'\ G(k,\tau-\tau')\ \eta(k,\tau)+ \tag{3.11}$$

$$+\frac{\lambda}{3!}\int d\tau' d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 G(k,\tau-\tau')G(p,\tau'-\tau_1)G(q,\tau'-\tau_2)G(r,\tau-\tau_3)$$

$$\delta(k-p-q-r)\eta(p,\tau_1)\eta(q,\tau_2)\eta(r,\tau_3)]$$

Volviendo a insertar (3.11) en (3.9) se obtiene la solución a orden λ^2 de la serie perturbativa.

Esta solución iterativa puede representarse gráficamente teniendo en cuenta las siguientes reglas[(1)-(4)]:

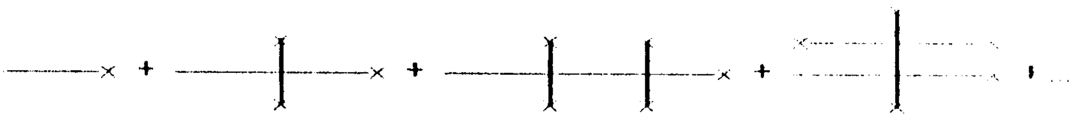
-la función de Green $G(k,\tau)$ se representa por una linea

$$\overline{\qquad\qquad\qquad}\ ,$$

la fuerza estocástica $\eta(x,\tau)$, por una cruz

$$\times\ ,$$

por cada constante de acoplamiento λ, existe un vértice donde convergen cuatro propagadores o funciones de Green $G(k,\tau)$.
De este modo

$\phi(k,\tau)=$  (3.12)

Las magnitudes relevantes son las funciones de correlación o los momentos de cualquier orden de la variable estocástica $\phi(k,\tau)$. Para cálcular éstos perturbativamente se debe tener en cuenta que el ruido $\eta(k,\tau)$, transformada de Fourier del ruido Gaussiano $\eta(x,\tau)$, también tiene distribución Gaussiana :

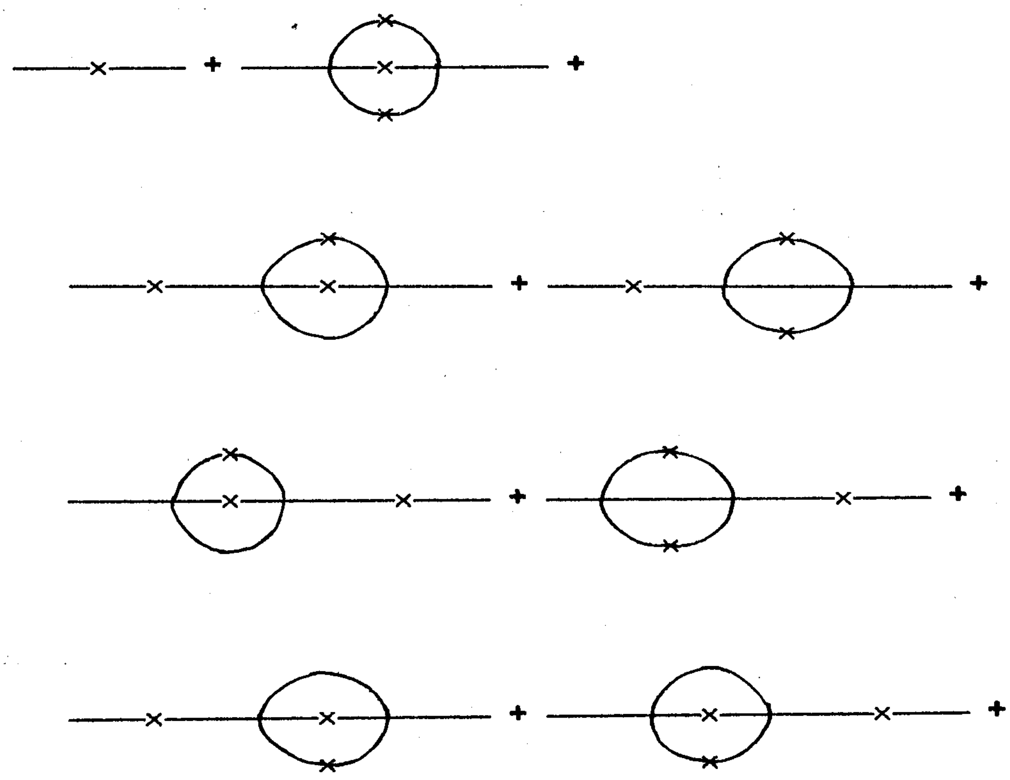
$$\langle\eta(k,\tau)\rangle=0$$
$$\langle\eta(k,\tau)\eta(k',\tau')\rangle= 2(2\pi)^4\ \delta(k+k')\ \delta(\tau-\tau') \qquad (3.13)$$

Consideremos el n-esimo momento de ϕ :

$$\langle\phi(k_1,\tau)...\phi(k_n,\tau)\rangle.$$

Al sustituir $\phi(k_j,\tau)$ por el desarrollo perturbativo (3.12) el valor medio de sobre η une todas las cruces tomadas de a dos, en todas las formas posibles debido a la descomposición de Wick para la n-esima función de momento del ruido $\eta(k,\tau)$. Por ejemplo, veamos lo que ocurre con la segunda función de momento :

$\langle\phi(k,\tau)\phi(k',\tau')\rangle=$



.... (3.14)

Puede probarse que la suma de todos los diagramas estocásticos con la misma topología reproduce el diagrama de Feynman correspondiente a esa topología.

Calculemos el propagador a orden cero en λ, es decir el primer diagrama del desarrollo (3.14), utilizando la solución perturbativa

(3.10) de la ecuación de Langevin:

$$\mathbb{D}(k,\tau',\tau)= \langle\phi_o(k,\tau)\phi_o(k',\tau')\rangle_\eta$$

$$=-\int_0^{\tau} dt \int_0^{\tau'} dt' e^{-(k^2+m^2)(\tau-t)}\, e^{-(k'^2+m^2)(\tau'-t')}\, \langle\eta(k,t)\eta(k',t')\rangle_\eta$$

$$=-(2\pi)^n\, 2 \int_0^{\min(\tau,\tau')} d\tau\ e^{-(k^2+m^2)(\tau+\tau'-2t)}\, \delta(k+k')$$

$$=-(2\pi)^n\, \frac{\delta(k+k')}{k^2+m^2}\, [e^{-|\tau-\tau'|(k^2+m^2)} - e^{-(\tau+\tau')(k^2+m^2)}] \tag{3.15}$$

Si $\tau=\tau'$ obtenemos

$$\mathbb{D}(k,\tau)= (2\pi)^n\, \frac{\delta(k+k')}{k^2+m^2}\, [1-e^{-2\tau(k^2+m^2)}] \tag{3.16}$$

y en el límite $\tau\to\infty$

$$\lim_{\tau\to\infty} \langle\phi(k,\tau)\phi(k',\tau')\rangle_\eta = (2\pi)^n\, \frac{\delta(k+k')}{k^2+m^2} \tag{3.17}$$

En esta descripción diagramática una línea corresponde a la función de Green (3.7) $G(k,\tau)$, mientras que las líneas marcadas con una cruz, representan al propagador (3.16) $\mathbb{D}(k,\tau,\tau')$.

La distribución δ sobre los momentos garantiza la conservación del momento en cada cruz, de modo que la integración sobre estos, se reduce a las integraciones usuales en los diagramas de Feynman.

1

IV-Regularización estocástica.[5],[6]

En el método de Parisi-Wu, la elección del ruido Gaussiano η con las funciones de correlación (2.5) garantiza el caracter markoviano del proceso estocástico y, por lo tanto, la existencia de la ecuación de Fokker-Planck (1.8). Como vimos en el capítulo anterior (sección V), en el caso de procesos no markovianos, es decir aquellos que no son δ-correlacionados sobre el tiempo estocástico, solo se obtiene una ecuación de Fokker-Planck en forma aproximada[7].

La generalización del método de Parisi-Wu a procesos no markovianos[5],[6] que tengan como límite, para cierto parámetro tendiendo a infinito, un proceso markoviano, da lugar a un método de regularización denominado "regularización estocástica". Cabe señalar que en los desarrollos perturbativos de la sección anterior hemos asumido tácitamente que cada diagrama estaba debidamente regularizado.

Antes de comenzar a exponer el método de regularización, es importante estudiar el grado de divergencia superficial de los diagramas estocásticos en relación con el correspondiente a los diagramas de Feynman.

La expresión analítica de un diagrama estocástico para grandes intervalos de tiempo está dada por :

$$\int \prod_{loops} d^4p \prod_{cruces} \frac{1}{p^2} \prod \frac{\lambda}{\sum_{\omega_k} p^2} \qquad (4.1)$$

donde ω_k pertenece a un conjunto específico de momentos asociados con el k-esimo vértice.

Consideremos un diagrama estocástico con L lazos (loops), N_c lineas cruzadas y N vértices. Supongamos que el diagrama tiene E_o lineas externas sin cruces y E_c lineas externas con cruces.

Un diagrama estocástico a N-esimo orden en λ, es decir con N vértices, tiene N lineas sin cruz representando las N iteraciones de la función de Green $G(k,\tau)$ que aparece en (3.9) multiplicando al término proveniente del potencial $\lambda\phi^4$. Por lo tanto el número de lineas internas sin cruces será :

$$I_o = N - E_o \qquad (4.2)$$

pero además, el número total de lineas externas está dado por :

$$E_o + E_c = 4N - 2I_c - 2I_o = 4N - 2I_c - 2N + 2E_o$$

entonces,
$$I_c = \frac{2N + E_o - E_c}{2} \qquad (4.3)$$

donde I_c es el número de lineas internas cruzadas. El número total de lineas cruzadas es :

$$N_c = \frac{2N + E_o + E_c}{2} \qquad (4.4)$$

Para calcular el grado superficial de divergencia W debemos tener en cuenta que las integraciones sobre los tiempos estocásticos producen denominadores de la forma [momento externo]^2, por lo tanto :

$$W = nL - 2I_c - 2(N-1)$$

$$W = nL - 2N - E_o + E_c - 2N + 2$$

$$W = nL - 4N - E_o + E_c + 2$$

Por otro lado $\qquad L = I - N + 1$

$$I = 2N - E_o/2 - E_c/2$$

entonces $\qquad L = N - \frac{E_o + E_c}{2} + 1 \quad .$

Volviendo a W obtenemos :

$$W = (n-4)N - (n/2 + 1)E_o - (n/2 -1)E_c + n + 2 \qquad (4.6)$$

En el caso en que estemos en cuatro dimensiones, n=4, tenemos :

$$W = 6 - 3E_o - E_c \qquad (4.7)$$

Teniendo en cuenta que el número total de patas externas es

$$E = E_o + E_c$$

(4.7) puede escribirse como:

$$W = (4 - E) + 2(1 - E_o) \qquad E_o \geq 1 \qquad (4.8)$$

La divergencia superficial de un diagrama de Feynman en la teoría $\lambda\phi^4$ en 4 dimensiones es (4-E). Como, en un diagrama estocástico, al menos una linea externa no tiene cruz entonces, la divergencia superficial del diagrama estocástico nunca exede la divergencia del diagrama de Feynman.

La existencia de una dimensión adicional, correspondiente al tiempo estocástico, y la dinámica asociada a ella permite desarrollar un nuevo esquema de regularización.

Las divergencias de un diagrama se manifiestan en la integración de los momentos sobre un loop y, es en este punto, donde el método de cuantificación estocástica posibilita desarrollar un nuevo esquema de regularización. En un diagrama estocástico todos los loops contienen al menos una linea cruzada donde la cruz representa la segunda función de correlación de la fuentede ruido $\eta(k,\tau)$. La idea básica del método de regularización estocástica es cambiar el proceso estocástico original introduciendo un núcleo en el término disipativo o bien en la fuente de ruido de la ecuación de Langevin, de modo tal que la segunda función de correlación sirva para regularizar las integrales divergentes.

Las modificaciones del proceso estocástico pueden ser de dos tipos : a)preservan el caracter Gaussiano de la fuente de ruido, y b) la distribución de probabilidad de la fuente de ruido deja de ser Gaussiana con lo cual el proceso estocástico deja de ser markoviano.

En el segundo caso se debe tener en cuenta que la ecuación de Fokker-Planck para ruidos no Gaussianos tiene contribuciones de derivadas de orden más alto que 2 de la distribución de probabilidades, con lo cual se pierde la convergencia del sistema a la distribución de equilibrio :

$$P(\phi) \propto e^{-S[\phi]}$$

Para evitar este inconveniente se elige una familia de núcleos K, de modo tal que al tender a infinito el tiempo estocástico se recupera la Gaussianidad de la fuente de ruido.

Consideremos por ahora el caso a). Supongamos que modificamos la segunda función de correlación de η introduciendo un parámetro Λ del siguiente modo :

$$\langle\eta(k,\tau)\eta(k',\tau')\rangle = 2(2\pi)^n \left(\frac{\Lambda^2}{\Lambda^2+k^2}\right)^m \delta^n(k+k')\delta(\tau-\tau') \tag{4.8}$$

donde m es una potencia a determinar.

El propagador libre estará entonces modificado por un factor :

$$\langle\phi(k,\tau)\phi(k',\tau')\rangle=(2\pi)^n \left(\frac{\Lambda^2}{\Lambda^2+k^2}\right)^m \frac{1}{k^2} (1-e^{-2k^2\tau}) \; \delta(k+k') \tag{4.9}$$

Obviamente, en el límite $\Lambda\to\infty$ se recuperan las expresiones (3.13) y (3.16). De este modo hemos incrementado la potencia de los impulsos en el denominador y así, una apropiada elección de m nos permitirá regularizar las divergencias ultravioletas de los diagramas.

A pesar de cumplir con su objetivo, esta regularización no es apropiada en el caso de teorías con libertad de gauge, dado que introduce dependencias de la elección de gauge en magnitudes *a priori* invariante de gauge.

La solución más apropiada para este problema es reemplazar la fuente de ruido δ-correlacionado por otra cuya segunda función de correlación tenga soporte de medida no nula sobre el tiempo estocástico, por ejemplo :

$$\langle\eta(x,\tau)\eta(x',\tau')\rangle = 2\delta(x-x')K_\Lambda(\tau-\tau') \tag{4.10}$$

donde :

$$K_\Lambda(\tau) \propto \Lambda^2 \, e^{-\Lambda^2|\tau|}$$

Con esta elección cuando $\Lambda\to\infty$, recuperamos el proceso markoviano. La presencia del núcleo K_Λ en los cálculos perturbativos introduce entonces una regularización que, como veremos, no afecta a la invarianza de gauge.

1

Referencias.

(1)-G.Parisi, Y.S.Wu; Sci.Sinica 24 (1981), 483.

(2)-P.Damgaard, H.Hüffel; Phys.Rep. 152 (1987), 259.

(3)-A.A.Migdal, Sov.Phys.Usp. 29 (5)(1986), 389.

(4)-D.Zwanziger, Nucl.Phys.B 192 (1981), 259.

(5)-B.Sakita, Proc. 7^{th} Johns Hopkins Workshop (eds. G.Domokos, S.Kovesi-Domokos), World Scientific, 1983.

(6)-J.D.Breit, S.Gupta, A.Zaks; Nucl.Phys.B 233 (1984), 61.

(7)-R.Fox; Phys.Rev.A 33, n°1 (1986), 467.

CAPITULO IV

" SIMETRIAS Y CUANTIFICACION ESTOCASTICA "

En la primera sección de este capítulo desarrollaremos los resultados obtenidos en el estudio del comportamiento del método estocástico bajo simetrías de la acción. Se obtiene la ley de transformación para la fuente de ruido de la ecuación de Langevin. En la sección siguiente se presenta la cuantificación estocástica de una teoría con simetría de gauge, analizando detalladamente el caso abeliano y, más brevemente, el no-abeliano. En la última sección exponemos el método estocástico para campos fermiónicos. Se analizan los casos de fermiones masivos, fermiones de Dirac sin masa y, finalmente, se presenta nuestra propuesta para fermiones de Weyl.

I-Propiedades de transformación de la ecuación de Langevin.

En esta sección discutiremos el tratamiento de las simetrías de una teoría física descripta por una acción dada, en el marco de la cuantificación estocástica[1]. La suposición implícita inicial del método estocástico es que, cada configuración posible de las variables dinámicas del sistema físico, es solución de la ecuación de Langevin, para alguna fuerza estocástica particular. De este modo si transformamos una variable dinámica $\phi(x,\tau)$, solución de la ecuación de Langevin forzada por $\eta(x,\tau)$, entonces la variable dinámica transformada $\phi'(x,\tau)$ también será solución de la ecuación de Langevin pero, forzada por $\eta'(x,\tau)$.

Las magnitudes con significado físico son los valores medios de ciertas funciones $F[\phi]$, promediada sobre el ruido η :

$$\langle F[\phi]\rangle = \int \mathcal{D}\eta \; F[\phi_\eta] \; P(\eta) \tag{1.1}$$

donde ϕ_η es solución de la ecuación de Langevin :

$$\frac{\partial\phi_\eta}{\partial\tau}(x,\tau) = -\int dx' \; K(x,x') \; \frac{\delta S[\phi,\tau]}{\delta\phi(x',\tau)} + \eta(x,\tau) \tag{1.2}$$

y $P[\phi]$ esla distribución de probabilidades del ruido Gaussiano η.

Es importante entonces, conocer las propiedades de transformación de η cuando transformamos ϕ_η, de modo de poder ver como se transforman los valores medios (1.1).

Por lo tanto si ϕ_η satisface la ecuación de Langevin (1.2), y realizamos una transformación

$$\phi_\eta(x,\tau)\rightarrow\phi'_\eta(x,\tau)$$

entonces ϕ'_η satisface :

$$\frac{\partial\phi'_\eta(x,\tau)}{\partial\tau}=-\int dx'\ K'(x,x')\ \frac{\delta S[\phi',\tau]}{\delta\phi'(x',\tau)}+\eta'(x,\tau) \qquad (1.3)$$

para algún $\eta'(x,\tau)$.

Teniendo en cuenta que

$$\frac{\partial\phi'(x,\tau)}{\partial\tau}=\int dy\ \frac{\delta\phi'(x,\tau)}{\delta\phi(y,\tau)}\ \frac{\partial\phi(y,\tau)}{\partial\tau}\quad , \qquad (1.4)$$

y si además la transformación $\phi\rightarrow\phi'$ es una simetría de la acción, entonces

$$S[\phi]=S[\phi']$$

y

$$\frac{\delta S[\phi',\tau]}{\delta\phi'(x,\tau)}=\int dy\ \frac{\delta S[\phi,\tau]}{\delta\phi(y,\tau)}\ \frac{\delta\phi(y,\tau)}{\delta\phi'(x,\tau)}\quad , \qquad (1.5)$$

podemos escribir la ecuación de Langevin para ϕ', (1.3), en términos de ϕ :

$$\int dy\ \frac{\delta\phi'(x,\tau)}{\delta\phi(y,\tau)}\ \frac{\partial\phi(y,\tau)}{\partial\tau}=-\int dx'dy\ K'(x,x')\ \frac{\delta S[\phi,\tau]}{\delta\phi(y,\tau)}\ \frac{\delta\phi(y,\tau)}{\delta\phi'(x',\tau)}+\eta'(x,\tau)$$

$$(1.6)$$

$$\eta'(x,\tau)=\frac{\partial\phi'(x,\tau)}{\partial\phi(x,\tau)}\ \frac{\partial\phi(x,\tau)}{\partial\tau}+\int dy\ K'(x,y)\ \frac{\partial\phi(y,\tau)}{\partial\phi'(y,\tau)}\ \frac{\delta S[\phi,\tau]}{\delta\phi(y,\tau)} \qquad (1.7)$$

donde hemos supuesto que ϕ' depende localmente de ϕ de modo que la derivada funcional en (1.6) produce una distribución $\delta(x'-y)$, eliminando una de las integrales.

Introduciendo la ecuación de Langevin (1.2) para ϕ en (1.7) obtenemos:

$$\eta'(x,\tau)-\frac{\partial\phi'(x,\tau)}{\partial\phi(x,\tau)}\,\eta(x,\tau)=\int dy\,\left\{K'(x,y)\,\frac{\partial\phi(y,\tau)}{\partial\phi'(y,\tau)}-\frac{\partial\phi'(x,\tau)}{\partial\phi(x,\tau)}K(x,y)\right\}\frac{\delta S[\phi,\tau]}{\delta\phi(y,\tau)} \tag{1.8}$$

En esta ecuación podemos ver que si el núcleo $K(x,y)$ es covariante, también lo es el ruido $\eta(x,\tau)$, es decir, si

$$K'(x,y)=\frac{\partial\phi'(x,\tau)}{\partial\phi(x,\tau)}\,K(x,y)\,\frac{\partial\phi'(y,\tau)}{\partial\phi(y,\tau)}$$

entonces

$$\eta'(x,\tau)=\frac{\partial\phi'(x,\tau)}{\partial\phi(x,\tau)}\eta(x,\tau) \tag{1.9}$$

Consideremos el caso concreto en que las trasformación corresponde a un grupo de isotropía unitario :

$$\phi\to U\phi \qquad \text{y} \qquad UU^{+}=I \tag{1.10}$$

y la acción $S[\phi]$ invariante bajo la acción de este grupo. La ecuación de Langevin será

$$\frac{\partial\phi}{\partial\tau}\eta(x,\tau)=-\int dx'\,K(x,x')\,\frac{\delta S[\phi,\tau]}{\delta\phi^{+}(x',\tau)}+\eta(x,\tau) \tag{1.11}$$

y si el núcleo se transforma como :

$$K'(x,y)= U(x)K(x,y)U^{+}(y) \qquad (1.12)$$

entonces, el ruido se transforma como el campo ϕ :

$$\phi'(x,\tau)=U(x)\phi(x,\tau) \qquad y \qquad \phi^{+}(x,\tau)=\phi^{+}(x,\tau)U^{+} \qquad (1.13)$$

Podemos apreciar que la ley de transformación de la fuente de ruido η, bajo transformaciones de ϕ_{η}, está fijada completamente por las propiedades de transformación del núcleo K elegido.

Restando las ecuaciones de Langevin (1.2) y (1 3), y utilizando las relaciones (1.4) y (1.5) se obtiene la siguiente expresión general para la variación de η :

$$\Delta\eta(x,\tau)= \frac{\partial\Delta\phi'(x,\tau)}{\partial\tau} + \int dx' \, [K'(x,x')\frac{\partial\phi(x',\tau)}{\partial\phi'(x',\tau)} - K(x,x')] \, \frac{\delta S[\phi',\tau]}{\delta\phi'(x',\tau)}$$

(1.13)

Podemos concluir que, fijada la ley de transformación de ϕ y de la acción $S[\phi]$, la ecuación de Langevin fija univocamente la ley de transformación de la fuente de ruido η.

Extendiendo el análisis a la ecuación de Fokker-Planck se deduce que en el caso de núcleos covariantes, la distribución $P(\phi)$ es invariante bajo esa simetría de la acción. De modo que, en las condiciones indicadas, el método de cuantificación estocástica se comporta bajo dichas simetrías, de la misma forma que la integral funcional.

Como veremos estas observaciónes no habian sido consideradas en la literatura y ello conducía a problemas en la interpretación del origen de anomalías en diversas teorías, en el marco de este método de cuantificación. Justamente una de las contribuciones originales de esta Tesis es la de dar un tratamiento correcto a las anomalías, utilizando la cuantificación estocástica.

II-Cuantificación estocástica de teorías con simetrías de gauge.[2]

En la cuantificación por integral funcional de una Teoría de Gauge, es necesario asociar un término de fijado de gauge a la acción clásica de la teoría que es objeto de estudio, ya que, de otro modo la densidad e^{-S} no es normalizable. Esto es consecuencia de la invarianza de gauge de la la acción de partida, que hace que la integración sobre todas las configuraciones equivalentes por transformaciones de gauge, origine divergencias.

El procedimiento de introducción de un término de fijado de gauge debe ser implementado utilizando el método de Fadeev-Popov[3],que en general implica la introducción de campos auxiliares, denominados "fantasmas". Desafortunadamente, se puede mostrar que en general es imposible implementar una condición de gauge que fije el gauge univocamente en un tratamiento perturbativo. Esto conduce a ambigüedades en la integral funcional (ambigüedades de Gribov[4]). Es en este punto donde se destaca el método de cuantificación estocástica ya que, como veremos en esta sección, en él no es necesario fijar el gauge y por ende no aparecen campos "fantasmas" ni ambigüedades de Gribov[(2),(5),(6)].

Analizaremos en primer término el caso de un campo puramente electromagnético[(7),(8)], es decir, descripto por

$$S(A)= \frac{1}{4} \int d^4x \; F_{\mu\nu}F_{\mu\nu} \tag{2.1}$$

donde $F_{\mu\nu}(x)= \partial_\mu A_\nu(x)-\partial_\nu A_\mu(x)$ y A_μ es un campo de gauge abeliano. Esta teoría es invariante bajo las transformaciones de gauge :

$$A'_\mu(x)=A_\mu(x)+\partial_\mu\varphi(x) \tag{2.2}$$

La ecuación de Langevin para este sistema es :

$$\frac{\partial A_\mu(x,\tau)}{\partial\tau}= (\Box\delta_{\mu\nu}-\partial_\mu\partial_\nu)A_\nu(x,\tau) +\eta_\mu(x,\tau) \tag{2.3}$$

$$\langle\eta_\mu(x,\tau)\rangle=0$$

$$\langle\eta_\mu(x,\tau)\eta_\nu(x',\tau')\rangle=2\delta_{\mu\nu}\delta(x'-x)\delta(\tau'-\tau) \tag{2.4}$$

Transformando Fourier sobre x a la ecuación (2.2) y a al acción (2.1)obtenemos :

$$S[A]= \frac{1}{4} \int d^4k \; A_\mu(k) \; k^2 \; T_{\mu\nu} \; A_\nu(-k) \tag{2.5}$$

$$\frac{\partial A_\mu(k,\tau)}{\partial\tau}=-k^2 \; T_{\mu\nu} \; A_\nu(k,\tau) + \eta_\mu(k,\tau) \tag{2.6}$$

En (2.5) y (2.6) hemos introducido el operador de proyección transversa $T_{\mu\nu}$:

$$T_{\mu\nu}= \delta_{\mu\nu}- \frac{1}{k^2}\, k_\mu k_\nu \qquad (2.7)$$

$$T_{\mu\nu}\ T_{\nu\rho} = T_{\mu\rho} \qquad (2.8)$$

Similarmente definimos el operador de proyección longitudinal $L_{\mu\nu}$:

$$L_{\mu\nu}= \delta_{\mu\nu}- T_{\mu\nu}= \frac{1}{k^2}\, k_\mu k_\nu \qquad (2.9)$$

$$L_{\mu\nu}\ L_{\nu\rho} = L_{\mu\rho} \qquad (2.10)$$

Los operadores $T_{\mu\nu}$ y $L_{\mu\nu}$ satisfacen la condición de ortogonalidad:

$$T_{\mu\nu}\ L_{\nu\rho} = 0 \qquad (2.11)$$

Calculemos ahora la función de Green de la ecuación de Langevin (2.6):

$$(\delta_{\mu\nu}\ \frac{\partial}{\partial\tau} + T_{\mu\nu}k^2)G_{\nu\rho}(k,\tau) = \delta_{\mu\rho}\delta(\tau) \qquad (2.12)$$

Inmediatamente se obtiene :

$$G_{\mu\nu}(k,\tau)=\theta(\tau)\ e^{-k^2 T\tau}$$

$$=\theta(\tau)[\delta_{\mu\nu}-k^2\tau\ T_{\mu\nu}+\frac{(k^2\tau)}{2}\ T_{\mu\nu}+\ .\ .\ .]$$

$$=\theta(\tau)(\delta_{\mu\nu}-T_{\mu\nu})+ \theta(\tau)\ e^{-k^2\tau}\ T_{\mu\nu} \qquad (2.13)$$

Por lo tanto la solución general de la ecuación de Langevin para A_μ será :

$$A_\mu(k,\tau)= \int_{-\infty}^{\tau} dt\ [e^{-k^2 t}\ T_{\mu\nu}+ L_{\mu\nu}]\eta_\nu(k,t)+ C\ (e^{-k^2\tau}\ T_{\mu\nu}+ L_{\mu\nu}) \qquad (2.14)$$

El segundo término de la derecha es la solución de la ecuación homogénea. En él se refleja la condición inicial.

Como podemos ver en (2.14), a diferencia de lo que ocurria en el caso de un campo escalar, la dependencia de las condiciones iniciales no desaparece al ir τ a infinito, ya que la parte longitudinal no está afectada por ningún factor de amortiguamiento.

Para entender mejor lo que sucede estudiemos las partes longitudinal y transversa por separado, lo cual puede hacerse proyectando la ecuación (2.6) sobre ambas componentes :

$$T_{\mu\nu}[\frac{\partial A_\nu(k,\tau)}{\partial\tau}-k^2\ T_{\nu\rho}\ A_\rho(k,\tau)]=T_{\mu\nu}\eta_\nu(k,\tau)$$

$$L_{\mu\nu}[\frac{\partial A_\nu(k,\tau)}{\partial\tau}+k^2\ T_{\nu\rho}\ A_\rho(k,\tau)]=T_{\mu\nu}\eta_\nu(k,\tau)$$

Denominemos :

$$T_{\mu\nu}A_\nu=A_\mu^T \quad , \quad T_{\mu\nu}\eta_\nu=\eta_\mu^T$$

$$L_{\mu\nu}A_\nu=A_\mu^L \quad , \quad L_{\mu\nu}\eta_\nu=\eta_\mu^L$$

así las proyecciones de la ecuación de Langevin se escriben como :

$$\frac{\partial A_\mu^T(k,\tau)}{\partial\tau}+k^2 A_\mu^T(k,\tau)=\eta_\mu^T(k,\tau) \qquad (2.15)$$

$$\frac{\partial A_\mu^L(k,\tau)}{\partial\tau}=\eta_\mu^L(k,\tau) \qquad (2.16)$$

Notese que las fuerzas estocásticas pueden ser consideradas como independientes :

$$\langle \eta_\mu^T(k,\tau)\eta_\nu^L(k',\tau')\rangle = \langle T_{\mu\sigma}\eta_\sigma(k,\tau)L_{\nu\rho}\eta_\rho(k,\tau)\rangle$$

$$= T_{\mu\sigma}L_{\nu\rho}\langle \eta_\sigma(k,\tau)\eta_\rho(k',\tau')\rangle$$

$$= 2T_{\mu\sigma}L_{\nu\rho}\delta_{\sigma\rho}\delta(k+k')=0 \qquad (2.17)$$

$$\langle \eta_\mu^T(k,\tau)\eta_\nu^T(k,\tau)\rangle = 2T_{\mu\nu}\delta(k+k') \qquad (2.18)$$

$$\langle \eta_\mu^L(k,\tau)\eta_\nu^L(k',\tau')\rangle = 2L_{\mu\nu}\delta(k+k') \qquad (2.19)$$

Esto también implica que los procesos A_μ^Ty A_ν^Lson independientes :

$$\langle A_\mu^T(k,\tau)A_\nu^L(k',\tau')\rangle = 0 \qquad (2.20)$$

Retornando al problema original, de las ecuaciones (2.15) y (2.16) puede verse que la ecuación de Langevin para la componente longitudinal carece de término disipativo, por lo tanto el sistema estocástico A_μ^L, fluctuará indefinidamente forzado por el ruido estocástico η_μ^L. Esto explica la ausencia de factor de amortiguamiento en los términos que contienen a $L_{\mu\nu}$ en la solución (2.14).

Calculemos ahora las funciones de correlación de segundo orden del campo A_μ, para lo cual también descompondremos la solución (2.14) en parte transversa y parte longitudinal :

$$A_\mu^T(k,\tau)= \int_0^{l} dt \; e^{-k^2(\tau-t)} \; \eta_\mu^T(k,t)$$

$$A_\mu^L(k,\tau)= \int_0^{\tau} dt \; \eta_\mu^L(k,t) \tag{2.21}$$

donde hemos considerado que la distribución inicial es $A_\mu^0(k,0)=0$. Introduciendo estas expresiones en las funciones de correlación $\langle A_\mu A_\nu \rangle$ obtenemos :

$$\langle A_\mu^T(k,\tau)A_\nu^T(-k,\tau')\rangle= 2 \int_c^{\min(t\,t')} dt \quad e^{-k^2(\tau+\tau'-2t)} \; T_{\mu\nu}$$

$$= \frac{1}{k^2} \; T_{\mu\nu}\{e^{-k^2|\tau-\tau'|} - e^{-k^2(\tau+\tau')}\} \tag{2.22}$$

$$\langle A_\mu^L(k,\tau)A_\nu^L(-k,\tau')\rangle= 2 \; L_{\mu\nu} \; \min(\tau,\tau') \tag{2.23}$$

Observamos que $\langle A_\mu^T(k,\tau)A_\nu^T(-k,\tau')\rangle$ reproduce el propagador transverso cuando $\tau\to\infty$. Contrariamente la función de correlación de la componente longitudinal se incrementa con el tiempo, lo que corresponde en este lenguaje a la aparición de un modo cero, problema típico en las teorias de gauge. Este problema aparente no representa,en realidad, un problema físico : todas las magnitudes de interés físico deben ser invariantes bajo transformaciones de gauge, y por lo tanto pueden ser expresadas completamente en términos de la componente transversa. Esto nos permite descartar la ecuación (2.23) y concentrarnos en la ecuación (2.22) correspondiente a la componente transversa. Analicemos ahora el caso de una teoría de gauge no-abeliana descripta por la acción :

$$S[A]=-\frac{1}{4}\int d^4x\ \mathrm{tr}\ F^{a}_{\mu\nu}F^{a}_{\mu\nu} \qquad (2.24)$$

$$F^{a}_{\mu\nu}=\ \partial_\mu A^{a}_{\nu}-\partial_\nu A^{a}_{\mu}+[A_\mu,A_\nu]^{a} \qquad a=1,2,\ldots,N^2-1 \qquad (2.25)$$

donde $A_\mu(x)$toma valores en el álgebra de Lie de SU(N).

La ecuación de Langevin correspondiente será :

$$\frac{\partial A^{a}_{\mu}(x,\tau)}{\partial\tau}=\ D^{ab}_{\nu}\ F^{b}_{\nu\mu}\ +\ \eta^{a}_{\mu}(x,\tau) \qquad , \qquad (2.26)$$

aquí D_ν es la derivada covariante :

$$D^{ab}_{\nu}\ =\ \partial_\nu\delta_{ab}-f^{ab}{}_{c}\ A_\nu{}^{c} \qquad (2.27)$$

y $f^{ab}{}_{c}$ son las constantes de estructura de SU(N). El ruido Gaussiano $\eta^{a}_{\mu}(x,\tau)$ juega el rol de una corriente estocástica y su segunda función de correlación es :

$$\langle\eta^{a}_{\mu}(x,\tau)\eta^{b}_{\nu}(x',\tau')\rangle=\ 2\ \delta_{\mu\nu}\delta_{ab}\delta(x-x')\delta(\tau-\tau') \qquad (2.28)$$

Veamos como se comporta la ecuación de Langevin (2.26) bajo las transformaciones de gauge :

$$A'_{\mu}(x,\tau)=U^{+}(x)A_\mu(x,\tau)U(x)\ +\ U^{+}(x)\partial_\mu U(x) \qquad (2.29)$$

siendo U(x) un elemento del grupo SU(N).

Realizando un análisis análogo al desarrollado en la primera sección de este capitulo, se concluye inmediatamente que la corriente estocástica $\eta_\mu(x,\tau)$, valuada en el álgebra de Lie de SU(N), se transforma de la siguente manera :

$$\eta'_\mu(x,\tau)=U^+(x)\eta_\mu(x,\tau)U(x) \tag{2.30}$$

lo que significa que si A_μ y η_μ satisfacen la ecuación de Langevin (2.26), entonces A'_μ y η'_μ satisfacen :

$$\frac{\partial A'^a_\mu(x,\tau)}{\partial\tau}= D'^{ab}_\nu\ F'^b_{\nu\mu}\ +\ \eta'^a_\mu(x,\tau) \tag{2.31}$$

De modo tal que la ecuación de Langevin es no degenerada y por lo tanto, la dependencia sobre τ de la solución del problema de Cauchy $A_\mu(x,0)=A\ (x)$, no contiene ambigüedades. Esto significa que fijar la condición inicial es equivalente a fijar el gauge.

En el caso no abeliano la solución a la transformada de Fourier sobre x de la ecuación de Langevin (2.26) exhibe, como en el caso del electromagnetismo, una componente longitudinal que no posee factor disipativo que dependa de τ. Al calcular las funciones de Green, las lineas longitudinales darán lugar a términos finitos e infinitos. Cuando se calculen los valores medios de magnitudes invariantes de gauge los términos finitos e infinitos provenientes de las componentes longitudinales reproducen las contribuciones asociadas con los efectos de los campos fantasmas de Fadeev-Popov.

Como conclusión podemos decir que el tiempo ficticio τ juega el rol de parámetro de gauge, y la corriente estocástica el de término de fijado de gauge.

III-Cuantificación estocástica de campos fermiónicos.

Hasta ahora hemos discutido la cuantificación estocástica de campos bosónicos para los cuales existe.un paralelo estadístico de simple interpretación física como casos particulares de movimiento Browniano. La carencia de equivalente clásico para los campos fermiónicos hace problemática una interpretación física equivalente. Esto se refleja también en la convergencia al equilibrio de los sistemas fermiónicos.

Para tratar este problema, en un primer paso generalizaremos directamente el método de cuantificación estocástica para campos bosónicos, a un sistema descripto por fermiónes de Dirac libres con masa[7]:

$$S[\bar{\psi}.\psi]=-i \int d^D x \;\bar{\psi}(x)(\not\partial +im)\psi(x) \qquad (3.1)$$

donde D es la dimensión del espacio-tiempo(euclideo), y $\not\partial = \gamma_\mu \partial_\mu$, siendo γ_μ las matríces de Dirac.

Dado que las componentes de los fermiones son variables de Grassmann, la derivada funcional de S respecto de ψ anticonmuta con $\bar{\psi}$ y, por lo tanto, el término disipativo de la ecuación de Langevin para $\bar{\psi}$, lleva signo positivo. Las ecuaciones son, entonces

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial\tau}\, \psi(x,\tau) &= -\frac{\delta S[\bar{\psi},\psi]}{\delta\bar{\psi}(x,\tau)} + \Theta(x,\tau) \\ \frac{\partial}{\partial\tau}\, \bar{\psi}(x,\tau) &= \frac{\delta S[\bar{\psi},\psi]}{\delta\psi(x,\tau)} + \bar{\Theta}(x,\tau) \end{aligned} \qquad (3.2)$$

$$\langle\Theta(x,\tau)\rangle=\langle\bar{\Theta}(x,\tau)\rangle=0$$

$$\langle\Theta_\alpha(x,\tau)\bar{\Theta}_\beta(y,\tau')\rangle= \qquad 2\delta(x-y)\delta(\tau-\tau')\delta_{\alpha\beta} \tag{3.3}$$

Θ y $\bar{\Theta}$ son ruidos fermiónicos anticonmutantes de distribución Gaussiana.

En el caso especifico del sistema descripto por la acción (3.1) la ecuación de Langevin es :

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\psi(x,\tau)= (i\partial\!\!\!/ -m)\psi(x,\tau) + \Theta(x,\tau) \tag{3.4}$$

Para resolver esta ecuación debemos primero hallar su función de Green:

$$(\frac{\partial}{\partial\tau} -i\partial\!\!\!/+ m)_{\alpha\sigma}\ G_{\sigma\beta}(x,\tau)= \delta_{\alpha\beta}\delta(x)\delta(\tau)$$

$$G(x,\tau)=0 \quad \text{para } \tau<0 \tag{3.5}$$

Transformando Fourier sobre x a esta ecuación se integra en forma inmediata, obteniendose la solución :

$$G(x,\tau)= \frac{\theta(\tau)}{(2\pi)^D} \int d^Dp\ e^{-(p+m)\tau+ipx} \tag{3.6}$$

De modo que la solución de la ecuación (3.4) es :

$$\psi(x,\tau)= \int dt\ d^Dy\ G(x-y,\tau-t)\ \Theta(y,t) \tag{3.7}$$

El factor $e^{-m\tau}$ que aparece en $G(x,\tau)$ es el amortiguamiento que asegura la convergencia del sistema estocástico a un estado de equilibrio cuando $\tau\to\infty$. Para comprobar dicha convergencia debe diagonalizarse la función de Green G en los índices espinoriales.

La matriz $(\gamma_\mu p_\mu+m)$ con sus dos autovalores $\pm i\sqrt{p^2}+m$, puede ser diagonalizada por una matriz unitaria U(p) de modo tal que :

$$(\gamma_\mu p_\mu + m)= U^+(p)\begin{vmatrix} i\sqrt{p^2}+m & & & 0 \\ & \sqrt{p^2}+m & & \\ & & -\sqrt{p^2}+m & \\ 0 & & & -\sqrt{p^2}+m \end{vmatrix} U(p) \qquad (3.8)$$

La función de Green $G(x,\tau)$ es entonces diagonalizada también por U(p)

$$G(x,\tau)= \frac{\theta(\tau)}{(2\pi)^D}\int d^Dp\ U^+(p)\ e^{-D(p)\tau}\ U(p)\ e^{-m\tau+ipx} \qquad (3.9)$$

donde $D(p)$ es la matriz diagonal de (3.8).

Como puede verse el único factor de amortiguamiento es $e^{-m\tau}$. Esto significa que en el límite de masa nula y $\tau\to\infty$ las funciones de Green estan mal definidas y, en términos estocásticos, que el sistema (3.4) no tiene estado estacionario. Esta situación es particularmente inconveniente para la cuantificación de teorías con fermiones quirales.

El método propuesto hasta aquí para la cuantificación de campos fermiónicos está entonces limitado a teorías con término de masa en la acción. Por lo tanto, para la cuantificación de teorías de Yang-Mills acopladas con fermiones sin masa, resulta necesario modificar el metodo. En este punto, es donde juega un rol fundamental la introducción de un núcleo apropiado en el término disipativo de la ecuación de Langevin. La introducción de dicho núcleo forzará la convergencia del sistema a un único estado de equilibrio.

Extendiendo automáticamente a campos fermiónicos lo que vimos en la primera sección del capitulo anterior para campos bosónicos,proponemos una ecuación de Langevin con un núcleo integral distinto de la distribución $\delta(x-y)$ en el término disipativo[7),(8),(9)]:

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\ \psi(x,\tau)= -\int d^Dy\ K(x,y)\ \frac{\delta S[\bar\psi,\psi]}{\delta\bar\psi(y,\tau)} + \Theta(x,\tau) \tag{3.10}$$

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\ \bar\psi(x,\tau)= \int d^Dy\ K(x,y)\ \frac{\delta S[\bar\psi,\psi]}{\delta\psi(y,\tau)} + \bar\Theta(x,\tau) \tag{3.11}$$

$$\begin{gathered}\langle\Theta(x,\tau)\rangle=\langle\bar\Theta(x,\tau)\rangle=0\\ \langle\Theta_\alpha(x,\tau)\bar\Theta_\beta(y,\tau')\rangle= 2\ K(x,y)\delta(\tau-\tau')\delta_{\alpha\beta}\end{gathered} \tag{3.12}$$

De modo que, de acuerdo con la fórmula (1.10;II) la distribución de probabilidad de las variables estocásticas ψ y $\bar\psi$ es :

$$P[\psi,\bar{\psi};\tau]=\frac{\int\mathcal{D}\Theta\mathcal{D}\bar{\Theta}\ \delta(\psi-\psi_\Theta)\ \delta(\bar{\psi}-\bar{\psi}_\Theta)\ \exp(-\frac{1}{2}\int d^Dx d^Dy d\tau\ \bar{\Theta}(x,\tau)K^{-1}(x,y)\Theta(y,\tau))}{\int\mathcal{D}\Theta\mathcal{D}\bar{\Theta}\ \exp(-\frac{1}{2}\int d^Dx d^Dy d\tau\ \bar{\Theta}(x,\tau)K^{-1}(x,y)\Theta(y,\tau))}$$

(3.13)

La ecuación de Fokker-Planck correspondiente a esta distribución es

$$\frac{\partial}{\partial\tau}P[\bar{\psi},\psi;\tau]=\int d^Dx\ d^Dy\ K(x,y)\ \{\frac{\delta}{\delta\bar{\psi}(x,\tau)}[\frac{\delta S[\bar{\psi},\psi]}{\delta\psi(y,\tau)}P[\bar{\psi},\psi;\tau]\ ]-$$

$$-\frac{\delta}{\delta\psi(x,\tau)}[\frac{\delta S[\bar{\psi},\psi]}{\delta\bar{\psi}(y,\tau)}P[\bar{\psi},\psi;\tau]\ ]+2\ \frac{\delta^2 P[\bar{\psi},\psi;\tau]}{\delta\bar{\psi}(x,\tau)\,\delta\psi(y,\tau)}\ \}$$

(3.14)

El origen del problema de convergencia del sistema tratado anteriormente reside en que el término disipativo $\delta S/\delta\bar{\psi}$ de la ecuación de Langevin posee autovalores positivos y negativos, y en ausencia de un término de masa, son estos últimos los que impiden la convergencia a un estado de equilibrio.

En el caso de la acción (3.1) la elección más natural de K es :

$$K(x,y)=(i\not{\partial}+m)\ \delta(x-y) \qquad (3.15)$$

Introduciendo este núcleo en la ecuación de Langevin tenemos :

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\psi(x,\tau)=-(i\not{\partial}+m)(i\not{\partial}-m)\psi(x,\tau)+\Theta(x,\tau) \qquad (3.16)$$

Ahora el operador $(i\not{\partial}+m)(i\not{\partial}-m)$ tiene solo autovalores positivos, por lo que la convergencia del sistema está asegurada.

Análogamente en el caso de una teoría de Yang-Mills, donde la parte fermiónica de la acción es :

$$S_F[\bar{\psi},\psi]=-i\int d^D x\ \bar{\psi}(x) \not{D}(A)\psi(x) \tag{3.17}$$

$$\not{D}(A)= \not{\partial}+\not{A}$$

la elección más simple y apropiada es $K(x,y)= \not{D}(A)\ \delta(x-y)$.

Se puede probar que esta elección transforma al Hamiltoniano de Fokker-Planck en un operador semidefinido positivo, cuya autofunción correspondiente al autovalor cero es proporcional a $\exp(-S[\bar{\psi},\psi])$. Como vimos en el capítulo anterior esto garantiza que el sistema alcanza dicha configuración de equilibrio cuando $\tau\to\infty$.

En los casos analizados hasta ahora trabajamos con fermiones de Dirac. Cuando los campos considerados son fermiones quirales, aparece un problema adicional: la elección del núcleo K debe ser tal que, además de asegurar la convergencia al equilibrio, también homogeneice la quiralidad de todos los términos en la ecuación de Langevin. Esto es necesario ya que el término $\delta S/\delta\bar{\psi}$ tiene quiralidad opuesta a la de ψ, de modo que K debe volver a cambiarla. Veamos por ejemplo, un sistema descripto por la acción :

$$S[\bar{\psi},\psi]= \int d^D x\ \bar{\psi}(x)\not{D}(A)(1-\gamma_5)\psi(x) \tag{3.18}$$

donde: $\not{D}(A)=(\not{\partial}+e\not{A})=\gamma_\mu(\partial_\mu+eA)$ y $\gamma_5=\gamma_1\cdots\gamma_D$

Nuestra propuesta para este caso, que resuelve el problema de quiralidad, es $K(x,y)=\delta(x-y)\not{D}(A)(1+\gamma_5)/2$ [1]. El proyector $(1+\gamma_5)/2$ es necesario para que la función de correlación de segundo orden sea consistente matricialmente. Por lo tanto el sistema estocástico que nosotros proponemos para describir la cuantificación del sistema (3.18) es

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\,\psi(x,\tau)= -\not{D}(A)\,\frac{(1+\gamma_5)}{2}\,\frac{\delta S[\bar{\psi},\psi]}{\delta\bar{\psi}(x,\tau)} + \Theta(x,\tau) \tag{3.19}$$

$$\langle\Theta(x,\tau)\bar{\Theta}(y,\tau')\rangle= \not{D}(A)\,(1+\gamma_5)\,\delta(x-y)\,\delta(\tau-\tau') \tag{3.20}$$

Como vimos en la primera sección de este capítulo, es el núcleo K el que fija las propiedades de simetría del proceso estocástico. Una elección apropiada permite conservar las simetrías de la teoría a lo largo del proceso de regularización y cuantificación. Esto ocurre en los ejemplos dados en esta sección donde estaban en juego simetrías de gauge y simetrías quirales.

En los capítulos siguientes utilizaremos nuestra propuesta para estudiar los problemas de anomalias de gauge. Veremos entonces que se resuelve un problema central de las teorías quirales.

Referencias.

(1)-H.Montani, F.A.Schaposnik; Ann. of Phys.(NY) 181, n°1 (1988), 161.

(2)-G.Parisi, Y.S.Wu; Sci.Sinica 24 (1981), 483.

(3)-L.D.Faddeev, V.N.Popov; Phys.Lett.B 25 (1967), 29.

(4)-V.N.Gribov; Nucl.Phys.B 139 (1978), 1.

(5)-D.Zwanziguer; Nucl.Phys.B 192 (1981), 259.

(6)-L.Baulieu, D.Zwanziguer; Nucl.Phys.B 193 (1981), 163.

(7)-A.A.Migdal; Sov.Phys.Usp. 29, n°5 (1986), 389.

(8)-P.Damgaard, H.Huffel; Phys.Rep. 152 (1987), 227.

(9)-J.D.Breit, J.Gupta, A.Zaks; Nucl.Phys.B 233 (1984), 61.

CAPITULO V

" MODELOS QUIRALES Y CUANTIFICACION ESTOCASTICA "

En este capítulo desarrollaremos nuestra propuesta para cuantificar teorías con fermiones de Weyl, en el contexto del método estocástico. En la primera sección daremos una introducción a los Modelos Quirales y a las anomalías, principalmente desde el marco de la integral funcional. En la segunda sección, expondremos nuestra propuesta, introduciendo un núcleo más general en la ecuación de Langevin para los fermiones de Weyl. Esto nos permitirá cuantificar el Modelo de Schwinger sin introducir nuevos grados de libertad fermiónicos. En este contexto calcularemos la corriente anómala y una acción efectiva para dicho modelo.

I-Modelos quirales bidimensionales.

Las teorías de gauge acopladas a fermiones de Weyl (sin masa), también denominadas *modelos quirales*, están afectadas por anomalías en espacio-tiempos de dimensión d=2+4k, k=0,1,... . Como veremos a continuación, esto significa que la corriente de Noether, asociada con la simetría de gauge, deja de ser conservada debido a fluctuaciones cuánticas. En el contexto de la cuantificación via integral funcional, esto se refleja en la no invarianza de gauge de la acción efectiva obtenida por integración de la funcional generatríz sobre los campos fermiónicos.

La presencia de estos términos anómalos en las identidades de Ward puede descubrirse en el diagrama triangular fermiónico, con dos corrientes vectoriales y una corriente axial (ver figura).

Imponiendo conservación de la corriente y simetría de Bose en el canal vectorial, se encuentra que la corriente axial no es conservada y por lo tanto, la simetría quiral está rota en presencia de un campo de gauge acoplado con las corrientes vectoriales conservadas.

Este fenómeno de violación cuántica de una simetría clásica, es denominado genéricamente como *anomalía*, nombre que también se aplica al valor medio cuántico de la divergencia de la corriente de Noether asociada a dicha simetría. Cuando se trabaja con fermiones de Weyl, anomalía quiral y de gauge son la misma cosa.

Los modelos quirales juegan un rol importante en distintos contextos: en el Modelo Standard, que describe las interacciones electrodébiles, se trabaja con fermiones de una quiralidad definida (por ejemplo, cada componente quiral del electrón es un fermión de Weyl que se trata en forma distinta); en la teoría de cuerdas son fundamentales para construir teorías consistentes. En estos y otros casos es básico asegurar la cancelacion final de las anomalías. De ota manera la renormalizabilidad y unitariedad de los modelos queda comprometida.

En relación con estos problemas, estudiaremos en este capítulo una teoría de gauge abeliana en dos dimensiones, acoplada a fermiones de Weyl, denominada Modelo de Schwinger Quiral. La acción que describe a este modelo, considerando un espacio-tiempo euclideo, es :

$$S[\bar{\psi},\psi,A]=-\frac{1}{4}\int d^2x\ F_{\mu\nu}F_{\mu\nu}\ +\ S_F[\bar{\psi},\psi] \tag{1.1}$$

$$S_F[\bar{\psi},\psi]=\int d^2x\ \bar{\psi}(x)D(A)\psi(x) \tag{1.2}$$

donde :

$$F_{\mu\nu}=\ \partial_\mu A_\nu(x)-\partial_\nu A_\mu(x)$$

$$D(A)=\ \not{D}(A)\ \frac{(1-\gamma_5)}{2}=\ (i\not{\partial}+e\not{A}(x))\frac{(1-\gamma_5)}{2}$$

$$\not{p}=\ p_\mu\gamma_\mu \qquad\qquad \mu=\ 0,\ 1$$

$$\gamma_0=\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \qquad\qquad \gamma_1=\begin{vmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{vmatrix}$$

$$\gamma_5= i\gamma_0\gamma_1 \qquad (1.3)$$

$$\{\gamma_\mu,\gamma_\nu\}=2\delta_{\mu\nu} \qquad\qquad \gamma_\mu\gamma_5=i\varepsilon_{\mu\nu}\gamma_\nu$$

La presencia del proyector $(1-\gamma_5)/2$ en $S_F(\bar{\psi},\psi)$ indica que estamos trabajando con fermiones de Weyl de quiralidad izquierda :

$$\psi=-\gamma_5\ \psi \qquad (1.4)$$

A continuación veremos algunas consideraciones generales que relacionan transformaciones de simetría de la acción globales y locales, en el marco del teorema de Noether.

Supongamos que un sistema está descripto por la variable dinámica ϕ con una acción $S[\phi]$, y que la transformación global

$$\phi(x)\rightarrow\phi(x)+\varepsilon\delta\phi(x) \qquad (1.5)$$

es una simetría de la acción, es decir :

$$S[\phi]=S[\phi+\varepsilon\delta\phi] \qquad (1.6)$$

De acuerdo con el teoréma de Noether, existe una corriente conservada $J_\mu(x)$ asociada a la transformación (1.5), es decir que $\partial_\mu J_\mu(x)=0$. Para las configuraciones $\phi(x)$ que extreman la acción (esto es, que satisfacen las ecuaciones de movimiento), esta corriente puede escribirse como :

$$J_\mu(\phi)= \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial_\mu \phi} \delta\phi \qquad (1.7)$$

Supongamos ahora que la transformación (1.5) es local :

$$\phi(x)=\phi(x)+\varepsilon(x)\delta\phi \qquad , \qquad (1.8)$$

es decir que ahora el parámetro de la transformación ε es función del punto x, $\varepsilon=\varepsilon(x)$.

Veamos de qué forma cambia la acción $S[\phi]$. Al hacer la variación de la acción habrá un término adicional al que aparece cuando la transformación es global. Este término contendrá las derivadas del parámetro, de modo tal que la acción en términos de las nuevas variables es :

$$S(\phi')= S(\phi)+ \int d^D x \ \partial_\mu \varepsilon(x) \ J_\mu(\phi) \qquad (1.9)$$

Hemos supuesto una acción a lo sumo cuadrática en las derivadas primeras de los campos y por ello solo aparecen derivadas primeras del parámetro de la transformación $\varepsilon(x)$.

Integrando por partes y despreciando los términos de superficie, se obtiene :

$$S(\phi)= S(\phi)+ \int d^D x \ \varepsilon(x) \ \partial_\mu J_\mu(x) \qquad (1.10)$$

donde $J_\mu(x)$ es la corriente que se conservaba como resultado de transformaciones globales.

Utilizando esta expresión derivaremos el comportamiento cuántico de una corriente que se conserva clásicamente.

Retornemos al caso particular de la parte fermiónica de la acción del Modelo de Schwinger(1.2)

$$S_F[\bar{\psi},\psi]= \int d^2x \ \bar{\psi}(x)D(A)\psi(x)$$

Esta acción es invariante bajo las transformaciones globales :

$$\psi(x)=e^{i\varepsilon}\psi(x)$$

$$\bar{\psi}(x)=\bar{\psi}(x)e^{-i\varepsilon} \qquad (1.11)$$

y la corriente de Noether asociada es :

$$J_\mu(\bar{\psi},\psi)= \frac{1}{2} \ \bar{\psi}(x)\gamma_\mu(1-\gamma_5)\psi(x) \qquad (1.12)$$

La funcional generatríz para este sistema es :

$$Z_F(A)= \int \mathcal{D}\bar{\psi} \ \mathcal{D}\psi \ e^{-S[\bar{\psi},\psi,A]} = \det \ D(A) \qquad (1.12)$$

Si aplicamos la transformación (1.11) en $Z_F(A)$, con A considerado como un campo externo, obtenemos :

$$Z_F=\int \mathcal{D}\bar{\psi}\ \mathcal{D}\psi\ J(\varepsilon)\ \exp\{-S_F[\bar{\psi},\psi]+\int d^2x\ \varepsilon(x)\ \partial_\mu J_\mu(\bar{\psi},\psi)\ \} \tag{1.13}$$

aquí $J(\varepsilon)$ es el Jacobiano que proviene de la acción de la transformación (1.11), sobre la medida de integración $\mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi$:

$$\mathcal{D}\bar{\psi}'\mathcal{D}\psi'= J(\varepsilon)\mathcal{D}\bar{\psi}\ \mathcal{D}\psi \tag{1.14}$$

Como la integración funcional se realiza sobre todo el espacio de funciones $\bar{\psi}$ y ψ, (1.13) no puede depender del parámetro ε, por lo tanto :

$$\frac{\delta Z_F(A)}{\delta\varepsilon(x)} = 0 \tag{1.15}$$

Por otra parte, derivando el logaritmo de la $Z_F(A)$ (1.13) respecto de $\varepsilon(x)$, obtenemos el valor de expectación cuántico de la divergencia de $J_\mu(\bar{\psi},\psi)$:

$$\frac{\delta \ln Z_F(A)}{\delta\varepsilon(x)}= Z_F^{-1}\int\mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi\ (\partial_\mu J_\mu\ \exp\{-S_F[\bar{\psi},\psi]+\int d^2x\ \varepsilon(x)\partial_\mu J_\mu(\bar{\psi},\psi)\}\ )+\frac{\delta \ln J(\varepsilon)}{\delta\varepsilon(x)} \tag{1.16}$$

$$\frac{\delta \ln Z_F(A)}{\delta\varepsilon(x)}= \langle\ \partial_\mu J_\mu(\bar{\psi},\psi)\ \rangle+\frac{\delta \ln J(\varepsilon)}{\delta\varepsilon(x)} \tag{1.17}$$

Introduciendo (1.15) en (1.17) se obtiene la identidad de Ward :

$$\langle\ \partial_\mu J_\mu(\bar{\psi},\psi)\ \rangle=-\ \frac{\delta \ln J(\varepsilon)}{\delta\varepsilon(x)} \tag{1.18}$$

De modo que, si el Jacobiano de la transformación es no trivial, la corriente $J_\mu(\bar{\psi},\psi)$, que se consevaba clásicamente, tiene fluctuaciones cuánticas distintas de cero.

De hecho, este el caso que nos ocupa pues, como mostró Fujikawa[1], el Jacobiano de la transformación (1.11) es no trivial. Podemos apreciar mejor el problema expresando la funcional generatríz fermiónica como el determinante del operador $D(A)$ (ver ecuación (1.12)).

Teniendo en cuenta que la ecuación (1.13) puede escribirse como :

$$Z_F(A)= J(\varepsilon)\ \det D(A') \tag{1.19}$$

$$A'_\mu(x)= A_\mu(x)-\partial_\mu\varepsilon(x) \tag{1.20}$$

Igualando (1.12) y (1.19) ya que Z_F no puede variar al cambiar $\psi\to\psi'$, obtenemos que :

$$\det\ D(A) = J(\varepsilon)\ \det\ D(A') \tag{1.21}$$

Ahora bien, el operador $D(A)=(i\not\partial+e\not A)(1-\gamma_5)/2$, tiene la paricularidad de cambiar la quiralidad de los fermiones sobre los que actua. La introducción del proyector $(1-\gamma_5)/2$ nos restringe a la componente izquierda de los campos fermiónicos en juego, pero la contracción con las matrices de Dirac γ_μ del operador $\not D(A)$ genera un mapeo al sector fermiónico de quiralidad opuesta. Por lo tanto el problema de autovalores $D(A)\varphi_n=\lambda_n\varphi_n$, carece de sentido, ya que la quiralidad del miembro de la derecha es opuesta al de la izquierda, lo que significa que el determinante del operador $D(A)$ no está definido.

La forma ordinaria de resolver este problema consiste en agregar a la acción (1.2) un término de fermiones libres con quiralidad opuesta[2], de modo tal que la acción fermiónica sea :

$$S_F[\bar{\psi},\psi]= \int d^2x \ \bar{\psi}(x)[i\partial\!\!\!/+e A\!\!\!/(x)\frac{(1-\gamma_5)}{2}]\psi(x) \qquad (1.22)$$

El término agregado a la acción original, $\bar{\psi}\partial\!\!\!/(1+\gamma_5)\psi/2$, no está acoplado ni a la parte izquierda ni al campo A_μ por lo tanto no influye en el cálculo de valores medios relacionados solo a fermiones del sector izquierdo o al campo A_μ. Su contribución es entonces irrelevante a menos que se calculen cantidades dependientes de la métrica como el tensor de energía impulso $T_{\mu\nu}$.

Una vez que se ha dado sentido de esta manera al problema de autovalores, resta calcular el Jacobiano $J(\varepsilon)$, por ejemplo como el cociente de determinantes que se obtiene a partir de (1.21). Dado que los autovalores del operador de Dirac no son acotados, su producto (su determinante) diverge, por lo que es necesario introducir una regularización, Usando, por ejemplo, como método de regularización el de la función ζ de Riemann, se obtiene la siguiente expresión para el Jacobiano (se descartaron los términos de paridad normal, ya que pueden ser eliminados mediante contratérminos en el Lagrangeano) :

$$J(\varepsilon)= \exp(-\frac{e}{4\pi}\int d^2x\ \varepsilon(x)\ \varepsilon_{\mu\nu}F_{\mu\nu}) \tag{1.23}$$

de modo tal que la identidad de Ward anómala (1.18) es ahora :

$$< \partial_\mu J_\mu >=-\frac{e}{4\pi}\ \varepsilon_{\mu\nu}F_{\mu\nu} \tag{1.24}$$

II-Cuantificación estocástica del Modelo de Schwinger.[3]

En este capítulo estudiaremos la cuantificación del Modelo de Schwinger [ecs.(1.1)-(1.3) de este capítulo], utilizando el método de cuantificación estocástica desarrollado en los capítulos anteriores. Como vimos en la sección III del capítulo IV, las ecuaciones de Langevin para fermiones de Weyl, requieren la introducción de un núcleo no trivial para garantizar la convergencia a la distribución de equilibrio $e^{-S[\bar{\psi},\psi,A]}$, y la misma quiralidad en todos los términos de dicha ecuación.

Inspirados en la cuantificación de modelos bidimensionales via integral funcional[4)-(9], nuestra propuesta[8] es utilizar como núcleo K al operador :

$$K(x,y;A)= \delta(x-y)(i\partial\!\!\!/+ea A\!\!\!/)\ \frac{(1+\gamma_5)}{2} \tag{2.1}$$

donde a es un parámetro *a priori* libre, relacionado con un parámetro análogo introducido por Jackiw y Rajaraman[10]. Esta elección satisface las condiciones mencionadas, ya que da la quiralidad correcta al término disipativo de la ecuación de Langevin y el debido caracter matricial a la función de correlación de segundo orden. En cuanto a la convergencia, se debe tener en cuenta que, con la elección (2.1),en el caso particular en que $\alpha=1$, estamos en la situación propuesta en las ecuaciones (3.15) y (3.16) del capítulo anterior. En esas circunstancias, es el símbolo principal del operador el que actua como factor de amortiguamiento garantizando la convergencia al equilibrio. Para los casos en que α es distinto de 1, el símbolo principal del operador $(i\partial\!\!\!/+e\alpha A\!\!\!/)(i\partial\!\!\!/+eA\!\!\!/)$ es el mismo que el del operador $(i\partial\!\!\!/+eA\!\!\!/)^2$, por lo tanto, y teniendo en cuenta que $e^{-S[\bar\psi,\psi,A]}$ sigue siendo una autofunción del autovalor cero de la ecuación de Fokker-Planck, es de esperar que la introducción del parámetro α no altere dicha convergencia. La introducción del parámetro arbitrario α en el operador de Dirac $D\!\!\!\!/(A)$ constituye una generalización de la elección de nuestra propuesta del capítulo anterior para la ecuación de Langevin de los fermiones de Weyl[ec.(3.19;IV)]. Esta generalización también es válida en el caso en que se trabaje con fermiones de Dirac, donde el núcleo no incluye al proyector $(1+\gamma_5)/2$. La elección del operador de Dirac (correspondiente a $\alpha=1$) es importante en las teorías con invarianza de gauge, donde es necesario mantener dicha invarianza en el proceso de cuantificación. Cuando el operador de Dirac no es una derivada covariante (como es el caso presente) no se impone más como el candidato único para construir K. El operador que introducimos nosotros, (2.1), es el operador más general que conserva la invarianza de Lorentz de la teoría.

Concretamente, las ecuaciones de Langevin correspondientes al modelo de Schwinger (1.1) son :

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\psi(x,\tau)=-(i\partial\!\!\!/+e\alpha A\!\!\!/)(i\partial\!\!\!/+eA\!\!\!/)\frac{(1-\gamma_5)}{2}\psi(x,\tau)+\Theta(x,\tau)$$

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\bar{\psi}(x,\tau)=-\bar{\psi}(x,\tau)\frac{(1+\gamma_5)}{2}(i\overleftarrow{\partial\!\!\!/}+eA\!\!\!/)(i\overleftarrow{\partial\!\!\!/}+e\alpha A\!\!\!/)+\bar{\Theta}(x,\tau) \tag{2.2}$$

$$\frac{\partial}{\partial\tau}A_\mu(x,\tau)=\partial_\nu F_{\nu\mu}+e\bar{\psi}(x,\tau)\gamma_\mu\frac{(1-\gamma_5)}{2}\psi(x,\tau)+\eta_\mu(x,\tau) \tag{2.3}$$

com las prescripciones (1.1)-(1.4), y donde $\Theta,\bar{\Theta}$ y $\eta_\mu$son fuentes de ruido estocástico.

Es importante resaltar que nuestra propuesta soluciona elegantemente el problema originado por el cambio de quiralidad que produce el operador de Dirac. El método de cuantificación estocástica, planteado por el sistema de ecuaciones de Langevin (2.2), se desarrolla completamente en el sector fermiónico de chiralidad izquierda evitando , de esta manera, la introducción de nuevos grados de libertad a través de la incorporación de fermiones del sector de chiralidad opuesta. En este sentido, nuestra propuesta es equivalente a la presentada recientemente por Singer[11] para tratar el problema de los determinantes quirales, consistente en componer al operador de Dirac que actua sobre los fermiones del sector izquierdo con un operador fijo, aplicado al sector fermiónico derecho, de forma que se genere un problema de autovalores bien definido.

En los desarrollos que haremos en esta sección será necesario adoptar un método de regularización. Nosotros trabajeremos en el marco del método de regularización estocástica[12],[13], lo que significa que las funciones de correlación para las fuentes de ruido, ya no tendrán soporte de medida nula. Como vimos en el capítulo III, utilizaremos fuentes de ruido cuya segunda función de correlación dependerá de un parámetro Λ que gobierna la medida del soporte, de modo tal que en cierto valor límite del parámetro se recupera el proceso markoviano (δ-correlacionado):

$$\langle\Theta(x,\tau)\rangle=\langle\bar{\Theta}(x,\tau)\rangle=0$$

$$\langle\Theta(x,\tau)\bar{\Theta}(y,\tau')\rangle= 2\ \delta(x-y)(i\not{\partial}+e\alpha \not{A})\ \frac{(1+\gamma_5)}{2}\ a_\Lambda(\tau-\tau') \qquad (2.4)$$

donde $\quad a_\Lambda(\tau)=a_\Lambda(-\tau) \qquad \int_{-\infty}^{\infty} d\tau' a_\Lambda(\tau-\tau')=1$

$$\lim_{\Lambda\to\infty} a_\Lambda(\tau-\tau')= \delta(\tau-\tau') \qquad (2.5)$$

En tanto que la fuente de ruido para el campo de gauge A_μ continua siendo, en principio, δ-correlacionada, ya que no calcularemos valores medios sobre esta variable :

$$\langle\eta_\mu(x,\tau)\rangle=0$$

$$\langle\eta_\mu(x,\tau)\eta_\nu(x',\tau')\rangle= 2\delta_{\mu\nu}\ \delta(x-x')\delta(\tau-\tau') \qquad (2.6)$$

En el contexto del método de cuantificación estocástica calcularemos la identidad de Ward anómala (1.18). De acuerdo con lo desarrollado en el capitulo III, si calculamos el valor medio estocástico de una función $F(\bar{\psi},\psi)$ de las soluciones de la ecuación de Langevin (2.2) en un instante del tiempo estocástico, τ, fijo y luego tomamos el limite para $\tau\to\infty$, obtendremos el valor de expectación cuántico de la función $F(\bar{\psi},\psi)$. Usando este resultado calcularemos el valor de expectación de la variación de la acción fermiónica (1.2):

$$S_F[\bar{\psi},\psi]=\int d^2x\ \bar{\psi}(x)D(A)\psi(x)$$

bajo la acción de la transformación infinitesimal

$$\psi(x)=e^{i\varepsilon(x)}\psi(x)$$

$$\bar{\psi}(x)=\bar{\psi}(x)e^{-i\varepsilon(x)} \qquad (2.7)$$

siendo $\varepsilon(x)$ un parámetro infinitesimal. Esta variación es :

$$\delta S_F[\bar{\psi},\psi]=\int d^2x\ \varepsilon(x)\ \partial_\mu J_\mu(x) \qquad (2.8)$$

$$J_\mu(x)=\ \frac{e}{2}\ \bar{\psi}(x)\,\gamma_\mu(1-\gamma_5)\psi(x) \qquad (2.9)$$

Es fácil comprobar que J_μ es la corriente conservada clásicamente por invarianza de S_F bajo transformaciones globales del tipo (2.7), es decir con ε=cte.

Para facilitar los calculos escribiremos δS_F de la siguiente forma :

$$\delta S_F[\bar{\psi},\psi]=\ -\frac{1}{2}\int d^2x\ \bar{\psi}(x)\frac{(1+\gamma_5)}{2}\ [\not{D}(A),\varepsilon(x)]\psi(x) \qquad (2.10)$$

Como estipula el método de cuantificación estocástica de ahora en mas, las variables $\bar{\psi}$ y ψ dependeran del tiempo estocástico τ, aparte de lacoordenada x, y además toda posible configuración será solución para algúna fuente de ruido Θ. De modo que ahora reemplazamos en todas partes :

$$\begin{aligned} \psi(x) &\to \psi_\Theta(x,\tau) \\ \bar{\psi}(x) &\to \bar{\psi}_\Theta(x,\tau) \end{aligned} \qquad (2.11)$$

y el valor de expectación de vacio de $\delta S_F[\bar{\psi},\psi]$ será :

$$\langle \delta S_F[\bar{\psi},\psi]\rangle = \lim_{\tau\to\infty} \langle \delta S_F[\bar{\psi}_\Theta,\psi_\Theta;\tau]\rangle_\Theta \qquad (2.12)$$

Calculemos ahora, con estas prescripciones, (2.12) a un instante dado del tiempo estocástico τ', introduciendo explicitamente la expresión (2.10) para δS_F.

$$\langle \delta S_F[\bar{\psi}_\Theta,\psi_\Theta;\tau]\rangle_\Theta = \langle -\frac{1}{2}\int d^2x\ \bar{\psi}_\Theta(x,\tau)\frac{(1+\gamma_5)}{2}\,[\not{D}(A),\varepsilon(x)]\ \psi_\Theta(x,\tau)\rangle_\Theta \qquad (2.13)$$

En este punto introduciremos las soluciones $\bar{\psi}_\Theta(x,\tau)$ y $\psi_\Theta(x,\tau)$ de las ecuaciones de Langevin (2.2) :

$$\begin{aligned} \psi_\Theta(x,\tau) &= \int_0^\tau dt\ \exp\left\{-\not{D}_\alpha(A)\not{D}(A)\frac{(1-\gamma_5)}{2}\,(\tau-t)\right\}\ \Theta(x,\tau) \\ \bar{\psi}_\Theta(x,\tau) &= \int_0^\tau dt\ \bar{\Theta}(x,\tau)\ \exp\left\{-\frac{(1+\gamma_5)}{2}\ \overleftarrow{\not{D}}(A)\overleftarrow{\not{D}}_\alpha(A)\ (\tau-t)\right\} \end{aligned} \qquad (2.14)$$

donde :

$$\not{D}(A) = i\not{\partial} + e\not{A} \qquad \not{D}_\alpha(A) = i\not{\partial} + e\alpha\not{A} \tag{2.15}$$

Asi se obtiene :

$$\langle \delta S_F[\bar{\psi}_\Theta,\psi_\Theta;\tau]\rangle_\Theta = -\frac{1}{2}\int d^2x\; d^2y \int_0^\tau dt_1 \int_0^\tau dt_2\; \delta(x-y)$$

$$\langle\, \bar{\Theta}(y,t_1)\; e^{-(\not{\tilde{D}}\not{D}_\alpha)_y(\tau-t_1)}\; (1+\gamma_5)[\not{D}_x(A),\varepsilon(x)]\; e^{-(\not{D}_\alpha\not{D})_x(\tau-t_2)}\; \Theta(x,\tau)\;\rangle_\Theta \tag{2.16}$$

donde el subíndice x o y indica el punto donde esta evaluado el operador.

Θ y $\bar{\Theta}$ son las unicas funciones afectadas por el promedio $\langle\ldots\rangle_\Theta$, de modo que, agrupándolas, dicho valor medio resulta ser la segunda función de correlación, dada por la ecuación (2.4).

Reemplazando (2.4) en (2.16) se obtiene :

$$\langle \delta S_F[\bar{\psi}_\Theta,\psi_\Theta;\tau]\rangle_\Theta = -\frac{1}{2}\int d^2x\; d^2y \int_0^\tau dt_1 \int_0^\tau dt_2\; \delta(x-y) \quad \times$$

$$tr\Big\{\; e^{-(\not{\tilde{D}}\not{D}_\alpha)_y(\tau-t_1)}(1+\gamma_5)[\not{D}_x(A),\varepsilon(x)] \quad e^{-(\not{D}_\alpha\not{D})_x(\tau-t_2)}\not{D}_\alpha(A)_x \Big\}$$

$$\delta(x-y)\; a_\Lambda(t_1-t_2) \tag{2.17}$$

Utilizando las relaciones de completitud de cualquier base del espacio de funciones para expresar la distribución $\delta(x-y)$ en términos de autofunciones, obtenemos una expresión para

$\langle\delta S_F[\bar\psi_\Theta,\psi_\Theta]\rangle_\Theta$ que corresponde a la traza funcional y la traza espinorial del operador que está entre llaves en la ecuación (2.17)

$$\langle\delta S_F[\bar\psi_\Theta,\psi_\Theta;\tau]\rangle_\Theta=-\int_0^\tau dt_1\int_0^\tau dt_2\ a_\Lambda(t_1-t_2)\ \times \tag{2.18}$$

$$\mathrm{Tr}\Big\{\ e^{-(\not D\not D_\alpha)(\tau-t_1)}\ (1+\gamma_5)[\not D(A),\varepsilon(x)]\ e^{-(\not D_\alpha\not D)(\tau-t_2)}\ \not D_\alpha(A)\ \Big\}$$

Esta traza funcional y espinorial nos permite realizar permutaciones cíclicas de los operadores, luego de haber desarrollado el conmutador. De este modo se obtiene :

$$\langle\delta S_F[\bar\psi_\Theta,\psi_\Theta;\tau]\rangle_\Theta=-\int_0^\tau dt_1\int_0^\tau dt_2\ a_\Lambda(t_1-t_2)\ \times \tag{2.19}$$

$$\mathrm{Tr}\Big\{\varepsilon(x)[e^{-\not D_\alpha\not D\ (\tau-t_1)}\ \not D_\alpha\ e^{-\not D\not D_\alpha\ (\tau-t_2)}\ (1+\gamma_5)\ \not D\ -$$

$$-(1-\gamma_5)\ \not D\ e^{-\not D_\alpha\not D\ (\tau-t_2)}\ \not D_\alpha\ e^{-\not D\not D_\alpha\ (\tau-t_1)}\ ]\Big\}$$

Teniendo en cuenta que $e^{AB}\ A = A\ e^{BA}$, y luego de algunas permutaciones cíclicas se obtiene :

$$\langle\delta S_F[\bar\psi_\Theta,\psi_\Theta;\tau]\rangle_\Theta= -\int d^2x\ d^2y\int_0^\tau dt_1\int_0^\tau dt_2\ a_\Lambda(t_1-t_2)\ \delta(x-y)\ \varepsilon(x)\ \times$$

$$\mathrm{tr}\ [(1-\gamma_5)\not D_\alpha\not D\ e^{-\not D_\alpha\not D\ (2\tau-t_1-t_2)}\ -(1+\gamma_5)\not D\not D_\alpha\ e^{-\not D\not D_\alpha\ (2\tau-t_1-t_2)}]\delta(x-y) \tag{2.20}$$

Expresando la distribución δ de la derecha como :

$$\delta(x-y)= \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^2k \; e^{ik(x-y)}$$

y teniendo en cuenta que

$$\not{D}_\alpha \; e^{ik(x-y)} = e^{ik(x-y)} \; (\not{D}_\alpha - \not{k})$$

sacamos la exponencial $e^{ik(x-y)}$ a la izquierda de la traza del operador. Finalmente integrando sobre y obtenemos :

$$\langle \delta S_F[\bar{\psi}_\theta,\psi_\theta;\tau]\rangle_\theta = - \int d^2x \int_0^\tau dt_1 \int_0^\tau dt_2 \int d^2k \quad a_\Lambda(t_1-t_2) \; \varepsilon(x) \quad \times$$

$$\mathrm{tr}[(1-\gamma_5) \; d_\alpha d \; e^{-d_\alpha d \; (2\tau-t_1-t_2)} - (1+\gamma_5) \; d d_\alpha \; e^{-d d_\alpha \; (2\tau-t_1-t_2)}] \tag{2.21}$$

donde

$$d=\not{D}-\not{k} \qquad \text{y} \qquad d_\alpha=\not{D}_\alpha-\not{k} \tag{2.22}$$

Para integrar sobre el tiempo estocástico es conveniente realizar el siguiente cambio de variables (una rotación de 45° en el sistema de coordenadas t_1,t_2) :

$$t= (t_1-t_2)/\sqrt{2} \qquad\qquad T=(t_1+t_2)/\sqrt{2} \tag{2.23}$$

Para poder utilizar la relación (2.5) se debe exigir que

$$\tau \geq 1/\Lambda \tag{2.24}$$

donde $1/\Lambda$ es el ancho del soporte de $a_\Lambda(t_1-t_2)$. Esto nos conduce a los siguientes límites de integración para T

$$(\sqrt{2}\ \Lambda)^{-1} \leq T \leq \sqrt{2}\ \tau - (\sqrt{2}\ \Lambda)^{-1} \tag{2.25}$$

con estas condiciones podemos realizar la integral sobre t, ya que solo afecta a $a_\Lambda(t_1-t_2)$, la cual está normalizada a 1 [ec.(2.5)].

Por otra parte, la integral sobre T es inmediata, obteniendose :

$$\langle \delta S_F[\bar\psi_\Theta,\psi_\Theta;\tau]\rangle_\Theta = -\frac{1}{2(2\pi)^2}\int d^2x \int d^2k\ \varepsilon(x) \quad \times$$

$$\mathrm{tr}[(1-\gamma_5)\ e^{-d_\alpha d\ (2\tau-\sqrt{2}\ T)} - (1+\gamma_5)\ e^{-dd_\alpha\ (2\tau-\sqrt{2}\ T)}]\Big|_{(\sqrt{2}\Lambda)^{-1}}^{\sqrt{2}\tau-\Lambda/\sqrt{2}} \tag{2.26}$$

Cuando el sistema alcanza el equilibrio, es decir cuando $\tau\to\infty$, esta expresión se transforma en :

$$\lim_{\tau\to\infty} \langle \delta S_F[\bar\psi_\Theta,\psi_\Theta;\tau]\rangle_{\Theta,\Lambda} = -\frac{1}{2(2\pi)^2}\int d^2x \int d^2k\ \varepsilon(x) \quad \times$$

$$\mathrm{tr}[(1-\gamma_5)\ e^{-d_\alpha d/\Lambda} - (1+\gamma_5)\ e^{-dd_\alpha/\Lambda}]. \tag{2.27}$$

Si ahora realizamos el siguiente cambio de variables :

$$\Lambda\to\Lambda^2 \qquad\qquad k\to k/\Lambda$$

y luego tomamos el límite para $\Lambda\to\infty$ se obtiene, de acuerdo con (2.12), el valor medio cuántico de la variación de la acción, $\delta S[\bar{\psi},\psi]$, es decir la identidad de Ward anómala :

$$\langle\delta S[\bar{\psi},\psi]\rangle = \lim_{\Lambda,\tau\to\infty} \langle\delta S_F[\bar{\psi}_\Theta,\psi_\Theta;\tau]\rangle_\Theta =$$

$$-\frac{1}{2(2\pi)^2}\int d^2x\int d^2k \ \varepsilon(x) \quad \mathrm{tr}[(1-\gamma_5)\not{D}_a\not{D} -(1+\gamma_5)\not{D}\not{D}_a]e^{-k^2} \tag{2.28}$$

Integrando sobre k se obtiene :

$$\langle\delta S[\bar{\psi},\psi]\rangle = \frac{1}{8\pi}\int d^2x \ \varepsilon(x) \quad \mathrm{tr}[(1-\gamma_5)\not{D}_a\not{D} -(1+\gamma_5)\not{D}\not{D}_a] \tag{2.29}$$

Agrupando los coeficientes de γ_5, esta expresión se transforma en :

$$\langle\delta S[\bar{\psi},\psi]\rangle = \frac{1}{8\pi}\int d^2x \ \varepsilon(x) \quad \mathrm{tr}\left\{[\not{D}_a,\not{D}] -\gamma_5\{\not{D},\not{D}_a\}\right\}$$

$$= -ie\frac{1}{8\pi}\int d^2x \ \varepsilon(x) \quad \mathrm{tr}\ [(a-1)\not{\partial}\not{A} +(a+1)\gamma_5\not{\partial}\not{A}\ ] \tag{2.30}$$

calculando explícitamente la traza, obtenemos la expresión final :

$$\langle\delta S[\bar{\psi},\psi]\rangle = \frac{e}{8\pi}\int d^2x \ \varepsilon(x) \quad [(1-a)\partial_\mu A_\mu-(1+a)i\varepsilon_{\mu\nu}F_{\mu\nu}] \tag{2.31}$$

con $F_{\mu\nu}=\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu$ y $\varepsilon_{\mu\nu}$ es el tensor completamente antisimétrico en dos dimensiones. Comparando con (2.8) se obtiene la divergencia de la corriente anómala

$$\langle \partial_\mu J_\mu \rangle = \frac{e}{4\pi} [(1-a)\partial_\mu A_\mu - (1+a) i \varepsilon_{\mu\nu} F_{\mu\nu}] \tag{2.32}$$

Coincidiendo con Jackiw y Rajaraman[10], podemos ver que no existe valor de a para el cual la corriente resulte invariante de gauge. Mostraremos ahora, como puede ser reobtenido el resultado de Jackiw y Rajaraman sobre la consistencia del Modelo de Schwinger Quiral en el contexto de la cuantificación estocástica. Veremos que la ambiguedad en la corriente anómala, representada por la presencia del parámetro libre a, nos permite construir una acción efectiva que describe una teoría consistente y unitaria.

Siguiendo el análisis de Webb para el Modelo de Schwinger ordinario[14], consideremos la ecuación de Langevin (2.3) y supongamos que ya hemos realizado la cuantificación de los fermiones. Teniendo en cuenta que el segundo término disipativo de la ecuación (2.3) es la corriente J_μ, podemos usar el resultado (2.32) y eliminar asi los campos fermiónicos. Ahora la ecuación de Langevin (2.3) toma la forma

$$\frac{\partial}{\partial \tau} A_\mu(x,\tau) = -[\Box A_\mu(x,\tau) - \partial_\mu \partial_\nu A_\nu(x,\tau) + \frac{e^2}{4\pi}(1-a) A_\mu(x,\tau) + i\frac{e^2}{4\pi}(1+a)\varepsilon_{\mu\nu} A_\nu(x,\tau)] + \\ + \eta_\mu(x,\tau) \tag{2.33}$$

Podemos considerar ahora que esta ecuación de Langevin proviene de una acción que solo depende de los campos de gauge A_μ, es decir, de una acción efectiva :

$$\frac{\delta S^{ef}(A)}{\delta A(x)} = \Box A_\mu(x) - \partial_\mu \partial_\nu A_\nu(x) + \frac{e^2}{4\pi}(1-a)A_\mu(x) + i\frac{e^2}{4\pi}(1+a)\varepsilon_{\mu\nu}A_\nu(x) \tag{2.34}$$

Las ecuaciones de movimiento para este nuevo sistema dinámico resultarán de la igualdad :

$$\frac{\delta S^{ef}(A)}{\delta A(x)} = 0$$

Escribiendo al campo A_μ en términos de los campos escalares ϕ y ρ :

$$A_\mu(x) = \varepsilon_{\mu\nu}\partial_\nu\phi(x) + \partial_\mu\rho(x)$$

y reemplazando en (2.34) se obtiene

$$\begin{aligned}\Box\varepsilon_{\mu\nu}\partial_\nu\phi(x) + g(1-a)\varepsilon_{\mu\nu}\partial_\nu\phi(x) + g(1-a)\partial_\mu\rho(x) + \\ + ig(1+a)\partial_\mu\phi(x) + ig(1+a)\varepsilon_{\mu\nu}\partial_\nu\rho(x) = 0\end{aligned} \tag{2.35}$$

donde $g = e^2/(4\pi)$.

Aplicando $\varepsilon_{\mu\sigma}\partial_\sigma$ o ∂_μ a (2.35) se obtienen las siguientes ecuaciones respectivamente :

$$\Box^2\phi(x) + g(1-a)\,\Box\phi(x) + ig(1+a)\,\Box\rho(x) = 0 \tag{2.36}$$

$$g(1-a)\,\Box\rho(x)+ ig(1+a)\,\Box\phi(x)= 0$$

despejando de la segunda ecuación $\Box\rho$ en función de $\Box\phi$ y sustituyendo en la primera de las ecuaciones (2.36) se llega a la ecuación de movimiento para ϕ :

$$\Box^2\phi(x)+ g(1-a)\,\Box\phi(x)+ ig\,\frac{(1+a)^2}{(1-a)}\,\Box\phi(x)= 0 \qquad (2.37)$$

Podemos ver que la teoría corresponde a una partícula escalar ϕ con masa $m=g(1+a^2)/(a-1)$ siempre que $a>1$, y una exitación sin masa ρ.
De este modo se obtiene una teoría consistente y unitaria, provisto que el parámetro a tome valores en un cierto rango ($a>1$, de modo que m no corresponde a una masa taquiónica). Asi, al menos en este modelo simple, la presencia de la anomalía, simultaneamente con la exigencia de que sea una teoría consistente y unitaria, da lugar a la generación dinámica de masa para el bosón de gauge.

Referencias.

(1)-K.Fujikawa; Phys.Rev.D 21, n°10 (1980), 2848;29, n°2 (1984), 285.

(2)-C.Bouchiat, J.Iliopoulos, Ph.Meyer; Phys.Lett.B 38 (1972, 519.

(3)-H.Montani, F.A.Schaposnik; Ann. of Phys.(NY) 181 (1988), 161.

(4)-R.Rajaraman; Phys.Lett.B 154 (1985), 305. Para una lista completa de referencias, ver la referencia (3) de la tercera referencia de esta lista.

(5)-L.D.Faddeev, S.L.Shatashvili; Phys.Lett.B 167 (1986), 223.

(6)-O.Babelon, F.A.Schaposnik, C.M.Viallet; Phys.Lett.B 177 (1986), 385.

(7)-K.Harada, I.Tsutsui, Phys.Lett.B 83 (1987), 311.

(8)-V.Kulikov; Serpukhov Report, unpublished.

(9)-Para una lista completa de referencias ver: F.A.Schaposnik en "J.A.Swieca Summer School on Particles and Fields" (eds. A. da Silva et al), World, Cleveland, en prensa.

(10)-R.Jackiw, R.Rajaraman; Phys.Rev.Lett.E 54 (1985), 1219; 55 (1985), 2224.

(11)-I.Singer; Asterisque, hors serie, 323 (1985).

(12)-J.D.Breit, S.Gupta, A.Sacks; Nucl.Phys.B 233 (1984), 61.

(13)-B.Sakita; en "Proc. John Hopkins Workshop 7" (eds. G.Domakos et al) World, Cleveland, 1983.

(14)-J Webb; Manchester Univ. report, unpublished, (1987).

CAPITULO VI

" ANOMALIAS Y CUANTIFICACION ESTOCASTICA "

En la primera sección de este capítulo completamos la introducción a las teorías anómalas, iniciada en la primera sección del capítulo anterior. Aquí el enfoque está orientado a las teorías de gauge no-abelianas, presentando los problemas relacionados con las propiedades de simetría de las anomalías. En la segunda sección, desarrollamos los resultados obtenidos aplicando nuestra propuesta del capítulo anterior, a una teoría de gauge no abeliana con fermiones de Weyl. En este contexto calcularemos la corriente anómala, obteniendo particularmente las denominadas anomalías covariante y consistente.

I-Anomalías.

La elaboración de una teoría cuántica tiene como punto de partida a un modelo clásico, el cual es sometido a un proceso de cuantificación y aún a un segundo proceso de cuantificación. Hay muchas características del modelo clásico que son comunes también a la teoría cuántica correspondiente, tales como los grados de libertad fundamentales, la estructura de las interacciones, etc.

Las simetrías y leyes de conservación de la teoría clásica son un ejemplo concreto de un aspecto relevante que es de esperar sea mantenida por la teoría cuántica correspondiente. Es decir, si el modelo clásico tenia ciertas simetrías y corrientes conservadas es de suponer que las mismas simetrías y corrientes conservadas deberían existir para la teoría cuántica. Sin embargo, como vimos en el capítulo anterior para el caso del modelo de Schwinger Quiral, en lo que respecta a la conservación de la corriente de Noether asociada a la invarianza de fase global de la acción, esto puede no cumplirse. A esta violación de simetrías clásicas y leyes de conservación por el procedimiento de cuantificación se la denomina *anomalía*. Estas anomalias o rupturas de simetrías mecánico-cuánticas afectan, en particular, a simetrías asociadas con la ausencia de masa en la teoría : tanto la invarianza de escala y la invarianza conforme, como la invarianza quiral se pierden en el proceso de cuantificación.

El estudio de las anomalías en corrientes globales y de gauge tiene importantes aplicaciones en las teorías modernas, tal como lo mencionamos en el capítulo anterior. La anomalía axial emergió originalmente a través de la consideración del ya mencionado diagrama triangular fermiónico con una corriente axial y dos corrientes vectoriales[1]. La no conservación de la quiralidad en presencia de un campo de gauge acoplado a la corriente vectorial conservada, es la base para la comprensión del decaimiento del π^0 y de la resolución del problema U(1).

Cuando hay campos de gauge no-abelianos acoplados a las corrientes V-A en cada vértice del diagrama triangular, las consecuencias son también importantes. La teoría puede resultar anómala y, a menos que las anomalías se cancelen cuando se suma sobre las diferentes especies fermiónicas alrededor del *loop*, se encuentra que la no conservación de la corrientes V-A constituye una ruptura de la invarianza de gauge, llevandonos esto, a una teoría inconsistente. La condición de cancelación de anomalías ha resultado por ello ser una poderosa herramienta para la construcción de modelos en Teoría de Campos y en Teoría de Cuerdas[2]-[5].

En este capítulo estudiaremos las anomalías que surgen del acoplamiento de una teoría de gauge no-abeliana con fermiones de Weyl en cuatro dimensiones.

En el desarrollo realizado en la primera sección del capítulo anterior para obtener la expresión de la corriente anómala en el marco de la integral funcional, pudimos ver (ec.1.18) que las fluctuaciones cuánticas de la divergencia de la corriente anómala está originada en la no trivialidad del Jacobiano de la transformación de gauge para los fermiones de Weyl, es decir en la no invarianza de gauge de la medida de integración fermiónica.

Para una teoría de gauge no-abeliana acoplada con fermiones de Weyl, se realiza un análisis similar que conduce a un resultado equivalente. Consideremos una teoría, en un espacio-tiempo euclídeo de cuatro dimensiones, cuya parte fermiónica está descripta por la acción :

$$S[\bar{\psi},\psi;A]=i\int d^4x\ \ \bar{\psi}(x)\not{D}(A)\frac{(1-\gamma_5)}{2}\ \psi(x) \qquad (1.1)$$

con las siguientes convenciones :

$$\not{D}(A)=\ \not{\partial}+\not{A}(x)=\ \ \gamma_\mu[\partial_\mu+A_\mu(x)]$$

$$A_\mu(x)=iA_\mu^a(x)T_a \qquad (1.2)$$

donde T_a son los generadores del álgebra de Lie del grupo de gauge SU(N) :

$$[T_a,T_b]=f_{ab}^{c}T_c \qquad\qquad T_a^{+}=-T_a \qquad (1.3)$$

y γ_μ son las matrices de Dirac :

$$\{\gamma_\mu,\gamma_\nu\}=\ 2\delta_{\mu\nu} \qquad\qquad \gamma_\mu^{+}=\gamma_\mu$$

$$\gamma_5\ =\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4 \qquad\qquad \{\gamma_5,\gamma_\mu\}=0 \qquad (1.4)$$

La acción (1.1) es invariante bajo las siguientes transformaciones globales :

$$\delta\psi(x)= i\theta^{a}T_a\psi(x) \ , \qquad \delta\bar{\psi}(x)=-i\bar{\psi}(x)T_a\theta^{a} \tag{1.5}$$

A lo largo de este capítulo, el campo de gauge $A_\mu(x)$ será considerado como un campo externo. Solo para transformaciones locales, si queremos mantener la simetría de gauge, deberá tenerse en cuenta la acción completa y las propiedades de transformación de $A_\mu(x)$.

Esta simetría tiene asociada una corriente covariantemente conservada:

$$D_{\mu a}^{\ c}\ J_{\mu c}(x)=(\partial_\nu\delta_a^c\ +A_\nu^b\ f_{ba}^{\ c})[\bar{\psi}(x)\gamma_\mu T_c\frac{(1-\gamma_5)}{2}\psi(x)]=0. \tag{1.6}$$

Podemos observar también que la corriente $J_{\mu a}$ se transforma covariantemente bajo las transformaciones (1.5).

Estas propiedades formales pueden ser modificadas por las fluctuaciones cuánticas. En efecto, el valor medio cuántico de $D_{\mu a}^{\ c}J_{\mu c}$ puede resultar no nulo. Este resultado y las propiedeades de transformación de la corriente, bajo transformaciones del tipo (1.5), dependen del procedimiento de regularización empleado[6]. Esto puede verse claramente en las ecuaciones (1.18;V) y (1.21;V), que relacionan la corriente anómala con el Jacobiano de la transformación (1.5) y a este, con el determinante del operador $[(\not\partial+e\not A)\frac{(1-\gamma_5)}{2}]$. Como dijimos anteriormente, el problema de autovalores de este operador no está definido. Una vez resuelto este problema por la adición de fermiones libres de quiralidad opuesta, se encuentra que los autovalores no son acotados. Se hace necesario entonces adoptar un proceso de regulación, y será este proceso el que determine las propiedades de transformación de la corriente.

El valor medio cuántico de la corriente $J_{\mu a}$ puede escribirse en términos de la funcional generatriz fermiónica o acción efectiva, como:

$$\langle \bar\psi \gamma_\mu T_a \frac{(1-\gamma_5)}{2} \psi \rangle = -i \frac{\delta}{\delta A^a_\mu} \ln \int \mathcal{D}\bar\psi \mathcal{D}\psi \; \exp\left\{ i \int d^4x \; \bar\psi D(A) \psi \right\} \qquad (1.7)$$

donde

$$D(A) = \not{D}(A) \frac{(1-\gamma_5)}{2} \qquad (1.8)$$

Esta es una expresión formal ya que, como explicamos en el párrafo anterior, la integración funcional debe ser definida de manera que de un resultado finito. Una forma de hacerlo es imponerle condiciones externas que regulen el comportamiento de $Z_F(A)$ bajo transformaciones de gauge. Aplicando el operador $D_\mu(A)$ a ambos miembros de (1.7) se obtiene la anomalía o divergencia anómala $\mathcal{A}$:

$$\mathcal{A}_a = \langle D_{\mu a}^{\ c} \; (\bar\psi \gamma_\mu T_c \frac{(1-\gamma_5)}{2} \psi) \rangle = -i D_{\mu a}^{\ c} \frac{\delta}{\delta A^c_\mu} \ln \int \mathcal{D}\bar\psi \mathcal{D}\psi \; \exp\left\{ i \int d^4x \; \bar\psi D(A) \psi \right\} \qquad (1.9)$$

Los operadores $L_a = -D_{\mu a}^{\ c} \dfrac{\delta}{\delta A^c_\mu}$ pueden ser considerados como una representación de los generadores del álgebra de Lie del grupo de transformaciones de gauge, SU[N], en el espacio de funcionales de A, ya que satisfacen la relación de conmutación :

$$[L_a(x), L_b(y)] = f_{ab}^{\ \ c} \; L_c(x) \delta(x-y) \qquad (1.10)$$

Escribamos la ecuación (1.9) de la siguiente forma:

$$L_a(x)Z_F(A)=i\mathcal{A}_a(x)Z_F(A) \tag{1.11}$$

donde $Z_F(A)$ es la funcional generatriz o acción efectiva :

$$Z_F(A)=\int \mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi \, \exp\left\{i\int d^4x \, \bar{\psi}D(A)\psi\right\}.$$

En esta expresión podemos ver claramente que la anomalía es una medida de la ruptura de la invarianza de gauge. Aplicando $L_b(y)$ a (1.11), restandole la misma expresión, luego de haber intercambiado a con b y x con y, y utilizando la relación de conmutación (1.10) obtenemos la condición de consistencia de Wess-Zumino[7]:

$$L_a(x)\mathcal{A}_b(y)-L_b(y)\mathcal{A}_a(x)=f_{ab}^{\ c} \, \mathcal{A}_c(y)\delta(x-y) \tag{1.12}$$

La divergencia anómala $\mathcal{A}_a$ obtenida en este contexto es denominada anomalía consistente. Evidentemente la corriente anómala que se obtiene de esta manera no es covariante de gauge.

Si hubiesemos trabajado con fermiones de la quiralidad opuesta la anomalía sería la misma pero con el signo contrario, de modo que en una teoría de gauge no-abeliana acoplada con fermiones de Dirac las anomalías originadas en los sectores fermiónicos de distinta quiralidad se cancelan mutuamente y, por lo tanto, no hay obstrucción a la invaranza de gauge de la acción efectiva. Sin embargo, debido a la ausencia de masa en esta teoría con fermiones de Dirac, el teorema de Noether nos indica que el multiplete de corrientes axiales $J^{a}_{\mu_5}=\bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_5 T_a\psi$, ($\bar{\psi},\psi$ son fermiones de Dirac), es covariantemente conservado, pero las fluctuaciones cuánticas producen la anomalía quiral :

$$(D_\mu J_{\mu_5})_a=-\frac{1}{8\pi^2}\,\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\ \mathrm{tr}\ T_a F_{\mu\nu}F_{\rho\sigma}$$

Notese que esta divergencia anómala es covariante de gauge, como era de esperar en una teoría invariante de gauge.

El argumento opuesto nos permite afirmar que, dado que la acción (1.1) no es invariante de gauge, no hay razón para esperar que la corriente anómala $\mathcal{A}_a$ sea covariante de gauge. Sin embargo, las ambigüedades de regularización de la integración funcional deben estar reducidas a un polinomio local en A_μ. Bardeen y Zumino[8] mostraron la existencia de una corriente J_μ covariante, construyendo un polinomio local $X_\mu(A)$ con propiedades de transformación de gauge anómalas pero opuestas a las de la corriente consistente J_μ de modo tal que sumadas las divergencias de las corrientes J_μ y X_μ se obtiene una anomalía covariante.

En la sección siguiente veremos que el método de cuantificación estocástica nos permite calcular una familia continua de anomalías de gauge que, para valores particulares del parámetro que describe a la familia, reproduce la anomalía covariante o la anomalía consistente.

II-Anomalía consistente y covariante en cuantificación estocástica.

En esta sección aplicaremos el método de cuantificación estocástica desarrollado en el capítulo anterior para fermiones de Weyl a una teoría de gauge no-abeliana acoplada con fermiones de Weyl en cuatro dimensiones(9). Como vimos, este método nos evita recurrir al agregado de fermiones de la quiralidad opuesta sin acoplamiento, permitiendonos a su vez regularizar con un parámetro libre a ajustar al final del proceso. Como veremos, es la elección de este parámetro la que fija la covarianza o no-covarianza del proceso estocático sin afectar la distribución de probabilidades del estado de equilibrio. Dejando el parámetro libre a lo largo del proceso y seleccionandolo al final podremos obtener la anomalía covariante y la consistente en forma inmediata.

Consideremos la parte fermiónica de la acción de una teoría de gauge no-abeliana con fermiones de Weyl, de quiralidad izquierda:

$$S[\bar{\psi},\psi;A]=i\int d^4x\ \bar{\psi}(x)\not{D}(A)\frac{(1-\gamma_5)}{2}\ \psi(x) \qquad (2.1)$$

con las convenciones expresadas en la sección anterior.

La cuantificación estocástica de esta teoría se plantea exactamente igual que la desarrollada en la segunda sección del capítulo V para el modelo de Schwinger, solo que ahora debemos tener en cuenta que estamos en cuatro dimensiones y con un grupo de gauge no-abeliano, de modo que los desarrollos de las exponenciales de la ecuación (2.27;V) contribuirán términos de orden mayor que en dos dimensiones.

Por lo tanto, las ecuaciones de Langevin para este sistema son[9],[10]

$$\frac{\partial}{\partial \tau}\psi(x,\tau)=-(\not\partial+a\not A)(\not\partial+\not A)\frac{(1-\gamma_5)}{2}\psi(x,\tau)+\Theta(x,\tau)$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau}\bar\psi(x,\tau)=-\bar\psi(x,\tau)\frac{(1+\gamma_5)}{2}(\overleftarrow{\not\partial}+\not A)(\overleftarrow{\not\partial}+a\not A)+\bar\Theta(x,\tau) \qquad (2.2)$$

El núcleo K elegido es igual al utilizado en el capítulo anterior, salvo constantes :

$$K(x,y)= -i\delta(x-y)\not D_a(A)= -i\delta(x-y)(\not\partial+a\not A(x)) \qquad (2.3)$$

Las prescripciones para el ruido gaussiano Θ, teniendo en cuenta el proceso de regularización estocástica, son :

$$\langle\Theta(x,\tau)\rangle=\langle\bar\Theta(x,\tau)\rangle=0$$

$$\langle\Theta(x,\tau)\bar\Theta(x',\tau')\rangle= 2\delta(x-x')\not D_a(A)\frac{(1-\gamma_5)}{2}a_\Lambda(\tau-\tau')$$

donde $$\not D_a(A)=(\not\partial+a\not A)$$

y $$a_\Lambda(\tau)=a_\Lambda(-\tau) \qquad \int_{-\infty}^{\infty}d\tau' a_\Lambda(\tau-\tau')=1$$

$$\lim_{\Lambda\to\infty} a_\Lambda(\tau-\tau')= \delta(\tau-\tau') \qquad (2.4)$$

Realicemos una transformación de gauge en la acción (2.1) y calculemos estocásticamente el valor medio cuántico de la variación de la acción.

Apliquemos una transformación infinitesimal :

$$\delta\psi(x)= i\theta^b(x)T_b\psi(x) \ , \qquad \delta\bar{\psi}(x)=-i\bar{\psi}(x)T_b\theta^b(x) \ , \tag{2.5}$$

T_b son los generadores del algebra de Lie de SU(N):

$$[T_a,T_b]=f_{ab}^{c}T_c \qquad T_a^{+}=-T_a \ ,$$

bajo esta transformación la variación de la acción es :

$$\delta S(\bar{\psi},\psi,A)= -\int d^4x \ \bar{\psi}(x)[\theta^c(x)T_c,\not{D}(A)]\frac{(1-\gamma_5)}{2}\psi(x) \tag{2.6}$$

El cálculo estocástico del valor medio cuántico de esta magnitud requiere la sustitución de las variables dinámicas $\bar{\psi}$ y ψ por soluciones de las ecuaciones de Langevin (2.2) para luego realizar el promedio sobre Θ. Por lo tanto el punto de partida es :

$$\langle\delta S(\bar{\psi}_\Theta,\psi_\Theta,A;\tau)\rangle_\Theta= -\int d^4x \ \langle\bar{\psi}_\Theta(x,\tau)[\theta^c(x)T_c,\not{D}(A)]\frac{(1-\gamma_5)}{2}\psi_\Theta(x,\tau)\rangle_\Theta \tag{2.6}$$

En este punto estamos en la misma situación que en la ecuación (2.13;V), de aquí en más los cálculos son idénticos a los realizados entonces, hasta la ecuación (2.18;V), donde retomamos los cálculos :

$$\langle \delta S_F[\bar\psi_\Theta,\psi_\Theta,A;\tau]\rangle_\Theta = -\int_0^\tau dt_1 \int_0^\tau dt_2 \; a_\Lambda(t_1-t_2) \quad \times \tag{2.7}$$

$$\mathrm{Tr}\Big\{ \; e^{-(\not D \not D_a)(\tau-t_1)}(1+\gamma_5)[\not D(A),\theta^b(x)T_b] \quad e^{-(\not D_a \not D)(\tau-t_2)}\not D_a(A)\Big\}$$

Utilizando las propiedades de la traza para reordenar los operadores y expresando la traza funcional en términos de distribuciones δ, se tiene :

$$\langle \delta S_F[\bar\psi_\Theta,\psi_\Theta,A;\tau]\rangle_\Theta = -\int d^2x \; d^2y \int_0^\tau dt_1 \int_0^\tau dt_2 \; a_\Lambda(t_1-t_2) \; \delta(x-y) \; \theta^b(x) \; \times$$

$$\mathrm{tr}\;[T_b(1-\gamma_5)\not D_a\not D \; e^{-\not D_a\not D \;(2\tau-t_1-t_2)} - T_b(1+\gamma_5)\not D\not D_a \; e^{-\not D\not D_a \;(2\tau-t_1-t_2)}]\delta(x-y) \tag{2.8}$$

Esta expresión es equivalente a la (2.20;V), y siguiendo los mismos pasos desde allí hasta la ecuación (2.27;V) se obtiene :

$$\lim_{\tau\to\infty} \langle \delta S_F[\bar\psi_\Theta,\psi_\Theta,A;\tau]\rangle_{\Theta,\Lambda} = -\frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4x \int d^4k \; \frac{\theta^b(x)}{2} \qquad \times \tag{2.9}$$

$$\mathrm{tr}\Big\{T_b[(1-\gamma_5)\; e^{-d_a d/\Lambda^2} - (1+\gamma_5)\; e^{-d d_a/\Lambda^2}]\Big\}$$

donde $\qquad d=\not D-\not k \qquad$ y $\qquad d_a=\not D_a-\not k$.

Pero como $\qquad d_a d = \not D^2 - 2k_\mu D_\mu + (a-1)\not A\not D - (a-1)\not A\not k + k^2$

$$d d_a = \not D^2 - 2k_\mu D_\mu + (a-1)\not D\not A - (a-1)\not k\not A + k^2$$

podemos extraer el factor e^{-k^2}, redefinir $k_\mu \to k_\mu/\Lambda$ para llegar a la siguiente expresión :

$$\lim_{\tau\to\infty} \langle \delta S_F[\bar{\psi}_\Theta,\psi_\Theta,A;\tau]\rangle_{\Theta,\Lambda} = -\frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4x \int d^4k\ \Lambda^4\ \frac{\theta^b(x)}{2} \quad \times \tag{2.10}$$

$$\mathrm{tr}\Big\{T_b\Big[(1-\gamma_5)\ \exp\Big(\frac{\not{D}^2}{\Lambda^2}-\frac{2}{\Lambda}D_\mu k_\mu+\frac{(\alpha-1)}{\Lambda^2}\not{k}\not{D}-\frac{(\alpha-1)}{\Lambda}\not{k}\not{k}\Big)$$

$$-(1+\gamma_5)\ \exp\Big(\frac{\not{D}^2}{\Lambda^2}-\frac{2}{\Lambda}D_\mu k_\mu+\frac{(\alpha-1)}{\Lambda^2}\not{D}\not{k}-\frac{(\alpha-1)}{\Lambda}\not{k}\not{k}\Big)\Big]\Big\}\ e^{-k^2}$$

En el desarrollo de estas exponenciales solo contribuyen términos hasta de cuarto orden, ya que, cuando tomemos el límite $\Lambda\to\infty$, solo sobrevivirán las potencias de orden ≥ 0 de Λ.

Para simplificar la notación en los cálculos que siguen definimos los siguientes operadores :

$$X=\not{D}^2+(\alpha-1)\not{k}\not{D} \qquad \bar{X}=\not{D}^2+(\alpha-1)\not{D}\not{k}$$

$$Y_\mu=2D_\mu+(\alpha-1)\not{k}\gamma_\mu \qquad \bar{Y}_\mu=2D_\mu+(\alpha-1)\gamma_\mu\not{k} \tag{2.11}$$

Con esta notación y desarrollando hasta el cuarto orden los exponenciales, la ecuación (2.10) se transforma en :

$$\lim_{\tau\to\infty} \langle \delta S_F[\bar\psi_\Theta,\psi_\Theta,A;\tau]\rangle_{\Theta,\Lambda} = \tag{2.12}$$

$$-\frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4x \int d^4k\ e^{-k^2}\ \frac{\theta^b(x)}{2}\ T_b^{mn}\ \mathrm{tr}\Big\{-\Lambda^2[X-\bar X-(k_\mu Y_\mu)^2+(k_\mu \bar Y_\mu)^2]+$$

$$+[\tfrac{1}{2}(X^2-\bar X^2)-\tfrac{1}{6}(k_\mu k_\nu(XY_\mu Y_\nu-\bar X\bar Y_\mu\bar Y_\nu+Y_\mu XY_\nu-\bar Y_\mu\bar X\bar Y_\nu+Y_\mu Y_\nu X-\bar Y_\mu\bar Y_\nu\bar X))+$$

$$+\tfrac{1}{24}k_\mu k_\nu k_\rho k_\sigma(Y_\mu Y_\nu Y_\rho Y_\sigma-\bar Y_\mu\bar Y_\nu\bar Y_\rho\bar Y_\sigma)]\Big\}_{nm}$$

$$+\frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4x \int d^4k\ e^{-k^2}\ \frac{\theta^b(x)}{2}\ T_b^{mn}\ \mathrm{tr}\gamma_5\Big\{-\Lambda^2[X+\bar X-(k_\mu Y_\mu)^2-(k_\mu \bar Y_\mu)^2]+$$

$$+[\tfrac{1}{2}(X^2+\bar X^2)-\tfrac{1}{6}(k_\mu k_\nu(XY_\mu Y_\nu+\bar X\bar Y_\mu\bar Y_\nu+Y_\mu XY_\nu+\bar Y_\mu\bar X\bar Y_\nu+Y_\mu Y_\nu X+\bar Y_\mu\bar Y_\nu\bar X))+$$

$$+\tfrac{1}{24}k_\mu k_\nu k_\rho k_\sigma(Y_\mu Y_\nu Y_\rho Y_\sigma+\bar Y_\mu\bar Y_\nu\bar Y_\rho\bar Y_\sigma)]\Big\}_{nm}$$

De esta expresión para la corriente anómala ya podemos extraer la parte "dura" de la anomalía, es decir, aquellos términos que por su comportamiento bajo paridad no pueden ser eliminados agregando contratérminos en el Lagrangeano original. Los términos de paridad anormal están caracterizados por la presencia del pseudo-tensor completamente antisimétrico $\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$, el cual solo puede aparecer en (2.12) en aquellos términos en los que este presente $\gamma_5\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\rho\gamma_\sigma$ ya que :

$$\mathrm{tr}\ \gamma_5\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\rho\gamma_\sigma = 4\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\ .$$

Esta posibilidad solo se da en el segundo término del lado derecho de (2.12), de modo que nos concentraremos en él. Calculando la traza y realizando la integral sobre k obtenemos :

$$\langle \delta S_F[\bar{\psi},\psi,A]\rangle_{pa} = \frac{1}{32\pi^2} \int d^4x \; \theta^b(x) \; \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \quad \times \tag{2.13}$$

$$\mathrm{tr}\; T_b\Big\{ F_{\mu\nu}F_{\rho\sigma} + (a-1)(F_{\mu\nu}D_\rho A_\sigma + F_{\mu\nu}A_\rho A_\sigma + D_\mu A_\nu F_{\rho\sigma} + A_\mu D_\nu F_{\rho\sigma})$$

$$+\frac{2}{3}\,(a-1)^2(2A_\mu D_\nu A_\rho A_\sigma + 2D_\mu A_\nu D_\rho A_\sigma +$$

$$+D_\mu D_\nu A_\rho A_\sigma + A_\mu A_\nu D_\rho A_\sigma + 2D_\mu A_\nu A_\rho A_\sigma$$

$$+\frac{2}{3}(a-1)^3(D_\mu A_\nu A_\rho A_\sigma + A_\mu A_\nu A_\rho A_\sigma)\Big\}$$

La parte de paridad normal proviene integramente del primer sumando de la ecuación (2.12), y una vez realizada la integral sobre k y calculada la traza se obtiene :

$$\langle \delta S_F[\bar{\psi},\psi,A]\rangle_{pn} = \lim_{\Lambda^2\to\infty}\left(-\frac{1}{32\pi^2}\int d^4x \Lambda^2 \theta^b(x)(a-1)\mathrm{tr}T_b\partial_\mu A_\mu \;\; + \mathcal{F}(A_\mu,a)\right) \tag{2.14}$$

donde $\mathcal{F}(A_\mu,a)$ es una funcional finita de paridad normal. Su forma es en general muy complicada, excepto para $a=0$ donde se anula, $\mathcal{F}(A,a)=0$. Coincidentemente con otros trabajos[11][12], el primer término de la ecuación (2.14) diverge en el límite $\Lambda\to\infty$. Este termino divergente es cancelado usualmente agregando un contratermino de masa para A_μ en el Lagrangeano completo[11].

Teniendo en cuenta las ecuaciones (2.13) y (2.14), podemos escribir el valor medio cuántico de δS_F como :

$$\langle \delta S_F[\bar{\psi},\psi,A]\rangle = \langle \delta S[\bar{\psi},\psi,A]\rangle_{pa} + \langle \delta S[\bar{\psi},\psi,A]\rangle_{pn} \tag{2.15}$$

Estudiaremos ahora el comportamiento de $\langle \delta S_F[\bar{\psi},\psi,A]\rangle$ para dos valores particulares del parámetro α.

Si elegimos el valor :

$$\alpha=1+\frac{\mu^2}{\Lambda^2} \tag{2.16}$$

la divergencia de los términos de paridad normal desaparece, quedando una dependencia en una masa de normalización[13]. Finalmente, la expresión completa de la anomalía $\mathcal{A}_b$ es :

$$\mathcal{A}_b=\langle D_\mu \delta J_{\mu c}(\alpha=1)\rangle = \lim_{\Lambda\to\infty} \langle D_\mu \delta J_{\mu c}(\alpha=1+\mu^2/\Lambda^2)\rangle \tag{2.17}$$

$$=\frac{1}{32\pi^2}\mathrm{tr}\quad T_b\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}F_{\mu\nu}F_{\rho\sigma}+\text{ terminos de paridad normal}$$

Observemos que la parte *dura* de la anomalía es covariante de gauge. Efectivamente, la anomalía (2.17) coincide con la obtenida por Bardeen-Zumino[8] utilizando la idea descripta en la sección I de este capítulo, y con la obtenida por Fujikawa[9] introduciendo una regularización covariante para calcular el determinante fermiónico.

Si en lugar de la elección (2.16) escogemos $\alpha=0$ obtenemos:

$$\langle D_\mu \xi J_{\mu c}(a=0)\rangle = \frac{1}{24\pi^2}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\mathrm{tr}\ T_b\Big\{F_{\mu\nu}F_{\rho\sigma}-F_{\mu\nu}D_\rho A_\sigma - F_{\mu\nu}A_\rho A_\sigma - D_\mu A_\nu F_{\rho\sigma} - A_\mu D_\nu F_{\rho\sigma}+$$

$$+\frac{2}{3}\ (2A_\mu D_\nu A_\rho A_\sigma + 2D_\mu A_\nu D_\rho A_\sigma +$$

$$+D_\mu D_\nu A_\rho A_\sigma + A_\mu A_\nu D_\rho A_\sigma + 2D_\mu A_\nu A_\rho A_\sigma)+$$

$$-\frac{2}{3}(D_\mu A_\nu A_\rho A_\sigma + A_\mu A_\nu A_\rho A_\sigma)\Big\} \qquad (2.18)$$

En esta última expresión no hemos escrito explicitamente los términos de paridad normal provenientes de (2.14), los cuales incluyen contribuciones finitas e infinitas, ya que todos ellos pueden ser eliminados con contratérminos apropiados, como se explica en la referencia (11). Luego de un poco de álgebra se obtiene :

$$\mathcal{A}_b = \langle D_\mu \xi J_{\mu c}(a=0)\rangle = \frac{1}{24\pi^2}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\mathrm{tr}\ T_b \partial_\mu (A_\nu \partial_\rho A_\sigma + \frac{1}{2}A_\nu A_\rho A_\sigma) \qquad (2.19)$$

esta expresión para la anomalía coincide con la obtenida en las referencias (8),(11)-(13). Se puede comprobar facilmente que la anomalía (2.19) satisface la condición de consistencia de Wess-Zumino (1.12), es decir que hemos obtenido la *anomalía consistente*.

La anomalía consistente está directamente relacionada a la dependencia de gauge de la funcional generatriz $Z_F(A)$. Esta forma es apropiada para el estudio de la cancelación de anomalías entre multipletes fermiónicos y también para la derivación de consecuencias físicas de corrientes anómalas no-dinámicas tales como la corriente quiral de sabor en QCD. La corriente covariante, por otro lado, tiene una estructura de gauge simple y puede tener significado físico cuando se acopla a otros campos externos que no sean el de gauge. Gracias a la inmediata conexión que existe con la anomalía consistente, la anomalía covariante puede ser usada en las mismas condiciones para la cancelación de anomalías.

En el contexto de la integral funcional, diferentes esquemas de regularización conducen a diferentes formas de la anomalía. Es de remarcar el hecho de que, en el marco de la cuantificación estocástica, el parámetro arbitrario α introducido a través del núcleo K en las ecuaciones de Langevin para los fermiones, puede ser usado para obtener la anomalía covariante $[\alpha=1+O(\Lambda^2)]$ o la anomalía consistente $[\alpha=0]$. Estas diferentes elecciones corresponden a diferentes definiciones de la corrientes fermiónicas, como se explica en las referencias (11) y (13).

Referencias.

(1)-S.L.Adler; Phys.Rev. 177 (1969), 2426.

-J.Bell, R.Jackiw; Nuovo Cimento 60 A (1969, 47.

(2)-D.Gross, R.Jackiw; Phys.Rev.D 6 (1972), 477.

(3)-C.Bouchiat, J.Iliopoulos, Ph.Meyer; Phys. Lett.B 38 (1972), 519.

(4)-G.'t Hooft; en "Recent Developments in Gauge Theories", proceedings del Cargese Summer Institute, 1979, editado por G.'tHooft *et al.*(NATO Advanced Study Institute Series-Series B: Physics, vol 59)(Plenum, New York, 1980).

(5)-Ver, por ejemplo, M.B.Green, J.H.Schwarz, E.Witten, *Superstring Theory* (Cambridge University Press, Cambridge, England, 1987).

(6)-K.Fujikawa; Simon Fraser University report, 1986 (no publicado), y referencias allí citadas.

(7)-J.Wess, B.Zumino; Phys.Lett.B 37 (1971), 95.

(8)-W.Bardeen, B.Zumino; Nucl.Phys.B 244 (1984), 421.

(9)-H.Montani; Phys.Rev.D 38, n°10 (1988), 3178.

(10)-H.Montani, F.A.Schaposnik; Ann. of Phys.(NY) 181 (1988), 161.

(11)-W.Bardeen; Phys.Rev. 184 (1969), 1848.

(12)-M.B.Einhorn, D.R.T.Jones; Phys.Rev.D 29 (1984), 331.

-S.K.Hu, B.L.Young, D.W.McKay, *ibid* 30 (1984), 836.

-A.Andrianov, L.Bonora; Nucl.Phys.B 233 (1984), 232.

-R.E.Gamboa Saraví, M.A.Muschietti, F.A.Schaposnik, J.E.Solom; Phys.Lett.B 138 (1984), 145.

(13)-K.Fujikawa; Phys.Rev.D 31 (1985), 341.

CAPITULO VII

" CONCLUSIONES "

Conclusiones

Los trabajos de esta tesis se conectan con dos aspectos fundamentales de la Teoría Cuántica de Campos: el procedimiento de cuantificación y las simetrías físicas, clásicas y cuánticas.

En los dos primeros capítulos hemos presentado el Método de Cuantificación Estocástica para Teorías de Campos, para luego aplicarlo al estudio de simetrías como la de gauge.

En el capítulo II dimos una introducción al tratamiento de los procesos estocásticos, haciendo hincapié en el estudio de una ecuación de fluctuación del tipo de Langevin, forzada por una fuente de ruido gaussiana, ya que este estudio es el más relevante para nuestro trabajo. Mostramos que la distribución de probabilidad del proceso estocástico, descripto por la ecuación de Langevin, satisface una ecuación de Fokker-Planck , cuyo Hamiltoniano contiene solamente derivadas de hasta segundo orden, respecto de la variable dinámica. Construimos la distribución estacionaria en forma general, expresada en términos de la ecuación de Langevin y de las funciones de corrrelación. Sobre este desarrollo se estructura la exposición, en el capítulo siguiente, del Método de Cuantificación Estocástica de Teorías de Campos (Método CETC).

En el capítulo III presentamos, en las secciones I y II, el método CETC de Parisi-Wu, introduciendo un núcleo arbitrario en el término no estocástico de la ecuación de Langevin. Para una teoría escalar probamos que la elección más simple del núcleo conduce a un comportamiento correcto del sistema, que reproduce en el límita $\tau \to \infty$, la distribución de Boltzman e^{-S}. En la sección siguiente expusimos el desarrollo perturbativo , a partir de la ecuación de Langevin, para un campo escalar con autointeracción $\lambda\phi^4$. En el cálculo de las funciones de correlación, pudimos ver que en cada loop aparece una función de correlación de segundo orden correspondiente a la fuente de ruido. Como el método presenta cierta libertad en la elección de la fuente de ruido o bién en el término no estocástico de la ecuación de Langevin, esta función de correlación puede ser elegida de forma tal que contribuya a la convergencia de las integrales sobre los loops. Esto permite, inclusive, regularizar respetando las simetrías de la teoría. El método de regularización estocástica introduce un parámetro Λ, tal que cuando $\Lambda\to\infty$ recuperamos el proceso δ-correlacionado.

Por lo tanto, en el método estocástico las teorías, además de ser cuantificadas, son simultáneamente regularizadas.

En el capítulo IV, analizamos la aplicación de este método de cuantificación cuando la teoría tiene simetrías.En la primera sección clarificamos un punto que, hasta ahora, no había sido tratado adecuadamente: cómo se comporta la ecuación de Langevin bajo la acción de simetrías de la acción. Este análisis, nos permitió llegar a la conclusión de que es el núcleo del término no estocástico el que determina las propiedades de transformación de la fuente de ruido estocástico. Este punto es de central importancia, ya que los valores medios se calculan promediando sobre la fuente de ruido, es decir integrando sobre todo el espacio de funciones. Una transformación de las variables dinámicas repercute en un cambio en la medida de integración. Por lo tanto, si el núcleo es covariante, la fuente de ruido se transforma igual que los campos y el valor medio estocástico guarda las mismas simetrías que el valor de expectación cuántico.

En la segunda sección de este capítulo, expusimos unas de las principales motivaciones de Parisi-Wu, esto es, la aplicación del método estocástico a teorías de gauge. Allí mostramos que el cálculo de funciones de correlación puede realizarse sin necesidad de fijar el gauge y, de este modo, evitar las ambigüedades de Gribov. Pero el desarrollo perturbativo estocástico presenta una restricción: solo pueden calcularse magnitudes invariantes de gauge, ya que las contribuciones de los modos longitudinales originan divergencias cuando $\tau \to \infty$.

Esta dificultad, que podría poner en peligro la equivalencia a todos los ordenes con otros métodos de cuantificación, puede ser soslayada introduciendo un término de "fijado de gauge estocástico" (ver, por ejemplo ref.5 del cap.IV). Este tema no lo hemos desarrollado en esta tesis, pero cabe señalar que la introducción del mencionado término elimina las divergencias para el límite $\tau \to \infty$, permitiendo construir una distribución de probabilidad de equilibrio.

La falta de necesidad de fijado explícito de gauge, se debe a que el tiempo estocástico juega el rol de parámetro de gauge y, por lo tanto, el fijado de las condiciones iniciales equivale a fijar el gauge.

En la tercera sección presentamos el método de cuantificación estocástica para campos fermiónicos. Vimos que, en general, es necesario elegir un núcleo no trivial para asegurar la convergencia al estado de equilibrio. Esto es inevitable para teorías con fermiones sin masa, ya que, en ausencia del factor de amortiguamiento que genera el término de masa, la parte negativa del espectro del operador de Dirac domina el comportamiento de la distribución de probabilidad para valores muy grandes del tiempo estocástico, alejandolo del estado de equilibrio.

Para fermiones de Dirac, la elección del operador de Dirac como núcleo es la más conveniente, ya que transforma al término no estocástico en un operador semidefinido positivo, garantizando el predominio del autovalor cero cuando $\tau \to \infty$. Por otra parte, esta elección preserva la covarianza en todo el proceso de cuantificación.

Este problema también es común a las teorías con fermiones de Weyl. En ellas aparece otro problema: la necesidad de homogeneizar la quiralidad de todos los términos de la ecuación de Langevin, respetando las funciones de correlación para las fuentes de ruido. Nuestra propuesta para este caso, consistió en utilizar como núcleo al operador de Dirac, multiplicado por derecha por el proyector de la quiralidad opuesta a la de los fermiones. Este proyector no afecta las ecuaciones de Langevin, pero mantiene las funciones de correlación del ruido estocástico.

Una generalización de este núcleo es el eje principal de los desarrollos del capítulo V. En él expusimos nuestra propuesta para la cuantificación estocástica de Modelos Quirales bidimensionales. La misma consiste en introducir como núcleo, en lugar del operador de Dirac, un operador más general que preserve la invarianza de Lorentz de la teoría.

En este contexto, las ecuaciones de Langevin para fermiones de Weyl evitan en forma natural el problema que se genera, en cuantificación vía integral funcional, con el determinante fermiónico de teorías quirales. Simultáneamente, este operador introduce un parámetro arbitrario en el procedimiento de cuantificación, el cual reaparece en la acción efectiva en un término de masa para una de las componentes del campo de gauge.

En el marco de esta propuesta calculamos la divergencia de la corriente anómala, la cual no admite ningún valor posible del parámetro que la torne invariante de gauge.

La utilización de este resultado en la ecuación de Langevin para el campo de gauge nos permite reconstruir la acción efectiva obtenida por Jackiw y Rajaraman, es decir obtener una teoría unitaria y consistente a partir de un modelo anómalo.

En el capítulo VI estudiamos, en el marco de los desarrollos de los capítulos IV y V, las anomalías de gauge en cuatro dimensiones. Aplicamos el método desarrollado en el capítulo anterior a una teoría de gauge no abeliana con fermiones de Weyl, calculando la divergencia de la corriente anómala. Como ya mencionamos, el método propuesto evita el agregado de fermiones de la quiralidad opuesta, debido a que en este contexto la ecuación de Langevin resuelve el problema del cambio de quiralidad originado por el operador de Dirac. Esto constituye una ventaja importante respecto de otros métodos, ya que en principio podríamos obtener una acción efectiva invariante de gauge.

El resultado de estos cálculos fue una familia continua de anomalías, parametrizada por la constante arbitraria α, que introduce la ecuación de Langevin a través del núcleo propuesto. El hecho remarcable es que para dos valores particulares del parámetro se obtienen las anomalías covariante (α=1) y consistente (α=0), respectivamente.

Notese que en el caso α=1 el método estocástico preserva la covarianza de gauge a lo largo de todo el procedimiento de cuantificación.

La cuantificación de teorías con anomalías presentan problemas de difícil tratamiento tanto cuando se utiliza el método Hamiltoniano canonico como cuando se emplea un método covariante vía integración funcional. En particular, la construcción de teorías anómalas consistentes en el marco Hamiltoniano no ha sido hasta ahora completada, y el tratamiento vía integral funcional no es concluyente.

La utilización de un método alternativo a los dos anteriores, como es el que hemos presentado, no solo es atractivo por su simplicidad (en lo que respecta por ejemplo al tratamiento del problema como el cambio de quiralidad típico de las teorías de Weyl) sino porque ilumina aspectos oscuros de los otros procedimientos de cuantificación.

Por ello pensamos que problemas como el de la cuantificación de teorías anómalas en cuatro dimensiones, aún sin una solución satisfactoria, podrán ser comprendidos más profundamente utilizando los desarrollos presentados en esta tesis. Nuestros resultados para un modelo en dos dimensiones y nuestro análisis de las anomalías covariantes y consistentes en cuatro dimensiones así lo indican.