Capítulo 4

Modelos Fermiónicos Constreñidos y Topología

4.1 Introducción

Trataremos en este capítulo una clase especial de modelos constreñidos en los cuales juegan un importante papel las propiedades topológicas de los campos. Los modelos constreñidos son teorías cuánticas de campos fermiónicos o bosónicos que dan realizaciones explícitas de la construcción del coset. Recordemos que esta construcción permitía obtener teorías conformes racionales con simetrías G/H (H es un subgrupo del grupo de Lie G) a partir de las teorías racionales asociadas a los grupos G y H. En particular para ciertas elecciones de los grupos G y H es posible obtener la serie de valores de $c < 1$ compatibles con representaciones unitarias del álgebra de Virasoro (series FQS, ecuación (2.54) del Capítulo II) así como otras importantes series conformes (ver Cabra, Moreno y von Reichenbach, 1990).

Los modelos constreñidos han adquirido notoriedad pues permitirían representar teorías de campos asociados a modelos estadísticos bidimensionales en el punto crítico. Ciertos modelos estadísticos durante las transiciones de fase de 2^{do} orden son descriptos por teorías conformes minimales unitarios y por lo tanto el valor de la carga central del álgebra conforme pertenece a la serie FQS. Por ejemplo los primeros valores de esta serie $c = 1/2, 7/10, 4/5, 6/7$ corresponden a teorías conformes identificadas respectivamente con el modelo de Ising, el modelo de Ising tricrítico, el modelo de Potts y el modelo de Potts tricrítico. Estas identificaciones se hicieron comparando los pesos conformes permitidos con las dimensiones de escala de los operadores de estos modelos.

Otra importante aplicación de los modelos constreñidos es en problema de la compactificación, tema central de la teoría de cuerdas. El método mas simple de compactificación es la compactificación toroidal, descripta por una teoría racional conforme de fermiones y bosones sobre la hoja del universo (con simetría SO(N)). El método que le sigue en complejidad hace uso de la construcción del coset. Proyectando el grupo inicial de compactificación sobre un adecuado subgrupo es posible construir varios modelos no triviales.

En este capítulo consideraremos un modelo fermiónico constreñido en el que el multiplicador de Lagrange que hace efectivo el vínculo posee una estructura topológica no trivial. En particular estudiaremos la carga central de esta teoría y obtendremos un tensor de energía impulso de bosones libres modificado por un término adicional similar al propuesto por I. Dotsenko y V.Fateev (Dotsenko y Fateev, 1984, 1985). Estos autores mostraron que las funciones de correlación de la teoría conforme general en 2 dimensiones pueden ser representadas por valores de expectación de operadores de vértice en un gas de Coulomb con condiciones de contorno no triviales. Su trabajo encontró numerosas aplicaciones y es una de las contribuciones básicas de los últimos años a las teorías conformes.

Partiendo de una teoría de bosones libres y con el objeto de obtener modelos minimales, introdujeron mediante un operador de vértice, una "carga de fondo" ("background") en el infinito. Como consecuencia inmediata se modifican las condiciones de contorno de los campos bosónicos que se manifiestan por la adición de un nuevo término en el tensor de energía impulso holomórfico . Este término adicional se determina estudiando las características de la EPO del nuevo tensor con los operadores de vértice y resulta:

$$\Delta T(z) = i\alpha_0 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \phi(z) \tag{4.1}$$

donde $2\alpha_0$ es la "carga de background" y $\phi(z)$ es el campo bosónico.

Puesto que el nuevo término que adquiere el tensor de energía impulso es imaginario la teoría que el define no es unitaria para un valor arbitrario de α_0. En efecto, un cálculo sencillo muestra que la carga central asociada al nuevo modelo es:

$$c = 1 - 12\alpha_0^2 \tag{4.2}$$

que corresponde a una teoría minimal, y como ya hemos mencionado, solo los valores discretos de c dados en la serie FOS son compatibles con teorías unitarias minimales.

En este capítulo obtendremos a partir de la teoría constreñida antes mencionada, un tensor holomórfico de energía impulso con una modificación similar a la dada en la ecuación (4.1). Sin embargo en nuestro modelo el término adicional surge naturalmente real y consecuentemente la teoría que define es automáticamente unitaria. Debido a la ecuación (4.2) en nuestro caso la carga central c se ve incrementada y no se obtienen modelos minimales.

4.2 Modelos Fermiónicos Constreñidos

Discutiremos brevemente en esta sección sobre los modelos fermiónicos constreñidos. Esta discusión nos servirá de introducción al planteo del problema concreto al que este capítulo se refiere y que abordaremos en la sección siguiente.

Habíamos mencionado en el Capítulo II sección 7 el mecanismo ideado por Goddard, Kent y Olive que permite, a partir de una teoría racional, con simetría quiral G, obtener otra con simetría G/H (H es un subgrupo de G) sustrayendo a los generadores de Virasoro de la teoría original, los generadores asociados al subgrupo H.

Este mecanismo, **construcción del coset**, es una construcción general puramente algebraica y permite describir cualquier estado en la representación del grupo G como una suma directa de productos de representaciones de estados del subgrupo H y el espacio cociente G/H. Sin embargo esta construcción no pone de manifiesto la teoría cuántica de campos cuya álgebra racional conforme posee estas simetrías. Este es un interesante problema adicional. Los autores antes citados ya habían sugerido que tal teoría de campos podría obtenerse a partir de una teoría racional conforme imponiendo vínculos sobre las corrientes asociados al subgrupo de simetría divisor. Teniendo en cuenta esta sugerencia se han construído teorías de campos bosónicos y fermiónicos que realizan la construcción del coset (ver por ejemplo (Cabra, Moreno, y von Reichenbach, 1990) y las referencias allí citadas).

Para cumplir con el propósito de este capítulo solo mencionaremos en esta sección cual es el lagrangiano fermiónico que produce la construcción del coset sin considerar los cálculos que lo prueban.

El lagrangiano tiene la forma:

$$\mathcal{L} = \bar{\Psi} i\gamma.\partial\Psi + j^{\mu a} A^a_\mu \quad a = 1, \cdots, \dim H \tag{4.3}$$

donde Ψ es un fermión de Dirac de K componentes, $j^{\mu a}$ son las corrientes de Noether asociadas al subgrupo de simetría $H \subset U(K)$ que se quiere constreñir:

$$j^{\mu a} = \bar{\Psi}\gamma^\mu t^a \Psi \quad (t^a \; generadores \; de \; H) \tag{4.4}$$

y A^a_μ son los correspondientes multiplicadores de Lagrange. Teniendo en cuenta que la teoría definida por el lagrangiano (4.1) es invariante de gauge y usando las técnicas de bosonización mediante la integral funcional descriptas en el capítulo anterior, puede demostrarse que esta teoría es racional conforme y que su álgebra de Virasoro posee una carga central:

$$c = c_{U(K)} - \frac{k \dim H}{k + C_H} \tag{4.5}$$

en completo acuerdo con la construcción del coset (ecuación (2.71) del Capítulo II). (Aquí $c_{U(K)}$ es la carga central de una teoría racional con simetría U(K) y las demás constantes son las definidas en el Capítulo II).

4.3 Contribución de Sectores Topológicos.

Estudiaremos en esta sección y las siguientes una teoría definida por un lagrangiano similar al dado en la ecuación (4.3) pero con la particularidad de que el multiplicador de Lagrange A_μ posee una estructura topológica no trivial. Consideraremos el caso simple en el que A_μ es un campo abeliano con un flujo total no nulo a través de una superficie compacta. Analizaremos esta teoría siguiendo la propuesta de Bardakci y Crescimanno (Bardakci y Crescimanno, 1989) para tratar campos con topología no trivial. Veremos que en este caso la ecuación (4.5) que da el valor de la carga central, se modifica para depender del valor de la carga topológica. Esta dependencia es similar a la obtenida por Dotsenko y Fateev (ecuación (4.2)) con la carga topológica jugando el rol de la "carga de background". Los resultados originales de este capítulo se encuentran expuestos en detalle en la referencia (Cabra y Moreno, 1989).

Sea entonces el lagrangiano (4.3) donde el grupo constreñido H es $U(1)$. La corriente es:

$$j^\mu = \bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi \tag{4.6}$$

y el lagrangiano se puede entonces escribir:

$$\mathcal{L} = \bar{\Psi}\gamma.(i\partial + A)\Psi \tag{4.7}$$

(los fermiones de Dirac se transforman en la representación fundamental de $U(K)$).

El multiplicador de lagrange A_μ se encuentra en el sector de carga topológica N (el flujo de A_μ está cuantificado en múltiplos enteros de la carga fundamental del vórtice).

$$\frac{1}{4\pi}\int_{S^2} {}^*F d^2x = N \quad N\epsilon Z \tag{4.8}$$

donde S^2 es la esfera bidimensional y ${}^*F$ es el dual del tensor del campo electromagnético $F_{\mu\nu}$.

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \tag{4.9}$$

La funcional generatriz de la teoría tiene la forma:

$$Z_N = \int D\bar{\Psi} D\Psi D A_\mu^N \exp\{-\int \bar{\Psi}\gamma.(i\partial + A^N)\Psi d^2x\} \tag{4.10}$$

donde la integración en el campo A_μ esta restringida al sector de carga topológico N.

La funcional generatriz Z_N tiene una invarianza manifiesta de gauge $U(1)$:

$$\Psi \to e^{i\phi}\Psi, \quad \bar{\Psi} \to \bar{\Psi}e^{-i\phi} \tag{4.11}$$

$$A_\mu \to A_\mu + \partial_\mu \phi \tag{4.12}$$

y con el fin de obtener una teoría bien definida el gauge debe ser fijado. Elegimos la condición de Lorentz:

$$\partial_\mu A_\mu = 0 \tag{4.13}$$

cuyo correspondiente determinante de Fadeev-Popov es:

$$\Delta_{FP} = \det(-\partial_\mu \partial^\mu) = \int D\bar{\eta} D\eta e^{i\int \bar{\eta}\Box\eta d^2x} \tag{4.14}$$

donde hemos usado la representación funcional del determinante por medio de ghosts escalares anticonmutantes (ver ecuación (3.16) del Capítulo III).

La teoría definida por la acción efectiva Z_N podrá bosonizarse realizando un cambio de variables desacoplante (ecuación (3.13) y (3.14) del Capítulo III). Las transformaciones:

$$A_\mu = \varepsilon_{\mu\nu}\partial_\nu \phi \tag{4.15}$$

$$\chi = e^{\gamma 5\phi}\Psi \quad , \quad \bar{\chi} = \bar{\chi}e^{\gamma 5\phi} \tag{4.16}$$

desacoplan totalmente al campo de gauge de los fermiones y el jacobiano que producen es:

$$J = \exp\{-\frac{1}{2\pi}\int \partial_\mu\phi\partial^\mu\phi d^2x\} \tag{4.17}$$

(usamos una regularización invariante de gauge). Es decir la teoría deviene una teoría de fermiones y bosones libres no masivos.

Sin embargo la transformación (4.15) solo es regular si A_μ pertenece al sector de topología nula pues es imposible definir al campo A_μ *de manera global* satisfaciendo la condición de cuantificación del vórtice (ecuación (4.8)) con $N \neq 0$. Existe, no obstante la posibilidad de desacoplar parcialmente al campo A_μ de los fermiones. Para ello escribamos:

$$A_\mu = \tilde{A}^N_\mu + \varepsilon_{\mu\nu}\partial_\nu\phi \tag{4.18}$$

donde $\tilde{A}^N_\mu$ es una configuración fija con carga topológica N y el campo ϕ puede ser definido globalmente ya que su contribución corresponde al sector de topología nula. De esta manera al realizar la transformación (4.18) junto a la transformación fermiónica (4.16) se separan en el lagrangiano los términos fermiónicos de los términos dependientes del campo ϕ.

El jacobiano asociado a esta trasformación involucra al campo $\tilde{A}^N_\mu$ y tiene la forma:

$$J_F = \exp\{-\frac{1}{2\pi}\int\{\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \phi^*\tilde{F}\} \tag{4.19}$$

donde ${}^*\tilde{F} = 2\varepsilon_{\mu\nu}\partial_\mu\tilde{A}^N_\nu$

La funcional generatriz Z_N (ecuación (4.10)) toma entonces la forma:

$$\begin{aligned} Z_N &= \int D\bar{\chi}D\chi D\phi\Delta_{FP}.\exp\{-\int d^2x[\bar{\chi}\gamma.(i\partial+\tilde{A}^N)\chi - \\ &\quad -\frac{1}{2\pi}(\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi\ +\frac{1}{2\pi}\phi^*\tilde{F}]\}. \end{aligned} \tag{4.20}$$

Dedicaremos las siguientes secciones a hallar la carga central de Virasoro de este modelo a partir de la funcional generatriz (4.20).

4.4 Carga Central de Virasoro. Fermiones

Calcularemos en esta sección la contribución a la carga central proveniente de la parte fermiónica de la acción efectiva (4.20). Para este fin debemos estudiar el término no regular en la EPO del tensor de energía impulso con si mismo.

Una propiedad importante de este modelo es que debido a la existencia de una estructura topológica no trivial en el campo $\tilde{A}_\mu^N$, el teorema del índice garantiza que la ecuación de Dirac:

$$\gamma.(i\partial + \tilde{A}^N)\eta = 0 \tag{4.21}$$

posee $K|N|$ soluciones de cuadrado integrable.

Estos modos cero pueden hallarse explicitamente y son de quirialidad derecha para $N > 0$ y de quiralidad izquierda para $N < 0$:

$$\begin{aligned} \eta_i^a &= \begin{bmatrix} \eta_{R_i}^a \\ 0 \end{bmatrix} \quad N > 0 \\ \eta_i^a &= \begin{bmatrix} 0 \\ \eta_{Li}^a \end{bmatrix} \quad N < 0 \end{aligned} \tag{4.22}$$

$a = 1, \cdots, |N|; i = 1, \cdots, K.$

El cálculo del valor de expectación de vacío de una función fermiónica $F[\bar{\chi}, \chi]$ se obtiene, en el marco de la integral funcional, efectuando las correspondientes integrales de Grassmann. Para ello se desarrollan los campos fermiónicos $\bar{\chi}$ y χ en autofunciones del operador de Dirac:

$$\chi = \sum_{a=1}^{|N|} C^a \eta^a + \sum_m C^m \rho^m \tag{4.23}$$

$$\bar{\chi} = \sum_{a=1}^{|N|} \bar{C}^a \bar{\eta}^a + \sum_m \bar{C}^m \bar{\rho}^m$$

donde $(\bar{\eta}^a, \eta^a)$ son los modos cero (ecuación (4.22)), $(\bar{\rho}^m, \rho^m)$ son las demás autofunciones del operador de Dirac y $C, \bar{C}$ son variables de Grassmann:

$$\{C_i, C_j\} = \{\bar{C}_i, C_j\} = \{\bar{C}_i, \bar{C}_j\} = 0 \quad \forall i, j. \tag{4.24}$$

La integración se realiza sobre las variables de Grassmann con las reglas de integración de Berezin:

$$\int dC_i = 0 \ , \ \int dC_i C_j = \delta_{ij}. \tag{4.25}$$

Puede demostrarse que tal valor de expectación es nulo a menos que $F[\bar{\chi}, \chi]$ contenga un término con exactamente $|N|$ factores de la forma $\bar{\chi}_L \beta \chi_R$ si $N > 0$ ó $\bar{\chi}_R \beta \chi_L$ si $N < 0$ (β es un operador arbitrario). En particular cualquier función de correlación de un número arbitrario de operadores $\bar{\chi}_R \beta \chi_R$ es nula. (El mismo resultado se obtiene con operadores de la forma $\bar{\chi}_L \beta \chi_L$).

Concluimos entonces que no hay contribución fermiónica a la carga central total. La parte fermiónica de la funcional generatriz solo aparece como un factor multiplicativo el cual se cancela en el cálculo de valores de expectación de vacío del tensor de energía-impulso (Debe notarse que debido a los modos cero este factor es nulo y debe ser regularizado).

4.5 Carga Central de Virasoro. Bosones

Resuelto el sector fermiónico, nos dedicaremos a resolver la anomalía conforme para el vector bosónico. Debemos entonces evaluar la función de correlación:

$$< T_B(z) T_B(w) > = \frac{1}{Z_B} \int D\phi T_B(z) T_B(w) \bar{e}^{S_R} \tag{4.26}$$

donde Z_B es el factor bosónico de la funcional generatriz total:

$$Z_B = \int D\phi \exp\{-S_B[\phi, \tilde{A}_\mu]\}. \tag{4.27}$$

S_B esta dado por:

$$S_B = \frac{1}{2\pi} \int [\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \phi^* \tilde{F}] d^2x \tag{4.28}$$

y T_B es el tensor de energía-impulso asociado a la acción (4.27).

Es útil para nuestros propósitos, escribir al campo $\tilde{A}_\mu^N$ en la forma:

$$\tilde{A}_\mu^N = N \tilde{A}_\mu^1 \tag{4.29}$$

donde el campo $\tilde{A}^1_\mu$ tiene carga topológica 1. Parametricemos ahora al campo $\tilde{A}^1_\mu$:

$$\tilde{A}^1_\mu = \varepsilon_{\mu\nu}\partial_\nu\eta \tag{4.30}$$

(la definición de η no es global pues depende del sistema de coordenadas definido sobre la esfera). La acción S_B toma entonces la forma:

$$S_B = -\frac{1}{2\pi}\int(\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - 2N\phi\Box\eta)d^2x \tag{4.31}$$

y puede ser escrita como la acción de bosones sin masa interactuando con un campo gravitatorio convenientemente elegido. En efecto, consideremos en S^2 la acción:

$$S = -\frac{1}{2\pi}\int d^2x\sqrt{g}(g^{\alpha\beta}\partial_\alpha\phi\partial_\beta\phi - N\phi R) \tag{4.32}$$

donde R es la curvatura escalar.

Elegimos la métrica conformemente plana:

$$g_{\mu\nu} = e^{4\eta}\delta_{\mu\nu} \tag{4.33}$$

donde el campo η es el mismo que aparece en la (4.30). En esta métrica tenemos:

$$\sqrt{g}R = 2\partial_\mu\partial^\mu\eta \tag{4.34}$$

La elección de la métrica (4.33) para S^2 es consistente pues es compatible con el teorema de Gauss-Bonnet. Este teorema puede pensarse como un vínculo topológico sobre la curvatura de una superficie de determinado género y expresa:

$$\frac{1}{2\pi}\int_\Sigma \sqrt{g}Rd^2x = \chi(\Sigma) \tag{4.35}$$

donde $\chi(\Sigma)$ es la característica de Euler, que para una superficie compacta sin borde tiene la forma:

$$\chi(\Sigma) = 2g_\Sigma - 2 \tag{4.36}$$

donde g_Σ es el género de la superficie Σ. Para la esfera $\sum = S^2$ tenemos $g_{S^2} = 0$ y $\chi(S^2) = -2$.

En términos del campo η, el teorema de Gauss-Bonnet se escribe:

$$\int \partial_\mu \partial^\mu \eta = -2\pi \tag{4.37}$$

que no es más que la condición de cuantificación del vórtice (ecuación (4.8)) para el campo $\tilde{A}^1_\mu$ (ecuación (4.30)).

Luego, eligiendo la métrica conformemente plana (4.33) la acción (4.32) resulta idéntica a la acción (4.31).

La acción (4.32) es invariante bajo transformaciones generales de coordenadas. Elegimos entonces el campo η de manera tal que toda la curvatura esté concentrada en el polo norte, el punto infinito en la esfera de Riemann.

El tensor holomórfico de energía -impulso para esta teoría se calcula variando la acción respecto de la métrica. Evaluando luego en la métrica elegida se obtiene:

$$T(Z) = -\frac{1}{2} : \partial_Z \phi \partial_Z \phi : + \frac{N}{2} \partial_Z^2 \phi \tag{4.38}$$

El 2^{do} término del lado derecho de (4.38) proviene de la interacción de los bosones con la curvatura escalar y tiene la misma forma que la corrección encontrada por Dotsenko y Fateev (ecuación (4.1)). Notar sin embargo que el término adicional en (4.38) es real mientras que el dado es (4.1) es imaginario puro.

La contribución del sector bosónico a la carga central puede ahora evaluarse facilmente a partir de:

$$< T_B(w) T_B(Z) >= \frac{1}{2}(1+3N^2)\frac{1}{(Z-w)^4} \tag{4.39}$$

resultando el valor:

$$c_B = 1 + 3N^2 \tag{4.40}$$

El valor de la carga central total del álgebra de Virasoro se obtiene agregando a (4.40) la contribución proveniente del determinante de Faddeev-Popov (ecuación (4.14)). El valor de esta contribución ya fue mostrado en el Capítulo III:

$$c_{gh} = -2 \tag{4.41}$$

Concluimos que la carga central total en el sector de carga topológica N es:

$$c_T = 3N^2 - 1 \tag{4.42}$$

Es importante notar que este resultado solo es válido para $N \neq 0$. El caso $N = 0$ es especial puesto que la ecuación de Dirac (4.21) no posee soluciones de cuadrado integrable para este valor de N. Por lo tanto los fermiones libres *contribuyen* a la carga central total y tenemos:

$$C_T = K - 1 \quad (N = 0) \tag{4.43}$$

que corresponde a una teoría de fermiones libres con simetría $U(K)$ a la cual se le ha constreñido la corriente abeliana U(1). Este resultado concuerda con el obtenido por la construcción del coset en la ecuación (4.5).

En síntesis considerando una teoría fermiónica constreñido en un sector topológico no trivial obtuvimos una modificación al tensor de energía impulso dependiente de la carga topológica. Esta modificación es similar a la obtenida por Dotsenko y Fateev estudiando una teoría conforme de bosones con condiciones de contorno no triviales. Una diferencia entre el tratamiento de estos autores y el nuestro es que en este la modificación al valor de c surge naturalmente de considerar la contribución de sectores topológicos a la funcional generatriz que define la teoría mientras que en el caso de Dotsenko y Fateev resulta de introducir de manera ad-hoc condiciones de contorno no triviales.