

Un método de simulación para la estimación de direcciones de arribo de señales detectadas por arreglos de sensores.

Roberto Depaoli
rd-ing@unlm.edu.ar

Luis A. Fernández
lfernand@unlm.edu.ar

Departamento de Ingeniería e Investigaciones Tecnológicas
Universidad Nacional de La Matanza
Florencio Varela 1903 – San Justo – Pcia. de Bs. As. – Argentina.

Resumen – La aplicación más difundida de métodos de superresolución en la estimación de direcciones de arribo (DOA's) mediante arreglos de sensores, se efectúa bajo dos suposiciones básicas: el frente de ondas es plano y la señal recibida es de banda angosta. Con las hipótesis señaladas, se analiza en este artículo la construcción del modelo requerido para la aplicación del algoritmo MUSIC en la estimación de DOA's de varias fuentes, y se propone una estrategia de simulación para testear el modelo.

La obtención de datos de campo con dispositivos reales, es dificultosa o prohibitiva por diversas razones. Esta situación convierte a la simulación por computadora en una herramienta importante en el estudio del comportamiento de distintos arreglos de sensores. Aquí se estudia con cierto detalle el caso de arreglos lineales uniformes, para fundamentar la técnica de simulación propuesta.

Palabras claves: *Procesamiento de señales, arreglos de sensores, dirección de arribo (DOA), superresolución, Music.*

I. Introducción

Los métodos de superresolución aplicados a la estimación de DOA's mediante arreglos de sensores, se tratan ampliamente en la literatura técnica de habla inglesa, con desarrollos específicos, por ejemplo, en los siguientes aspectos: diseño de arreglos de sensores con técnicas basadas en la geometría diferencial [6]; desempeño estadístico de los algoritmos cuando las señales están inmersas en ruido [4], [5]; análisis de la estabilidad de los resultados obtenidos frente a errores de calibración [2] y detección del número de fuentes, al cual la presencia de ruido convierte en un problema estadístico de decisión [3].

Desde el punto de vista de su formulación matemática, la estimación de direcciones de arribo presenta estrecha relación con la detección de armónicas en presencia de ruido cuando se trabaja con series temporales. En este último caso, un aporte clave fue efectuado por Pisarenko en 1973 [7], al utilizar los autovectores de la matriz de autocovarianza para la estimación de las frecuencias presentes en la señal. Ulteriores desarrollos condujeron a métodos de alta resolución aplicables a ambas situaciones, incluido el algoritmo MUSIC (multiple signal classification), cuya aplicación a la estimación de DOA's requiere algunas consideraciones preliminares que resumimos a continuación.

Las ondas emitidas por una fuente lejana pueden tratarse como ondas planas en una región limitada del espacio. La misma señal es percibida por los distintos sensores de un arreglo, con demoras que dependen de la ubicación relativa de los mismos, y de los ángulos asociados al frente de onda. Para un dispositivo fijo de sensores, el hecho de que el frente de onda sea plano permite establecer una relación matemática sencilla entre las distintas demoras en la recepción y los ángulos que definen la dirección de arribo.

En la aplicación del MUSIC y otros métodos de superresolución, se asume que la señal recibida es de banda angosta [1]. En este trabajo se supondrá, en particular, que se trata de una portadora de alta frecuencia, w_o , modulada en amplitud por una señal cuyo rango de frecuencias es comparativamente muy bajo con relación a w_o . La exposición se limitará a arreglos lineales isótropos y equiespaciados. Además, se asumirá que las fuentes se hallan en el mismo plano vertical que los sensores, y que el número de fuentes es conocido.

En el modelo que describiremos las señales son complejas, mientras que, obviamente, cualquier señal física es real. La forma compleja de la señal se obtiene demodulando en fase y en cuadratura, con las técnicas habituales empleadas para amplitud modulada. Si se pretende testear el modelo de una manera adecuada, es importante disponer de una técnica de simulación que emule computacionalmente dicho procedimiento físico. Se propone aquí una técnica de ese tipo, para cuya fundamentación se analiza el modelo con cierto detalle.

II. Arreglos lineales uniformes

Supongamos tener un arreglo de M sensores isótropos y equiespaciados, al que arriba una onda plana.

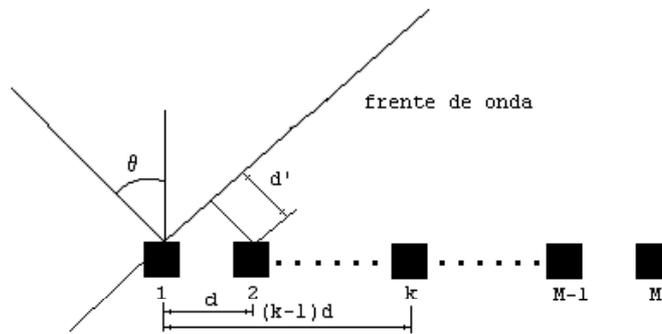


Figura 1

Si la fuente se halla en el semiplano superior a la línea del arreglo, que se supone horizontal, q es el ángulo entre la vertical y la normal al frente de onda, y vale: $-\frac{\pi}{2} \leq q \leq \frac{\pi}{2}$. En lo que sigue se considerarán positivos los ángulos del cuadrante indicado en la figura 1.

Con $Z_k(t)$ se indica la amplitud de la señal recibida por el sensor k en el instante t . Si Δt es el tiempo que le lleva a la señal trasladarse del sensor k al sensor $k+1$, se tendrá:

$$Z_k(t) = Z_1(t - (k-1)\Delta t).$$

De la Figura 1 se infiere:

$$\Delta t = \frac{d'}{c} = \frac{d}{c} \text{sen}(q)$$

donde c es la velocidad de propagación de la onda. Queda entonces:

$$Z_k(t) = Z_1\left(t - (k-1)\frac{d}{c} \text{sen}(q)\right)$$

Se puede ver que, para un arreglo fijo de sensores, la demora de la señal entre sensores depende exclusivamente de q . Si q es negativo, Δt también lo es, y hay un adelantamiento de la señal en el sensor k respecto de la señal de referencia del sensor 1.

Se trata ahora de caracterizar la señal $Z_1(t)$ recibida en el primer sensor. Supóngase que la fuente emite una señal de la forma:

$$f(t) = S(t) \cos(\mathbf{w}_0 t) \quad (1)$$

donde la moduladora $S(t)$ es de banda angosta. La señal recibida por el sensor k se obtiene con la fórmula:

$$Z_k(t) = C S(t - \mathbf{t} - (k-1)\Delta t) \cos(\mathbf{w}_0 (t - \mathbf{t} - (k-1)\Delta t)) \quad (2)$$

donde la amplitud C y la demora \mathbf{t} dependen de la distancia de la fuente.

Si la distancia entre sensores es pequeña, suponiendo que la señal viaja a la velocidad de la luz, es posible elegir una señal moduladora con banda de frecuencias lo suficientemente limitada para que:

$$S(t - (M-1)\Delta t) \cong S(t)$$

Asumimos aquí la igualdad. Entonces queda:

$$Z_k(t) = C S(t - \mathbf{t}) \cos(\mathbf{w}_0 (t - \mathbf{t} - (k-1)\Delta t)) \quad (3)$$

Esta simplificación es clave para la aplicación posterior del algoritmo MUSIC.

Supongamos que tenemos P fuentes, emitiendo la misma señal básica (1). La aplicación del algoritmo MUSIC requiere que las señales recibidas en los distintos sensores sean incorreladas. Dicha incorrelación se produce si los arribos de las distintas fuentes se presentan desfasados.

La recepción en el sensor k ($1 \leq k \leq M$) será:

$$Z_k(t) = \sum_{i=1}^P C_i S(t - \mathbf{t}_i) \cos(\mathbf{w}_0 (t - \mathbf{t}_i - (k-1)\Delta t_i))$$

Escribiendo: $\bar{S}_i(t) = C_i S(t - \mathbf{t}_i)$

resulta:
$$Z_k(t) = \sum_{i=1}^P \bar{S}_i(t) \cos(\mathbf{w}_0 (t - \mathbf{t}_i - (k-1)\Delta t_i)) \quad (4)$$

La probabilidad de que varias fuentes independientes transmitan en fase es prácticamente nula. Entonces se puede considerar que con probabilidad 1, las τ_i son todas diferentes, en concordancia con el requerimiento mencionado anteriormente.

Si reemplazamos $\cos(\mathbf{w}_0 t)$ por $e^{j\mathbf{w}_0 t}$, se tendrá:

$$Z_k(t) = \sum_{i=1}^P \bar{S}_i(t) e^{j(\mathbf{w}_0 (t - \mathbf{t}_i - (k-1)\Delta t_i))} \quad (5)$$

Luego:
$$Z_k(t) = \left(\sum_{i=1}^P \bar{S}_i(t) e^{-j\mathbf{t}_i \mathbf{w}_0} e^{-j\mathbf{w}_0 (k-1)\Delta t_i} \right) e^{j\mathbf{w}_0 t} \quad (6)$$

Definiendo: $S_i(t) = \bar{S}_i(t) e^{-j\mathbf{t}_i \mathbf{w}_0}$

y haciendo $X_k(t) = Z_k(t) e^{-j\mathbf{w}_0 t}$

queda finalmente:
$$X_k(t) = \sum_{i=1}^P S_i(t) e^{-j(k-1)\mathbf{w}_0 \Delta t_i} \quad (7)$$

La expresión (4) corresponde a la señal física obtenida en el sensor k . Se llega a la expresión (7) aplicando técnicas estándar de demodulación, y luego se muestrea la señal. En este trabajo se recurre a un procedimiento de muestreo directo que se explica más adelante, concebido para efectuar la simulación.

Ya que $\Delta t_i = \frac{d}{c} \text{sen} \mathbf{q}_i$ y, además, $\frac{2P}{I_0} = \frac{\mathbf{w}_0}{c}$ (I_0 : longitud de onda de la portadora),

si definimos $r = \frac{2d}{I_0} =$ número de medias ondas, la ecuación (7) se transforma en:

$$X_k(t) = \sum_{i=1}^P S_i(t) e^{-j(k-1)pr \text{sen} q_i} \quad (8)$$

Definiendo:
$$\mathbf{w}_i = pr \text{sen} q_i \quad (9)$$

queda:
$$X_k(t) = \sum_{i=1}^P S_i(t) e^{-j(k-1)\mathbf{w}_i} \quad (10)$$

Para evitar “aliasing” (en este contexto, significa que para más de un ángulo de arriba se tiene la misma respuesta) debe verificarse:

$$\begin{aligned} -p < \mathbf{w}_i < p \\ -p < pr \text{sen} q_i < p \end{aligned}$$

Por consiguiente, debe ser: $r < 1$, es decir: $d < \frac{\lambda_0}{2}$. Para lograr la mayor resolución en la estimación de los ángulos q_i , d debe ser lo más cercana posible a $\lambda_0/2$. Si en (10) se toman N muestras, con intervalo de muestreo dt , haciendo:

$$X_{kh} = X_k(hdt) \quad \text{y} \quad S_{ih} = S_i(hdt)$$

de:
$$X_k(hdt) = \sum_{i=1}^P S_i(hdt) e^{-j(k-1)\mathbf{w}_i}$$

se deduce:
$$X_{kh} = \sum_{i=1}^P S_{ih} e^{-j(k-1)\mathbf{w}_i} \quad (11)$$

Si con X se denota la matriz de componentes X_{kh} , su fila X_k es el muestreo de la señal (10) en el receptor k (X tiene M filas y N columnas). De igual manera, si S es la matriz de componentes S_{ih} , la fila S_i es el muestreo de $S_i(t)$. S tiene P filas y N columnas.

Si definimos la matriz $A \in C^{M \times P}$ de componentes $A_{ki} = e^{-j(k-1)\mathbf{w}_i}$, de (11) resulta:

$$X_{kh} = \sum_{i=1}^P A_{ki} S_{ih}$$

con lo cual $X = A S$.

Con el algoritmo MUSIC se estima $\mathbf{w}_i, (1 \leq i \leq P)$. Luego, los ángulos q_i se calculan con la expresión (9). La información con que se cuenta para ello es la matriz X .

III. Descripción del MUSIC en la estimación de DOA's.

Escribiendo:
$$a(\mathbf{w}) = [1, e^{-j\mathbf{w}}, e^{-j2\mathbf{w}}, \dots, e^{-j(M-1)\mathbf{w}}]^T$$

se tendrá:
$$A = [a(\mathbf{w}_1), a(\mathbf{w}_2), \dots, a(\mathbf{w}_P)]$$

Como la cantidad de muestras (N) registradas en cada sensor, suele superar considerablemente al número de sensores (M), podemos suponer $M \ll N$.

Además, se asume que $P < M$. Entonces, si $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_P$ son distintas frecuencias, los vectores: $a(\mathbf{w}_1), a(\mathbf{w}_2), \dots, a(\mathbf{w}_P)$ son linealmente independientes. Por lo tanto, el rango de la matriz A es P .

S es una matriz de dimensión $P \times N$. El algoritmo detectará \mathbf{w}_i , para $1 \leq i \leq P$, en el caso de que el rango de S sea P . Para lograr esto último, se asume que las moduladoras son distintas, o si son iguales, que los desfases temporales hacen que las filas de S sean linealmente independientes.

Como: $X = AS$, con $A \in C^{M \times P}$ y $S \in C^{P \times N}$, el rango de X es P .

Considérese: $R = XX^* \in C^{M \times M}$, donde X^* es la traspuesta conjugada de X .

La matriz R es hermítica, es decir: $R = R^*$. Entonces admite una base de autovectores, que suponemos normalizados: $v_1, v_2, \dots, v_P, v_{P+1}, \dots, v_M$, con autovalores asociados:

$$I_1 \geq I_2 \geq \dots \geq I_P > I_{P+1} = \dots = I_M = 0.$$

El algoritmo MUSIC usa esta descomposición para detectar las w_i .

Llamaremos E_s al subespacio de dimensión P , generado por v_1, v_2, \dots, v_P (subespacio de la señal) y

E_R al subespacio de dimensión $M-P$, generado por v_{P+1}, \dots, v_M (subespacio del ruido).

Entonces se verifican las siguientes propiedades:

a) $E_s \perp E_R$ y $C^M = E_s \oplus E_R$

b) Si v es cualquier vector de C^M , el cuadrado de la norma de su proyección ortogonal sobre E_R , se calcula con la fórmula:

$$\|P(v/E_R)\|^2 = \sum_{k=P+1}^M |\langle v, v_k \rangle|^2.$$

c) $a(w) \in E_s$ si sólo si w es alguno de los valores w_1, w_2, \dots, w_P (ver apéndice).

d) Si definimos:

$$b(w) = \sum_{k=P+1}^M |\langle a(w), v_k \rangle|^2 \quad (12)$$

de (a), (b), (c) se deduce que $b(w) = 0$ si y sólo si w es una de las frecuencias w_i , con $1 \leq i \leq P$.

Es decir: la función $b(w)$, con dominio en $(-p, p]$, se anula únicamente en las frecuencias buscadas.

Habitualmente, se grafica $m(w) = \frac{1}{b(w)}$, y las abscisas asociadas a los picos de esta función indican las frecuencias buscadas. En teoría $m(w)$ vale ∞ en las frecuencias w_i , con $1 \leq i \leq P$; en la práctica esto difícilmente ocurra, pero se obtienen valores muy altos que contrastan considerablemente con el resto.

IV. Cálculo de la función $b(w)$

La elección de un arreglo de sensores equiespaciados permite el uso de la *FFT* (Fast Fourier Transform) para evaluar $b(w)$.

Dado que: $\langle a(w), v_k \rangle = v_k^* a(w) = \sum_{n=0}^{M-1} \bar{v}_{k_n} e^{-jwn}$

se deduce que $\langle a(w), v_k \rangle$ es la transformada de Fourier de $[\bar{v}_{k_1} \bar{v}_{k_2} \dots \bar{v}_{k_M}]$, evaluada en w .

Eligiendo una longitud L conveniente, se aplica *FFT* a cada v_k^* , para $M - p + 1 \leq k \leq M$ y se evalúa

(12) en $w_l = \frac{2pl}{L}$, con $0 \leq l \leq L-1$.

Reordenando los valores calculados, se tiene un vector f_1, f_2, \dots, f_L tal que: $f_l = b\left(-p + \frac{2p}{L}l\right)$

Teóricamente, se trata de hallar los P ceros de esta función. En la práctica, se trata de hallar los P mínimos locales más pequeños.

Si f_{l_i} es uno de tales mínimos, \mathbf{q}_i se obtiene de la relación:

$$-\mathbf{p} + \frac{2\mathbf{p}}{L}l_i = \mathbf{p} r \text{sen}(\mathbf{q}_i) \quad (13)$$

V. El modelo en presencia de ruido

Suponemos que la señal, después del muestreo, queda afectada por ruido blanco aditivo.

Se registra :

$$y_{kh} = X_{kh} + n_{kh}$$

donde X_{kh} está dada por (11), y n_{kh} es una muestra de la variable aleatoria N_{kh} , que verifica:

$$E(N_{kh}) = 0$$

$$E(N_{kh}\bar{N}_{jh}) = \mathbf{d}_{kj}\mathbf{d}_{hi}\mathbf{s}^2$$

Suponemos que X_{kh} es determinística, aunque la hipótesis de que sea aleatoria conduce a resultados similares a los que se obtienen a continuación.

Se define:

$$R_y = \frac{1}{N} E(YY^*)$$

Como:

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} E\left(\sum_{h=1}^N Y_{kh} \bar{Y}_{lh}\right) &= \frac{1}{N} E\left(\sum_{h=1}^N (X_{kh} + N_{kh})(\bar{X}_{lh} + \bar{N}_{lh})\right) \\ &= \frac{1}{N} \left[\sum_{h=1}^N E(X_{kh} \bar{X}_{lh}) + \sum_{h=1}^N E(X_{kh} \bar{N}_{lh}) + \sum_{h=1}^N E(\bar{X}_{lh} N_{kh}) + \sum_{h=1}^N E(N_{kh} \bar{N}_{lh}) \right] \\ &= \frac{1}{N} (R_x)_{kl} + \mathbf{d}_{kl} \mathbf{s}^2 \end{aligned}$$

se obtiene:

$$R_y = \frac{1}{N} R_x + \mathbf{s}^2 I$$

para R_y se pueden elegir los mismos autovectores que para R_x y, comparando con el apartado anterior, sus autovalores serán:

$$\frac{\mathbf{I}_1}{N} + \mathbf{s}^2, \dots, \frac{\mathbf{I}_P}{N} + \mathbf{s}^2$$

para los primeros P autovectores, y \mathbf{s}^2 para los $(M-P)$ restantes.

Si se conoce en forma exacta la matriz R_y , el procedimiento descrito anteriormente para señales sin ruido se aplica aquí con el mismo grado de precisión.

En realidad, con los datos registrados (y_{kh}), se tiene una estimación de R_y :

$$\hat{R}_y = \frac{1}{N} y y^*$$

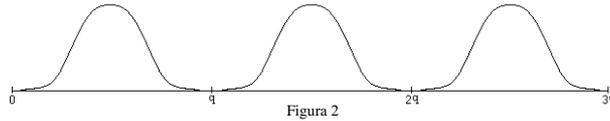
Esta situación introduce un error aleatorio en la estimación de direcciones de arribo. Las consideraciones teóricas acerca de este error exceden el alcance del presente trabajo [4],[5], pero se testea su efecto en las pruebas que se describen más abajo.

VI. Descripción del procedimiento propuesto para la simulación

Asumimos una señal de la forma (1) para la simulación. Debemos entonces precisar:

- Qué señal $S(t)$ se usará.
- Cómo efectuar el muestreo para obtener la matriz (X_{kh}) de datos.

a) La moduladora $S(t)$ que empleamos en las pruebas consta de una repetición de pulsos (figura 2), donde cada pulso es una función gaussiana. Esta elección se hizo para disponer de un control sencillo sobre el rango de frecuencias de $S(t)$.



Supóngase que los pulsos son réplicas de una función simétrica $f(t)$ tal como se indica en la figura 3:

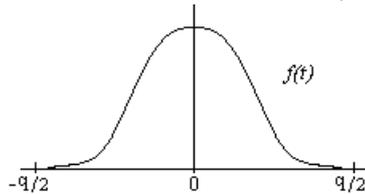


Figura 3

Se tendrá entonces:

$$S(t) = f\left(t - q\left[\frac{t}{q}\right] - \frac{1}{2}q\right) \quad (14)$$

donde q es el período y $[x]$ indica la parte entera del número x .

Ahora se adopta:

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\Pi}} e^{-\frac{a^2 t^2}{2}} \quad (15)$$

donde se toma:

$$a = \frac{24}{q} \quad (16)$$

Es sabido que la función $\frac{1}{\sqrt{2\Pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ es casi nula fuera del intervalo $[-4,4]$. En consecuencia, el soporte de (15) coincide prácticamente con el intervalo $\left[-\frac{4}{a}, \frac{4}{a}\right]$. Con esto y la relación (16), resulta que $f(t)$ tiene la forma:

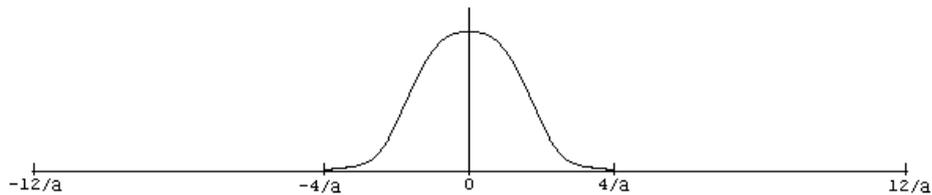


Figura 4

Es decir, la duración efectiva del pulso es $\frac{1}{3}q$.

Esta construcción es arbitraria y se justifica en la medida de su eficacia para la simulación. Se intenta aquí lograr que, para simular arribos múltiples, pequeñas diferencias en las demoras de las distintas señales garanticen no solo el rango P de la matriz S , sino un buen condicionamiento de las matrices involucradas.

Por otra parte, la transformada de Fourier de (15) es :

$$\hat{f}(\mathbf{w}) = \frac{1}{a} e^{-\frac{\mathbf{w}^2}{2a^2}}$$

cuyo soporte es prácticamente $[-4a, 4a]$. Este será también el soporte del espectro de amplitud de $S(t)$, por propiedades conocidas de la $T.F.$

Combinando (14),(15) y (16), se tiene:

$$S(t) = \frac{1}{\sqrt{2\mathbf{p}}} e^{-\left(a\left(t - q\left[\frac{t}{q}\right] - \frac{1}{2}q\right)\right)^2/2} = \frac{1}{\sqrt{2\mathbf{p}}} e^{-\left(a\left(t - \frac{24}{a}\left[\frac{at}{24}\right] - \frac{1}{2}\frac{24}{a}\right)\right)^2/2} = \frac{1}{\sqrt{2\mathbf{p}}} e^{-\left(at - 24\left[\frac{at}{24}\right] - 12\right)^2/2} \quad (17)$$

b) Físicamente, la forma compleja de la matriz X se obtiene con demodulación en fase y en cuadratura para cada sensor y posterior muestreo.

Para efectuar la simulación, se diseñó un método de muestreo directo que reproduce matemáticamente el procedimiento físico mencionado.

Se aplica el método para una señal (ver (3)).

Se fija $d\mathbf{t} = \frac{2\mathbf{p}}{\mathbf{w}_0}$, y se muestrea:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(X_{kh}) &= Z_k(hd\mathbf{t}) \\ &= CS(hd\mathbf{t} - \mathbf{t}) \cos(\mathbf{w}_0(hd\mathbf{t} - \mathbf{t} - (k-1)\Delta t)) \\ \operatorname{Im}(X_{kh}) &= -Z_k\left(hd\mathbf{t} + \frac{\mathbf{p}}{2\mathbf{w}_0}\right) \\ &= -CS\left(hd\mathbf{t} + \frac{\mathbf{p}}{2\mathbf{w}_0} - \mathbf{t}\right) \cos\left(\mathbf{w}_0\left(hd\mathbf{t} + \frac{\mathbf{p}}{2\mathbf{w}_0} - \mathbf{t} - (k-1)\Delta t\right)\right) \\ \operatorname{Im}(X_{kh}) &= -CS\left(hd\mathbf{t} + \frac{\mathbf{p}}{2\mathbf{w}_0} - \mathbf{t}\right) \cos\left(\mathbf{w}_0(hd\mathbf{t} - \mathbf{t} - (k-1)\Delta t) + \frac{\mathbf{p}}{2}\right) \\ &= CS(hd\mathbf{t} - \mathbf{t}) \operatorname{sen}(\mathbf{w}_0(hd\mathbf{t} - \mathbf{t} - (k-1)\Delta t)). \end{aligned}$$

A la última igualdad se llega porque $\cos(x + \frac{\mathbf{p}}{2}) = -\operatorname{sen}x$ y porque la hipótesis de banda angosta de $S(t)$ hace que los valores muestreados sean prácticamente iguales si la diferencia de tiempo es $\frac{\mathbf{p}}{2\mathbf{w}_0}$. Luego:

$$X_{kh} = CS(hd\mathbf{t} - \mathbf{t}) e^{i(\mathbf{w}_0(hd\mathbf{t} - \mathbf{t} - (k-1)\Delta t))} = CS(hd\mathbf{t} - \mathbf{t}) e^{-i\mathbf{w}_0\mathbf{t}} e^{-i(k-1)\Delta t}.$$

ya que $\mathbf{w}_0hd\mathbf{t} = h2\mathbf{p}$.

Obsérvese que se obtiene el mismo resultado que al muestrear la señal definida en la expresión (7).

VII. Pruebas

Como medida de la relación de señal-ruido, se adopta la expresión estándar

$$SNR = 10 \log_{10} \left(\frac{\operatorname{pot}(X)}{\mathbf{s}^2} \right) db \text{ (decibeles)}$$

donde \mathbf{s}^2 es la varianza del ruido y $\operatorname{pot}(X) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x_k^2$ es la potencia de la señal. Para el cálculo, se considera la señal recibida en el primer sensor del arreglo.

El ruido se simula con números complejos: $n_{kh} = \mathbf{a}_{kh} + i\mathbf{b}_{kh}$, donde \mathbf{a}_{kh} y \mathbf{b}_{kh} son números pseudoaleatorios con distribución normal de valor medio 0 y varianza $\frac{\mathbf{s}^2}{2}$.

En las tres pruebas exhibidas se utilizó la *FFT* con 1024 muestras.

La relación señal-ruido usada fue de -10 db en los tres casos. La figura 5 exhibe la señal resultante de agregar ese nivel de ruido.

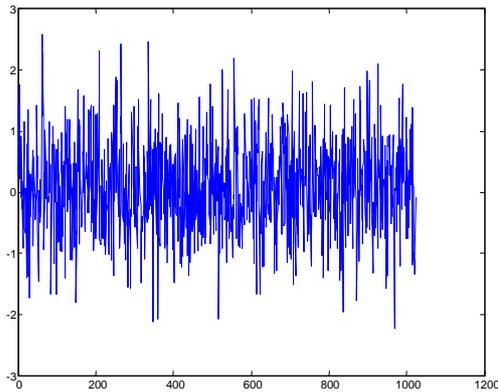


Fig. 5

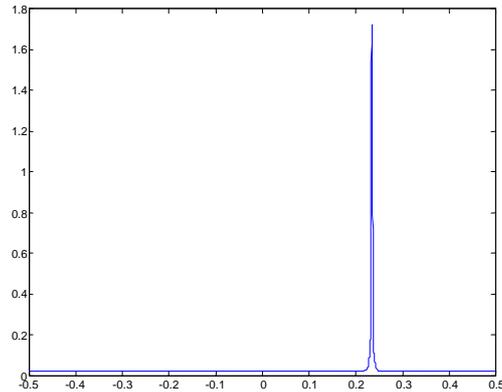


Fig 6

La figura (6) muestra el gráfico de la función m (con el dominio en Hz), en una prueba efectuada con una única señal, con ángulo de arribo q de 28° (ver figura 1), detectada con un arreglo simulado de 50 sensores.

La mejor aproximación para el ángulo mencionado, con 1024 muestras, es el valor:

$$q' = 27.953^\circ \quad (18)$$

obtenido con la relación (13).

Se efectuaron 100 pruebas en estas condiciones, obteniéndose una media muestral de 28° y una desviación estándar muestral de 0.036° .

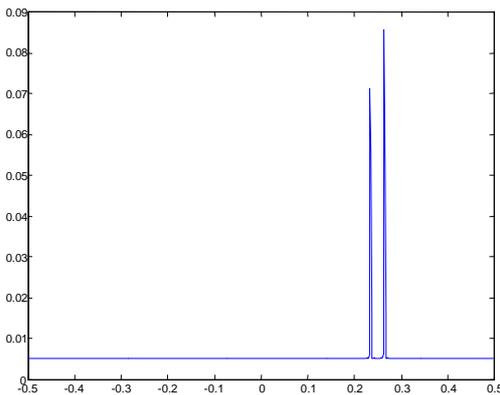


Fig 7

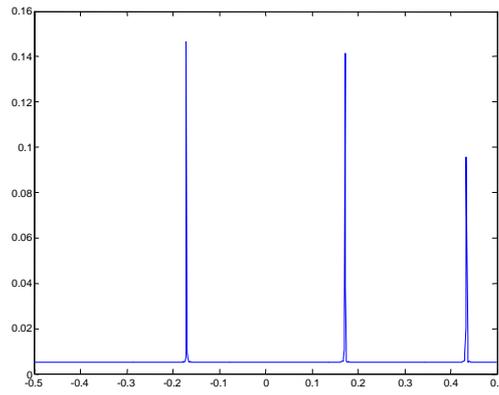


Fig 8

En la figura 7 se exhibe el resultado de una prueba para dos fuentes ubicadas a 28° y 32° .

Las mejores aproximaciones obtenibles con 1024 muestras de la *FFT* son respectivamente:

$$27,953^\circ \text{ y } 31,957^\circ \quad (19)$$

El retardo entre señales es $1/24$ del período (ver punto VI). Además, se empleó un arreglo simulado de 200 sensores.

En distintas pruebas, con -10 db, siempre se obtuvieron los ángulos dados en (19). Esto se debe a que se trabaja con un rango discreto de frecuencias y las oscilaciones son pequeñas debido al número de sensores simulados.

En pruebas no presentadas aquí en las que se usó una *FFT* con 8192 muestras, hay variaciones de los máximos detectados para distintas pruebas.

En las figura 8 se exhibe el resultado de una prueba para tres fuentes ubicadas a -20° , 20° y 60° , cuyas mejores aproximaciones para 1024 muestras de *FFT* son respectivamente:

$$-19.986^\circ, 19.986^\circ, 59.909^\circ \quad (20)$$

El defasaje de señales es de $1/4$ de período entre la primera y la segunda y también entre la segunda y la tercera. En distintas pruebas se recuperaron siempre los valores (20). Cabe la misma observación hecha para el ejemplo anterior.

VIII. Conclusiones

Las pruebas avalan la corrección del muestreo propuesto, aunque cabe aclarar que la elevada precisión de los resultados obtenidos se debe a que la simulación fue efectuada en condiciones muy favorables: gran cantidad de muestras, alto número de sensores simulados y pocas fuentes.

IX. Reconocimientos

Este artículo fue escrito en el marco de un convenio de cooperación entre la CONAE y la Universidad Nacional de la Matanza. Se agradece el soporte del Departamento de Ingeniería e Investigaciones Tecnológicas de dicha Universidad y el asesoramiento brindado por profesionales de la CONAE.

X. Apéndice

Se esboza aquí una prueba del punto III c.

Vale:
$$R = XX^* = AS(AS)^* = A(SS^*)A^* = AR_S A^*$$

R_S es una matriz hermítica de $P \times P$ y rango P , (porque $rg(T) = rg(TT^*)$, para toda matriz T). Por lo tanto, se puede escribir en la forma: $R_S = V\Lambda V^*$, donde las columnas de V son autovectores de R_S , la matriz Λ es:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \mathbf{g}_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{g}_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{g}_P \end{bmatrix}$$

y los autovalores \mathbf{g}_i , con $1 \leq i \leq P$, son todos reales positivos.

Entonces:

$$\begin{aligned} R &= A(V\Lambda V^*)A^* \\ R &= A(V\sqrt{\Lambda}\sqrt{\Lambda}V^*)A^* \\ R &= (AV\sqrt{\Lambda})(AV\sqrt{\Lambda})^* \end{aligned}$$

Llamando:

$$B = AV\sqrt{\Lambda}$$

resulta:

$$R = BB^*$$

y:

$$rg(B) = rg(A) = P.$$

Por lo tanto, las columnas de B generan el mismo subespacio que las columnas de A .

Se trata de ver que este subespacio es exactamente E_S .

Para esto basta ver que cada uno de los vectores v_1, v_2, \dots, v_P , es combinación lineal de las columnas de B .

Vale:
$$\mathbf{I}_i v_i = R v_i = (B B^*) v_i = B (B^* v_i) \text{ para } 1 \leq i \leq P.$$

Llamando $d_i = B^h v_i$, resulta $v_i = \frac{1}{\mathbf{I}_i} B d_i$ con lo cual v_i es una combinación lineal de las columnas de B .

Entonces v_1, v_2, \dots, v_P y $a(\mathbf{w}_1), a(\mathbf{w}_2), \dots, a(\mathbf{w}_P)$ generan el mismo subespacio E_s .

Para cualquier otra frecuencia \mathbf{w} distinta de \mathbf{w}_i , $a(\mathbf{w}_1), a(\mathbf{w}_2), \dots, a(\mathbf{w}_P), a(\mathbf{w})$ son linealmente independientes, ya que $P < M$. Por lo tanto, $a(\mathbf{w}) \notin E_s$.

X. Referencias

- [1] F. Athley, "Angle and frequency estimation using sensor array". Technical report n° 3701-Chalmers University of Technology- Sweden.
- [2] A. Swindlehurst, T. Kailath, "A performance analysis of subspace-based methods in presence of model errors – part 1: the Music algorithm", IEEE Trans. Signal Processing, vol. 40, pp. 1758-1774, July 1992.
- [3] G. Bienvenu, L. Kopp, "Optimality of high resolution array processing using the eigensystem approach", IEEE Trans. on Acoustics, Speech and Signal Processing, vol. Assp-31, n° 5, pp. 1235-1248, October 1893.
- [4] M. Kavesh, A. J. Barabel, "The statistical performance of Music and the minimum-norm algorithms in resolving plane waves in noise", IEEE Trans. on Acoustics, Speech and Signal Processing, vol. Assp-34, n° 2, pp. 331-341, April 1986.
- [5] P. Stoica, A. Nehorai, "Music, maximum likelihood, and Cramer-Rao bound", IEEE Trans. on Acoustics, Speech and Signal Processing, vol. Assp-37, n° 5, pp. 720-741, May 1989.
- [6] I. Dacos, A. Manikas, "The use of differential geometry in estimating the manifold parameters of a one-dimensional array of sensors" Journal of the Franklin Institute, Engineering and Applied Mathematics, vol. 332B, n° 3, pp. 307-332, 1995.
- [7] V. F. Pisarenko, "The retrieval of harmonics from a covariance function", Geophys. J. Roy. Astron. Soc., pp. 347-366, 1973.