Capítulo 6

Modelos σ no lineales acoplados a fermiones de Weyl

6.1 Introducción

Vimos que las teorías cuánticas de campos de fermiones en interacción con campos de gauge no abelianos exhiben en algunos casos una anomalía en la corriente de gauge. Esta anomalía es generalmente una manifestación de una obstrucción global para definir la teoría correctamente. Recientemente se ha observado que ciertos modelos σ no lineales presentan anomalías cuando están acoplados a fermiones de Weyl que no se transforman en una representación libre de anomalías.

Los modelos σ no lineales son teorías campos en los cuales las variables dinámicas (bosónicas) toman valores en una variedad Riemanniana M. Los modelos σ homogéneos son aquellos en los que la variedad M resulta el espacio homogéneo G/H siendo G un grupo de Lie y H el subgrupo de isotropía.

Los modelos σ homogéneos acoplados a fermiones de Weyl son relevantes para la física de partículas en las aproximaciones de bajas energías (Coleman, Wess y Zumino, 1969; Callan, Coleman, Wess y Zumino, 1969). En una aproximación de lagrangiano efectivo se considera una teoría que incorpora un grupo G de simetrías quirales (realizadas linealmente en alguna teoría subyacente) espontaneamente rota a un subgrupo H por debajo de cierta escala energética. Las teorías de bajas energías describen entonces a bosones de Goldstone que toman valores en el espacio coset G/H con G realizado de manera no lineal como grupo de simetría. Los teoremas de bajas energías se deducen de las identidades de Ward manifestando la presencia de la simetría original G en el mundo de las bajas energías. Cuando se acoplan fermiones de Weyl a estos modelos las identidades de Ward devienen anómalas. Estas anomalías deben ser canceladas para asegurar la consistencia de la teoría.

Proponemos en este capítulo un método de cuantificación de los modelos σ inspirados en las ideas de Polyakov (Polyakov 1981), Babelon, Schaposnik y Viallet (Babelon, Schaposnik y Viallet, 1986) y Faddeev- Shatashvili (Faddeev y Shatashvili, 1986) sobre cuantificación en presencia de anomalías que conducen a teorías consistentes.

La idea que subyace tras nuestra propuesta es la siguiente. En el formalismo de la integral funcional la acción efectiva debe considerarse como una integral sobre el total del grupo G aunque clasicamente los grados de libertad definidos sobre H pueden ser trivialmente eliminados. Debido a la presencia de los fermiones de Weyl estos grados de libertad no pueden ser eliminados sin crear términos anómalos. Como consecuencia los campos sobre H reaparecen integrando una acción efectiva no trivial que contiene una acción de Wess-Zumino. Este mismo fenómeno es el que ocurre con la acción de Liouville en la cuantificación de cuerdas y con la acción de Wess-Zumino en la cuantificación de teorías de gauge y gravitacionales acopladas a fermiones de Weyl.

La propuesta aquí descripta se halla expuesta en la referencia (Moreno, von Reichenbach y Schaposnik, 1989).

6.2 El modelo σ no lineal

Consideremos una teoría de N_B campos escalares ϕ_i que toman valores en el espacio coset G/H donde G es un grupo de Lie y H es el subgrupo de isotropía.

($N_B = \dim G - \dim H$). Los campos escalares estan acoplados a fermiones de Weyl transformandose en alguna representación ρ_H del subgrupo H.

Llamaremos $H^a(1 \leq a \leq \dim H)$ a los generadores del álgebra de Lie de H ($\hat{h}$) y $T^i(1 \leq i \leq N_B)$ a los demás generadores de G. Asumiremos también que el álgebra de Lie de G admite una *separación reductiva* es decir que las relaciones de conmutación tienen la forma:

$$[H^a, H^b] = if^{abc}H^c \tag{6.1}$$

$$[H^a, T^i] = if_j^{ai}T^j$$

$$[T^i, T^j] = if_k^{ij}T^k + if_a^{ij}H^a.$$

La primera ecuación (6.1) expresa la condición de subgrupo de H mientras que la segunda es la condición de separación reductiva (que es siempre posible si H es compacto). Usaremos la convención siguente: los índices (a,b,c,....) corren sobre los generadores de H y los índices $(i, j, k \cdots)$ sobre los demás generadores de G . Los generadores de G y H son ortogonales respecto del producto interno invariante G definido por la traza.

Los campos φ_i son coordenadas locales del espacio cociente G/H y siempre pueden ser definidas de manera tal que las isometrías en H dejen el origen invariante (Coleman, Wess y Zumino, 1969). Estas coordenadas estan parametrizadas por los elementos de G:

$$g^*(\varphi) = e^{i\varphi_i T_i} \tag{6.2}$$

El modelo σ acoplado a fermiones de Weyl puede ser formulado a partir del siguiente lagrangiano en el espacio de Minkowski bidimensional (di Vechia, Ferrara y Girardello, 1985):

$$\mathcal{L} = tr(D_\mu g)^\dagger D^\mu g - i\bar{\Psi}\gamma.D\Psi \tag{6.3}$$

donde $g\epsilon$ G y D_μ es la derivada covariante respecto de H:

$$D_\mu g \quad = \quad \partial_\mu g - gA_\mu^a H^a \tag{6.4}$$

$$D_\mu \Psi \;=\; \partial_\mu \Psi - A^a_\mu \rho_H(H^a)\Psi,$$

$\rho_H(H^a)$ es el generador a-ésimo de H en la representación fermiónica ρ_H y A_μ es un campo auxiliar que toma valores en el álgebra de Lie de H. Los fermiones Ψ son de quiralidad derecha, $\Psi = \gamma_5 \Psi$.

Las ecuaciones de movimiento del campo A_μ permiten escribir a este en función de los campos g y Ψ :

$$A_\mu = g^{-1}\partial_\mu g|_H + \frac{1}{2} i j^{\mu a} H^a \tag{6.5}$$

donde

$$j^{\mu a} = \bar{\Psi}\gamma^\mu \rho_H(H^a)\Psi \tag{6.6}$$

en la corriente vectorial fermiónica y hemos indicado con el subíndice $_H$ la proyección sobre la subálgebra H.

Reemplazando este valor de A_μ en el lagrangiano obtenemos:

$$\mathcal{L} = tr(g^{-1}\partial_\mu g|_{G/H} g^{-1}\partial_\mu g|_{G/H}) - i\bar{\Psi}\gamma.D[A_\mu(g)]\Psi \tag{6.7}$$

donde la derivada covariante toma la forma:

$$D_\mu[A] = \partial_\mu - A_\mu(g) \tag{6.8}$$

con $A_\mu(g)$ la conexión canónica (Ginsparg, 1985):

$$A_\mu[g] = \rho_H(g^{-1}\partial_\mu g|_H). \tag{6.9}$$

En virtud de la parametrización (6.2) podemos escribir para los elementos de G:

$$g = g^* h \tag{6.10}$$

con g^* dado por (6.2) y $h \epsilon H$:

$$h = e^{i\eta} \quad \eta \varepsilon \hat{h} \tag{6.11}$$

Mencionaremos ahora 2 importantes propiedades, consecuencia de las relaciones de conmutación (6.1). si $g\epsilon$ G y $h\epsilon$ H valen las siguientes identidades:

$$h^{-1}(g^{-1}dg)h|_H = h^{-1}(g^{-1}dg)|_H h \tag{6.12}$$

$$h^{-1}(g^{-1}dg)h|_{G/H} = h^{-1}(g^{-1}dg)|_{G/H}h \tag{6.13}$$

Utilizando la parametrización (6.10) para los elementos de G y con la ayuda de las identidades (6.12) y (6.13) podemos escribir el lagrangiano (6.7) de la forma:

$$\mathcal{L} = -g_{ij}(\phi)\partial_\mu\phi^i\partial_\mu\phi j - i\bar{\Psi}\gamma.D[A^{\rho(h)}[\phi]]\Psi \tag{6.14}$$

donde $g_{ij}(\phi)$ es la métrica natural invariante G sobre G/H:

$$g_{ij}(\phi) = tr(e^{-i\phi}\frac{\partial e^{i\phi}}{\partial\phi i}e^{-i\phi}\frac{\partial e^{i\phi}}{\partial\phi i}|_{G/H}) \tag{6.15}$$

y la conexión $A_\mu(\phi)$ toma la forma:

$$A_\mu(\phi) = \rho_H(e^{-i\phi}\partial_\mu e^{i\phi}|_H). \tag{6.16}$$

Hemos definido:

$$A_\mu^{\rho(h)} = \rho(h)^{-1}A_\mu\rho(h) + \rho(h)^{-1}\partial_\mu\rho(h). \tag{6.17}$$

Es importante notar que clasicamente el campo h no juega ningún papel en el lagrangiano (6.14) pues puede ser eliminado mediante una transformación de gauge:

$$\Psi \to \rho(h)^{-1}\Psi \ , \ \bar{\Psi} \to \bar{\Psi}\rho(h) \tag{6.18}$$

resultando:

$$\mathcal{L} = -g_{ij}(\phi)\partial_\mu\phi^i\partial^\mu\phi^j - i\bar{\Psi}\gamma.D[A]\Psi \tag{6.19}$$

Sin embargo, como fue discutido en el capítulo anterior, la transformación (6.18) es anómala cuando los fermiones involucrados son de Weyl. Tomaremos entonces al lagrangiano (6.14) (y no al (6.19)) como punto de partida para la cuantificación.

6.3 Simetrías

A nivel clásico el lagrangiano (6.14) es invariante frente al grupo de transformaciones globales G. Estas transformaciones se implementan en las coordenadas ϕ^i

definidas en (6.2) por multiplicaciones a izquierda $g^* \to Kg^*$. El elemento Kg^*, que se encuentra fuera de G/H, se lleva a la forma standart por una multiplicación a derecha de un elemento de H. La transformación combinada mapea elementos G/H en elementos G/H:

$$e^{i\phi} \to e^{i\phi'} = Ke^{i\phi}f^{-1}[\phi, K] \tag{6.20}$$

donde $K\epsilon G$ global y f es el elemento compensador. En los fermiones esta transformación se implementa:

$$\Psi \to \rho(f)\Psi \quad , \quad \bar{\Psi} \to \bar{\Psi}\rho(f)^{-1} \tag{6.21}$$

Analicemos ahora el comportamiento de la métrica $g_{ij}(\phi)$ y de la conexión canónica $A_\mu(\phi)$ bajo la transformación (6.21). De su definición se deduce que la métrica se transforma según:

$$g_{ij}(\phi) \to g'_{ij}(\phi') = tr(e^{-i\phi'}\frac{\partial e^{i\phi'}}{\partial \phi' i}e^{-i\phi'}\frac{\partial e^{i\phi'}}{\partial \phi j}|_{G/H}) \tag{6.22}$$

Utilizando la forma (6.20) para las coordenadas ϕ' y con ayudas de la igualdad (6.12) obtenemos:

$$g'_{ij}(\phi') = g_{k\ell}(\phi)\frac{\partial \phi^k}{\partial \phi'_i}\frac{\partial \phi^\rho}{\partial \phi'_j} \tag{6.23}$$

Es decir: *la métrica en G/H se transforma covariantemente frente a las trasnformaciones G globales* y por la tanto la invarianza del primer término del lagrangiano (6.19) es obvia.

De la misma manera, pero con el auxilio de la igualdad (6.13) pude probarse que la *conexión $A_\mu(\phi)$ se transforma como un campo de gauge*:

$$A_\mu(\phi) \to A'_\mu(\phi') = A_\mu^{\rho(f)^{-1}}(\phi) \tag{6.24}$$

y compensa exactamente la transformación fermiónica (6.21). Verificamos entonces la invarianza del lagrangiano frente a la transformación G en (6.20) y (6.21).

La utilidad de la parametrización standard (6.2) para los elementos G/H queda manifiesta en la forma que adquiere las transformaciónes (6.20) para simetrías en $H(K\epsilon H)$. En este caso el campo compensador f es global y se reduce a K:

$$e^{i\phi} \rightarrow e^{i\phi'} = Ke^{i\phi}K^{-1} \quad K\epsilon H \tag{6.25}$$

Infinitesimalmente estas trasformaciones se pueden escribir de la siguiente manera:

A Si $K\epsilon H$

$$\begin{aligned} K &\simeq 1 + \varepsilon^a H^a \\ \delta\phi^i &\simeq \varepsilon^a f_j^{ai} \phi^j \\ \delta\Psi &\simeq i\varepsilon^a \rho(H^a)\Psi \end{aligned} \tag{6.26}$$

Es decir que las transformaciones en H están representadas linealmente en los campos y no cambian el origen de G/H.

B Si K está generado por los T_i

$$\begin{aligned} K &\simeq 1 + \varepsilon^i T^i \\ \delta\phi^i &\simeq \varepsilon^i - \tfrac{1}{2}\varepsilon^i f_k^{ji}\phi^k + \tfrac{1}{4}\varepsilon^j \phi^k \phi^\ell f_k^{ja} f_\ell^{ia} \\ \delta\Psi &\simeq -\tfrac{1}{2} i\varepsilon^i \phi^j f_j^{ia} \rho(H^a)\Psi \end{aligned} \tag{6.27}$$

que generan una transformación no lineal sobre los campos.

Las corrientes de Noether asociadas a estas invarianzas son:

para el caso A:

$$iJ_\mu^a = 2g_{ik}(\phi)\partial_\mu \phi^i \phi^j f_j^{ak} + \bar{\Psi}\gamma_\mu \rho(e^{-i\phi}\partial_k e^{i\phi})\Psi \phi^j f_j^{ak} + j_\mu^a \tag{6.28}$$

y para el caso B:

$$\begin{aligned} iJ_\mu^m &= 2g_{im}(\phi)\partial_\mu \phi^i - g_{ik}(\phi)\partial_\mu \phi^i \phi^\ell f_\ell^{mk} + \\ &+ \frac{1}{2} g_{ik}(\phi)\partial_\mu \phi^i \phi^p \phi^\ell f_p^{ma} f_\ell^{ka} + \bar{\Psi}\gamma_\mu \rho(e^{-i\phi}\partial_m e^{i\phi}|_H)\Psi - \end{aligned}$$

$$-\frac{1}{2}\bar{\Psi}\gamma_\mu\rho(e^{-i\phi}\partial_k e^{i\phi}|_H)\Psi\phi^\ell f_\ell^{mk} + \frac{1}{4}\bar{\Psi}\gamma_\mu\rho(e^{-i\phi}\partial_k e^{i\phi}|_H)\Psi\phi^p\phi^\ell f_p^{ma} f_\ell^{ka} -$$
$$-\frac{i}{2} j_\mu^a f_j^{am}\phi^j. \tag{6.29}$$

Finalmente notemos que si mantenemos al campo h en el langrangiano (como en la ecuación (6.14)), las rotaciones globales G pueden ser vistas como transformaciones de los campos bosónicos ϕ acompañadas de rotaciones fermiónicas:

$$e^{i\phi} \rightarrow K e^{i\phi} f^{-1}[\phi, H] \tag{6.30}$$

$$\Psi \rightarrow \rho(h^{-1} f h)\Psi \tag{6.31}$$

o como transformaciones de los campos ϕ y h sin afectar a los fermiones:

$$e^{i\phi} \rightarrow K e^{i\phi} f^{-1} \tag{6.32}$$

$$h \rightarrow f^{-1} h. \tag{6.33}$$

6.4 Anomalías

Hemos visto que el grupo de isometrías G actúa sobre el modelo σ como una transformación de gauge en el subgrupo H (ver ecuaciones (6.21) y (6.24)). Luego, como ya mencionamos, el modelo puede presentar anomalías si los fermiones no se encuentran en una representación libre de anomalías.

Las anomalías surgen en este modelo a dos niveles. Primero, partiendo del lagrangiano (6.14), la eliminación del grado de libertad de gauge h no es posible. Aunque la transformación fermiónica (6.18) lo elimina del lagrangiano, aparece a través de un jacobiano de Fujikawa debido a la no invarianza de gauge de la medida de integración. Esto es análogo a lo que ocurre en teorías de cuerdas para $d \neq 26$ debido a la anomalía conforme. El grado de libertad de dilatación de la métrica bidimensional, que clasicamente desaparece de la acción, reaparece como un grado de libertad física en la acción de Liouville luego de la cuantificación (Polyakov, 1981).

Existe un segundo lugar donde las anomalías pueden afectar la cuantificación aún si se parte del lagrangiano (6.19) (es decir, se fija el gauge clasicamente y luego se cuantifica). En efecto, puesto que las anomalías surgen debido a la imposibilidad de regularizar las divergencias ultravioletas de manera tal que la simetría sea respetada, el teorema de Noether cuántico presentará un término anómalo, indicador de la rotura de la simetría G. Con el objeto de analizar esta situación consideremos la acción efectiva del campo ϕ.

$$e^{i\Gamma[\phi]} = \int D\bar{\Psi} D\Psi e^{i\int \bar{\Psi}\gamma.D[A(\phi)]\Psi d^2x} = \det \gamma.D[A(\phi)] \tag{6.34}$$

Hagamos ahora una transformación infinitesimal de la conexión A_μ (ecuación (6.24)):

$$\rho(f) \simeq 1 + iv \tag{6.35}$$

$$A_\mu(\phi) \rightarrow A_\mu(\phi) - iD_\mu v \tag{6.36}$$

La acción efectiva $\Gamma(\phi)$ cambiará entonces (ecuación (5.17) del capítulo V):

$$e^{i(\Gamma(\phi') - \Gamma(\phi))} = 1 + i < \int d^2x (D_\mu j^\mu)^a v^a > \tag{6.37}$$

Por otra parte la transformación (6.36) puede cancelarse mediante una rotación fermiónica adecuada (ecuación (6.21)). Sin embargo debemos tener en cuenta, como lo expusimos en el capítulo anterior, que la integral funcional (6.34) está mal definida debido a la presencia de los fermiones de Weyl. Este problema se corrige introduciendo fermiones libres de la quiralidad opuesta que modifican el operador de Dirac. El operador modificado no es más covariante de gauge y su determinante no es invariante. Obtenemos entonces (ecuación (5.19) del Capítulo V):

$$e^{i(\Gamma(\phi^1) - \Gamma(\phi))} = J[A, v] \tag{6.38}$$

donde $J[A, v]$ es el jacobiano de Fujikawa asociado a la transformación (6.21). La ecuación de anomalía toma entonces la forma (ecuación (5.20) del Capítulo V):

$$\frac{\delta J[A, v]}{\delta v^a(x)} = i < (D_\mu j^\mu)^a > \tag{6.39}$$

Es decir la conservación covariante está subordinada a la eliminación del jacobiano de Fujikawa.

El valor del jacobiano $J[A, v]$ fue calculado en el capítulo anterior (ecuación (6.30)):

$$\ln J[A, v] = -\frac{i}{4\pi} \int d^2x tr\{(\partial_- A_+ - a\partial_+ A_- + a[A_+, A_-])v(x)\}. \tag{6.40}$$

Su valor para una transformación finita (6.24):

$$A_\mu(\phi) \to A_\mu(\phi)^{\rho(f)^{-1}} \tag{6.41}$$

es de la forma (ecuación (5.26) Capítulo V):

$$\begin{aligned} \ln J[A, \rho(f)] &= W[\rho(f)] + \frac{1}{4\pi} tr \int d^2x [A_+ \rho(f) \partial_- \rho(f)^{-1} + \\ &\quad + a(A_- A_+^{\rho(f)} - A_- A_+)] \end{aligned} \tag{6.42}$$

donde $W[g]$ es la acción de Wess-Zumino-Witten (Capítulo II). (El cálculo del jacobiano en sus 2 versiones (6.40) y (6.42) puede hallarse en (Moreno, von Reichenbach y Schaposnik, 1989).

La ecuación (6.37) para las transformaciones globales generados por los elementos T^i (ecuación (6.27)) se escribe:

$$e^{i\delta\Gamma(\phi)} = 1 - \frac{i}{2} \int d^2x \varepsilon^i \phi^j f_j^{ia} < (D_\mu j^\mu)^a > . \tag{6.43}$$

y en virtud de (6.38) y (6.40) la simetría es anómala para cualquier valor del parámetro a.

Sin embargo para las rotaciones en H (ecuación (6.26)) tenemos

$$e^{i\delta\Gamma(\phi)} = 1 + i\varepsilon^a \int d^2x < D_\mu j^\mu)^a > \tag{6.44}$$

y si $a = 0$ (anomalía consistente) vemos de (6.40):

$$\delta\Gamma[\phi] = 0. \tag{6.45}$$

Si $a \neq 0$ podemos, no obstante, agregar contratérminos adecuados al lagrangiano original (de la forma $A_\mu A^\mu$) de manera de obtenerse nuevamente el resultado (6.45).

Concluímos entonces esta sección afirmando que: *solo las rotaciones que no estan en H son anómalas. Las rotaciones en H son no-anómalas.*

6.5 Cuantificación Consistente

Hemos visto que si los fermiones se transforman en una representación anómala de H, la acción efectiva (6.34) no es invariante frente al grupo de isometrías en G. Por lo tanto, la teoría cuántica definida por esta acción efectiva no es consistente.

Sin embargo, como ya lo anunciamos, un tratamiento cuidadoso de los grados de libertad en H permite obtener una acción efectiva alternativa no anómala. Implementaremos este tratamiento, que ha permitido definir de manera consistente a teorías de gauge y gravitacionales acoplados a fermiones de Weyl (Babelón, Schaposnik y Viallet, 1986; Harada y Tsutsui, 1987; Schaposnik y Vucetich, 1987) en el modelo σ no lineal.

Considermos la integral funcional completa que describe al modelo dado en la ecuación (6.14):

$$Z = \int D\phi Dh D\bar{\Psi} D\Psi e^{i\int d^2x(-g_{ij}\partial_\mu\phi^i\partial^\mu\phi^j - i\bar{\Psi}\gamma.D[A^{\rho(h)}]\Psi)} \tag{6.46}$$

Intentemos eliminar al campo h fijando el gauge $h = 1$ mediante el procedimiento de Faddeev-Popov. Consideremos entonces la resolución de la identidad de Faddeev-Popov:

$$1 = \int \delta(h\ell - 1) D\ell \tag{6.47}$$

Insertado (6.47) en (6.46) y haciendo el siguiente cambio de variable:

$$h \to h\ell$$
$$\Psi \to \rho^{-1}(\ell)\Psi, \bar{\Psi} \to \bar{\Psi}\rho(\ell) \tag{6.48}$$

obtenemos:

$$Z = \int D\phi D\bar{\Psi} D\Psi D\ell J[\ell^{-1}, A(\phi)] e^{i\int[\mathcal{L}(\phi)+i\bar{\Psi}\gamma.D(A)\Psi]d^2x} \tag{6.49}$$

donde $J[\ell^{-1}, A]$ es el jacobiano de Fujikawa asociado a la transformación fermiónica y está dado en la ecuación (6.42).

Vemos entonces que la acción efectiva natural para los campos ϕ es:

$$e^{i\tilde{\Gamma}(\phi)} = \int D\bar{\Psi} D\Psi D\ell J[\ell^{-1}, A(\phi)] e^{i\int \bar{\Psi}\gamma.D[A]\Psi d^2x} \tag{6.50}$$

y solo en el caso no anómalo (J=1) coincide con $\Gamma(\phi)$ (ecuación (6.34)).

El campo ℓ valuado en H se presenta como físico en el mismo pie de igualdad que los fermiones y los bosones con una acción de Wess-Zumino-Witten.

Este punto de vista sobre cuantificación de modelos anómalos está inspirado en los trabajos de Polyakov sobre cuantificación de teorías de cuerdas (Polyakov, 1981) y fue sugerido para teorías de gauge por Faddeev y Shatashvili (Faddeev y Shatashvili, 1986).

Verifiquemos ahora que la acción $\tilde{\Gamma}(\phi)$ es invariante frente a las isometrías en G. Hagamos para ello la transformación (6.20):

$$e^{i\tilde{\Gamma}(\phi')} = \int D\bar{\Psi} D\Psi D\ell J[\ell^{-1}, A(\phi)^{\rho^{-1}(f)}] e^{i\int \bar{\Psi}\gamma.D[A^{\rho^{-1}}]\Psi d^2x} \tag{6.51}$$

Haciendo el cambio de variables fermiónica:

$$\Psi \to \rho^{-1}(f)\Psi, \; \bar{\Psi} \to \bar{\Psi}\rho(f) \tag{6.52}$$

obtenemos:

$$e^{i\tilde{\Gamma}(\phi')} = \int D\bar{\Psi} D\Psi D\ell J[f^{-1}, A] J[\ell^{-1}, A^{\rho^{-1}(f)}] e^{i\int \bar{\Psi}\gamma.D(A)\Psi d^2x} \tag{6.53}$$

donde $J[f^{-1}, A]$ es el jacobiano asociado a la transformación (6.52). Finalmente haciendo uso de la propiedad de *1-cociclo* que satisface en J:

$$\ln J[h, A] + \ln J[f, A^{\rho(h)}] = \ln J[hf, A] \tag{6.54}$$

(puede verificarse explicitamente de (6.42)), obtenemos, el resultado deseado:

$$e^{i\tilde{\Gamma}[\phi']} = \int D\bar{\Psi} D\Psi D\ell J[\ell^{-1}, A] e^{i\int \bar{\Psi}\gamma . D[A]\Psi d^2x} = e^{i\tilde{\Gamma}(\phi)} \tag{6.55}$$

(Hemos usado que $D\ell f = D\ell$).

Esta invarianza resulta aún mas explícita si se integran los fermiones antes de desacoplar el campo ℓ:

$$e^{i\tilde{\Gamma}(\phi)} = \int D\ell \det \gamma . D(A^{\rho(\ell)}) \tag{6.56}$$

Es entonces ovbio que $\tilde{\Gamma}[A(\phi)] = \tilde{\Gamma}[A(\phi)^{\rho(f)}]$. Como mencionamos en el capítulo anterior, debido a las ambigüedades de regularización, el jacobiano (6.42) depende de un parámetro arbitrario a. La importancia de este parámetro fue puesta de manifiesto por Jackiw y Rajaraman (Jackiw y Rajaraman, 1985) en su solución del modelo de Schwinger quiral. Estos autores mostraron que si $a > 1$ el modelo resulta unitario, invariante Lorentz y consistente.

Numerosos autores (Manohar, Moore y Nelson, 1985; Alvarez Gaumé y Ginsparg 1985) observaron que las anomalías de los modelos σ no lineales pueden cancelarse en ciertos casos por medio de adecuados contratérminos agregados al lagrangiano de tal manera que la variación de la teoría efectiva resultante es cero. En efecto, consideremos los generadores de G en alguna representación $\bar{\rho}_G$. Sea entonces

$$\bar{g}^*(\phi) = \bar{\rho}(g^*(\phi)) = e^{i\phi_i \bar{T}^i} \tag{6.57}$$

el representante de G/H (6.2) en la nueva representación, y escribamos:

$$\bar{A}_\mu(\phi) = \bar{g}^{*-1} \partial_\mu \bar{g}^* |_H = \bar{\rho}(A_\mu(\phi)) \tag{6.58}$$

Si $\bar{g}_t^*$ es una interpolación entre $\bar{g}_0^* = 1$ y $\bar{g}_1^* = \bar{g}^*$, construimos la cantidad:

$$\int_0^1 \det \frac{\partial}{\partial t} \Gamma[\bar{A}(\phi)^{\bar{g}_t^{*-1}}] = \Gamma[\bar{A}(\phi)^{\bar{g}_t^{*-1}}] - \Gamma[\bar{A}(\phi)] \tag{6.59}$$

que es esencialmente una acción de Wess-Zumino-Witten para los bosones ϕ. (Esta definición es independiente de la función interpolante).

Bajo una transfornación global G (ecuación (6.20)) tenemos

$$\bar{A}^{g_{\bar{x}}^{-1}} \to (\bar{A}^{\bar{f}^{-1}})^{\bar{f}\bar{g}_{*}^{-1}k^{-1}} = (A^{\bar{g}_{*}^{-1}})^{K^{-1}} \tag{6.60}$$

Pero $\Gamma(\bar{A})$ es *insensible a cambios globales*, por lo tanto el primer término del lado derecho (6.59) es invariante. El segundo término tendrá una variación dada por (6.40) en la representación $\bar{\rho}_H$. Luego esta variación cancelará la variación de $\Gamma(\phi)$ si se satisface la siguiente relación entre las trazas de los generadores de H en la representación fermiónica y la nueva representación $\bar{\rho}$:

$$tr(\rho(H^a)\rho(H^b)) = tr(\bar{\rho}(H^a)\bar{\rho}(H^b)) \tag{6.61}$$

Podemos relacionar esta propuesta de cancelación de anomalías con la nuestra de la manera siguiente. Consideremos en (6.50) la integración sobre f:

$$\int DfJ[f^{-1}, A(\phi)] = e^{i(\tilde{\Gamma}[\phi]-\Gamma(\phi))} = e^{i\Delta(\phi)} \tag{6.62}$$

Luego $\Delta(\phi)$ juega en nuestro caso el mismo rol que el contratérmino (6.59). Notemos sin embargo que en nuestro caso $\Delta(\phi)$ aparece naturalmente en la representación fermiónica.

Hemos presentado en este capítulo una propuesta de cuantificación del modelo σ no lineal definido en un espacio homogéneo G/H de manera que la teoría cuántica resultante sea consistente aún cuando las anomalías internas estan presentes. Mostramos que un tratamiento cuidadoso de los grados de libertad del subgrupo de isotropía H nos conduce a un modelo con invarianza global G en el que los campos en H juegan un rol dinámico. Este es el principal resultado y esta resumido en la ecuación (6.50) donde se expone explicitamente la acción efectiva $\tilde{\Gamma}[\phi]$ invariante frente a las isometrías de G. La presencia del jacobiano de Fujikawa asegura la cancelación de la variación anómala de la medida de integración fermiónica. Este punto de vista de cuantificación esta inspirado en el tratamiento de Polyakow de la teoría de cuerdas: grados de libertad que clasicamente se desacoplan, reaparecen a nivel cuántico con una acción no trivial (la acción de Liouville en el caso de las cuerdas y la acción de Wess-Zumino-Witten dada en $J[A, f]$ en el caso de los modelos sigma).

Nuestra propuesta puede ser comparada con la desarrollada por Manohar, Moore y Nelson; Alvarez Gaumé y Ginsparg y Bagger, Nemeschansky y Yankielowickz donde la cancelación de nomalías se produce por medio de contratérminos agregados a la acción. La diferencia básica con nuestro formalismo es que en este la acción de Wess-Zumino-Witten surge naturalmente del proceso de cuantificación y no es agregado ad-hoc. Sin embargo ambas propuestas estan relacionadas como se ve de las ecuaciones (6.59) y (6.62).