Capítulo 5

Anomalías

5.1 Introducción

Por anomalía entendemos la invalidez de una simetría de la acción clásica debido al proceso de cuantificación. Como consecuencia la corriente asociada a la simetría, cuya conservación clásica está asegurada por el teorema de Noether, deja de ser conservada luego de la cuantificación. Llamamos a esta corriente anómala.

Las anomalías fueron descubiertas por J.Steimberger en el cálculo, en teoría de campos, de las amplitudes de decaimiento del proceso $\pi^o \rightarrow 2\gamma$ basado en loops de fotones virtuales. Esta anomalía axial surge de la consideración del diagrama triangular fermiónico con una corriente axial y dos corrientes vectoriales. Imponiendo conservación de las corrientes vectoriales y simetría de Bose en los canales vectoriales se obtienen identidades de Ward anómalas así como una conservación anómala de la corriente axial: $\partial_\mu j_5^\mu \sim F^*F \neq 0$.

Numerosas anomalías, en muy diversas teorías han aparecido luego del pionero hallazgo de Steimberger; por ejemplo la anomalía de gauge no abeliana originada en una teoría de fermiones quirales acoplados a un campo de gauge no abeliano y la anomalía gravitacional que viola la conservación del tensor de energía impulso son los ejemplos mas conspicuos.

Fue Fujikawa quien hace más de 10 años estudió el origen de las anomalías en el formalismo de la integral funcional (Fujikawa, 1979,1980,1981). Demostró que para todos los casos conocidos, las anomalías son originadas por la existencia de un jacobiano no trivial que surge debido a la no invarianza de la medida de integración frente a las transformaciones de simetría. Evaluando explícitamente este jacobiano, Fujikawa obtuvo los resultados correctos de las divergencias anómalas así como las identidades anómalas de Ward. Existe también una interpretación alternativa para el origen de las anomalías en el formalismo de la integral funcional: la discrepancia entre las ecuaciones clásicas de campos y las ecuaciones cuánticas de campos (Tsutsui, 1989).

El requerimiento de cancelación de anomalías tiene consecuencias importantes. En la teoría electrodébil unificada SU(2) x U(1) , que es potencialmente anómala, impone el balance entre el número de quarks y el número de leptones; en la teoría de supercuerdas fija en 16 el rango del grupo de simetría interna que queda así esencialmente determinado.

Desarrollos recientes permiten estudiar las estructuras globales de las anomalías por medio de poderosas técnicas topológicas: teoremas del índice, flujo espectral, homotopía, cohomología y la estructura compleja de las variedades en 4 y más dimensiones.

Discutiremos brevemente en las secciones siguientes algunas propiedades concernientes a la anomalía axial abeliana y la anomalía de gauge no abeliana como introducción al capítulo siguente en que estudiaremos la cancelación de anomalías en modelos σ no lineales.

5.2 Anomalía Abeliana Axial

Analizaremos en esta sección la anomalía abeliana axial por medio del método de Fujikawa para el tratamiento de las anomalías (Fujikawa, 1979, 1980) y mencionaremos también su relación con el teorema del índice de Atiyah-Singer (Atiyah y Singer, 1968, 1971).

Consideremos una teoría definida sobre la esfera S^{2n} que consta de fermiones de Dirac acoplados a un campo de gauge externo que toma valores en el álgebra del grupo de Lie G. La acción efectiva fermiónica tiene la forma:

$$e^{-W[A]} = \int D\bar{\Psi} D\Psi e^{i\int dx^{2n}\bar{\Psi}\gamma.D\Psi} \tag{5.1}$$

donde $\gamma.D = \gamma^\mu(i\partial_\mu + A_\mu)$ y $A_\mu = A_\mu^a t^a$ (t^a son los generadores hermíticos de G) (No es necesario incluir en la derivada covariante la conexión de spin puesto que la geometría local de S^{2n} no juega ningún rol en este problema).

La acción es invariante frente a las transformación global axial

$$\Psi \longrightarrow e^{i\gamma_5\alpha}\Psi \quad , \quad \bar{\Psi} \longrightarrow \bar{\Psi}e^{i\gamma_5\alpha} \tag{5.2}$$

($\gamma_5 = i^n \Pi_{\mu=1}^{2n}\gamma^\mu$). Consideremos entonces el siguiente cambio de variables local infinitesimal en la acción efectiva (5.1):

$$\Psi = \chi + i\alpha(x)\gamma_5\chi \ ; \ \bar{\Psi} = \bar{\chi} + \bar{\chi}\gamma_5 i\alpha(x) \tag{5.3}$$

La acción fermiónica se transforma:

$$i\int \bar{\Psi}\gamma.D\Psi d^{2n}x = i\int \bar{\chi}\gamma.D\chi d^{2n}x - i\int d^{2n}x(\partial_\mu j_5^\mu)\alpha(x) \tag{5.4}$$

donde $j_5^\mu = \bar{\Psi}\gamma^\mu\gamma^5\Psi$.

Como ya hemos mencionado en capítulos anteriores el cambio quiral (5.3) trae asociado un jacobiano de Fujikawa no trivial $J(\alpha)$. Tenemos entonces:

$$e^{-W[A]} = J[\alpha]\int D\bar{\chi} D\chi e^{i\int d^{2n}x(\bar{\Psi}\gamma.D\Psi - \partial_\mu j^{\mu}{}_5\alpha)} \tag{5.5}$$

Derivando funcionalmente respecto de α en ambos miembros de la ecuación (5.5) obtenemos la ecuación de conservación anómala de la corriente axial:

$$\frac{\delta \ln J[\alpha]}{\delta\alpha(x)}|_{\alpha=0} = i < \partial_\mu j_5^\mu(x) > \tag{5.6}$$

Esta ecuación muestra claramente que el origen de la anomalía es la existencia de un jacobiano de Fujikawa asociado a la transformación (5.2).

Este jacobiano puede calcularse con los métodos de regularización ya mencionados (funcion de Riemann o Heat-kernel) y resulta:

$$\begin{aligned} \ln J[\alpha] &= -2iK \int \varepsilon^{\alpha_1\beta_1\cdots\alpha_n\beta_n} tr(F_{\alpha_1\beta_1}\cdots F_{\alpha_n\beta_n})\alpha(x) d^{2n}x \\ K &= \frac{i^n}{2^{2n}\pi^n n!} \end{aligned} \tag{5.7}$$

Luego la ecuación de divergencia anómala se escribe:

$$< \partial_\mu j_5^\mu >= -2K\varepsilon^{\alpha_1\beta_1\cdots\alpha_n\beta_n} tr(F_{\alpha_1\beta_1}\cdots F_{\alpha_n\beta_n}) \tag{5.8}$$

que generaliza los familiares resultados para d=2 y d=4:

$$d=2 \qquad < \partial_\mu j_5^\mu >= \frac{-i}{2\pi} tr(\varepsilon^{\mu\nu}F_{\mu\nu}) \tag{5.9}$$

$$d=4 \qquad < \partial_\mu j_5^\mu = \frac{1}{16\pi^2}\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} tr(F_{\mu\nu}F_{\alpha\beta}) \tag{5.10}$$

Fujikawa también mostró la relación existente entre el jacobiano (5.7) y el teorema del índice de Atiyah-Singer (Atiyah y Singer, 1968, 1971) que determina la diferencia entre los modos cero de quiralidad derecha e izquierda del operador de Dirac $\gamma.D$ a partir de las clases características de Chern. En particular no es difícil encontrar que el jacobiano de la transformación (5.2) es -2i veces el índice de $\gamma.D$.

$$\int d^{2n}xK\varepsilon^{\alpha_1\beta_1\cdots\alpha_n\beta_n} Tr(F_{\alpha_1\beta_1}\cdots F_{\alpha_n\beta_n}) = ind\gamma.D = n_R - n_L \tag{5.11}$$

donde n_R y n_L son los números de modos cero de quiralidad derecha e izquierda del operador $\gamma.D$.

5.3 Anomalía de Gauge

Consideremos ahora la anomalía en la conservación covariante de la corriente de gauge que aparece en una teoría de fermiones de Weyl acoplados a un campo de gauge. Los fermiones se transforman en cierta representación ρ del grupo de gauge G.

La acción efectiva fermiónica está definida por:

$$e^{-\Gamma[a]} = \int D\bar{\Psi} D\Psi e^{i\int d^{2n}x \bar{\Psi}\gamma.DP_+\Psi} \tag{5.12}$$

donde la integración se realiza sobre fermiones de Dirac. D_μ está definida en la sección anterior y $P_+ = \frac{1+\gamma_5}{2}$.

Las corrientes de gauge son:

$$j^{\mu a} = \bar{\Psi}\gamma^\mu t^a P_+ \Psi \tag{5.13}$$

donde t^a son los generadores del álgebra de G en la representación ρ. Clásicamente esta corriente esta covariantemente conservada, es decir:

$$D_\mu j^\mu = (i\partial_\mu + [A_\mu,])j^\mu = 0 \tag{5.14}$$
$$(j^\mu = j^{\mu a} t^a)$$

Bajo una transformación de gauge los campos se transforman:

$$A_\mu \longrightarrow A_\mu^{g^{-1}} = gA_\mu g^{-1} + ig\partial_\mu g^{-1} \tag{5.15}$$
$$\Psi \longrightarrow g\Psi; \quad \bar{\Psi} \longrightarrow \bar{\Psi} g^{-1}$$

y la acción clásica permanece invariante. Si g es infinitesimal $g \sim 1+iv$ las ecuaciones de transformación (5.15) toman la forma:

$$A_\mu \longrightarrow A_\mu^v = A_\mu - iD_\mu v \tag{5.16}$$
$$\Psi \longrightarrow \Psi + iv\Psi; \quad \bar{\Psi} \longrightarrow \bar{\Psi} - \bar{\Psi} iv$$

Analicemos entonces el comportamiento de la acción efectiva $\Gamma(A)$ cuando efectuamos la transformación (5.16)

$$\begin{aligned} e^{-\Gamma(A-iDv)} &= \int D\bar{\Psi} D\bar{\Psi} \exp[i\int \bar{\Psi}\gamma.D\Psi + i\int (D_\mu j^\mu)^a v^a dx] \\ &\approx e^{-\Gamma(A)}(1 + i\int v^a < (D_\mu j^\mu)^a >) \end{aligned} \tag{5.17}$$

Por otra parte:

$$\bar{\Psi}\gamma.D(A+iDv)\Psi \approx \bar{\Psi}(1+iv)\gamma.D(A)(1-iv)\Psi \tag{5.18}$$

y el cambio en A puede entonces cancelarse realizando el cambio de variables fermiónicas sugerido por la ecuación (5.18). Sin embargo, como veremos más adelante, este cambio de variables involucra un jacobiano de Fujikawa $J(v, A)$. Tenemos entonces:

$$e^{-\Gamma(A-iDv)} = e^{-\Gamma(A)}J(A,v) \tag{5.19}$$

Finalmente derivando funcionalmente respecto de $v^a(x)$ obtenemos la ecuación anómala:

$$\frac{\delta \ln J[A,v]}{\delta v^a(x)}|_{v=0} = i < (D_\mu j^\mu)^a > . \tag{5.20}$$

Es importante señalar que la identificación de la integral funcional (5.12) con un determinante es problemática pues el operador $\gamma.DP_+$ transforma espinores de quiralidad derecha en espinores de quiralidad izquierda y por lo tanto no define una ecuación de autovalores. Este problema se resuelve introduciendo el operador:

$$\hat{D} = i\gamma.\partial + \gamma.AP_+ = \gamma.DP_+ + \gamma.\partial P_- \tag{5.21}$$

que agrega a la integral funcional fermiones libres de la quiralidad opuesta. Definimos en consecuencia:

$$e^{-\Gamma(A)} \equiv \int D\bar{\Psi}D\Psi e^{i\int \bar{\Psi}\hat{D}\Psi dx} = \det \hat{D}. \tag{5.22}$$

que satisface ciertos requerimientos de consistencia necesarios (Alvarez Gaumé y Ginsparg, 1984): El operador $\hat{D}$ actúa sobre funciones de Dirac y define un correcto problema de autovalores. El acoplamiento con el campo de gauge solo involucra a las componentes de quiralidad derecha luego la teoría de gauge definido por $\hat{D}$ es en principio equivalente a la definida por $\gamma.DP_+$ a menos de un factor global constante independiente del campo de gauge. Consecuentemente **det** $\hat{D}$ genera la misma expansión perturbativa que **det** $\gamma.DP_+$ para pequeños valores del campo de gauge. Finalmente puesto que el operador $i\gamma.\partial P_-$ no tiene modos cero no triviales, los modos cero de $\hat{D}$ son todos de quiralidad derecha y coinciden con los de $\gamma.DP_+$ y las reglas de selección de quiralidad en presencia de instantones son los mismos para ambos operadores.

Sin embargo, con esta definición de la acción efectiva $\Gamma(A)$ la acción clásica no es más invariante de gauge. Este es el origen del jacobiano de Fujikawa $J(v,A)$ asociado a la transformación (5.16).

A partir de (5.21) puede entonces calcularse el jacobiano $J(v,A)$ usando alguna regularización adecuada. El resultado para 2 dimensiones es (ver por ejemplo (Moreno, von Reichenbach y Schaposnik, 1989)):

$$\ln J(a,v) = -\frac{\delta^{\mu\nu} - i\varepsilon^{\mu\mu}}{4\pi} \int tr(\partial_\mu A_\nu - \alpha\partial_\nu A_\mu + i[A_\mu, A_\nu])v \qquad (5.23)$$

donde, como en capítulos anteriores, el parámetro α determina distintas prescripciones de regularización.

El jacobiano correspondiente a una transformación de gauge finita puede obtenerse a partir del jacobiano infinitesimal (5.19). En efecto, consideremos la familia de transformaciones de gauge $g_t(x)$ que interpola entre la identidad y cierta transformación $g(x)$ cuando t varía de 0 a 1. Tenemos entonces:

$$\Gamma(A) - \Gamma(A^{g^{-1}}) = -\int_0^1 dt \frac{\partial\Gamma(A^{g_t^{-1}})}{\partial t} \qquad (5.24)$$

Pero puede comprobarse fácilmente que:

$$\frac{\partial\Gamma}{\partial t}(A^{g_t^{-1}}) = \ln J[A^{g_t^{-1}}, v_t] \qquad (5.25)$$

donde el segundo miembro está dado en (5.23) con $v_t = -\partial_t g_t g_t^{-1}$. Un cálculo directo aunque tedioso nos permite obtener de (5.24) y (5.25) para 2 dimensiones:

$$\ln J[A, g^u] = W[g] - \frac{(\delta^{\mu\nu} - i\varepsilon^{\mu\nu})}{4\pi} tr \int d^2x[(A_\mu g\partial_\nu g^{-1} + \alpha(A_\nu A_\mu^g - A_\nu A_\mu)] \quad (5.26)$$

donde $W[g]$ es la acción de Wess-Zumino-Witten definida en el capítulo II (ecuación (2.90)).