

Capítulo 2

Teoría de Campos Conforme

2.1 Introducción

La invarianza de una teoría de campos frente a transformaciones conformes tiene una larga historia en física de altas energías, relatividad y otras importantes ramas de la física. Pero es debido a su aplicación a la mecánica estadística y a la teoría de cuerdas que la teoría de campos conforme (específicamente la teoría bidimensional de campos conforme) ha tenido en los últimos años un desarrollo formidable. En efecto, las teorías cuánticas de campos con invarianza conforme describen la evolución de sistemas estadísticos bidimensionales en transiciones de fase de 2^{do} orden. Esto se debe a que durante estas transiciones las variables dinámicas devienen invariantes de escala y en 2 dimensiones la invarianza de escala implica la invarianza conforme. De esta manera todas las funciones de correlación son invariantes conforme.

Las teorías cuánticas de campos conformes también proveen las variables dinámicas de la teoría de cuerdas. En este contexto la simetría conforme impone vínculos sobre la dimensión crítica del espacio tiempo así como sobre los posibles grados de libertad internos de la teoría.

Una de las características más importantes de las teorías de campos invariantes frente a transformaciones conformes es que esta simetría impone fuertes restricciones sobre las funciones de correlación que se utilizan para calcular cantidades físicas.

Estas deben satisfacer un conjunto infinito de ecuaciones llamadas *identidades de Ward conformes* que permiten calcular exactamente algunas de ellas. En particular cuando la carga central del álgebra de Virasoro, principal parámetro de una teoría conforme, toma determinados valores, todas las funciones de correlación de la teoría pueden ser calculadas exactamente como soluciones de sistemas especiales de ecuaciones lineales en derivadas parciales.

Existen teorías llamadas racionales que además de ser invariantes conforme son invariantes frente a un álgebra quiral. Esta nueva simetría genera otro conjunto de identidades de Ward que determinan aún más a las funciones de correlación. Un ejemplo de teoría racional es la teoría de fermiones libres sin masa con una simetría global respecto a transformaciones de un grupo de Lie G .

Es el propósito de este capítulo el describir algunos de las propiedades generales de las teorías cuánticas de campos invariantes frente al grupo conforme así como de las teorías racionales.

2.2 El Grupo Conforme

Para introducirnos en el grupo conforme en d dimensiones consideremos el espacio R^d con la métrica plana $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ de signatura (p, q) y el elemento diferencial de arco

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dX^\mu \otimes dX^\nu \quad (2.1)$$

Sea $X'^\mu : R^d \rightarrow R^d$ una aplicación diferenciable y con inversa diferenciable (difeomorfismo). Bajo esta transformación el elemento de arco cambia.

$$ds^2 \rightarrow ds'^2 = g_{\mu\nu}(X'(X)) \frac{\partial X'^\mu}{\partial X^\alpha} \frac{\partial X'^\nu}{\partial X^\beta} dX^\alpha \otimes dX^\beta. \quad (2.2)$$

Por definición el grupo conforme es el subgrupo de los difeomorfismos que deja al elemento de arco invariante a menos de un factor de escala:

$$ds^2 \rightarrow ds'^2 = \Omega(X) ds^2. \quad (2.3)$$

Consecuentemente las transformaciones conformes preservan el ángulo entre vectores.

En este punto es conveniente notar que *una transformación conforme no es una transformación general de coordenadas*. En efecto, una transformación de coordenadas describe la misma geometría desde un sistema de coordenadas diferente (en particular el elemento de arco ds^2 se mantiene invariante) en cambio una transformación conforme relaciona distintas geometrías desde el mismo sistema de coordenadas.

Para determinar los generadores infinitesimales del grupo conforme consideramos un difeomorfismo infinitesimal:

$$X^\mu \rightarrow X'^\mu = X^\mu + \varepsilon^\mu(X) \quad (2.4)$$

bajo el cual el elemento de arco ds^2 se transforma:

$$ds^2 \rightarrow ds'^2 = ds^2 + (\partial_\mu \varepsilon_\nu + \partial_\nu \varepsilon_\mu) dX^\mu \otimes dX^\nu. \quad (2.5)$$

Este difeomorfismo será una transformación conforme si el término $\partial_\mu \varepsilon_\nu + \partial_\nu \varepsilon_\mu$ es proporcional a $\eta_{\mu\nu}$

$$\partial_\mu \varepsilon_\nu + \partial_\nu \varepsilon_\mu = \frac{2}{d} (\partial \cdot \varepsilon) \eta_{\mu\nu} \quad (2.6)$$

En este caso el factor de escala $\Omega(X)$ de la ecuación (2.3) tiene la forma

$$\Omega(X) = 1 + \frac{2}{d} (\partial \cdot \varepsilon) \quad (2.7)$$

Miremos ahora separadamente las soluciones de la ecuación diferencial (2.6) para $d > 2$ y $d = 2$.

- Para $d > 2$ las soluciones son:

$$i) \quad \varepsilon^\mu = a^\mu \text{ Translaciones Globales}$$

$$ii) \quad \varepsilon^\mu = \omega^{\mu\nu} X^\nu \quad (\omega \text{ antisimétrico}) \text{ Rotaciones } (SO(p, q))$$

$$iii) \quad \varepsilon^\mu = \lambda X^\mu \text{ Transformación de Escala}$$

iv) $\varepsilon^\mu = b^\mu X^2 - 2X^\mu b \cdot X$ *Transformaciones Conformes Especiales*

Puede demostrarse que el álgebra generada por los anteriores generadores es localmente isomorfa a $SO(p+1, q+1)$.

• Para $d = 2$ y $g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$ las ecuaciones (2.6) se reducen a las ecuaciones de Cauchy-Riemann:

$$\partial_1 \varepsilon_1 = \partial_2 \varepsilon_2 \quad ; \quad \partial_1 \varepsilon_2 = -\partial_2 \varepsilon_1 \quad (2.8)$$

Luego es natural definir las coordenadas complejas:

$$\begin{aligned} z &= X^1 + iX^2 \\ \bar{z} &= X^1 - iX^2 \end{aligned} \quad (2.9)$$

y escribir:

$$\begin{aligned} \varepsilon(z) &= \varepsilon_1 + i\varepsilon_2 \\ \bar{\varepsilon}(\bar{z}) &= \varepsilon_1 - i\varepsilon_2. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Con esta convención las transformaciones conformes bidimensionales coinciden con las transformaciones analíticas:

$$\begin{aligned} z \rightarrow z' &= f(z) \\ z \rightarrow \bar{z}' &= \bar{f}(\bar{z}) \end{aligned} \quad (2.11)$$

cuyo álgebra local es infinito-dimensional. Es claro entonces que el grupo conforme G es el producto directo:

$$G = \Gamma \otimes \bar{\Gamma} \quad (2.12)$$

donde Γ ($\bar{\Gamma}$) es el grupo de sustituciones analíticas de la variable z (\bar{z}).

En estas coordenadas la ecuación (2.3) toma la forma:

$$ds^2 = dz \otimes d\bar{z} \rightarrow ds'^2 = \left| \frac{\partial f}{\partial z} \right|^2 dz \otimes d\bar{z} \quad (2.13)$$

con lo cual $\Omega(X) = \left| \frac{\partial f}{\partial z} \right|^2$.

Una transformación infinitesimal del grupo Γ tiene la forma

$$z \rightarrow z' = z + \varepsilon(z) \quad (2.14)$$

donde $\varepsilon(z)$ es una función infinitesimal analítica que puede ser desarrollada en una serie de Laurent:

$$\varepsilon(z) = - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \varepsilon_n z^{n+1} \quad (2.15)$$

Luego el álgebra de Lie de Γ coincide con el álgebra de los operadores diferenciales:

$$l_n = -z^{n+1} \frac{d}{dz} \quad n \in \mathbb{Z} \quad (2.16)$$

que satisfacen las relaciones de conmutación:

$$[l_n, l_m] = (n - m)l_{n+m} \quad (2.17)$$

Llamaremos \mathcal{L}_o a este álgebra. Los generadores \bar{l}_n del grupo $\bar{\Gamma}$ satisfacen idénticas relaciones de conmutación y conmutan con los generadores del grupo Γ .

Puesto que naturalmente surgen dos álgebras independientes es útil considerar a las variables z y \bar{z} como variables independientes. En este caso nuestra teoría conforme está definida en C^2 y se recupera la teoría original haciendo $\bar{z} = z^*$.

Los generadores $\{l_{-1}, l_0, l_1\}$ forman la subálgebra $sl(2, C) \subset \mathcal{L}_o$ y el correspondiente subgrupo $SL(2, C) \approx SO(3, 1) \subset \Gamma$ consiste en las transformaciones proyectivas:

$$z \rightarrow \xi = \frac{za + b}{zc + d} \quad ad - bc = 1 \quad (2.18)$$

Las transformaciones proyectivas son las únicas transformaciones conformes invertibles de todo el espacio C en si mismo. Llamaremos a este subgrupo "grupo conforme global".

2.3 Teoría de Campos Conformes en $d=2$

En esta sección describiremos las propiedades más importantes de las teorías de campos con invarianza conforme. Los principales resultados expuestos en esta

sección fueron obtenidos por Belavin, Polyakov y Zamolodchikov (Belavin, Polyakov y Zamolodchikov, 1984).

Definiremos una teoría con invarianza conforme imponiendo algunas propiedades:

- a) Existe un conjunto de campos $\{A_i\}$ que contiene a la identidad así como a las derivadas de todos los campos $A_i(X)$.
- b) Existe un conjunto de campos $\{\phi_i\} \subset \{A_i\}$ llamados “campos primarios” que bajo las sustituciones dadas en (2.11) se transforman

$$\phi_i(z, \bar{z}) \rightarrow \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^{h_i} \left(\frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}}\right)^{\bar{h}_i} \phi_i(f(z), \bar{f}(\bar{z})) \quad (2.19)$$

donde h_i y \bar{h}_i números reales llamados **pesos conformes**. Llamaremos a ϕ_i **campo primario de peso** (h_i, \bar{h}_i) .

- c) Los demás campos $\{A_i\}$ pueden expresarse como combinación lineal de los campos primarios y de sus derivadas.
- d) Existe un estado de vacío $|0\rangle$ invariante frente al grupo conforme global.

Consideramos entonces una función de correlación arbitraria de la forma:

$$\langle A_{i1}(X_1) \cdots A_{iN}(X_N) \rangle = \frac{1}{Z} \int \Pi [DA_i] A_{i1} \cdots A_{iN} e^{-S} \quad (2.20)$$

(Z es la funcional generatriz).

La acción S es funcional de los campos $A_i(X)$ y la de la métrica bidimensional $g_{\mu\nu}$ (espacio euclídeo). En particular podemos tomar la métrica plana.

Si la acción S es invariante frente a cambios generales de coordenadas:

$$\begin{aligned} \delta X^\mu &= \varepsilon^\mu(X) \\ \delta A_i(X) &= \delta A_i(X) \\ \delta g_{\alpha\beta}(X) &= \partial_\alpha \varepsilon_\beta + \partial_\beta \varepsilon_\alpha - \varepsilon^\gamma \partial_\gamma g_{\alpha\beta} \end{aligned} \quad (2.21)$$

se deduce de (2.21):

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^N \langle A_{i1}(X_1) \cdots \delta A_{ij}(X_j) \cdots A_{iN}(X_N) \rangle = \\ & - \frac{1}{2} \int d^2x \sqrt{g} \delta g_{\alpha\beta} \langle T^{\alpha\beta}(X) A_{i1} \cdots A_{iN} \rangle \end{aligned} \quad (2.22)$$

donde

$$T_{\alpha\beta} = \frac{2}{\sqrt{g}} \frac{\delta S}{\delta g^{\alpha\beta}} \quad (2.23)$$

es el tensor de energía impulso simétrico de la teoría. Eligiendo la métrica de referencia plana obtenemos:

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^N \langle A_{i1}(X_1) \cdots \delta A_{ij}(X_j) \cdots A_{iN}(X_N) \rangle = \\ & - \int d^2x \partial_{\alpha} \varepsilon_{\beta} \langle T^{\alpha\beta}(X) A_{i1} \cdots A_{iN} \rangle \end{aligned} \quad (2.24)$$

que es la identidad de Ward básica de una teoría cuántica de campos. Esta identidad nos dice que el tensor de energía impulso genera las variaciones de los campos $A_i(X)$ frente a las transformaciones (2.21). Debido a sus propiedades locales, estas variaciones son combinaciones lineales de un número finito de derivadas de la función $\varepsilon^{\mu}(X)$ tomadas en el punto X_j , siendo los coeficientes ciertos campos locales. Luego la ecuación (2.24) implica que el tensor de energía impulso $T_{\alpha\beta}$ se conserva:

$$\partial_{\alpha} T_{\alpha\beta} = 0 \quad (2.25)$$

excepto en la localización de los campos A_{ij} .

En una teoría cuántica de campos con invarianza conforme la traza del tensor de energía impulso es nula $T^{\alpha\alpha} = 0$. Esto es consecuencia de requerir la conservación de la corriente de dilatación $J_{\mu} = X^{\nu} T_{\mu\nu}$ asociada a la transformación de escala ordinaria $X \rightarrow \lambda X$. Debido a esto, en 2 dimensiones este tensor tiene solo 2 componentes independientes que elegiremos de la forma:

$$\begin{aligned} T &= T_{11} - T_{22} + 2iT_{12} \\ \bar{T} &= T_{11} - T_{22} - 2iT_{12} \end{aligned} \quad (2.26)$$

En las variables complejas z y \bar{z} las ecuaciones de conservación del tensor de energía-impulso toman la forma de las ecuaciones de Cauchy-Riemann.

$$\begin{aligned}\partial_{\bar{z}}T &= 0 \\ \partial_z\bar{T} &= 0.\end{aligned}\tag{2.27}$$

Deducimos luego que T y \bar{T} son funciones analíticas de una sola variable z y \bar{z} respectivamente:

$$T = T(z), \quad \bar{T} = \bar{T}(\bar{z}).\tag{2.28}$$

La identidad de Ward dada en la ecuación (2.24) se verá entonces de la forma:

$$\begin{aligned}&\sum_{j=1}^N \langle A_{i1}(z_1, \bar{z}_1) \cdots \delta A_{ij}(z_j, \bar{z}_j) \cdots A_{iN}(z_N, \bar{z}_N) \rangle = \\ &= - \int d^2z \partial_z \varepsilon^z(z, \bar{z}) \langle T_{zz}(z) A_{i1}(z_1, \bar{z}_1) \cdots A_{iN}(z_N, \bar{z}_N) \rangle\end{aligned}\tag{2.29}$$

donde solo hemos considerado una transformación de la variable z . Una identidad similar se cumple para las variaciones δA_i respecto de \bar{z} . (Hay que recordar, que como dijimos en la sección anterior, estamos considerando las variaciones respecto de z y respecto de \bar{z} como *independientes*).

La identidad de Ward anterior se simplifica mucho cuando la transformación de coordenadas es conforme, es decir el parámetro ε es una función analítica de z , ($\varepsilon = \varepsilon(z)$). En este caso podemos utilizar la fórmula de Cauchy, que permite escribir una función meromórfica arbitraria f como:

$$f(z) = \oint [d\omega] f(\omega) \frac{1}{\omega - z}\tag{2.30}$$

donde $[d\omega] = d\omega/2\pi i$ y la integración se efectúa sobre un contorno cerrado que contenga a z pero a ningún polo de f . Utilizando esta fórmula es directo encontrar:

$$\begin{aligned}&\langle A_{i1}(z_1, \bar{z}_1) \cdots \delta A_{ij}(z_j, \bar{z}_j) \cdots \rangle = \\ &= \oint [d\omega] \varepsilon(\omega) \langle T(\omega) A_{i1}(\cdots) A_{iN} \rangle\end{aligned}\tag{2.31}$$

donde el camino de integración solo encierra al punto z_j . Es decir que dentro de funciones de correlación las variaciones conformes del campo A_i pueden escribirse de la forma:

$$\delta A_i(z_i, \bar{z}_i) = \oint [d\omega] \varepsilon(\omega) T(\omega) A_i(z_i, \bar{z}_i) \quad (2.32)$$

sobre un camino cerrado que encierre al punto z_i . Concluimos de (2.32) que *una transformación conforme está determinada por los polos en la expansión de producto de operadores (EPO) con el tensor de energía impulso.*

Consideremos ahora la situación en que los campos A_i son campos primarios de peso (h, \bar{h}) , es decir que se transforman según la ecuación (2.19). Haciendo una transformación infinitesimal analítica de la forma:

$$\begin{aligned} f(z) &= z + \frac{\varepsilon}{\omega - z} \\ \bar{f}(\bar{z}) &= \bar{z} \end{aligned} \quad (2.33)$$

la ecuación (2.19) se reduce a:

$$\delta A(z, \bar{z}) = \varepsilon \left[\frac{h}{(\omega - z)^2} + \frac{1}{\omega - z} \partial_z \right] A(z, \bar{z}) \quad (2.34)$$

que insertada en (2.31) da como resultado:

$$\begin{aligned} &\langle T(\omega) A_{i1}(z_1, \bar{z}_1) \cdots A_{iN}(z_N, \bar{z}_N) \rangle = \\ &= \sum_{j=1}^N \left[\frac{h_{i_j}}{(\omega - z_j)^2} + \frac{1}{\omega - z_j} \partial_{z_j} \right] \langle A_{i1}(z_1, \bar{z}_1) \cdots A_{iN}(z_N, \bar{z}_N) \rangle \end{aligned} \quad (2.35)$$

que es la *identidad de Ward fundamental de una teoría de campos conforme.*

Exigiendo consistencia con las ecuaciones (2.32) y (2.34), se deduce la forma de la EPO entre el tensor de energía impulso T y el campo primario A :

$$\begin{aligned} T(\omega) A(z, \bar{z}) &= \frac{h}{(\omega - z)^2} A(z, \bar{z}) + \frac{1}{\omega - z} \partial_z A(z, \bar{z}) + \mathcal{L}_{-2} A(z, \bar{z}) \\ &+ (\omega - z) \mathcal{L}_{-3} A(z, \bar{z}) + \cdots \end{aligned} \quad (2.36)$$

Los campos $\mathcal{L}_{-n}A(z, \bar{z})$ se llaman **campos descendientes** y por la ecuación (2.36) se pueden escribir:

$$\mathcal{L}_{-n}A(z, \bar{z}) = \oint [d\omega](\omega - z)^{-n+1}T(\omega)A(z, \bar{z}). \quad (2.37)$$

Podemos repetir lo que hicimos para campos primarios con los campos descendientes y definir descendientes de descendientes; descendientes de descendientes de descendientes, etc. Un ejemplo del primer caso es:

$$\mathcal{L}_{-n}\mathcal{L}_{-m}A(z, \bar{z}) = \oint [d\omega] \oint [dv](\omega - z)^{-n+1}(v - z)^{-m+1}T(\omega)T(v)A(z, \bar{z}) \quad (2.38)$$

El conjunto de todos los campos descendientes asociados al campo primario $A(z, \bar{z})$ se denomina **familia conforme**:

$$\{A, \mathcal{L}_{-n}A, \mathcal{L}_{-n}\mathcal{L}_{-m}A, \dots, \mathcal{L}_{-n_1} \dots \mathcal{L}_{-n_k}A, \dots\}$$

Para hallar las variaciones conformes de los campos descendientes (y tambien para calcular sus funciones de correlación) necesitamos conocer la EPO del tensor de energía impulso con si mismo (ver las ecuaciones (2.32) y (2.37)). Teniendo en cuenta la forma tensorial de $T(z)$, la condición de localidad y análisis dimensional deducimos la forma más general de este producto:

$$T(\omega)T(z) = \frac{c}{2} \frac{1}{(\omega - z)^4} + \frac{2}{(\omega - z)^2} + \frac{1}{\omega - z} \partial_z T(z) + \text{términos regulares} \quad (2.39)$$

El parámetro c se denomina **carga central** de la teoría de campos conforme. Notemos que solo si $c = 0$ $T(z)$ es un tensor (campo primario). La aparición de una carga central es un efecto puramente cuántico y su valor no está determinado por principios generales, debe ser tratado como un parámetro de la teoría.

Las teorías con $c < 1$, forman una clase muy especial. Se denominan “teorías minimales” y tienen la característica, probada por Cardy, de ser las únicas teorías consistentes con un número **finito** de campos primarios (Cardy, 1986).

Usando la ecuación (2.39) se pueden calcular todas las funciones de correlación de los campos descendientes en función de las funciones de correlación de los campos

primarios. Esto quiere decir que *toda la información dinámica de la teoría conforme está contenida en las funciones de correlación de los campos primarios.*

2.4 Algebra de Virasoro

En la teoría cuántica de campos, las funciones de correlación están definidas como el valor de expectación de vacío del producto ordenado temporalmente de operadores de campo locales. En nuestro contexto es conveniente introducir las variables σ (espacial) y τ (temporal) de acuerdo a las fórmulas:

$$z = e^{\tau+i\sigma} \quad , \quad \bar{z} = e^{\tau-i\sigma}. \quad (2.40)$$

Eligiendo σ y τ reales, siendo σ una variable angular, $\sigma \in [0, 2\pi]$ se obtiene el espacio euclídeo usual. El orden cronológico en las funciones de correlación se tomará respecto del tiempo euclídeo τ . Con esta convención el punto $z = 0$ corresponde al pasado remoto y $z = \infty$ al futuro lejano. Círculos de radio constante juegan el rol de superficies de tiempo constante. Los campos conformes evaluados en el origen crean estados asintóticos IN y evaluados en el infinito crean estados OUT.

$$\begin{aligned} A(0)|0\rangle &\equiv |A\rangle_{IN} \\ \mathcal{L}_{-n}A(0)|0\rangle &\equiv L_{-n}|A\rangle_{IN} \\ \int [d\omega] \omega^{-n+1} T(\omega) A(0)|0\rangle & \end{aligned} \quad (2.41)$$

Vemos entonces que los operadores L_{-n} aquí definidos pueden ser pensados como actuando sobre un espacio de Hilbert y que son efectivamente los momentos del tensor de energía impulso

$$T(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} L_n z^{-n-2} \quad (2.42)$$

Los operadores L_n forman un álgebra cuyas relaciones de conmutación pueden hallarse a partir de la EPO del tensor de energía impulso con si mismo (ecuación

(2.39)). El resultado es:

$$[L_n, L_m] = (n - m)L_{n+m} + \frac{c}{12}n(n^2 - 1)\delta_{n+m,0} \quad (2.43)$$

que es conocido como **Algebra de Virasoro** y que denotaremos \mathcal{L} . Este álgebra es una extensión central del álgebra de los operadores diferenciales conformes dada en (2.17).

Los campos primarios definen a través de las ecuaciones (2.41) las **representaciones de máximo peso** del álgebra de Virasoro \mathcal{L} . El estado $|A \rangle_{IN}$ definido en (2.41) (de ahora en más lo denotaremos $|A \rangle$) se denomina **estado de máximo peso** y debido a las ecuaciones (2.36) y (2.41) tiene las propiedades:

$$\begin{aligned} L_0|A \rangle &= h|A \rangle \\ L_n|A \rangle &= 0 \quad n > 0. \end{aligned} \quad (2.44)$$

Aunque el álgebra de Virasoro es infinito-dimensional, la subálgebra de Cartan solo contiene a 1 y a L_0 . Siendo L_0 el único elemento no trivial de esta subálgebra lo utilizaremos para clasificar a los estados.

Se deduce de (2.43) que :

$$[L_0, L_{-n}] = nL_{-n} \quad (2.45)$$

luego el estado $L_{-n}|A \rangle$ es un autoestado de L_0 con autovalor $n+h$. Vemos entonces que los estados de la teoría subtienden un conjunto de representaciones de dimensión infinita de \mathcal{L} . Los estados de máximo peso son creados por los campos primarios y los estados descendientes se organizan en familias conformes.

El conjunto completo de estados descendientes de un estado de máximo peso $|A \rangle$ se denomina **Módulo de Verma**. Un módulo de Verma es entonces una representación de \mathcal{L} caracterizada por la carga central c y la dimensión h del estado de máximo peso. Esto refleja el hecho que las propiedades conformes de los campos descendientes están totalmente determinadas por las de los campos primarios.

Recordemos que tambien hay un tensor de energía impulso antianalítico \bar{T} que dará origen a otra álgebra de Virasoro $\bar{\mathcal{L}}$ generada por los operadores \bar{L}_n . Luego el espacio completo de estados de una teoría de campos conforme bidimensional tiene la forma:

$$\otimes_{ij} \mathcal{H}_i \otimes \bar{\mathcal{H}}_j \quad (2.46)$$

donde \mathcal{H}_i denota el espacio de Hilbert de estados en la representación de descendientes de $|A_i\rangle$.

Discutamos ahora brevemente el problema de la unitariedad. Este problema se reduce a encontrar los pares de valores de c y h de tal manera que la representación de máximo peso correspondiente sea unitaria. La condición de unitariedad para los generadores de Virasoro es:

$$L_n^\dagger = L_{-n} \quad \forall n \quad (2.47)$$

Puede verse facilmente que una condición necesaria para obtener representaciones unitarias es que $c \geq 0$ y $h \geq 0$.

La solución completa a este problema la dieron Friedan, Qiu y Shenker (Friedan, Qiu y Shenker, 1984) estudiando el determinante de Kac (determinante de la matriz formada por los productos internos de estados de peso conforme dado en un módulo de Verma arbitrario) y establecieron: “Los valores de c y h que conducen a una representación unitaria del álgebra de Virasoro deben satisfacer:

$$c \geq 1 \text{ y } h \geq 0 \quad (2.48)$$

o bien

$$c = 1 - \frac{6}{(m+2)(m+3)} \quad (2.49)$$

y

$$h = \frac{[(m+3)p - (m+2)q]^2 - 1}{4(m+2)(m+3)} \quad (2.50)$$

donde $m = 0, 1, \dots$; $p = 1, 2, \dots, m+1$ y $q = 1, 2, \dots, p$.”

2.5 Algebra Afín de Kac-Moody

Una importante clase de teorías cuánticas de campos conformes son las teorías racionales. Estas teorías están caracterizadas por tener invarianza frente a un álgebra quirral \mathcal{A} así como a un álgebra de Virasoro $\mathcal{L}(\mathcal{L} \subseteq \mathcal{A})$. Las teorías racionales más simples son las teorías conformes con invarianza a frente a transformaciones quirales de un grupo de Lie compacto G . Las corrientes asociadas a esta simetría son un conjunto de campos conformes J^a de peso $(1,0)$ y \bar{J}^a de peso $(0,1)$ y su EPO es de la forma:

$$J^a(z)J^b(\omega) = \frac{k\delta^{ab}}{(z-\omega)^2} + \frac{if^{abc}}{(z-\omega)}J^c(\omega) + t.r.$$

donde f^{abc} son las constantes de estructura del grupo de Lie G y k es una constante denominada **nivel de Kac Moody**. El producto de operadores anterior es conocido como **algebra afín de Kac Moody**. Existe un álgebra similar para las corrientes \bar{J}^a .

Las corrientes J^a están al mismo nivel que el tensor de energía impulso T . Ellas generan un conjunto infinito de simetrías de toda la teoría cuántica. Estos conjuntos infinitos de simetrías generan identidades de Ward generalizadas que permiten calcular todas las funciones de correlación de campos por medio de ecuaciones diferenciales.

El álgebra completa de los operadores J^a y T es:

$$\begin{aligned} T(z)T(\omega) &= \frac{c}{2} \frac{1}{(z-\omega)^4} + \frac{2}{(z-\omega)^2}T(\omega) + \frac{1}{z-\omega}\partial\omega T(\omega) + t.r. \\ T(z)J^a(\omega) &= \frac{1}{(z-\omega)^2}J^a(\omega) + \frac{1}{z-\omega}\partial\omega J^a(\omega) + t.r. \\ J^a(z)J^b(\omega) &= \frac{k\delta^{ab}}{(z-\omega)^2} + \frac{if^{abc}}{z-\omega}J^c(\omega) + t.r. \end{aligned}$$

Del mismo modo que hicimos para el tensor de energía impulso se pueden hallar los generadores del álgebra de Kac-Moody como los modos de las corrientes J^a :

$$J_n^a = \oint [d\omega] \omega^n J^a(\omega) \quad (2.51)$$

Las ecuaciones (2.5) son entonces equivalentes a:

$$\begin{aligned}
[L_n, L_m] &= (n - m)L_{n+m} + \frac{c}{12}n(m - 1)\delta_{n+m,0} \\
[L_n, J_m^a] &= -mJ_{n+m}^a \\
[J_n^a, J_m^b] &= f^{abc}J_{n+m}^c + n\frac{k}{2}\delta^{ab}\delta_{n+m,0}
\end{aligned} \tag{2.52}$$

Estas ecuaciones permiten construir, como lo hicimos en la sección anterior, el espacio de Hilbert de la teoría a partir de representaciones de máximo peso respecto de los operadores L_n y de los operadores J_m^a . Es decir que si A_i es un campo primario (se transforma según la ecuación (2.19) frente a una transformación conforme y covariantemente frente a una transformación del grupo G), los estados de máximo peso $|A_i\rangle$ obedecen las condiciones:

$$\begin{aligned}
L_0|A_i\rangle &= h_i|A_i\rangle \\
J_0^a|A_i\rangle &= t_i^a|A_i\rangle \\
L_n|A_i\rangle &= J_n^a|A_i\rangle = 0 \quad n > 0
\end{aligned} \tag{2.53}$$

donde t_i^a denota los generadores de G . Los estados descendientes se construyen de $|A_i\rangle$ aplicando los operadores L_{-n} y J_{-n}^a .

2.6 Construcción de Sugawara

Una característica importante de estas teorías racionales es que se pueden construir generadores del álgebra de Virasoro a partir de generadores del álgebra de Kac-Moody.

Consideremos la construcción:

$$\begin{aligned}
T(z) &= -\frac{1}{2\beta} : J^a(z)J^a(z) : \\
&= -\frac{1}{2\beta} \lim_{z \rightarrow \omega} \left[J^a(z)J^a(\omega) - \frac{k \dim G}{(z - \omega)^2} \right]
\end{aligned} \tag{2.54}$$

donde el orden normal sustrae los términos singulares. La constante β se fija requiriendo que $T(z)$ satisfaga el producto de operadores canónico del tensor de energía impulso (ecuación (2.39)) o que $J^a(z)$ se transforme como un campo primario de dimensión (1,0) y resulta:

$$\beta = -2(k + C_G) \quad (2.55)$$

donde C_G es el Casimir cuadrático en la representación adjunta; $C_G \delta^{ab} = f^{acd} f^{bcd}$.

Se verifica directamente que $T(z)$ y $J^a(z)$ satisfacen el álgebra (2.5) y la carga central de Virasoro resulta:

$$c = \frac{k \dim G}{k + C_G} \quad (2.56)$$

Esta forma de construir el tensor de energía impulso en términos de las corrientes se llama **construcción de Sugawara**. (La idea de construir el tensor de energía impulso como funcional de las corrientes fue original de Sugawara, quien lo desarrolló durante los '60, para el caso de 4 dimensiones).

En términos de los operadores L_n y J_m^a la ecuación (2.54) se escribe:

$$L_n = \frac{1}{\beta} \sum_{m=-\infty}^{\infty} : J_m^a J_{m-n}^a : \quad (2.57)$$

Esta ecuación nos dice que el álgebra de Virasoro \mathcal{L} está contenida en el álgebra de Kac Moody y por ello los estados descendientes respecto del álgebra de Virasoro pueden construirse como combinación de estados descendientes respecto del álgebra de Kac-Moody. *Los descendientes del álgebra de corrientes subtienden completamente el espacio de representación.*

2.7 La construcción del Coset

El valor de la carga central del álgebra de Virasoro en la construcción del Sugawara, dada en la ecuación (2.56) está acotado. En efecto, con elementos básicos de teorías de grupos de Lie se puede demostrar que para cualquier grupo G :

$$\text{rango } G \leq c \leq \dim G$$

(el rango de G es la dimensión de la subálgebra de Cartan) y por lo tanto la construcción de Sugawara no nos permite obtener teorías conformes con $c < 1$ (minimales). Sin embargo existe una construcción muy interesante, debido a Goddard, Kent y Olive, que permite obtener teorías minimales a partir de la construcción de Sugawara; es la llamada **construcción del coset** (Goddard, Kent y Olive, 1985).

Sea G un grupo compacto de Lie y sea $H \subseteq G$ un subgrupo. Elijamos una base del álgebra de G tal que los primeros $\dim H$ generadores generen H . Obtengamos ahora vía la construcción de Sugawara (ecuación (2.57)) los generadores de Virasoro correspondientes a G y a H :

$$L_n^{(G)} = \frac{1}{-2(k + C_G)} \sum_{a=1}^{\dim G} \sum_{m=-\infty}^{\infty} : J_m^a J_{m-n}^a : \quad (2.58)$$

$$L_n^{(H)} = \frac{1}{-2(k + C_H)} \sum_{a=1}^{\dim H} \sum_{m=-a}^{\infty} : J_m^a J_{m-n}^a : \quad (2.59)$$

Las cargas centrales correspondientes tienen la forma:

$$c^{(G)} = \frac{k \dim G}{k + C_G} \quad (2.60)$$

y

$$c^{(H)} = \frac{k \dim H}{k + C_H} \quad (2.61)$$

Consideremos ahora las relaciones de conmutación (ver ecuación (2.52)):

$$[L_n^{(G)}, J_m^a] = -m J_{m+n}^a \quad 1 \leq a \leq \dim H \quad (2.62)$$

$$[L_n^{(H)}, J_m^a] = -m J_{m+n}^a$$

Sustrayendo en (2.62) obtenemos:

$$[L_n^{(G)} - L_n^{(H)}, J_m^a] = -m J_{m+n}^a \quad 1 \leq a \leq \dim H \quad (2.63)$$

con lo que deducimos:

$$[L_n^{(G)} - L_n^{(H)}, L_m^{(H)}] = 0 \quad (2.64)$$

y si definimos $L_n^{(G/H)} = L_n^{(G)} - L_n^{(H)}$ tenemos finalmente:

$$[L_n^{(G/H)}, L_m^{(G/H)}] = [L_n^{(G)}, L_m^{(G)}] - [L_n^{(H)}, L_m^{(H)}] \quad (2.65)$$

es decir que $L_n^{(G/H)}$ satisface un álgebra de Virasoro con una carga central:

$$c^{G/H} = c^G - c^H = \frac{k \dim G}{k + C_G} - \frac{k \dim H}{k + C_H} \quad (2.66)$$

Los argumentos anteriores implican que cualquier estado en una representación de G se puede descomponer como un estado en H y un estado en el espacio coset G/H .

Eligiendo convenientemente los grupos G y H se pueden obtener valores de $c < 1$. Por ejemplo si $G = SU(2)_m \times SU(2)_1$ y $H = SU(2)_{1+m}$ (el subíndice indica el nivel del álgebra afín de Kac-Moody), obtenemos con la construcción del coset, una teoría conforme con carga central:

$$c^{G/M} = \frac{3m}{m+2} + 1 - \frac{3(m+1)}{(m+1)+2} = 1 - \frac{6}{(m+2)(m+3)} \quad (2.67)$$

que es precisamente la serie de valores $c < 1$ consistentes con representaciones unitarias del álgebra de Virasoro (ecuación (2.49)).

2.8 Bosones Libres, Fermiones Libres y Modelo de Wess-Zumino-Witten

Finalmente en esta sección ilustraremos los principales puntos de este capítulo con 3 ejemplos simples.

A. Bosones Libres

Comenzaremos considerando una teoría en espacio euclídeo bidimensional de un bosón escalar libre sin masa $\Phi(x)$. La acción está dada por:

$$S = \frac{1}{2\pi} \int d^2x \partial_\mu \Phi \partial^\mu \Phi \quad (2.68)$$

que en términos de las coordenadas complejas definidas en (2.9):

$$z = X^1 + iX^2, \quad \bar{z} = X^1 - iX^2$$

se escribe:

$$S = \frac{2}{\pi} \int dz d\bar{z} \partial_z \Phi(z, \bar{z}) \partial_{\bar{z}} \Phi(z, \bar{z}) \quad (2.69)$$

y las ecuaciones de movimiento toman la forma:

$$\partial_z \partial_{\bar{z}} \Phi(z, \bar{z}) = 0 \quad (2.70)$$

Se deduce directamente de (2.70) que las soluciones de las ecuaciones de movimiento se separan en dos partes con solo dependencia holomorfica o antiholomorfica respectivamente:

$$\Phi(z, \bar{z}) = \frac{1}{2} \phi(z) + \frac{1}{2} \bar{\phi}(\bar{z}). \quad (2.71)$$

Las funciones de Green tambien se separan en partes holomorficas y antiholomorficas y resultan:

$$\langle \phi(z) \phi(\omega) \rangle = -\ln(z - \omega) \quad (2.72)$$

$$\langle \bar{\phi}(\bar{z}) \bar{\phi}(\bar{\omega}) \rangle = -\ln(\bar{z} - \bar{\omega}) \quad (2.73)$$

El tensor de energía impulso de esta teoría es de traza nula y su componente analítica tiene la forma:

$$\begin{aligned} T(z) &= -\frac{1}{2} : \partial_z \phi \partial_z \phi : \\ &= -\frac{1}{2} \lim_{z \rightarrow \omega} \left[\partial_z \phi \partial_\omega \phi - \frac{1}{(z - \omega)^2} \right] \end{aligned} \quad (2.74)$$

donde hemos usado la prescripción del orden normal para sustraer los términos singulares en la EPO.

El cálculo de la EPO entre el campo $\phi(z)$ y el tensor de energía impulso se realiza facilmente y se descubre que este no es un campo primario. Un cálculo similar nos asegura que $\partial_z \phi$ efectivamente lo es. Usando el teorema de Wick y desarrollos en serie de Taylor encontramos:

$$T(z) \partial_\omega \phi(\omega) = \frac{1}{(z - \omega)^2} \partial_\omega \phi(\omega) + \frac{1}{z - \omega} \partial_\omega^2 \phi(\omega) + t.r \quad (2.75)$$

es decir que $\partial_\omega \phi(\omega)$ es un campo primario de peso conforme (1,0). Análogamente se puede demostrar que $\partial_{\bar{\omega}} \bar{\phi}(\bar{\omega})$ es un campo primario de peso conforme (0,1).

La ecuación (2.75) también nos permite calcular la EPO de $T(z)$ con si mismo. El cálculo es directo y da:

$$T(z)T(\omega) = \frac{1/2}{(z-\omega)^4} + \frac{2}{(z-\omega)^2}T(\omega) + \frac{1}{(z-\omega)}\partial_\omega T(\omega) + t.r. \quad (2.76)$$

verificando que T satisface un álgebra de Virasoro con un valor de la carga central:

$$c = 1. \quad (2.77)$$

Consideremos ahora el operador de vértice:

$$V_\alpha(z) =: e^{i\alpha\phi(z)} :. \quad (2.78)$$

Tomando la EPO de V_α con T encontramos el siguiente desarrollo:

$$T(z)V_\alpha(\omega) = \frac{\alpha^2}{2} \frac{V_\alpha(\omega)}{(z-\omega)^2} + \frac{\partial_\omega V_\alpha(\omega)}{z-\omega} + t.r. \quad (2.79)$$

luego $V_\alpha(z)$ es un campo primario de peso conforme $(\frac{\alpha^2}{2}, 0)$.

A partir de estos campos conformes, por aplicación de los operadores L_{-n} se pueden construir todas las familias conformes y obtener la representación completa del álgebra de Virasoro asociado a cada campo primario.

B. Fermiones Libres

Otro ejemplo interesante de teoría cuántica de campos conforme en 2 dimensiones es el de una teoría de fermiones libres sin masa. Consideremos entonces una teoría de un fermión de Majorana libre:

$$\Psi = \begin{bmatrix} \Psi_+ \\ \Psi_- \end{bmatrix} \quad (2.80)$$

donde los componentes Ψ_+ y Ψ_- son reales. Debido a las propiedades de las matrices de Dirac en 2 dimensiones, la acción puede escribirse:

$$S = \frac{1}{8\pi} \int [\Psi_+ \partial_{\bar{z}} \Psi_+ + \Psi_- \partial_z \Psi_-] dz d\bar{z} \quad (2.81)$$

donde las variables z y \bar{z} son las ya definidas. Las ecuaciones de movimiento resultan:

$$\partial_z \Psi_- = \partial_{\bar{z}} \Psi_+ = 0, \quad (2.82)$$

es decir Ψ_+ tiene solo componentes analíticas y Ψ_- solo componentes antianalíticas. Las funciones de Green de estos campos tiene la forma:

$$\begin{aligned} \langle \Psi_+(z) \Psi_+(\omega) \rangle &= -\frac{1}{z - \omega} \\ \langle \Psi_-(\bar{z}) \Psi_-(\bar{\omega}) \rangle &= -\frac{1}{\bar{z} - \bar{\omega}} \end{aligned} \quad (2.83)$$

El tensor de energía impulso es de traza nula y sus componentes analíticas y antianalíticas se escriben:

$$\begin{aligned} T(z) &= \frac{1}{2} : \Psi_+(z) \Psi_+(z) : \\ \bar{T}(\bar{z}) &= \frac{1}{2} : \Psi_-(\bar{z}) \Psi_-(\bar{z}) : \end{aligned} \quad (2.84)$$

y utilizando las funciones de Green (2.83) se verifica que satisface un álgebra de Virasoro con carga central:

$$c = \bar{c} = \frac{1}{2}. \quad (2.85)$$

Del cálculo de la EPO de $T\Psi_+$ y $\bar{T}\Psi_-$ se verifica que los campos Ψ_+ y Ψ_- son campos primarios de pesos conformes $(1/2,0)$ y $(0,1/2)$ respectivamente.

Consideremos ahora una teoría con 2 fermiones de Majorana libres sin masa. En este caso la acción tiene una simetría $SO(2)_L \times SO(2)_R$ global y, como veremos, la teoría es racional. Las corrientes de Noether en las coordenadas z y \bar{z} tienen la forma:

$$\begin{aligned} J_z &= J_1 + iJ_2 = \frac{1}{2} : \Psi_+^1 \Psi_+^2 - \Psi_+^2 \Psi_+^1 : \\ \bar{J}_{\bar{z}} &= J_1 - iJ_2 = \frac{1}{2} : \Psi_-^1 \Psi_-^2 - \Psi_-^2 \Psi_-^1 : \end{aligned} \quad (2.86)$$

y las ecuaciones de conservación $\partial_{\bar{z}} J_z = \partial_z \bar{J}_{\bar{z}} = 0$ se satisfacen automáticamente en virtud de las ecuaciones de movimiento, por lo tanto J_z sólo depende de z y $\bar{J}_{\bar{z}}$ sólo depende de \bar{z} .

El cálculo de la EPO de $T\dot{J}_z$ y $\bar{T}\bar{J}_{\bar{z}}$ nos muestra que J_z y $\bar{J}_{\bar{z}}$ son campos primarios de pesos conformes (1,0) y (0,1).

En este caso también es directo el calculo de los EPO $J_z J_w$ y $\bar{J}_{\bar{z}} \bar{J}_{\bar{w}}$. En ambos casos se comprueba que satisfacen la relación (5.1) que define el álgebra afín de Kac-Moody, con nivel $K=1$. Concluimos que debido a que se satisface completamente el álgebra (5.1), la teoría de 2 fermiones de Majorana libres es racional.

C. Modelo de Wess- Zumino-Witten

Por último mencionaremos brevemente otra teoría racional, quizás las más ejemplar: el modelo sigma no lineal con término de Wess-Zumino, también conocido como modelo de Wess-Zumino-Witten (Witten, 1984).

Su acción esta dada por:

$$S[g] = \frac{1}{4\lambda^2} \int d^2x Tr \partial_\mu g \partial_\mu g^{-1} + n\Gamma[g] \quad (2.87)$$

donde g es un campo que toma valores en un grupo de Lie G y $\Gamma[g]$ es la acción de Wess-Zumino en 2 dimensiones:

$$\Gamma[g] = \frac{1}{24\pi} \int \varepsilon^{ijk} Tr(g^{-1} \partial_i g g^{-1} \partial_j g g^{-1} \partial_k g) d^3y \quad (2.88)$$

La integración en (2.88) se realiza sobre una bola tridimensional B cuyo borde es el espacio bidimensional real. La variable g se extiende en la nueva dimensión de manera arbitraria (suave). Por supuesto que la manera de definir $\Gamma[g]$ no es única, sin embargo la diferencia entre 2 valores de Γ obtenidos de 2 extensiones distintas del campo g es un múltiplo de 2π . Esta ambigüedad discreta no afecta ni los valores clásicos de las ecuaciones de movimiento, pues Γ sera estacionaria para las mismas trayectorias, ni su cuantificación, pues solo se exige que $e^{i\Gamma}$ sea monovaluada.

El grupo de renormalización provee, para este modelo, un punto fijo estable infrarrojo para

$$\lambda^2 = \frac{4\pi}{n} \quad (2.89)$$

y en este punto el modelo es invariante conforme. En adelante llamaremos modelo de Wess-Zumino-Witten (WZW) al dado es las ecuaciones (2.87) y (2.88) con el valor de λ (2.89) y lo denotaremos $W[g]$:

$$W[g] = \frac{n}{16\pi} \int Tr(\partial_\mu g^{-1} \partial^\mu g) d^2x + n\Gamma[g] \quad (2.90)$$

La acción $W[g]$ satisface la identidad de Polyakov-Wiegmann (Polyakov y Weigmann, 1984):

$$W[gh^{-1}] = W[g] + W[h^{-1}] + \frac{1}{16\pi} \int Tr(g^{-1} \partial_z g h^{-1} \partial_z h) d^2x \quad (2.91)$$

(las variables z y \bar{z} son las ya definidas en (2.9)) que permite probar la invarianza de W frente a las transformaciones:

$$g \rightarrow \Omega(z)g\Lambda^{-1}(\bar{z}) \quad (2.92)$$

con $\Omega(z)$ y $\Lambda(\bar{z})$ elementos de G arbitrarios. Llamaremos a esta simetría quiral $G_L \times G_R$.

Las corrientes asociadas a esta simetría son de la forma:

$$\begin{aligned} J^a t^a &= \frac{n}{2\pi} \partial_z g g^{-1} \\ \bar{J}^a t^a &= \frac{n}{2\pi} g^{-1} \partial_{\bar{z}} g \end{aligned} \quad (2.93)$$

(t^a son los generados de G) y satisfacen las ecuaciones de conservación:

$$\partial_{\bar{z}} J^a = \partial_z \bar{J}^a = 0 \quad (2.94)$$

Tambien puede calcularse la EPO de ambas corrientes y comprobar que satisfacen sendas álgebras de Kac-Moody conmutantes (ecuación (2.5)) con una carga central:

$$K = n \quad (2.95)$$

El tensor de energía impulso es naturalmente de la forma Sugawara (ecuación (2.54)):

$$\begin{aligned} T(z) &= \frac{1}{4(n + C_G)} : J^a(z) J^a(z) : \\ \bar{T}(\bar{z}) &= \frac{1}{4(n + C_G)} : \bar{J}^a(\bar{z}) \bar{J}^a(\bar{z}) : \end{aligned} \quad (2.96)$$

y ambos componentes satisfacen álgebras de Virasoro con carga central:

$$C = \frac{n \dim G}{n + C_G} \quad (2.97)$$

El campo g es un campo primario y la EPO con el tensor de energía impulso demuestra que sus pesos conformes son:

$$h = \bar{h} = \frac{\tilde{C}_G}{C_G + K} \quad (2.98)$$

donde \tilde{C}_G es el Casimir de G en la representación a la que g pertenece ($I\tilde{C}_G = t^a t^a$ con t^a generador de la representación de g).