DUPLICADO

T. 25

Invarianzas en Modelos Fermiónicos en el Formalismo de la Integral Funcional

Tesis Doctoral: Enrique Francisco Moreno

Director: Fidel Schaposnik

Universidad Nacional de La Plata

– 1990 –

Indice

Invarianza en Modelos Fermiónicos en el Formalismo de la Integral Funcional

Capítulo 1

Introducción

La importancia de las simetrías en la construcción de modelos de interés en la Física de Partículas y Campos así como en la de la Materia Condensada ha ido en contínuo crecimiento en esta segunda mitad del siglo.

Evidentemente la simetría de gauge, en la base de la descripción de los fenómenos electrodébiles y también de las interacciones fuertes, ocupa un lugar central entre las simetrías que se utilizan como "herramienta" para la construcción de Lagrangianos o Hamiltonianos que describen la dinámica de sistemas físicos.

En los últimos 20 años y en contextos diferentes, otra simetría local ha venido a ocupar un papel tambien central en la física teórica: **la simetría conforme en espacios bidimensionales.** Fue Polyakov (Polyakov, 1970) a principios de los años 70 quien conjeturó que los sistemas estadísticos devienen invariantes conformes cerca del punto crítico. Esto implica, en dos dimensiones donde el grupo conforme es infinito dimensional, un tal número de restricciones que los modelos resultan completamente resolubles. Es de notar que la invarianza conforme aparece naturalmente en la Mecánica Estadística bidimensional puesto que las fluctuaciones de las variables dinámicas devienen invariantes conforme en las transiciones de fase de 2^{do} orden. Luego, la interacción de las variables dinámicas está descripta por una teoría conforme bidimensional. Como gran número de sistemas de interés en la Materia Condensada pueden ser descriptos por modelos bidimensionales la observación de

Polyakov reviste gran interés y fue inmediatamente aplicada al análisis de diferentes problemas. El aporte de Belavin, Polyakov y Zomolodchikov en el año 1984, fue el siguiente paso decisivo en la fundación de un dominio que hoy se conoce como el de la Teoría Cuántica de Campos Conforme. En efecto, en ese trabajo, Belavin, Polyakov y Zamolodchikov lograron transformar la conjetura de Polyakov en una poderosa herramienta de cálculo aplicable a la clasificación y estudio de sistemas críticos.

También en el dominio de las interacciones fundamentales la invarianza conforme, cuyo papel central había sido señalado por Virasoro en la década del 70, es básica para la construcción de modelos de cuerdas y supercuerdas, candidatos a una teoría unificada de todas las interacciones (incluída la gravitación). En este caso, la invarianza conforme está asociado al espacio bidimensional sustendido por la hoja de universo de la cuerda.

Así, en las teorías de cuerdas, la teoría conforme constituyen uno de los pilares de las compactificaciones clásicas. Describe tambien las variables dinámicas de los modelos de cuerdas e impone fuertes restricciones sobre la dimensión crítica del espacio tiempo así como sobre los grados de libertad internos.

El generador local de las transformaciones conformes bidimensionales en el tensor de energía impulso y sus modos de Fourier satisfacen un álgebra de Lie infinita dimensional conocida como *álgebra de Virasoro.* Esta álgebra es una extensión central del álgebra clásica de operadores conformes.

En virtud de la simetría conforme, las funciones de correlación de una teoría de campos conforme se ven obligadas a satisfacer un número ilimitado de igualdades (identidades de Ward conformes). Para valores determinados de la carga central de Virasoro, estas identidades determinan completamente *todas las funciones de correlación* y la teoría es totalmente resoluble.

Las teorías que poseen, sumado a la invarianza frente a transformaciones conformes, una invarianza frente a un álgebra quiral se denominan **teorías racionales**.

Ejemplos de teorías racionales son las teorías de fermiones libres sin masa y los modelos σ no lineales con un término de Wess-Zumino-Witten. La simetría adicional está generada por las corrientes quirales que satisfacen un álgebra de Kac-Moody con una carga central llamada nivel de Kac-Moody.

El propósito de esta tesis es estudiar dos aspectos centrales ligados a la realización de simetrías a nivel cuantico así como a su eventual violación. Para ello, utilizando el marco de la integran funcional, analizaremos varios modelos bidimensionales que son de interés en la Teoría Cuántica de Campos, en la Teoría de Cuerdas y en la Mecánica Estadística.

Comenzaremos por el análisis del llamado modelo de Gross-Neveu (Gross-Neveu, 1974) introducido originalmente para describir la ruptura dinámica de simetría en una teoría que goza de libertad asintótica. Ya en 1975 Dashen y Frishman habían revelado que para ciertos valores de la constante de acoplamiento el modelo deviene invariante conforme lo cual pareciera estar en contradicción con la generación dinámica de masa.

Uno de los aportes originales de esta tesis es el de dar un tratamiento cuidadoso de las propiedades conformes del modelo, mostrando en particular bajo que condiciones deviene invariante conforme. Este estudio se basa en la técnica de bosonización no abeliana que ha permitido, tanto en su formulación operacional (Witten, 1984) como vía la integración funcional, la resolución de un gran número de modelos bidimensionales.

También los modelos fermiónicos constreñidos se han revelado de gran interés en el estudio de propiedades conformes. Son modelos fermiónicos libres a los que se les impone como vínculo la anulación de ciertas corrientes asociadas a un subgrupo H de la simetría original G. Resultan corresponder a teorías racionales conformes que dan realizaciones explícitas de la llamada construcción del coset (ver Cabra, Moreno y von Reichenbach, 1990). El interés de estos modelos abarca la compactificación del espacio-tiempo en Teorías de Cuerdas así como la realización en Teorías de Campos de modelos estadísticos bidimendionales (Modelos de Ising, de Potts, etc.).

En particular, es importante estudiar como se modifican las propiedades conformes cuando se tiene en cuenta sectores topológicos no triviales al implementar los vínculos en modelos constreñidos. Este problema está estrechamente ligado a la propuesta de Dotsenko y Fateev (Dotsenko y Fateev, 1984) para calcular funciones de correlación de una teoría conforme general, relacionada con la imposición de condiciones de contorno no triviales a un sistema de bosones libres, lo que resulta en la aparición de un término adicional en el tensor de energía-impulso $T_{\mu\nu}$.

Nuestro estudio de modelos constreñidos con topología no trivial (Cabra, Moreno, 1989) confirmó la analogía sugerida. En efecto, pudo obtenerse un término adicional en $T_{\mu\nu}$ similar al de Dotsenko y Fateev con la carga topológica jugando el papel de la carga de background utilizada por estos autores. Estos resultados constituyen otra de las contribuciones originales de esta tesis.

Un aspecto central relacionado con las simetrías de un modelo físico es su eventual violación a nivel cuántico con la consiguiente aparición de "anomalías" en las leyes de conservación asociadas. En efecto, es bien sabido que el proceso de cuantificación de una teoría puede, eventualmente, no respetar una simetría de la acción clásica. Se obtiene entonces una teoría cuántica inconsistente. Numerosos ejemplos de este fenómeno han surgido luego del descubrimiento debido a J. Steinberger (Steinberger, 1949) de la anomalía axial en el proceso de decaimiento $\pi^o \to 2\gamma$. Mencionemos por ejemplo la anomalía de gauge no abeliana que surge en una teoría de fermiones quirales en presencia de un campo de gauge no abeliano y la anomalía gravitacional que viola la conservación del tensor de energía impulso. El primer caso es de interés en la construcción de modelos consistentes para describir interacciones electrodébiles y fuertes. El segundo es fundamental para las teorías de cuerdas.

En el marco de la integral funcional las anomalías surgen debido a la imposibilidad de definir la medida de integración de manera invariante. Este hecho fue descubierto por Fujikawa (Fujikawa 1979, 1980, 1981) quien pudo calcular de manera simple las anomalías quirales, conformes y gravitatorias así como las identidades de Ward anómalas que afectan a diversas teorías.

La búsqueda de un mecanismo de cancelación de anomalías es un tema central en la física de partículas. En la teoría de supercuerdas una elección cuidadosa del grupo de simetría permite la cancelación de las anomalías gravitacionales y las de gauge y en la teoría de Weinberg-Salam la cancelación está asegurada por el exacto balance entre el contenido de quarks y leptones.

Entre las diversas teorías anómalas una clase especial es la integrada por ciertos modelos σ no lineales acoplados a fermiones de Weyl. En particular son relevantes los modelos σ no lineales homogéneos en los que las variables dinámicas toman valores en el espacio homogéneo G/H donde G es un grupo de Lie y H un subgrupo. Estos modelos describen una teoría efectiva a bajas energías proveniente de una teoría original con simetría quiral G que por rotura espontánea de simetría por debajo de cierta escala energética deviene a una teoría con simetría H. De esta manera la teoria efectiva describe entonces a los bosones de Goldstone que toman valores en G/H. Una característica importante de esta teoría es que las anomalías pueden cancelarse agregando contratérminos adecuados (Manohar, Moore y Nelson, 1985; Alvarez Gaumé y Ginsparg, 1985; Bagger, Nemeschansky y Yankielowicz, 1985). Sin embargo una propuesta alternativa es presentada en esta tesis de manera de obtener una teoría consistente. Esta propuesta, basada en un tratamiento cuidadoso de los grados de libertad en H, esta inspirada en las ideas de Polyakov (Polyakov, 1981), Babelon, Schaposnik y Viallet (Babelon, Schaposnik y Viallet, 1986) y Faddeev y Shatashvili (Faddeev y Shatashvili, 1986) sobre cuantificación de teorías en presencia de anomalías que conducen a teorías consistentes.

Esta tesis está organizada en 7 capítulos.

En el capítulo II se da una breve introducción a la teoría de campos conforme y las teorías racionales. En el capítulo III se analiza el modelo de Gross-Neveu desde el punto de vista de sus simetrías usando técnicas de bosonización en el formalismo de la integral funcional. En el capítulo IV se estudia el álgebra de Virasoro de un modelo fermiónico constreñido en presencia de un campo con estructura topológica no trivial. En el capítulo V se presenta una breve introducción a las anomalías, en particular las anomalías axial abeliana y de gauge no abeliana. En el capítulo VI se discute el modelo σ no lineal acoplado a fermiones de Weyl. En particular se propone el método de cuantificación consistente antes mencionado. Finalmente las conclusiones se presentan en el capítulo VII.

Capítulo 2

Teoría de Campos Conforme

2.1 Introducción

La invarianza de una teoría de campos frente a transformaciones conformes tiene una larga historia en física de altas energías, relatividad y otras importantes ramas de la física. Pero es debido a su aplicación a la mecánica estadística y a la teoría de cuerdas que la teoría de campos conforme (especificamente la teoría bidimensional de campos conforme) ha tenido en los últimos años un desarrollo formidable. En efecto, las teorías cuánticas de campos con invarianza conforme describen la evolución de sistemas estadísticos bidimensionales en transiciones de fase de 2^{do} orden. Esto se debe a que durante estas transiciones las variables dinámicas devienen invariantes de escala y en 2 dimensiones la invarianza de escala implica la invarianza conforme. De esta manera todas las funciones de correlación son invariantes conforme.

Las teorías cuánticas de campos conformes también proveen las variables dinámicas de la teoría de cuerdas. En este contexto la simetría conforme impone vínculos sobre la dimensión crítica del espacio tiempo así como sobre los posibles grados de libertad internos de la teoría.

Una de las características más importantes de las teorías de campos invariantes frente a transformaciones conformes es que esta simetría impone fuertes restricciones sobre las funciones de correlación que se utilizan para calcular cantidades físicas.

Estas deben satisfacer un conjunto infinito de ecuaciones llamadas *identidades de Ward conformes* que permiten calcular exactamente algunas de ellas. En particular cuando la carga central del álgebra de Virasoro, principal parámetro de una teoría conforme, toma determinados valores, todas las funciones de correlación de la teoría pueden ser calculadas exactamente como soluciones de sistemas especiales de ecuaciones lineales en derivadas parciales.

Existen teorías llamadas racionales que además de ser invariantes conforme son invariantes frente a un álgebra quiral. Esta nueva simetría genera otro conjunto de identidades de Ward que determinan aún más a las funciones de correlación. Un ejemplo de teoría racional es la teoría de ferminones libres sin masa con una simetría global respecto a transformaciones de un grupo de Lie G.

Es el propósito de este capítulo el describir algunos de las propiedades generales de las teorías cuánticas de campos invariantes frente al grupo conforme así como de las teorías racionales.

2.2 El Grupo Conforme

Para introducirnos en el grupo conforme en d dimensiones consideremos el espacio R^d con la métrica plana $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ de signatura (p, q) y el elemento diferencial de arco

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dX^\mu \otimes dX^\nu \tag{2.1}$$

Sea $X'^\mu : R^d \rightarrow R^d$ una aplicación diferenciable y con inversa diferenciable (difeomorfismo). Bajo esta trasformación el elemento de arco cambia.

$$ds^2 \rightarrow ds'^2 = g_{\mu\nu}(X'(X)) \frac{\partial X'^\mu}{\partial X^\alpha} \frac{\partial X'^\nu}{\partial X^\beta} dX^\alpha \otimes dX^\beta. \tag{2.2}$$

Por definición el grupo conforme es el subgrupo de los difeormorfismos que deja al elemento de arco invariante a menos de un factor de escala:

$$ds^2 \rightarrow ds'^2 = \Omega(X) ds^2. \tag{2.3}$$

Consecuentemente las transformaciones conformes preservan el ángulo entre vectores.

En este punto es conveniente notar que *una transformación conforme no es una transformación general de coordenadas.* En efecto, una transformación de coordenadas describe la misma geometría desde un sistema de coordenadas diferente (en particular el elemento de arco ds^2 se mantiene invariante) en cambio una transformación conforme relaciona distintas geometrías desde el mismo sistema de coordenadas.

Para determinar los generadores infinitesimales del grupo conforme consideramos un difeomorfismo infinitesimal:

$$X^\mu \rightarrow X'^\mu = X^\mu + \varepsilon^\mu(X) \tag{2.4}$$

bajo el cual el elemento de arco ds^2 se transforma:

$$ds^2 \rightarrow ds'^2 = ds^2 + (\partial_\mu \varepsilon_\nu + \partial_\nu \varepsilon_\mu) dX^\mu \otimes dX^\mu. \tag{2.5}$$

Este difeomorfismo será una transformación conforme si el término $\partial_\mu \varepsilon_\nu + \partial_\nu \varepsilon_\mu$ es proporcional a $\eta_{\mu\nu}$

$$\partial_\mu \varepsilon_\nu + \partial_\nu \varepsilon_\mu = \frac{2}{d}(\partial.\varepsilon)\eta_{\mu\nu} \tag{2.6}$$

En este caso el factor de escala $\Omega(X)$ de la ecuación (2.3) tiene la forma

$$\Omega(X) = 1 + \frac{2}{d}(\partial.\varepsilon) \tag{2.7}$$

Miremos ahora separadamente las soluciones de la ecuación diferencial (2.6) para $d > 2$ y $d = 2$.

- Para $d > 2$ las soluciones son:

$$i)\ \varepsilon^\mu = a^\mu \ \ Translaciones\ Globales$$

$$ii)\ \varepsilon^\mu = \omega^{\mu\nu} X^\nu \ \ (\omega \ \ antisimétrico)\ Rotaciones\ (SO(p,q))$$

$$iii)\ \varepsilon^\mu = \lambda X^\mu \ \ Transformación\ de\ Escala$$

iv) $\varepsilon^\mu = b^\mu X^2 - 2X^\mu b.X$ *Transformaciones Conformes Especiales*

Puede demostrarse que el álgebra generada por los anteniores generadores es localmente isomorfa a $SO(p+1, q+1)$.

• Para $d = 2$ y $g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$ las ecuaciones (2.6) se reducen a las ecuaciones de Cauchy-Riemann:

$$\partial_1\varepsilon_1 = \partial_2\varepsilon_2 \ \ ; \ \ \partial_1\varepsilon_2 = -\partial_2\varepsilon_1 \tag{2.8}$$

Luego es natural definir las coordenadas complejas:

$$\begin{aligned} z &= X^1 + iX^2 \\ \bar{z} &= X^1 - iX^2 \end{aligned} \tag{2.9}$$

y escribir:

$$\begin{aligned} \varepsilon(z) &= \varepsilon_1 + i\varepsilon_2 \\ \bar{\varepsilon}(\bar{z}) &= \varepsilon_1 - i\varepsilon_2. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Con esta convención las transformaciónes conformes bidimensionales coinciden con las tranformaciones analíticas:

$$\begin{aligned} z \to z' &= f(z) \\ z \to \bar{z}' &= \bar{f}(\bar{z}) \end{aligned} \tag{2.11}$$

cuyo álgebra local es infinito-dimensional. Es claro entonces que el grupo conforme G es el producto directo:

$$G = \Gamma \otimes \bar{\Gamma} \tag{2.12}$$

donde Γ $(\bar{\Gamma})$ es el grupo de sustituciones analíticas de la variable z $(\bar{z})$.

En estas coordenadas la ecuación (2.3) toma la forma:

$$ds^2 = dz \otimes d\bar{z} \to ds'^2 = |\frac{\partial f}{\partial z}|^2 dz \otimes d\bar{z} \tag{2.13}$$

con lo cual $\Omega(X) = |\frac{\partial f}{\partial z}|^2$.

Una transformación infinitesimal del grupo Γ tiene la forma

$$z \rightarrow z' = z + \varepsilon(z) \tag{2.14}$$

donde $\varepsilon(z)$ es una función infinitesimal analítica que puede ser desarrollada en una serie de Laurent:

$$\varepsilon(z) = -\sum_{n=-\infty}^{\infty} \varepsilon_n z^{n+1} \tag{2.15}$$

Luego el álgebra de Lie de Γ coincide con el álgebra de los operadores diferenciales:

$$\ell_n = -z^{n+1}\frac{d}{dz} \qquad n\epsilon Z \tag{2.16}$$

que satisfacen ls relaciones de conmutación:

$$[\ell_n, \ell_m] = (n-m)\ell_{n+m} \tag{2.17}$$

Llamaremos $\mathcal{L}_o$ a este álgebra. Los generadores $\bar{\ell}_n$ del grupo $\bar{\Gamma}$ satisfacen idénticas relaciones de conmutación y conmutan con los generadores del grupo Γ.

Puesto que naturalmente surgen dos álgebras independientes es útil considerar a las variables z y $\bar{z}$ como variables independientes. En este caso nuestra teoría conforme está definida en C^2 y se recupera la teoría original haciendo $\bar{z} = z^*$.

Los generadores $\{\ell_{-1}, \ell_o, \ell_1\}$ forman la subálgebra $s\ell(2,C) \subset \mathcal{L}_o$ y el correspondiente subgrupo $SL(2,C) \approx SO(3,1) \subset \Gamma$ consiste en las transformaciones proyectivas:

$$z \rightarrow \xi = \frac{za+b}{zc+d} \qquad ad - bc = 1 \tag{2.18}$$

Las transformaciones proyectivas son las únicas transformaciones conformes invertibles de todo el espacio C en si mismo. Llamaremos a este subgrupo "grupo conforme global".

2.3 Teoría de Campos Conformes en d=2

En esta sección describiremos las propiedades mas importantaes de las teorías de campos con invarianza conforme. Los principales resultados expuestos en esta sección fueron obtenidos por Belavin, Polyakov y Zamolodchikov (Belavin, Polyakov y Zamolodchikov, 1984).

Definirenos una teoría con invarianza conforme imponiendo algunas propiedades:

a) Existe un conjunto de campos $\{A_i\}$ que contiene a la identidad así como a las derivadas de todos los campos $A_i(X)$.

b) Existe un conjunto de campos $\{\phi_i\} \subset \{A_i\}$ llamados "campos primarios" que bajo las sustituciones dadas en (2.11) se transforman

$$\phi_i(z,\bar{z}) \rightarrow (\frac{\partial f}{\partial z})^{hi}(\frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}})^{\bar{h}i}\phi_i(f(z),\bar{f}(\bar{z})) \tag{2.19}$$

donde h_i y $\bar{h}_i$ números reales llamados **pesos conformes**. Llamaremos a ϕ_i **campo primario de peso** $(h_i,\bar{h}_i)$.

c) Los demás campos $\{A_i\}$ puden expresarse como combinación lineal de los campos primarios y de sus derivadas.

d) Existe un estado de vacío $|0>$ invariante frente al grupo conforme global.

Consideramos entonces una función de correlación arbitraria de la forma:

$$< A_{i1}(X_1)\cdots A_{iN}(X_N) >= \frac{1}{Z}\int \Pi[DA_i]A_{i1}\cdots A_{iN}e^{-S} \tag{2.20}$$

(Z es la funcional generatriz).

La acción S es funcional de los campos $A_i(X)$ y la de la métrica bidimensional $g_{\mu\nu}$ (espacio euclídeo). En particular podemos tomar la métrica plana.

Si la acción S es invariante frente a cambios generales de coordenadas:

$$\begin{aligned} \delta X^\mu &= \varepsilon^\mu(X) \\ \delta A_i(X) &= \delta A_i(X) \\ \delta g_{\alpha\beta}(X) &= \partial_\alpha\varepsilon_\beta + \partial_\beta\varepsilon_\alpha - \varepsilon^\gamma\partial_\gamma g_{\alpha\beta} \end{aligned} \tag{2.21}$$

se deduce de (2.21):

$$\sum_{j=1}^{N} < A_{i1}(X_1)\cdots\delta A_{ij}(X_j)\cdots A_{iN}(X_N) >=$$

$$-\frac{1}{2}\int d^2x\sqrt{g}\delta g_{\alpha\beta} < T^{\alpha\beta}(X)A_{i1}\cdots A_{iN} > \qquad (2.22)$$

donde

$$T_{\alpha\beta} = \frac{2}{\sqrt{g}}\frac{\delta S}{\delta g^{\alpha\beta}} \qquad (2.23)$$

es el tensor de energía impulso simétrico de la teoría. Eligiendo la métrica de referencia plana obtenemos:

$$\sum_{j=1}^{N} < A_{i1}(X_1)\cdots\delta A_{ij}(X_j)\cdots A_{iN}(X_N) >=$$

$$-\int d^2x\partial_\alpha\varepsilon_\beta < T^{\alpha\beta}(X)A_{i1}\cdots A_{iN} > \qquad (2.24)$$

que es la identidad de Ward básica de una teoría cuántica de campos. Esta identidad nos dice que el tensor de energía impulso genera las variaciones de los campos $A_i(X)$ frente a las transformaciones (2.21). Debido a sus propiedades locales, estas variaciones son combinaciones lineales de un número finito de derivadas de la función $\varepsilon^\mu(X)$ tomadas es el punto X_j , siendo los coeficientes ciertos campos locales. Luego la ecuación (2.24) implica que el tensor de energía impulso $T_{\alpha\beta}$ se conserva:

$$\partial_\alpha T_{\alpha\beta} = 0 \qquad (2.25)$$

excepto en la localización de los campos A_{ij}.

En una teoría cuántica de campos con invarianza conforme la traza del tensor de energía impulso es nula $T^{\alpha\alpha} = 0$. Esto es consecuencia de requerir la conservación de la corriente de dilatación $J_\mu = X^\nu T_{\mu\nu}$ asociada a la transformación de escala ordinaria $X \rightarrow \lambda X$. Debido a esto, en 2 dimensiones este tensor tiene solo 2 componentes independientes que elegiremos de la forma:

$$\begin{aligned} T &= T_{11} - T_{22} + 2iT_{12} \\ \bar{T} &= T_{11} - T_{22} - 2iT_{22} \end{aligned} \qquad (2.26)$$

En las variables complejas z y $\bar{z}$ las ecuaciones de conservación del tensor de energía-impulso toman la forma de las ecuaciones de Cauchy-Riemann.

$$\begin{aligned} \partial_{\bar{z}} T &= 0 \\ \partial_z \bar{T} &= 0. \end{aligned} \qquad (2.27)$$

Deducimos luego que T y $\bar{T}$ son funciones analíticas de una sola variable z y $\bar{z}$ respectivamente:

$$T = T(z) \ , \ \bar{T} = \bar{T}(\bar{z}). \qquad (2.28)$$

La identidad de Ward dada en la ecuación (2.24) se verá entonces de la forma:

$$\sum_{j=1}^{N} < A_{i1}(z_1, \bar{z}_1) \cdots \delta A_{i_j}(z_j, \bar{z}_j) \cdots A_{iN}(z_N, \bar{z}_N) >=$$

$$= - \int d^2 z \partial_z \varepsilon^z(z, \bar{z}) < T_{zz}(z) A_{i1}(z_1, \bar{z}_1) \cdots A_{iN}(z_N, \bar{z}_N) > \qquad (2.29)$$

donde solo hemos considerado una transformación de la variable z. Una identidad similar se cumple para las variaciones $\bar{\delta} A_i$ respecto de $\bar{z}$. (Hay que recordar, que como dijimos en la sección anterior, estamos considerando las variaciones respecto de z y respecto de $\bar{z}$ como *independientes*).

La identidad de Ward anterior se simplifica mucho cuando la transformación de coordenadas es conforme, es decir el parámetro ε es una función analítica de $z, (\varepsilon = \varepsilon(z))$. En este caso podemos utilizar la fórmula de Cauchy, que permite escribir una función meromórfica arbitraria f como:

$$f(z) = \oint [d\omega] f(\omega) \frac{1}{\omega - z} \qquad (2.30)$$

donde $[d\omega] = d\omega / 2\pi i$ y la integración se efectúa sobre un contorno cerrado que contenga a z pero a ningún polo de f . Utilizando esta fórmula es directo encontrar:

$$< A_{i1}(z_1, \bar{z}_1) \cdots \delta A_{i_j}(z_j, \bar{z}_j) \cdots >=$$

$$= \oint [d\omega] \varepsilon(\omega) < T(\omega) A_{i1}(\cdots) A_{iN} > \qquad (2.31)$$

donde el camino de integración solo encierra al punto z_j. Es decir que dentro de funciones de correlación las variaciones conformes del campo A_i pueden escribirse de la forma:

$$\delta A_i(z_i, \bar{z}_i) = \oint [d\omega]\varepsilon(\omega)T(\omega)A_i(z_i, \bar{z}_i) \tag{2.32}$$

sobre un camino cerrado que encierre al punto z_i. Concluímos de (2.32) que *una transformación conforme está determinada por los polos en la expansión de producto de operadores (EPO) con el tensor de energía impulso.*

Consideremos ahora la situación en que los campos A_i son campos primarios de peso $(h, \bar{h})$, es decir que se transforman según la ecuación (2.19). Haciendo una tranformación infinitesimal analítica de la forma:

$$\begin{aligned} f(z) &= z + \frac{\varepsilon}{\omega - z} \\ \bar{f}(\bar{z}) &= \bar{z} \end{aligned} \tag{2.33}$$

la ecuación (2.19) se reduce a:

$$\delta A(z, \bar{z}) = \varepsilon \left[\frac{h}{(\omega - z)^2} + \frac{1}{\omega - z}\partial_z \right] A(z, \bar{z}) \tag{2.34}$$

que insertada en (2.31) da como resultado:

$$\begin{aligned} &< T(\omega)A_{i1}(z_2, \bar{z}_1) \cdots A_{iN}(z_N, \bar{z}_N) >= \\ &= \sum_{j=1}^{N} \left[\frac{hi_j}{(\omega - z_j)^2} + \frac{1}{\omega - z_j}\partial_{z_j} \right] < A_{i1}(z_1, \bar{z}_1) \cdots A_{iN}(z_N, \bar{z}_N) > \end{aligned} \tag{2.35}$$

que es la *identidad de Ward fundamental de una teoría de campos conforme.*

Exigiendo consistencia con las ecuaciones (2.32) y (2.34), se deduce la forma de la EPO entre el tensor de energía impulso T y el campo primario A:

$$\begin{aligned} T(\omega)A(z, \bar{z}) &= \frac{h}{(\omega - z)^2}A(z, \bar{z}) + \frac{1}{\omega - z}\partial_z A(z, \bar{z}) + \mathcal{L}_{-2}A(z, \bar{z}) \\ &\quad +(\omega - z)\mathcal{L}_{-3}A(z, \bar{z}) + \cdots . \end{aligned} \tag{2.36}$$

Los campos $\mathcal{L}_{-n}A(z,\bar{z})$ se llaman **campos descendientes** y por la ecuación (2.36) se pueden escribir:

$$\mathcal{L}_{-n}A(z,\bar{z}) = \oint [d\omega](\omega - z)^{-n+1}T(\omega)A(z,\bar{z}). \tag{2.37}$$

Podemos repetir lo que hicimos para campos primarios con los campos descendientes y definir descendientes de descendientes; descendients de descendientes de descendientes, etc. Un ejemplo del primer caso es:

$$\mathcal{L}_{-n}\mathcal{L}_{-m}A(z,\bar{z}) = \oint [d\omega] \oint [dv](\omega - z)^{-n+1}(v - z)^{-m+1}T(\omega)T(v)A(z,\bar{z}) \tag{2.38}$$

El conjunto de todos los campos descendientes asociados al campo primario $A(z,\bar{z})$ se denomina **familia conforme**:

$$\{A, \mathcal{L}_{-n}A, \mathcal{L}_{-n}\mathcal{L}_{-m}A, \cdots, \mathcal{L}_{-n_1}\cdots\mathcal{L}_{-n_k}A, \cdots\}$$

Para hallar las variaciones conformes de los campos descendientes (y tambien para calcular sus funciones de correlación) necesitamos conocer la EPO del tensor de energía impulso con si mismo (ver las ecuaciones (2.32) y (2.37)). Teniendo en cuenta la forma tensorial de $T(z)$, la condición de localidad y análisis dimensional deducimos la forma más general de este producto:

$$T(\omega)T(z) = \frac{c}{2}\frac{1}{(\omega - z)^4} + \frac{2}{(\omega - z)^2} + \frac{1}{\omega - z}\partial_z T(z) + \textit{términos regulares} \tag{2.39}$$

El parámetro c se denomina **carga central** de la teoría de campos conforme. Notemos que solo si $c = 0$ $T(z)$ es un tensor (campo primario). La aparición de una carga central es un efecto puramente cuántico y su valor no está determinado por principios generales, debe ser tratado como un parámetro de la teoría.

Las teorías con $c < 1$, forman una clase muy especial. Se denominan "teorías minimales" y tienen la caracteristica, probada por Cardy, de ser las únicas teorías consistentes con un número **finito** de campos primarios (Cardy, 1986).

Usando la ecuación (2.39) se pueden calcular todas las funciones de correlación de los campos descendientes en función de las funciones de correlación de los campos primarios. Esto quiere decir que *toda la información dinámica de la teoría conforme está contenida en las funciones de correlación de los campos primarios.*

2.4 Algebra de Virasoro

En la teoría cuántica de campos, las funciones de correlación están definidas como el valor de expectación de vacío del producto ordenado temporalmente de operadores de campo locales. En nuestro contexto es conveniente introducir las variables σ (espacial) y τ (temporal) de acuerdo a las fórmulas:

$$z = e^{\tau + i\sigma} \quad , \quad \bar{z} = e^{\tau - i\sigma}. \tag{2.40}$$

Eligiendo σ y τ reales, siendo σ una variable angular, $\sigma \epsilon [0, 2\pi]$ se obtiene el espacio euclídeo usual. El orden cronológico en las funciones de correlación se tomará respecto del **tiempo euclídeo** τ. Con esta convención el punto $z = 0$ corresponde al pasado remoto y $z = \infty$ al futuro lejano. Círculos de radio constante juegan el rol de superficies de tiempo constante. Los campos conformes evaluados en el origen crean estados asintóticos **IN** y evaluados en el infinito crean estados **OUT**.

$$\begin{aligned} A(0)|0> &\equiv |A>_{IN} \\ \mathcal{L}_{-n} A(0)|0> &\equiv L_{-n}|A>_{IN} \\ &\text{int} \quad [d\omega]\omega^{-n+1} T(\omega) A(0)|0> \end{aligned} \tag{2.41}$$

Vemos entonces que los operadores L_{-n} aquí definidos pueden ser pensados como actuando sobre un espacio de Hilbert y que son efectivamente los momentos del tensor de energía impulso

$$T(z) = \sum_{n=\infty}^{\infty} L_n z^{-n-2} \tag{2.42}$$

Los operadores L_n forman un álgebra cuyas relaciones de conmutación pueden hallarse a partir de la EPO del tensor de energía impulso con si mismo (ecuación

(2.39)). El resultado es:

$$[L_n, L_m] = (n-m)L_{n+m} + \frac{c}{12}n(n^2-1)\delta_{n+m,0} \tag{2.43}$$

que es conocido como **Algebra de Virasoro** y que denotaremos $\mathcal{L}$. Este álgebra es una extensión central del álgebra de los operadores diferenciales conformes dada en (2.17).

Los campos primarios definen a través de las ecuaciones (2.41) las **representaciones de máximo peso** del álgebra de Virasoro $\mathcal{L}$. El estado $|A>_{IN}$ definido en (2.41) (de ahora en más lo denotaremos $|A>$) se denomina **estado de máximo peso** y debido a las ecuaciones (2.36) y (2.41) tiene las propiedades:

$$\begin{aligned} L_o|A> &= h|A> \\ L_n|A> &= 0 \qquad n>0. \end{aligned} \tag{2.44}$$

Aunque el álgebra de Virasoro es infinito-dimensional, la subálgebra de Cartan solo contiene a 1 y a L_o. Siendo L_o el único elemento no trivial de esta subálgebra lo utilizaremos para clasificar a los estados.

Se deduce de (2.43) que :

$$[L_o, L_{-n}] = nL_{-n} \tag{2.45}$$

luego el estado $L_{-n}|A>$ es un autoestado de L_o con autovalor $n+h$. Vemos entonces que los estados de la teoría subtienden un conjunto de representaciones de dimensión infinita de $\mathcal{L}$. Los estados de máximo peso son creados por los campos primarios y los estados descendientes se organizan en familias conformes.

El conjunto completo de estados descendientes de un estado de máximo peso $|A>$ se denomina **Módulo de Verma**. Un módulo de Verma es entonces una representación de $\mathcal{L}$ caracterizada por la carga central c y la dimensión h del estado de máximo peso. Esto refleja el hecho que las propiedades conformes de los campos descendientes están totalmente determinadas por las de los campos primarios.

Recordemos que tambien hay un tensor de energía impulso antianalítico $\bar{T}$ que dará origen a otra álgebra de Virasoro $\bar{\mathcal{L}}$ generada por los operadores $\bar{L}_n$. Luego el espacio completo de estados de una teoría de campos conforme bidimensional tiene la forma:

$$\otimes_{ij} \mathcal{H}_i \otimes \bar{\mathcal{H}}_j \tag{2.46}$$

donde $\mathcal{H}_i$ denota el espacio de Hilbert de estados en la representación de descendientes de $|A_i>$.

Discutamos ahora brevemente el problema de la unitariedad. Este problema se reduce a encontrar los pares de valores de c y h de tal manera que la representación de máximo peso correspondiente sea unitaria. La condición de unitariedad para los generadores de Virasoro es:

$$L_n^\dagger = L_{-n} \quad \forall n \tag{2.47}$$

Puede verse facilmente que una condición necesaria para obtener representaciones unitarias es que $c \geq 0$ y $h \geq 0$.

La solución completa a este problema la dieron Friedan, Qiu y Shenker (Friedan, Qiu y Shenker, 1984) estudiando el determinante de Kac (determinante de la matriz formada por los productos internos de estados de peso conforme dado en un módulo de Verma arbitario) y establecieron: **"Los valores de c y h que conducen a una representación unitaria del álgebra de Virasoro deben satisfacer:**

$$c \geq 1 \;\; y \;\; h \geq 0 \tag{2.48}$$

o bien

$$c = 1 - \frac{6}{(m+2)(m+3)} \tag{2.49}$$

y

$$h = \frac{[(m+3)p - (m+2)q]^2 - 1}{4(m+2)(m+3)} \tag{2.50}$$

donde $m = 0, 1, \cdots \;\; ; \;\; p = 1, 2, \cdots, m+1$ y $q = 1, 2, \cdots, p$."

2.5 Algebra Afín de Kac-Moody

Una importante clase de teorías cuánticas de campos conformes son las teorías racionales. Estas teorías están caracterizadas por tener invarianza frente a un álgebra quiral $\mathcal{A}$ así como a un álgebra de Virasoro $\mathcal{L}(\mathcal{L} \subseteq \mathcal{A})$. Las teorías racionales más simples son las teorías conformes con invarianza a frente a transformaciones quirales de un grupo de Lie compacto G. Las corrientes asociadas a esta simetría son un conjunto de campos conformes J^a de peso (1,0) y $\bar{J}^a$ de peso (0,1) y su EPO es de la forma:

$$J^a(z)J^b(\omega) = \frac{k\delta^{ab}}{(z-\omega)^2} + \frac{if^{abc}}{(z-\omega)}J^c(\omega) + t.r.$$

donde f^{abc} son las constantes de estructura del grupo de Lie G y k es una constante denominada **nivel de Kac Moody**. El producto de operadores anterior es conocido como **algebra afín de Kac Moody**. Existe un álgebra similar para las corrientes $\bar{J}^a$.

Las corrientes J^a están al mismo nivel que el tensor de enrgía impulso T. Ellas generan un conjunto infinito de simetrías de toda la teoría cuántica. Estos conjuntos infinitos de simetrías generan identidades de Ward generalizadas que permiten calcular todas las funciones de correlación de campos por medio de ecuaciones diferenciales.

El álgebra completa de los operadores J^a y T es:

$$\begin{aligned}
T(z)T(\omega) &= \frac{c}{2}\frac{1}{(z-\omega)^4} + \frac{2}{(z-\omega)^2}T(\omega) + \frac{1}{z-\omega)}\partial\omega T(\omega) + t.r. \\
T(z)J^a(\omega) &= \frac{1}{(z-\omega)^2}J^a(\omega) + \frac{1}{z-\omega}\partial\omega J^a(\omega) + t.r. \\
J^a(z)J^b(\omega) &= \frac{k\delta^{ab}}{(z-\omega)^2} + \frac{if^{abc}}{z-\omega}J^c(\omega) + t.r.
\end{aligned}$$

Del mismo modo que hicimos para el tensor de energía impulso se pueden hallar los generadores del álgebra de Kac-Moody como los modos de las corrientes J^a:

$$J^a_n = \oint [d\omega]\omega^n J^a(\omega) \tag{2.51}$$

Las ecuaciones (2.5) son entonces equivalentes a:

$$[L_n, L_m] = (n-m)L_{n+m} + \tfrac{c}{12}n(m-1)\delta_{n+m,o}$$
$$[L_n, J^a_m] = -mJ^a_{n+m}$$
$$[J^a_n, J^b_m] = f^{abc}J^c_{n+m} + n\tfrac{k}{2}\delta^{ab}\delta_{n+m,o} \tag{2.52}$$

Estas ecuaciones permiten construir, como lo hicimos en la sección anterior, el espacio de Hilbert de la teoría a partir de representaciones de máximo peso respecto de los operadores L_n y de los operadores J^a_m . Es decir que si A_i es un campo primario (se tranforma según la ecuación (2.19) frente a una transformación conforme **y covariantemente** frente a una transformación del grupo G), los estados de máximo peso $|A_i>$ obedecen las condiciones:

$$\begin{aligned} L_o|A_i> &= h_i|A_i> \\ J^a_o|A_i> &= t^a_i|A_i> \\ L_n|A_i> &= J^a_n|A_i>=0 \quad n>0 \end{aligned} \tag{2.53}$$

donde t^a_i denota los generadores de G. Los estados descendientes se construyen de $|A_i>$ aplicando los operadores L_{-n} y J^a_{-n} .

2.6 Construcción de Sugawara

Una característica importante de estas teorías racionales es que se pueden construir generadors del álgebra de Virasoro a partir de generadores del álgebra de Kac-Moody.

Consideremos la construcción:

$$T(z) = -\frac{1}{2\beta} : J^a(z)J^a(z) :$$
$$= -\frac{1}{2\beta}\lim_{z\to\omega}\left[J^a(z)J^a(\omega) - \frac{k\dim G}{(z-\omega)^2}\right] \tag{2.54}$$

donde el orden normal sustrae los términos singulares. La constante β se fija requiriendo que $T(z)$ satisfaga el producto de operadores canónico del tensor de energía impulso (ecuación (2.39)) o que $J^a(z)$ se transforme como un campo primario de dimensión (1,0) y resulta:

$$\beta = -2(k + C_G) \tag{2.55}$$

donde C_G es el Casimir cuadrático en la representación adjunta; $C_G \delta^{ab} = f^{acd} f^{bcd}$.

Se verifica directamente que $T(z)$ y $J^a(z)$ satisfacen el álgebra (2.5) y la carga central de Virasoro resulta:

$$c = \frac{k dimG}{k + C_G} \tag{2.56}$$

Esta forma de construir el tensor de energía impulso en términos de las corrientes se llama **construcción de Sugawara.**(La idea de construir el tensor de energía impulso como funcional de las corrientes fue original de Sugawara , quien lo desarrollo durante los ' 60, para el caso de 4 dimensiones).

En términos de los operadores L_n y J^a_m la ecuación (2.54) se escribe:

$$L_n = \frac{1}{\beta} \sum_{m=-\infty}^{\infty} : J^a_m J^a_{m-n} : . \tag{2.57}$$

Esta ecuación nos dice que el álgebra de Virasoro $\mathcal{L}$ esta contenida en el álgebra de Kac Moody y por ello los estados descendientes respecto del álgebra de Virasoro pueden construirse como combinación de estados descendientes respecto del álgebra de Kac-Moody. *Los descendientes del álgebra de corrientes subtienden completamente el espacio de representación.*

2.7 La construcción del Coset

El valor de la carga central del álgebra de Virasoro en la construcción del Sugawara, dada en la ecuación (2.56) está acotado. En efecto, con elementos básicos de teorías de grupos de Lie se puede demostrar que para cualquier grupo G:

$$rango\ G \leq c \leq \dim G$$

(el rango de G es la dimensión de la subálgebra de Cartan) y por lo tanto la construcción de Sugawara no nos permite obtener teorías conformes con $c < 1$ (minimales). Sin embargo existe una construcción muy interesante, debido a Goddard, Kent y Olive, que permite obtener teorías minimales a partir de la construcción de Sugawara; es la llamada **construcción del coset** (Goddard, Kent y Olive, 1985).

Sea G un grupo compacto de Lie y sea $H \subseteq G$ un subgrupo. Elijamos una base del álgebra de G tal que los primeros $\dim H$ generadores generen H. Obtengamos ahora vía la construcción de Sugawara (ecuación (2.57)) los generadores de Virasoro correspondientes a G y a H:

$$L_n^{(G)} = \frac{1}{-2(k + C_G)} \sum_{a=1}^{\dim G} \sum_{m=-\infty}^{\infty} : J_m^a J_{m-n}^a : \tag{2.58}$$

$$L_n^{(H)} = \frac{1}{-2(k + C_M)} \sum_{a=1}^{\dim H} \sum_{m=-a}^{\infty} : J_m^a J_{m-m}^a : \tag{2.59}$$

Las cargas centrales correspondientes tienen la forma:

$$c^{(G)} = \frac{k \dim G}{k + C_G} \tag{2.60}$$

y

$$c^{(H)} = \frac{k \dim H}{k + CH}. \tag{2.61}$$

Consideremos ahora las relaciones de conmutación (ver ecuación (2.52)):

$$\begin{aligned} [L_n^{(G)}, J_m^a] &= -mJ_{m+n}^a \\ 1 \leq a &\leq \dim H \\ [L_n^{(H)}, J_m^a] &= -mJ_{m+n}^a \end{aligned} \tag{2.62}$$

Sustrayendo en (2.62) obtenemos:

$$[L_n^{(G)} - L_n^{(H)}, J_m^a] = -mJ_{m+n}^a \quad 1 \leq a \leq \dim H \tag{2.63}$$

con lo que deducimos:

$$[L_n^{(G)} - L_n^{(H)}, L_m^{(H)}] = 0 \tag{2.64}$$

y si definimos $L_n^{(G/H)} = L_n^{(G)} - L_n^{(H)}$ tenemos finalmente:

$$[L_n^{(G/H)}, L_m^{(G/H)}] = [L_n^{(G)}, L_m^{(G)}] - [L_n^{(H)}, L_m^{(H)}] \tag{2.65}$$

es decir que $L_n^{(G/H)}$ satisface un álgebra de Virasoro con una carga central:

$$c^{G/H} = c^G - c^H = \frac{k \dim G}{k + C_G} - \frac{k \dim H}{k + C_H} \tag{2.66}$$

Los argumentos anteriores implican que cualquier estado en una representación de G se puede descomponer como un estado en H y un estado es el espacio coset G/H.

Eligiendo convenientemente los grupos G y H se pueden obtener valores de $c < 1$. Por ejemplo si $G = SU(2)_m \times SU(2)_1$ y $H = SU(2)_{1+m}$ (el subindice indica el nivel del álgebra afín de Kac-Moody), obtenemos con la construcción del coset, una teoría conforme con carga central:

$$c^{G/M} = \frac{3m}{m+2} + 1 - \frac{3(m+1)}{(m+1)+2} = 1 - \frac{6}{(m+2)(m+3)} \tag{2.67}$$

que es precisamente la serie de valores $c < 1$ consistentes con representaciones unitarias del álgebra de Virasoro (ecuación (2.49)).

2.8 Bosones Libres, Fermiones Libres y Modelo de Wess-Zumino-Witten

Finalmente en esta sección ilustraremos los principales puntos de este capítulo con 3 ejemplos simples.

A. Bosones Libres

Comenzaremos considerando una teoría en espacio euclídeo bidimensional de un bosón escalar libre sin masa $\Phi(x)$. La acción está dada por:

$$S = \frac{1}{2\pi} \int d^2x \partial_\mu \Phi \partial^\mu \Phi \tag{2.68}$$

que en términos de las coordenadas complejas definidas en (2.9):

$$z = X^1 + iX^2 \ , \ \bar{z} = X^1 - iX^2$$

se escribe:

$$S = \frac{2}{\pi}\int dz d\bar{z} \partial_z \Phi(z,\bar{z}) \partial_{\bar{z}} \Phi(z,\bar{z}) \tag{2.69}$$

y las ecuaciones de movimiento toman la forma:

$$\partial_z \partial_{\bar{z}} \Phi(z,\bar{z}) = 0 \tag{2.70}$$

Se deduce directamente de (2.70) que las soluciones de las ecuaciones de movimiento se separan en dos partes con solo dependencia holomórfica o antiholómorfica respectivamente:

$$\Phi(z,\bar{z}) = \frac{1}{2}\phi(z) + \frac{1}{2}\bar{\phi}(\bar{z}). \tag{2.71}$$

Las funciones de Green tambien se separan en partes holomórficas y antiholomórficas y resultan:

$$< \phi(z)\phi(\omega) >= -\ln(z-\omega) \tag{2.72}$$

$$< \bar{\phi}(\bar{z})\bar{\phi}(\bar{\omega}) >= -\ln(\bar{z}-\bar{\omega}) \tag{2.73}$$

El tensor de energía impulso de esta teoría es de traza nula y su componente analítica tiene la forma:

$$\begin{aligned} T(z) &= -\frac{1}{2} : \partial_z \phi \partial_z \phi : \\ &= -\frac{1}{2} \lim_{z\to\omega} \left[\partial_z \phi \partial_\omega \phi - \frac{1}{(z-\omega)^2} \right] \end{aligned} \tag{2.74}$$

donde hemos usado la prescripción del orden normal para sustraer los términos singulares en la EPO.

El cálculo de la EPO entre el campo $\phi(z)$ y el tensor de energía impulso se realiza facilmente y se descubre que este no es un campo primario. Un cálculo similar nos asegura que $\partial_z\phi$ efectivamente lo es. Usando el teorema de Wick y desarrollos en serie de Taylor encontramos:

$$T(z)\partial_\omega \phi(\omega) = \frac{1}{(z-\omega)^2}\partial_\omega \phi(\omega) + \frac{1}{z-\omega}\partial_\omega^2 \phi(\omega) + t.r \tag{2.75}$$

es decir que $\partial_\omega \phi(\omega)$ es un campo primario de peso conforme (1,0). Analogamente se puede demostrar que $\partial_{\bar{\omega}} \bar{\phi}(\bar{\omega})$ es un campo primario de peso conforme (0,1).

La ecuación (2.75) tambien nos permite calcular la EPO de $T(z)$ con si mismo. El cálculo es directo y da:

$$T(z)T(\omega) = \frac{1/2}{(z-\omega)^4} + \frac{2}{(z-\omega)^2}T(\omega) + \frac{1}{(z-\omega)}\partial_\omega T(\omega) + t.r. \tag{2.76}$$

verificando que T satisface un álgebra de Virasoro con un valor de la carga central:

$$c = 1. \tag{2.77}$$

Consideremos ahora el **operador de vértice**:

$$V_\alpha(z) =: e^{i\alpha\phi(z)} : . \tag{2.78}$$

Tomando la EPO de V_α con T encontramos el siguiente desarrollo:

$$T(z)V_\alpha(\omega) = \frac{\alpha^2}{2}\frac{V_\alpha(\omega)}{(z-\omega)^2} + \frac{\partial_\omega V_\alpha(u)}{z-\omega} + t.r. \tag{2.79}$$

luego $V_\alpha(z)$ es un campo primario de peso conforme $(\frac{\alpha}{2}^2, 0)$.

A partir de estos campos conformes, por aplicación de los operadores L_{-n} se pueden construir todas las familias conformes y obtener la representación completa del álgebra de Virasoro asociado a cada campo primario.

B. Fermiones Libres

Otro ejemplo interesante de teoría cuántica de campos conforme en 2 dimensiones es el de una teoría de fermiones libres sin masa. Consideremos entonces una teoría de un fermión de Majorana libre:

$$\Psi = \begin{bmatrix} \Psi_+ \\ \Psi_- \end{bmatrix} \tag{2.80}$$

donde los componentes Ψ_+ y Ψ_- son reales. Debido a las propiedades de las matrices de Dirac en 2 dimensiones, la accción puede escribirse:

$$S = \frac{1}{8\pi}\int [\Psi_+\partial_{\bar{z}}\Psi_+ + \Psi_-\partial_z\Psi_-]\, dz d\bar{z} \tag{2.81}$$

donde las variables z y $\bar{z}$ son las ya definidas. Las ecuaciones de movimiento resultan:

$$\partial_z \Psi_- = \partial_{\bar{z}} \Psi_+ = 0, \tag{2.82}$$

es decir Ψ_+ tiene solo componentes analíticas y Ψ_- solo componentes antianalíticas. Las funciones de Green de estos campos tiene la forma:

$$\begin{aligned} < \Psi_+(z)\Psi_+(\omega) > &= -\frac{1}{z-\omega} \\ < \Psi_-(\bar{z})\Psi_-(\bar{\omega}) > &= -\frac{1}{\bar{z}-\bar{\omega}} \end{aligned} \tag{2.83}$$

El tensor de energía impulso es de traza nula y sus componentes analíticas y antianalíticas se escriben:

$$\begin{aligned} T(z) &= \frac{1}{2} : \Psi_+(z)\Psi_+(z) : \\ \bar{T}(\bar{z}) &= \frac{1}{2} : \Psi_-(\bar{z})\Psi_-(\bar{z}) : \end{aligned} \tag{2.84}$$

y utilizando las funciones de Green (2.83) se verifica que satisface un álgebra de Virasoro con carga central:

$$c = \bar{c} = \frac{1}{2}. \tag{2.85}$$

Del cálculo de la EPO de $T\Psi_+$ y $\bar{T}\Psi_-$ se verifica que los campos Ψ_+ y Ψ_- son campos primarios de pesos conformes (1/2,0) y (0,1/2) respectivamente.

Consideremos ahora una teoría con 2 fermiones de Majorana libres sin masa. En este caso la acción tiene una simetría $SO(2)_L \times SO(2)_R$ global y, como veremos, la teoría es racional. Las corriente de Noether en las coordenadas z y $\bar{z}$ tienen la forma:

$$\begin{aligned} J_z &= J_1 + iJ_2 = \frac{1}{2} : \Psi_+^1\Psi_+^2 - \Psi_+^2\Psi_+^1 : \\ \bar{J}_{\bar{z}} &= J_1 - iJ_2 = \frac{1}{2} : \Psi_-^1\Psi_-^2 - \Psi_-^2\Psi_-^1 : \end{aligned} \tag{2.86}$$

y las ecuaciones de conservación $\partial_{\bar{z}} J_z = \partial_z \bar{J}_{\bar{z}} = 0$ se satisfacen automaticamente en virtud de las ecuacioness de movimiento, por lo tanto J_z sólo depende de z y $\bar{J}_{\bar{z}}$ solo depende de $\bar{z}$.

El cálculo de la EPO de TJ_z y $\bar{T}\bar{J}_{\bar{z}}$ nos muestra que J_z y $\bar{J}_{\bar{z}}$ son campos primarios de pesos conformes (1,0) y (0,1).

En este caso también es directo el calculo de los EPO J_zJ_ω y $\bar{J}_{\bar{z}}\bar{J}_{\bar{\omega}}$. En ambos casos se comprueba que satisfacen la relación (5.1) que define el álgebra afín de Kac-Moody, con nivel K=1. Concluímos que debido a que se satisface completamente el álgebra (5.1), la teoría de 2 fermiones de Majorana libres es racional.

C. Modelo de Wess- Zumino-Witten

Por último mencionaremos brevemente otra teoría racional, quizás las más ejemplar: el modelo sigma no lineal con término de Wess-Zumino, también conocido como modelo de Wess-Zumino-Witten (Witten, 1984).

Su acción esta dada por:

$$S[g] = \frac{1}{4\lambda^2}\int d^2x Tr\partial_\mu g\partial_\mu g^{-1} + n\Gamma[g] \tag{2.87}$$

donde g es un campo que toma valores en un grupo de Lie G y $\Gamma[g]$ es la acción de Wess-Zumino en 2 dimensiones:

$$\Gamma[g] = \frac{1}{24\pi}\int \varepsilon^{ijk}Tr(g^{-1}\partial_i g g^{-1}\partial_j g g^{-1}\partial_k g)d^3y \tag{2.88}$$

La integración en (2.88) se realiza sobre una bola tridimensional B cuyo borde es el espacio bidimensional real. La variable g se extiende en la nueva dimensión de manera arbitraria (suave). Por supuesto que la manera de definir $\Gamma[g]$ no es única, sin embargo la diferencia entre 2 valores de Γ obtenidos de 2 extensiones distintas del campo g es un múltiplo de 2π. Esta ambigüedad discreta no afecta ni los valores clásicos de las ecuaciones de movimiento, pues Γ sera estacionaria para las mismas trayectorias, ni su cuantificación, pues solo se exige que $e^{i\Gamma}$ sea monovaluada.

El grupo de renormalización provee, para este modelo, un punto fijo estable infrarrojo para

$$\lambda^2 = \frac{4\pi}{n} \tag{2.89}$$

y en este punto el modelo es invariante conforme. En adelante llamaremos modelo de Wess-Zumino-Witten (WZW) al dado es las ecuaciones (2.87) y (2.88) **con el valor de λ (2.89)** y lo denotaremos $W[g]$:

$$W[g] = \frac{n}{16\pi}\int Tr(\partial_\mu g^{-1}\partial^\mu g)d^2x + n\Gamma[g] \tag{2.90}$$

La acción $W[g]$ satisface la **identidad de Polyakov-Wiegmann** (Polyakov y Weigmann, 1984):

$$W[gh^{-1}] = W[g] + W[h^{-1}] + \frac{1}{16\pi}\int Tr(g^{-1}\partial_{\bar{z}}gh^{-1}\partial_z h)d^2x \tag{2.91}$$

(las variables z y $\bar{z}$ son las ya definidas en (2.9)) que permite probar la invarianza de W frente a las transformaciones:

$$g \to \Omega(z)g\Lambda^{-1}(\bar{z}) \tag{2.92}$$

con $\Omega(z)$ y $\Lambda(\bar{z})$ elementos de G arbitrarios. Llamaremos a esta simetría **quiral** $G_L \times G_R$.

Las corrientes asociadas a esta simetría son de la forma:

$$\begin{aligned} J^a t^a &= \frac{n}{2\pi}\partial_z g g^{-1} \\ \bar{J}^a t^a &= \frac{n}{2\pi}g^{-1}\partial_{\bar{z}} g \end{aligned} \tag{2.93}$$

(t^a son los generados de G) y satisfacen las ecuaciones de conservación:

$$\partial_{\bar{z}} J^a = \partial_z \bar{J}^a = 0 \tag{2.94}$$

Tambien puede calcularse la EPO de ambas corrientes y comprobar que satisfacen sendas álgebras de Kac-Moody conmutantes (ecuación (2.5)) con una carga central:

$$K = n \tag{2.95}$$

El tensor de energía impulso es naturalmente de la forma Sugawara (ecuación (2.54)):

$$\begin{aligned} T(z) &= \frac{1}{4(n + C_G)} : J^a(z)J^a(z) : \\ \bar{T}(\bar{z}) &= \frac{1}{4(n + C_G)} : \bar{J}^a(\bar{z})\bar{J}^a(\bar{z}) : \end{aligned} \tag{2.96}$$

y ambos componentes satisfacen álgebras de Virasoro con carga central:

$$C = \frac{n \dim G}{n + C_G} \tag{2.97}$$

El campo g es un campo primario y la EPO con el tensor de energía impulso demuestra que sus pesos conformes son:

$$h = \bar{h} = \frac{\tilde{C}_G}{C_G + K} \tag{2.98}$$

donde $\tilde{C}_G$ es el Casimir de G es la representación a la que g pertenece ($I\tilde{C}_G = t^a t^a$ con t^a generador de la representación de g).

Capítulo 3

El Modelo de Gross-Neveu

3.1 Introducción y Generalidades

En este capítulo y los siguientes estudiaremos algunas teorías bidimensionales de campos desde el punto de vista de sus simetrías. Como señalabamos en la introducción estos modelos simples presentan características y propiedades que serían bienvenidas en teorías realistas en 4 dimensiones (libertad asintótica, generación dinámica de masa, invarianza de escala, etc.). Este capítulo será dedicado al modelo de Gross-Neveu (G-N) quiral. Este modelo, que consta de N fermiones de Dirac sin masa con una interacción cuártica, fue introducido por D.Gross y A.Neveu en 1974 para estudiar la ruptura dinámica de simetría en teorías de campos asintóticamente libres (Gross y Neveu, 1974).

Los autores, en su trabajo original, analizaron esta teoría usando la aproximación 1/N (N es el nº de fermiones) y obtuvieron dos importantes resultados: 1) la teoría es asintóticamente libre y 2) ocurre una ruptura dinámica de simetría con la correspondiente aparición de un bosón de Goldstone. Sin embargo este último resultado es contradictorio pues se opone a la tesis del teorema de Coleman (Coleman, 1974) la cual asegura que no existen bosones de Goldstone en 2 dimensiones. Esta contradicción fue resuelta por Witten (Witten, 1978) quien usando técnicas de bosonización bidimensional demostró que el modelo de G-N no presenta ruptura de simetría y que por lo tanto aunque existe un bosón no masivo este *no es un bosón de Goldstone*. Asimismo mostró que la aproximación 1/N es una buena guía para conocer todas las propiedades de la teoría excepto para saber si existe ruptura de simetría.

El lagrangiano propuesto por Gross y Neveu tiene la forma:

$$\mathcal{L} = \bar{\Psi} i\gamma.\partial\Psi + g^2 N/4N[(\bar{\Psi}\Psi)^2 - (\bar{\Psi}\gamma^5\Psi)^2] \tag{3.1}$$

donde Ψ es un espinor de Dirac de N componentes. Este lagrangiano es invariante frente a las siguientes transformaciones globales:

a) U(1) vectorial

$$\Psi \longrightarrow e^{i\theta}\Psi \ , \ \bar{\Psi} \longrightarrow \bar{\Psi}e^{-i\theta} \tag{3.2}$$

b) U(1) quiral

$$\Psi \longrightarrow e^{i\theta\gamma 5}\Psi \ , \ \bar{\Psi} \longrightarrow \bar{\Psi}e^{i\theta\gamma 5} \tag{3.3}$$

(en ambos casos θ en una fase constante)

c) SU(N) vectorial

$$\Psi \longrightarrow e^{i\bar{\phi}}\tilde{\Psi} \ , \ \bar{\Psi} \longrightarrow \bar{\Psi}e^{-i\bar{\phi}} \tag{3.4}$$

con $\bar{\phi}$ perteneciente al álgebra de Lie de SU(N).

El lagrangiano (3.1) puede llevarse, por medio de una transformación de Fierz (Mitter y Weisz, 1973), a la forma:

$$\mathcal{L} = \bar{\Psi} i\gamma.\partial\Psi - \frac{1}{2}g_A^2 j_\mu j^\mu - \frac{1}{2}g_N^2 j_\mu^a j^{\mu a} \tag{3.5}$$

donde $g_A^2 = g_N^2/2N$ y j_μ, j_μ^a son las corrientes de Noether asociadas a las simetrías vectoriales U(1) y SU(N) respectivamente:

$$j^\mu = \bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi \tag{3.6}$$

$$j^{\mu a} = \bar{\Psi}\gamma^{\mu}t^{a}\Psi \tag{3.7}$$

(t^a son los generadores de SU(N)). Esta forma del lagrangiano de G-N es muy conveniente pues pone claramente de manifiesto las simetrías de la teoría y permite, como veremos, proceder a la bosonización de manera tal que estas invarianzas continuen explícitas.

Mencionemos finalmente una propiedad de este modelo descubierta por R.Dashen y Y.Frishman (Dashen y Frishman, 1975). Estudiando la función β de Callan-Symanzik del lagrangiano en su versión (3.5) encontraron que el modelo deviene invariante conforme para un valor determinado de la constante de acoplamiento g_N. Notemos que este resultado parece contradictorio con el de generación dinámica de masa obtenido por Gross y Neveu. En las secciones siguientes utilizando técnicas de bosonización no abeliana en el marco de la integral funcional, reobtendremos este resultado dentro de un resultado más general.

3.2 El Campo Vectorial Auxiliar

Esta sección y las siguientes estarán dedicadas al estudio de las simetrías del modelo G-N quiral con el auxilio de técnicas funcionales. Los resultados que obtendremos constituyen una de las contribuciones originales de esta tesis. Parte de ellos han sido expuestos en la referencia (Moreno y Schaposnik, 1989).

Recordemos que lagrangiano del modelo G-N podía ser escrito luego de efectuar una transformación de Fierz, de la forma:

$$\mathcal{L} = \bar{\Psi}i\gamma.\partial\Psi - \frac{1}{2}g_A^2 j^{\mu}j_{\mu} - \frac{1}{2}g_N^2 j^{\mu a}j_{\mu}^{a} \tag{3.8}$$

Como ya habíamos mencionado las constantes g_A y g_N son proporcionales, sin embargo generalizaremos este modelo al considerarlas constantes independientes. Recordemos también que el lagrangiano (3.8) es invariante frente a los grupos de transformaciones globales U(1) x U(1) quiral y SU(N) vectorial.

Resulta útil para nuestros propósitos eliminar los términos de interacción cuárticos introduciendo campos vectoriales auxiliares. Por ejemplo, el término de interacción proporcional a g_N^2 puede escribirse:

$$\exp\{-\frac{i}{2}g_\mu^2\int dx^2 j^{\mu a} j_\mu^a\} = \int DA_\mu^a \exp\{i\int d^2x(\frac{1}{2}A_\mu^a A^{\mu a} - g_N A_\mu^a j^{\mu a})\} \tag{3.9}$$

donde A_μ^a es el campo vectorial auxiliar con un índice en el álgebra de SU(N). Una ecuación similar se encuentra para el término de interacción del sector U(1) proporcional a g_A^2 introduciendo un campo vectorial abeliano a_μ. En término de estos nuevos campos la funcional generatriz del modelo toma la forma:

$$Z = \int D\bar{\Psi}D\Psi DA_\mu^a D_\mu^a \exp\{i\int d^2x(\mathcal{L}_{EF} + \mathcal{L}_{FUENTES})\} \tag{3.10}$$

donde:

$$\mathcal{L}_{EF} = \bar{\psi}\gamma.(\partial - g_A a - g_N A)\Psi + \frac{1}{2}a_\mu a^\mu + tr(A_\mu A^\mu) \tag{3.11}$$

Hemos definido $A_\mu = A_\mu^a t^a$ siendo t^a los generadores hermíticos de SU(N) en la representación fundamental:

$$[t^a, t^b] = if^{abc}t^c \tag{3.12}$$

normalizados según $tr(t^a t^b) = \frac{1}{2}\delta^{ab}$.

Notemos que aunque los campos vectoriales A_μ y a_μ interactúan minimamente con los campos fermiónicos la teoría no es invariante de gauge debido a la presencia de los términos cuadráticos a^2 y A^2.

A causa del papel manifiestamente distinto que juegan las simetrías U(1) respecto de la SU(N) es conveniente tratarlas separadamente. Destinaremos la siguiente sección al análisis del sector se simetría U(1) y la subsiguiente al análisis del sector SU(N).

3.3 Bosonización. Sector U(1)

Es posible factorizar fácilmente la contribución U(1) de los campos fermiónicos realizando un adecuado cambio de variables. En efecto puesto que en 2 dimensiones todo campo vectorial bajo ciertas condiciones generales, puede descomponerse en la suma $\bar{a} = rot\phi + div\eta$ podemos entonces realizar la siguiente transformación (Furuya, Gamboa Saraví y Schaposnik, 1982):

$$a_\mu = \frac{1}{g_A}(\varepsilon_{\mu\nu}\partial_\nu\phi - \partial_\mu\eta) \tag{3.13}$$

$$\begin{aligned} \Psi &= e^{(i\eta+i\gamma 5\phi)}\chi = U_o\chi \\ \bar{\Psi} &= \bar{\chi}e^{(-i\eta+i\gamma_5\phi)} = \bar{\chi}\bar{U}_o \end{aligned} \tag{3.14}$$

Teniendo en cuenta las particulares propiedades de las matrices de Dirac en 2 dimensiones, es fácil mostrar que el anterior cambio de variables desacopla completamente al campo a_μ de los campos fermiónicos en el lagrangiano (3.11). Estas transformaciones, cuando se las introduce en la funcional generatriz Z, no están libres de un jacobiano.

Consideremos por ejemplo la transformación (3.13). Puede demostrarse fácilmente que su jacobiano asociado es de la forma:

$$Da_oDa_1 = \det(-\frac{1}{g_A^2}\partial_\mu\partial^\mu)D\phi D\eta. \tag{3.15}$$

Este determinante se puede exponenciar utilizando ghosts anticonmutantes ξ y $\bar{\xi}$:

$$\det(-\frac{1}{g_A^2}\partial_\mu\partial^\mu) = \int D\bar{\xi}D\xi \exp\{\frac{i}{g_A^2}\int d^2x\bar{\xi}\Box\xi\} \tag{3.16}$$

Denominaremos Z_{gh} a esta contribución a la funcional generatriz, que por no depender de los campos η, ϕ ni ξ, solo tendrá relevancia en el cálculo de aquellas magnitudes que involucren a la métrica (por ejemplo el tensor de energía impulso).

Mencionaremos que una teoría de ghosts como la definida en (3.16) es invariante conforme. Las componentes holomórficas y antiholomórficas del tensor de energía impulso:

$$\begin{aligned} T_{GH}(Z) &= \, :\partial_Z\bar{\xi}\partial_Z\xi: \\ \bar{T}_{GH}(\bar{Z}) &= \, :\partial_{\bar{Z}}\bar{\xi}\partial_{\bar{Z}}\xi: \end{aligned} \tag{3.17}$$

satisfacen álgebras de Virasoro con carga central $c = -2$.

El jacobiano asociado al cambio de variables fermiónicas (ec. (3.15)) requiere más cuidado. Fujikawa (Fujikawa, 1979) ha mostrado que siendo la medida de integración fermiónica sensible a los cambios quirales, la transformación (3.15) involucra un jacobiano no trivial dependiente de los campos ϕ y η. Este jacobiano puede evaluarse usando diferentes técnicas de regularización como el método de función ξ de Riemann (Gamboa Saraví, Muschietti, Schaposnik y Solomin, 1984) o el método del núcleo de la ecuación del calor (heat-kermel) (Fujikawa, 1979,1980). El resultado es: (Furunya, Gamboa Saraví y Schaposnik, 1982, 1987):

$$J_\tau = \exp\{\frac{i}{2\pi}\int d^2x\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi\}\exp\{\frac{iag_A^2}{2\pi}\int d^2x a_\mu a_\mu\} \tag{3.18}$$

donde a es un parámetro indeterminado relacionado con la prescripción de regularización utilizada. En particular el valor de $a = 0$ corresponde a una regularización invariante de gauge (regularización que no está justificada en nuestro caso pues el lagrangiano (3.11) *no* es invariante de gauge).

En términos de las nuevas variables, la funcional generatriz Z se escribe:

$$Z = Z_{SU(N)}.Z_{U(1)}.Z_{Gh} \tag{3.19}$$

donde

$$Z_{SU(N)} = \int D\bar{\chi}D\chi DA_\mu \exp\{i\int d^2x[\bar{\chi}\gamma.(i\partial - g_N A)\chi + trA_\mu A^\mu\} \tag{3.20}$$

y

$$Z_{U(1)} = \int D\phi D\eta \exp\{\tfrac{i}{2\pi}\int d^2x[(1 + a + \tfrac{\pi}{g_\mu^2})\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi + (a + \tfrac{\Pi}{g_A^2}).\partial_\mu\eta\partial_\mu\eta]\} \tag{3.21}$$

La funcional *"semi-bosonizada"* (3.19), (3.20) y (3.21) permite ver fácilmente cómo se desacoplan del resto las excitaciones no masivas asociadas a la simetría U(1). Evaluemos por ejemplo la función de correlación de 2 puntos $< \Psi(\chi)\bar{\Psi}(0) >$. Una vez realizadas las transformaciones (3.13) y (3.15) descubrimos que la contribución U(1) se factoriza:

$$
\begin{aligned}
< \Psi(x)\bar{\Psi}(0) > &= < U_o\chi(x)\bar{\chi}\bar{U}_o(0) > \\
&= < \chi(x)\bar{\chi}(o) >_{SU(N)} < U_o(x)U_o^*(o) >_{U(1)}
\end{aligned}
\tag{3.22}
$$

El primer valor de expectación se obtiene a partir de la funcional $Z_{SU(N)}$ (ecuación (3.20)) y el segundo a partir de $Z_{U(1)}$ (ecuación (3.21)). Este último cálculo puede hacerse exactamente en forma simple:

$$
< U_o(x)U_o^*(o) >= (\mu|\chi|)^{-H(G_A)} \tag{3.23}
$$

con

$$
H(g_A) = \frac{g_A^2}{2\pi + \frac{2g_A^2}{a}}\left[1 - \frac{1}{1 + \frac{g_A^2/\pi}{1+g_A^2 a/\pi}}\right] \geq 0 \tag{3.24}
$$

El fenómeno del desacoplamiento de las excitaciones no masivas así como el comportamiento tipo potencia en lugar de exponencial decreciente asociado a la ruptura de simetría para el valor de expectación (3.23) fue predicho por Witten quien afirmó de acuerdo a este resultado que el modelo no presenta ruptura de simetría. Es importante notar que si $g_A = g_N/N$ se obtiene en el límite $N \to \infty$ un valor de expectación no nulo para grandes distancias, es decir que la simetría está realmente rota en $N = \infty$ como adelantaron Gross y Neveu.

3.4 Bosonización. Sector SU(N)

Estudiemos ahora el sector de simetría SU(N). Es posible desacoplar el campo A_μ de las variables fermiónicas realizando un cambio de variables similar al realizado en la sección anterior. Escribamos

$$
\chi_L = g^1\eta_L \ , \ \chi_R = h^{-1}\eta_R \tag{3.25}
$$

para las componentes fermiónicas de quiralidad izquierda y derecha respectivamente. Los campos bosónicos g y h toman valores en el grupo SU(N) y estan relacionados con A_μ a través de las ecuaciones:

$$
\begin{aligned}
A_+ &= -(\frac{i}{g_N})g^{-1}\partial_+ g \\
A_- &= -(\frac{i}{g_N})h^{-1}\partial_- h
\end{aligned}
\tag{3.26}
$$

Estos cambios de variables desacoplan totalmente las variables fermiónicas de las bosónicas y como en el caso abeliano tienen asociados jacobianos cuando se efectúan en la medida integración de la funcional generatriz.

Comencemos analizando la transformación fermiónica (3.25). Su jacobiano asociado es:

$$
J_F = \frac{\det[\gamma.(i\partial - g_N A)]}{i\gamma.\partial} \tag{3.27}
$$

donde ambos determinantes deben calcularse mediante una regularización adecuada. Usando las técnicas ya mencionadas para el caso abeliano se obtiene el resultado (Polyakov y Weigmann, 1983).

$$
J_F = \exp\{-iW[gh^{-1}] - i\alpha Tr[\int d^2x g^{-1}\partial_+ g h^{-1}\partial_- h]\} \tag{3.28}
$$

donde $W[U]$ es la acción de W-Z-W definida en el capítulo II (ecuación (2.95). Nuevamente encontramos un parámetro indeterminado, α , que refleja las distintas posibilidades de regularización en el cálculo de los determinantes. Por ejemplo el valor $\alpha = 0$ corresponde a una regularización invariante de gauge ($J_F(\alpha = 0)$ es un escalar bajo las transformaciones locales $g \to g\mho$ y $h \to h\mho$ con $\mho \in SU(N)$); en cambio el valor $\alpha = -1/4\pi$ corresponde a una regularización que preserva la simetría global quiral SU(N) (es decir $g \to gV$ y $h \to hW$ con $V, W \in SU(N)$. Este último resultado se verifica fácilmente usando la identidad de Polyakov-Weigmann (ecuación (2.91) del Capítulo II), pues en este caso J_F toma la forma:

$$
J_F(\alpha = -1/4\pi) = \exp\{-iW[g] - iW[h^1]\} \tag{3.29}
$$

y la simetría es obvia.

Analicemos ahora los jacobianos asociados a las transformaciones (3.26). Tenemos:

$$\begin{aligned} DA_+ &= J[g]Dg \\ DA_- &= J[h]Dh \end{aligned} \tag{3.30}$$

y es fácil ver, considerando una transformación infinitesimal en (3.26), que:

$$J[g] = \det(\frac{A_+(g)}{g^{-1}\delta g}) = \det D^{ADJ}(A_+) \tag{3.31}$$

donde $D^{ADJ}(A)$ es la derivada covariante en la representación adjunta. Existe un resultado que relaciona el determinante en la representación fundamental con el determinante en la representación adjunta. En efecto, como se muestra en el apéndice vale la siguiente identidad:

$$\det\left[\frac{D^{ADJ}(A_+)}{D^{ADJ}(0)}\right] = \left\{\det\left[\frac{D^{FUND}(A_+)}{D^{FUND}(0)}\right]\right\}^{2C_{SU(N)}} \tag{3.32}$$

donde $C_{SU(N)}$ es el Casimir del grupo SU(N) η la representación adjunta. Para nuestra elección de los generadores tenemos:

$$C_{SU(N)} = N \tag{3.33}$$

Una vez calculadas todas las contribuciones a $Z_{SU(N)}$ podemos finalmente escribir:

$$\begin{aligned} Z_{SU(N)} &= \int D\bar{\eta}D\eta e^{i\int d^2x\bar{\eta}\partial\!\!\!/\eta} \\ &\quad . \int DgDhe^{i\{-(2N+1)W[gh^{-1}]-(\frac{1}{g_N^2}+(2N+1)\alpha)\int d^1x tr(g^{-1}\partial+g1h^{-1}\partial-h)} \\ &\quad . \det(\partial_+^{ADJ})\det(\partial_-^{ADJ}) \end{aligned} \tag{3.34}$$

Los 2 últimos determinantes (que provienen de las ecuaciones (3.31) y (3.32)) pueden exponenciarse usando ghosts anticonmutantes $\rho_\pm^a, \varepsilon^a$ en la representación adjunta de

SU(N).

$$\det(\partial_+^{ADJ})\det(\partial_-^{ADJ}) =$$

$$\int D\rho_+^a D\rho_-^a D\bar{\varepsilon} D\varepsilon \exp\{i \int d^2x (\rho_+^a \partial_- \bar{\varepsilon}^a + \rho_-^a \partial_+ \varepsilon^a)\} \quad (3.35)$$

Llamaremos $\bar{Z}$ a esta contribución, que como en el caso abeliano corresponde a una teoría conforme. Puede comprobarse que $\det \partial_+^{ADJ}$ solo contribuye a la componente holomórfica del tensor de energía impulso y $\det \partial_-^{ADJ}$ a la antiholomórfica. Ambas componentes satisfacen un álgebra de Virasoro con una carga central $c = -2 \dim SU(N) = -2(N^2 - 1)$.

3.5 Invarianza Conforme

Mostraremos en esta sección que la funcional generatriz (3.34) corresponde a una teoría invariante conforme cuando la constante de acoplamiento g_N toma determinados valores.

Es inmediato ver de la ecuación (3.34) que un posible modelo invariante conforme se obtiene ajustando la constante de acoplamiento g_N de manera tal que cancele el término cuadrático A_+A_-, es decir que se verifique:

$$\frac{1}{g_N^2} + (1 + 2N)\alpha = 0 \quad (3.36)$$

Para esta elección de g_N (que llamarenos g_N^*) la acción efectiva $Z_{SU(N)}$ posee una invarianza *local* $SU(N)$: $g \to gU(x), h \to hU(x)$ $(U \in SU(N))$. Debido a esta invarianza local, la definición correcta de la funcional generatriz exige que se divida por el volumen del grupo de integración $\Omega_{SU(N)}$. Luego si redefinimos $U = gh^{-1}$ (la medida de integración Dg es la medida invariante de Haar) obtenemos:

$$\frac{Z_{SU(N)}}{\Omega_{SU(N)}} = \int D\bar{\eta} D\eta e^{i\int d^1x \bar{\eta}\bar{\partial}\eta} . \bar{Z}_{gh} . \int DU e^{-i(2N+1)W[U]} \quad (3.37)$$

puesto que la integración en h es trivial y se cancela con $\Omega_{SU(N)}$. Es decir , obtuvimos una acción efectiva constituida por tres factores independientes, cada uno de los cuales corresponde a una teoría invariante conforme:

a) fermiones libres.

b) ghosts libres.

c) bosones con una acción de W-Z-W.

Concluímos entonces, a la luz de los resultados del Capítulo II, que para el valor de la constante de acoplamiento:

$$g^{*2} = -\frac{1}{(1+2N)\alpha} \tag{3.38}$$

la teoría es racional conforme y las corrientes asociadas a las simetrías quirales $SU(N)_L \times SU(N)_R$ del modelo de W-Z-W:

$$\begin{aligned} J_+ &= i(2N+1)U^{-1}\partial_+ U \\ J_- &= i(2N+1)U\partial_- U^{-1} \end{aligned} \tag{3.39}$$

satisfacen un álgebra de Kac-Moody con nivel $K = 2N + 1$ y teniendo en cuenta las contribuciones de los ghosts y la de los campos abelianos ϕ y η, el álgebra de Virasoro que satisface el tensor de energía impulso total posee una carga central:

$$c = 1 \tag{3.40}$$

Notemos que la simetría quiral $U \longrightarrow \Omega(x^-)U\Lambda^{-1}(X^+)$ que posee el modelo en este punto, es trivial debido a nuestra elección de la parametrización de los campos A_+ y A_- en función de los campos g y h, y por lo tanto no corresponde a una simetría de los fermiones originales.

Es posible encontrar otro valor crítico de g_N para el cual la teoría tambien presenta invarianza conforme. Utilizando la identidad de Polyakov-Wiegmann podemos escribir a $Z_{SU(N)}$ de la forma:

$$\begin{aligned} Z_{SU(N)} = Z_F \;\cdot\; & \bar{Z}_{gh} \cdot \int DgDh e^{i\{-(2N+1)W[g]-(2N+1)W[h^{-1}\}} \\ & \cdot\; e^{-i\{\frac{1}{g_N^2}+(2N+1)(\alpha+\frac{1}{4\pi})\}\int d^2x Tr(g^{-2}\partial+gh^{-1}\partial-h)} \end{aligned} \tag{3.41}$$

(Z_F es la función generatriz de los fermiones libres). Se ve entonces claramente que fijando g_N, de tal manera que anula la última exponencial:

$$g_N^{**2} = -\frac{1}{(2N+1)(\alpha + 1/4\pi)} \tag{3.42}$$

la funcional generatriz corresponde nuevamente a un modelo invariante conforme. En este caso la carga central de Virasoro (teniendo en cuenta la totalidad de los campos) será:

$$c = 2N^2 - N \tag{3.43}$$

Es importante notar que en este último caso la acción efectiva tiene una invarianza quiral global SU(N) x SU(N) frente a transformaciones de la forma:

$$g \to gA \ , \ h \to hB \ \ (A, B \epsilon SU(N)) \tag{3.44}$$

que se corresponden exactamente con las transformaciones quirales de las variables fermiónicas originales:

$$\Psi_L \to A^{-1}\Psi_L \ , \ \Psi_R \to B^{-1}\Psi_R \tag{3.45}$$

como puede verse de las ecuaciones (3.25). Es decir que para el valor de acoplamiento g^{**} , la simetría vectorial se extiende a una simetría quiral.

Concluímos entonces que existen dos valores críticos de la constante de acoplamiento g_N , dados en (3.38) y (3.42) para los cuales el modelo deviene racional conforme y la simetría vectorial global SU(N) se extiende a una simetría vectorial *local* SU(N) en el primer caso y a una simetría *quiral* global SU(N) en el segundo.

Como habíamos mencionado en la introducción R.Dashen y Y.Frishman habían notado parte de este fenómeno. En efecto ellos mostraron que para ciertos valores de g_N el modelo presenta simetría conforme. Eligiendo en nuestro modelo bosonizado la regularización $\alpha = -1/4\pi$ (que asegura la equivalencia entre la acción de W-Z-W y una acción de fermiónes libres) obtenemos el valor crítico hallado por Dashen y

Frishman:

$$g_N^{*2} = \frac{4\pi}{2N+1} \tag{3.46}$$

(en la referencia Dashen y Frishman, 1975) aparece incorrectamente $(N+1)$ en el denominador de (3.46)).

Para esta regularización no existe ningún valor finito de g_N^{2**} como puede verse de la ecuación (3.42). En este caso g_N^{*2} es el único punto crítico de la teoría.

Concluimos señalando que el haber hallado que el modelo de Gross-Neveu es invariante conforme para ciertos valores de la constante de acoplamiento es uno de los resultados importantes de esta tesis. En particular confirmamos por primera vez en forma explícita el comportamiento predicho por el teorema C de Zamalodchikov (Zamolodchikov, 1986; Ludwig y Cardy, 1986). En efecto vemos que el modelo corresponde a una teoría en la que puede definirse una función C(g) tal que $C(g^*)$ y $C(g^{**})$ corresponden a valores de la carga central de Virasoro en los puntos g^* y g^{**} donde el modelo es invariante conforme.

Capítulo 4

Modelos Fermiónicos Constreñidos y Topología

4.1 Introducción

Trataremos en este capítulo una clase especial de modelos constreñidos en los cuales juegan un importante papel las propiedades topológicas de los campos. Los modelos constreñidos son teorías cuánticas de campos fermiónicos o bosónicos que dan realizaciones explícitas de la construcción del coset. Recordemos que esta construcción permitía obtener teorías conformes racionales con simetrías G/H (H es un subgrupo del grupo de Lie G) a partir de las teorías racionales asociadas a los grupos G y H. En particular para ciertas elecciones de los grupos G y H es posible obtener la serie de valores de $c < 1$ compatibles con representaciones unitarias del álgebra de Virasoro (series FQS, ecuación (2.54) del Capítulo II) así como otras importantes series conformes (ver Cabra, Moreno y von Reichenbach, 1990).

Los modelos constreñidos han adquirido notoriedad pues permitirían representar teorías de campos asociados a modelos estadísticos bidimensionales en el punto crítico. Ciertos modelos estadísticos durante las transiciones de fase de 2^{do} orden son descriptos por teorías conformes minimales unitarios y por lo tanto el valor de la carga central del álgebra conforme pertenece a la serie FQS. Por ejemplo los primeros valores de esta serie $c = 1/2, 7/10, 4/5, 6/7$ corresponden a teorías conformes identificadas respectivamente con el modelo de Ising, el modelo de Ising tricrítico, el modelo de Potts y el modelo de Potts tricrítico. Estas identificaciones se hicieron comparando los pesos conformes permitidos con las dimensiones de escala de los operadores de estos modelos.

Otra importante aplicación de los modelos constreñidos es en problema de la compactificación, tema central de la teoría de cuerdas. El método mas simple de compactificación es la compactificación toroidal, descripta por una teoría racional conforme de fermiones y bosones sobre la hoja del universo (con simetría SO(N)). El método que le sigue en complejidad hace uso de la construcción del coset. Proyectando el grupo inicial de compactificación sobre un adecuado subgrupo es posible construir varios modelos no triviales.

En este capítulo consideraremos un modelo fermiónico constreñido en el que el multiplicador de Lagrange que hace efectivo el vínculo posee una estructura topológica no trivial. En particular estudiaremos la carga central de esta teoría y obtendremos un tensor de energía impulso de bosones libres modificado por un término adicional similar al propuesto por I. Dotsenko y V.Fateev (Dotsenko y Fateev, 1984, 1985). Estos autores mostraron que las funciones de correlación de la teoría conforme general en 2 dimensiones pueden ser representadas por valores de expectación de operadores de vértice en un gas de Coulomb con condiciones de contorno no triviales. Su trabajo encontró numerosas aplicaciones y es una de las contribuciones básicas de los últimos años a las teorías conformes.

Partiendo de una teoría de bosones libres y con el objeto de obtener modelos minimales, introdujeron mediante un operador de vértice, una "carga de fondo" ("background") en el infinito. Como consecuencia inmediata se modifican las condiciones de contorno de los campos bosónicos que se manifiestan por la adición de un nuevo término en el tensor de energía impulso holomórfico . Este término adicional se determina estudiando las características de la EPO del nuevo tensor con los operadores de vértice y resulta:

$$\Delta T(z) = i\alpha_0 \frac{\partial^2}{\partial z^2}\phi(z) \tag{4.1}$$

donde $2\alpha_0$ es la "carga de background" y $\phi(z)$ es el campo bosónico.

Puesto que el nuevo término que adquiere el tensor de energía impulso es imaginario la teoría que el define no es unitaria para un valor arbitrario de α_0. En efecto, un cálculo sencillo muestra que la carga central asociada al nuevo modelo es:

$$c = 1 - 12\alpha_0^2 \tag{4.2}$$

que corresponde a una teoría minimal, y como ya hemos mencionado, solo los valores discretos de c dados en la serie FOS son compatibles con teorías unitarias minimales.

En este capítulo obtendremos a partir de la teoría constreñida antes mencionada, un tensor holomórfico de energía impulso con una modificación similar a la dada en la ecuación (4.1). Sin embargo en nuestro modelo el término adicional surge naturalmente real y consecuentemente la teoría que define es automáticamente unitaria. Debido a la ecuación (4.2) en nuestro caso la carga central c se ve incrementada y no se obtienen modelos minimales.

4.2 Modelos Fermiónicos Constreñidos

Discutiremos brevemente en esta sección sobre los modelos fermiónicos constreñidos. Esta discusión nos servirá de introducción al planteo del problema concreto al que este capítulo se refiere y que abordaremos en la sección siguiente.

Habíamos mencionado en el Capítulo II sección 7 el mecanismo ideado por Goddard, Kent y Olive que permite, a partir de una teoría racional, con simetría quiral G, obtener otra con simetría G/H (H es un subgrupo de G) sustrayendo a los generadores de Virasoro de la teoría original, los generadores asociados al subgrupo H.

Este mecanismo, **construcción del coset**, es una construcción general puramente algebraica y permite describir cualquier estado en la representación del grupo G como una suma directa de productos de representaciones de estados del subgrupo H y el espacio cociente G/H. Sin embargo esta construcción no pone de manifiesto la teoría cuántica de campos cuya álgebra racional conforme posee estas simetrías. Este es un interesante problema adicional. Los autores antes citados ya habían sugerido que tal teoría de campos podría obtenerse a partir de una teoría racional conforme imponiendo vínculos sobre las corrientes asociados al subgrupo de simetría divisor. Teniendo en cuenta esta sugerencia se han construído teorías de campos bosónicos y fermiónicos que realizan la construcción del coset (ver por ejemplo (Cabra, Moreno, y von Reichenbach, 1990) y las referencias allí citadas).

Para cumplir con el propósito de este capítulo solo mencionaremos en esta sección cual es el lagrangiano fermiónico que produce la construcción del coset sin considerar los cálculos que lo prueban.

El lagrangiano tiene la forma:

$$\mathcal{L} = \bar{\Psi} i\gamma.\partial\Psi + j^{\mu a} A^a_\mu \quad a = 1, \cdots, \dim H \tag{4.3}$$

donde Ψ es un fermión de Dirac de K componentes, $j^{\mu a}$ son las corrientes de Noether asociadas al subgrupo de simetría $H \subset U(K)$ que se quiere constreñir:

$$j^{\mu a} = \bar{\Psi}\gamma^\mu t^a \Psi \quad (t^a \ generadores \ de \ H) \tag{4.4}$$

y A^a_μ son los correspondientes multiplicadores de Lagrange. Teniendo en cuenta que la teoría definida por el lagrangiano (4.1) es invariante de gauge y usando las técnicas de bosonización mediante la integral funcional descriptas en el capítulo anterior, puede demostrarse que esta teoría es racional conforme y que su álgebra de Virasoro posee una carga central:

$$c = c_{U(K)} - \frac{k \dim H}{k + C_H} \tag{4.5}$$

en completo acuerdo con la construcción del coset (ecuación (2.71) del Capítulo II). (Aquí $c_{U(K)}$ es la carga central de una teoría racional con simetría U(K) y las demás constantes son las definidas en el Capítulo II).

4.3 Contribución de Sectores Topológicos.

Estudiaremos en esta sección y las siguientes una teoría definida por un lagrangiano similar al dado en la ecuación (4.3) pero con la particularidad de que el multiplicador de Lagrange A_μ posee una estructura topológica no trivial. Consideraremos el caso simple en el que A_μ es un campo abeliano con un flujo total no nulo a través de una superficie compacta. Analizaremos esta teoría siguiendo la propuesta de Bardakci y Crescimanno (Bardakci y Crescimanno, 1989) para tratar campos con topología no trivial. Veremos que en este caso la ecuación (4.5) que da el valor de la carga central, se modifica para depender del valor de la carga topológica. Esta dependencia es similar a la obtenida por Dotsenko y Fateev (ecuación (4.2)) con la carga topológica jugando el rol de la "carga de background". Los resultados originales de este capítulo se encuentran expuestos en detalle en la referencia (Cabra y Moreno, 1989).

Sea entonces el lagrangiano (4.3) donde el grupo constreñido H es $U(1)$. La corriente es:

$$j^\mu = \bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi \tag{4.6}$$

y el lagrangiano se puede entonces escribir:

$$\mathcal{L} = \bar{\Psi}\gamma.(i\partial + A)\Psi \tag{4.7}$$

(los fermiones de Dirac se transforman en la representación fundamental de $U(K)$).

El multiplicador de lagrange A_μ se encuentra en el sector de carga topológica N (el flujo de A_μ está cuantificado en múltiplos enteros de la carga fundamental del vórtice).

$$\frac{1}{4\pi}\int_{S^2} {}^*F d^2x = N \quad N\epsilon Z \tag{4.8}$$

donde S^2 es la esfera bidimensional y $^*F$ es el dual del tensor del campo electromagnético $F_{\mu\nu}$.

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \tag{4.9}$$

La funcional generatriz de la teoría tiene la forma:

$$Z_N = \int D\bar{\Psi} D\Psi D A_\mu^N \exp\{-\int \bar{\Psi}\gamma.(i\partial + A^N)\Psi d^2x\} \tag{4.10}$$

donde la integración en el campo A_μ esta restringida al sector de carga topológico N.

La funcional generatriz Z_N tiene una invarianza manifiesta de gauge $U(1)$:

$$\Psi \to e^{i\phi}\Psi, \quad \bar{\Psi} \to \bar{\Psi}e^{-i\phi} \tag{4.11}$$

$$A_\mu \to A_\mu + \partial_\mu \phi \tag{4.12}$$

y con el fin de obtener una teoría bien definida el gauge debe ser fijado. Elegimos la condición de Lorentz:

$$\partial_\mu A_\mu = 0 \tag{4.13}$$

cuyo correspondiente determinante de Fadeev-Popov es:

$$\Delta_{FP} = \det(-\partial_\mu \partial^\mu) = \int D\bar{\eta} D\eta e^{i\int \bar{\eta}\Box\eta d^2x} \tag{4.14}$$

donde hemos usado la representación funcional del determinante por medio de ghosts escalares anticonmutantes (ver ecuación (3.16) del Capítulo III).

La teoría definida por la acción efectiva Z_N podrá bosonizarse realizando un cambio de variables desacoplante (ecuación (3.13) y (3.14) del Capítulo III). Las transformaciones:

$$A_\mu = \varepsilon_{\mu\nu}\partial_\nu \phi \tag{4.15}$$

$$\chi = e^{\gamma 5\phi}\Psi \quad , \quad \bar{\chi} = \bar{\chi}e^{\gamma 5\phi} \tag{4.16}$$

desacoplan totalmente al campo de gauge de los fermiones y el jacobiano que producen es:

$$J = \exp\{-\frac{1}{2\pi}\int \partial_\mu\phi\partial^\mu\phi d^2x\} \tag{4.17}$$

(usamos una regularización invariante de gauge). Es decir la teoría deviene una teoría de fermiones y bosones libres no masivos.

Sin embargo la transformación (4.15) solo es regular si A_μ pertenece al sector de topología nula pues es imposible definir al campo A_μ *de manera global* satisfaciendo la condición de cuantificación del vórtice (ecuación (4.8)) con $N \neq 0$. Existe, no obstante la posibilidad de desacoplar parcialmente al campo A_μ de los fermiones. Para ello escribamos:

$$A_\mu = \tilde{A}_\mu^N + \varepsilon_{\mu\nu}\partial_\nu\phi \tag{4.18}$$

donde $\tilde{A}_\mu^N$ es una configuración fija con carga topológica N y el campo ϕ puede ser definido globalmente ya que su contribución corresponde al sector de topología nula. De esta manera al realizar la transformación (4.18) junto a la transformación fermiónica (4.16) se separan en el lagrangiano los términos fermiónicos de los términos dependientes del campo ϕ.

El jacobiano asociado a esta trasformación involucra al campo $\tilde{A}_\mu^N$ y tiene la forma:

$$J_F = \exp\{-\frac{1}{2\pi}\int\{\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \phi^*\tilde{F}\} \tag{4.19}$$

donde ${}^*\tilde{F} = 2\varepsilon_{\mu\nu}\partial_\mu\tilde{A}_\nu^N$

La funcional generatriz Z_N (ecuación (4.10)) toma entonces la forma:

$$\begin{aligned} Z_N &= \int D\bar{\chi}D\chi D\phi\Delta_{FP}.\exp\{-\int d^2x[\bar{\chi}\gamma.(i\partial + \tilde{A}^N)\chi - \\ &\quad -\frac{1}{2\pi}(\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi \ + \frac{1}{2\pi}\phi^*\tilde{F}]\}. \end{aligned} \tag{4.20}$$

Dedicaremos las siguientes secciones a hallar la carga central de Virasoro de este modelo a partir de la funcional generatriz (4.20).

4.4 Carga Central de Virasoro. Fermiones

Calcularemos en esta sección la contribución a la carga central proveniente de la parte fermiónica de la acción efectiva (4.20). Para este fin debemos estudiar el término no regular en la EPO del tensor de energía impulso con si mismo.

Una propiedad importante de este modelo es que debido a la existencia de una estructura topológica no trivial en el campo $\tilde{A}_\mu^N$, el teorema del índice garantiza que la ecuación de Dirac:

$$\gamma.(i\partial + \tilde{A}^N)\eta = 0 \tag{4.21}$$

posee $K|N|$ soluciones de cuadrado integrable.

Estos modos cero pueden hallarse explicitamente y son de quirialidad derecha para $N > 0$ y de quiralidad izquierda para $N < 0$:

$$\begin{aligned} \eta_i^a &= \begin{bmatrix} \eta_{R_i}^a \\ 0 \end{bmatrix} \quad N > 0 \\ \eta_i^a &= \begin{bmatrix} 0 \\ \eta_{Li}^a \end{bmatrix} \quad N < 0 \end{aligned} \tag{4.22}$$

$a = 1, \cdots, |N|; i = 1, \cdots, K$.

El cálculo del valor de expectación de vacío de una función fermiónica $F[\bar{\chi}, \chi]$ se obtiene, en el marco de la integral funcional, efectuando las correspondientes integrales de Grassmann. Para ello se desarrollan los campos fermiónicos $\bar{\chi}$ y χ en autofunciones del operador de Dirac:

$$\begin{aligned} \chi &= \sum_{a=1}^{|N|} C^a \eta^a + \sum_m C^m \rho^m \\ \bar{\chi} &= \sum_{a=1}^{|N|} \bar{C}^a \bar{\eta}^a + \sum_m \bar{C}^m \bar{\rho}^m \end{aligned} \tag{4.23}$$

donde $(\bar{\eta}^a, \eta^a)$ son los modos cero (ecuación (4.22)), $(\bar{\rho}^m, \rho^m)$ son las demás autofunciones del operador de Dirac y $C, \bar{C}$ son variables de Grassmann:

$$\{C_i, C_j\} = \{\bar{C}_i, C_j\} = \{\bar{C}_i, \bar{C}_j\} = 0 \quad \forall i, j. \tag{4.24}$$

La integración se realiza sobre las variables de Grassmann con las reglas de integración de Berezin:

$$\int dC_i = 0 \ , \ \int dC_i C_j = \delta_{ij}. \tag{4.25}$$

Puede demostrarse que tal valor de expectación es nulo a menos que $F[\bar{\chi}, \chi]$ contenga un término con exactamente $|N|$ factores de la forma $\bar{\chi}_L \beta \chi_R$ si $N > 0$ ó $\bar{\chi}_R \beta \chi_L$ si $N < 0$ (β es un operador arbitrario). En particular cualquier función de correlación de un número arbitrario de operadores $\bar{\chi}_R \beta \chi_R$ es nula. (El mismo resultado se obtiene con operadores de la forma $\bar{\chi}_L \beta \chi_L$).

Concluimos entonces que no hay contribución fermiónica a la carga central total. La parte fermiónica de la funcional generatriz solo aparece como un factor multiplicativo el cual se cancela en el cálculo de valores de expectación de vacío del tensor de energía-impulso (Debe notarse que debido a los modos cero este factor es nulo y debe ser regularizado).

4.5 Carga Central de Virasoro. Bosones

Resuelto el sector fermiónico, nos dedicaremos a resolver la anomalía conforme para el vector bosónico. Debemos entonces evaluar la función de correlación:

$$< T_B(z) T_B(w) >= \frac{1}{Z_B} \int D\phi T_B(z) T_B(w) \bar{e}^{S_R} \tag{4.26}$$

donde Z_B es el factor bosónico de la funcional generatriz total:

$$Z_B = \int D\phi \exp\{-S_B[\phi, \tilde{A}_\mu]\}. \tag{4.27}$$

S_B esta dado por:

$$S_B = \frac{1}{2\pi} \int [\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \phi^* \tilde{F}] d^2x \tag{4.28}$$

y T_B es el tensor de energía-impulso asociado a la acción (4.27).

Es útil para nuestros propósitos, escribir al campo $\tilde{A}^N_\mu$ en la forma:

$$\tilde{A}^N_\mu = N \tilde{A}^1_\mu \tag{4.29}$$

donde el campo $\tilde{A}^1_\mu$ tiene carga topológica 1. Parametricemos ahora al campo $\tilde{A}^1_\mu$:

$$\tilde{A}^1_\mu = \varepsilon_{\mu\nu}\partial_\nu\eta \tag{4.30}$$

(la definición de η no es global pues depende del sistema de coordenadas definido sobre la esfera). La acción S_B toma entonces la forma:

$$S_B = -\frac{1}{2\pi}\int(\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - 2N\phi\Box\eta)d^2x \tag{4.31}$$

y puede ser escrita como la acción de bosones sin masa interactuando con un campo gravitatorio convenientemente elegido. En efecto, consideremos en S^2 la acción:

$$S = -\frac{1}{2\pi}\int d^2x\sqrt{g}(g^{\alpha\beta}\partial_\alpha\phi\partial_\beta\phi - N\phi R) \tag{4.32}$$

donde R es la curvatura escalar.

Elegimos la métrica conformemente plana:

$$g_{\mu\nu} = e^{4\eta}\delta_{\mu\nu} \tag{4.33}$$

donde el campo η es el mismo que aparece en la (4.30). En esta métrica tenemos:

$$\sqrt{g}R = 2\partial_\mu\partial^\mu\eta \tag{4.34}$$

La elección de la métrica (4.33) para S^2 es consistente pues es compatible con el teorema de Gauss-Bonnet. Este teorema puede pensarse como un vínculo topológico sobre la curvatura de una superficie de determinado género y expresa:

$$\frac{1}{2\pi}\int_\Sigma \sqrt{g}Rd^2x = \chi(\Sigma) \tag{4.35}$$

donde $\chi(\Sigma)$ es la característica de Euler, que para una superficie compacta sin borde tiene la forma:

$$\chi(\Sigma) = 2g_\Sigma - 2 \tag{4.36}$$

donde g_Σ es el género de la superficie Σ. Para la esfera $\sum = S^2$ tenemos $g_{S^2} = 0$ y $\chi(S^2) = -2$.

En términos del campo η, el teorema de Gauss-Bonnet se escribe:

$$\int \partial_\mu \partial^\mu \eta = -2\pi \tag{4.37}$$

que no es más que la condición de cuantificación del vórtice (ecuación (4.8)) para el campo $\tilde{A}^1_\mu$ (ecuación (4.30)).

Luego, eligiendo la métrica conformemente plana (4.33) la acción (4.32) resulta idéntica a la acción (4.31).

La acción (4.32) es invariante bajo transformaciones generales de coordenadas. Elegimos entonces el campo η de manera tal que toda la curvatura esté concentrada en el polo norte, el punto infinito en la esfera de Riemann.

El tensor holomórfico de energía -impulso para esta teoría se calcula variando la acción respecto de la métrica. Evaluando luego en la métrica elegida se obtiene:

$$T(Z) = -\frac{1}{2} : \partial_Z \phi \partial_Z \phi : + \frac{N}{2} \partial_Z^2 \phi \tag{4.38}$$

El 2^{do} término del lado derecho de (4.38) proviene de la interacción de los bosones con la curvatura escalar y tiene la misma forma que la corrección encontrada por Dotsenko y Fateev (ecuación (4.1)). Notar sin embargo que el término adicional en (4.38) es real mientras que el dado es (4.1) es imaginario puro.

La contribución del sector bosónico a la carga central puede ahora evaluarse facilmente a partir de:

$$< T_B(w) T_B(Z) >= \frac{1}{2}(1 + 3N^2) \frac{1}{(Z-w)^4} \tag{4.39}$$

resultando el valor:

$$c_B = 1 + 3N^2 \tag{4.40}$$

El valor de la carga central total del álgebra de Virasoro se obtiene agregando a (4.40) la contribución proveniente del determinante de Faddeev-Popov (ecuación (4.14)). El valor de esta contribución ya fue mostrado en el Capítulo III:

$$c_{gh} = -2 \tag{4.41}$$

Concluimos que la carga central total en el sector de carga topológica N es:

$$c_T = 3N^2 - 1 \tag{4.42}$$

Es importante notar que este resultado solo es válido para $N \neq 0$. El caso $N = 0$ es especial puesto que la ecuación de Dirac (4.21) no posee soluciones de cuadrado integrable para este valor de N. Por lo tanto los fermiones libres *contribuyen* a la carga central total y tenemos:

$$C_T = K - 1 \quad (N = 0) \tag{4.43}$$

que corresponde a una teoría de fermiones libres con simetría $U(K)$ a la cual se le ha constreñido la corriente abeliana U(1). Este resultado concuerda con el obtenido por la construcción del coset en la ecuación (4.5).

En síntesis considerando una teoría fermiónica constreñido en un sector topológico no trivial obtuvimos una modificación al tensor de energía impulso dependiente de la carga topológica. Esta modificación es similar a la obtenida por Dotsenko y Fateev estudiando una teoría conforme de bosones con condiciones de contorno no triviales. Una diferencia entre el tratamiento de estos autores y el nuestro es que en este la modificación al valor de c surge naturalmente de considerar la contribución de sectores topológicos a la funcional generatriz que define la teoría mientras que en el caso de Dotsenko y Fateev resulta de introducir de manera ad-hoc condiciones de contorno no triviales.

Capítulo 5

Anomalías

5.1 Introducción

Por anomalía entendemos la invalidez de una simetría de la acción clásica debido al proceso de cuantificación. Como consecuencia la corriente asociada a la simetría, cuya conservación clásica está asegurada por el teorema de Noether, deja de ser conservada luego de la cuantificación. Llamamos a esta corriente anómala.

Las anomalías fueron descubiertas por J.Steimberger en el cálculo, en teoría de campos, de las amplitudes de decaimiento del proceso $\pi^o \longrightarrow 2\gamma$ basado en loops de fotones virtuales. Esta anomalía axial surge de la consideración del diagrama triangular fermiónico con una corriente axial y dos corrientes vectoriales. Imponiendo conservación de las corrientes vectoriales y simetría de Bose en los canales vectoriales se obtienen identidades de Ward anómalas así como una conservación anómala de la corriente axial: $\partial_\mu j_5^\mu \sim F^* F \neq 0$.

Numerosas anomalías, en muy diversas teorías han aparecido luego del pionero hallazgo de Steimberger; por ejemplo la anomalía de gauge no abeliana originada en una teoría de fermiones quirales acoplados a un campo de gauge no abeliano y la anomalía gravitacional que viola la conservación del tensor de energía impulso son los ejemplos mas conspicuos.

Fue Fujikawa quien hace más de 10 años estudió el origen de las anomalías en el formalismo de la integral funcional (Fujikawa, 1979,1980,1981). Demostró que para todos los casos conocidos, las anomalías son originadas por la existencia de un jacobiano no trivial que surge debido a la no invarianza de la medida de integración frente a las transformaciones de simetría. Evaluando explícitamente este jacobiano, Fujikawa obtuvo los resultados correctos de las divergencias anómalas así como las identidades anómalas de Ward. Existe también una interpretación alternativa para el origen de las anomalías en el formalismo de la integral funcional: la discrepancia entre las ecuaciones clásicas de campos y las ecuaciones cuánticas de campos (Tsutsui, 1989).

El requerimiento de cancelación de anomalías tiene consecuencias importantes. En la teoría electrodébil unificada SU(2) x U(1) , que es potencialmente anómala, impone el balance entre el número de quarks y el número de leptones; en la teoría de supercuerdas fija en 16 el rango del grupo de simetría interna que queda así esencialmente determinado.

Desarrollos recientes permiten estudiar las estructuras globales de las anomalías por medio de poderosas técnicas topológicas: teoremas del índice, flujo espectral, homotopía, cohomología y la estructura compleja de las variedades en 4 y más dimensiones.

Discutiremos brevemente en las secciones siguientes algunas propiedades concernientes a la anomalía axial abeliana y la anomalía de gauge no abeliana como introducción al capítulo siguente en que estudiaremos la cancelación de anomalías en modelos σ no lineales.

5.2 Anomalía Abeliana Axial

Analizaremos en esta sección la anomalía abeliana axial por medio del método de Fujikawa para el tratamiento de las anomalías (Fujikawa, 1979, 1980) y mencionaremos también su relación con el teorema del índice de Atiyah-Singer (Atiyah y Singer, 1968, 1971).

Consideremos una teoría definida sobre la esfera S^{2n} que consta de fermiones de Dirac acoplados a un campo de gauge externo que toma valores en el álgebra del grupo de Lie G. La acción efectiva fermiónica tiene la forma:

$$e^{-W[A]} = \int D\bar{\Psi} D\Psi e^{i\int d\chi^{2n}\bar{\Psi}\gamma.D\Psi} \tag{5.1}$$

donde $\gamma.D = \gamma^{\mu}(i\partial_{\mu} + A_{\mu})$ y $A_{\mu} = A^{a}_{\mu}t^{a}$ (t^{a} son los generadores hermíticos de G) (No es necesario incluir en la derivada covariante la conexión de spin puesto que la geometría local de S^{2n} no juega ningún rol en este problema).

La acción es invariante frente a las transformación global axial

$$\Psi \longrightarrow e^{i\gamma_5\alpha}\Psi \quad , \quad \bar{\Psi} \longrightarrow \bar{\Psi}e^{i\gamma_5\alpha} \tag{5.2}$$

($\gamma_5 = i^{n}\Pi^{2n}_{\mu=1}\gamma^{\mu}$). Consideremos entonces el siguiente cambio de variables local infinitesimal en la acción efectiva (5.1):

$$\Psi = \chi + i\alpha(x)\gamma_5\chi \ ; \ \bar{\Psi} = \bar{\chi} + \bar{\chi}\gamma_5 i\alpha(x) \tag{5.3}$$

La acción fermiónica se transforma:

$$i\int \bar{\Psi}\gamma.D\Psi d^{2n}x = i\int \bar{\chi}\gamma.D\chi d^{2n}x - i\int d^{2n}x(\partial_{\mu}j^{\mu}_{5})\alpha(x) \tag{5.4}$$

donde $j^{\mu}_{5} = \bar{\Psi}\gamma^{\mu}\gamma^{5}\Psi$.

Como ya hemos mencionado en capítulos anteriores el cambio quiral (5.3) trae asociado un jacobiano de Fujikawa no trivial $J(\alpha)$. Tenemos entonces:

$$e^{-W[A]} = J[\alpha]\int D\bar{\chi} D\chi e^{i\int d^{2n}x(\bar{\Psi}\gamma.D\,\Psi - \partial_{\mu}j^{\mu_5}\alpha)} \tag{5.5}$$

Derivando funcionalmente respecto de α en ambos miembros de la ecuación (5.5) obtenemos la ecuación de conservación anómala de la corriente axial:

$$\frac{\delta \ln J[\alpha]}{\delta\alpha(x)}|_{\alpha=0} = i < \partial_{\mu}j^{\mu}_{5}(x) > \tag{5.6}$$

Esta ecuación muestra claramente que el origen de la anomalía es la existencia de un jacobiano de Fujikawa asociado a la transformación (5.2).

Este jacobiano puede calcularse con los métodos de regularización ya mencionados (funcion de Riemann o Heat-kernel) y resulta:

$$\begin{aligned} \ln J[\alpha] &= -2iK \int \varepsilon^{\alpha_1\beta_1\cdots\alpha_n\beta_n} tr(F_{\alpha_1\beta_1}\cdots F_{\alpha_n\beta_n})\alpha(x)d^{2n}x \\ K &= \frac{i^n}{2^{2n}\pi^n n!} \end{aligned} \tag{5.7}$$

Luego la ecuación de divergencia anómala se escribe:

$$< \partial_\mu j_5^\mu >= -2K\varepsilon^{\alpha_1\beta_1\cdots\alpha_n\beta_n} tr(F_{\alpha_1\beta_1}\cdots F_{\alpha_n\beta_n}) \tag{5.8}$$

que generaliza los familiares resultados para d=2 y d=4:

$$d=2 \qquad < \partial_\mu j_5^\mu >= \frac{-i}{2\pi} tr(\varepsilon^{\mu\nu}F_{\mu\nu}) \tag{5.9}$$

$$d=4 \qquad < \partial_\mu j_5^\mu = \frac{1}{16\pi^2}\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} tr(F_{\mu\nu}F_{\alpha\beta}) \tag{5.10}$$

Fujikawa también mostró la relación existente entre el jacobiano (5.7) y el teorema del índice de Atiyah-Singer (Atiyah y Singer, 1968, 1971) que determina la diferencia entre los modos cero de quiralidad derecha e izquierda del operador de Dirac $\gamma.D$ a partir de las clases características de Chern. En particular no es difícil encontrar que el jacobiano de la transformación (5.2) es -2i veces el índice de $\gamma.D$.

$$\int d^{2n}x K\varepsilon^{\alpha_1\beta_1\cdots\alpha_n\beta_n} Tr(F_{\alpha_1\beta_1}\cdots F_{\alpha_n\beta_n}) = ind\gamma.D = n_R - n_L \tag{5.11}$$

donde n_R y n_L son los números de modos cero de quiralidad derecha e izquierda del operador $\gamma.D$.

5.3 Anomalía de Gauge

Consideremos ahora la anomalía en la conservación covariante de la corriente de gauge que aparece en una teoría de fermiones de Weyl acoplados a un campo de gauge. Los fermiones se transforman en cierta representación ρ del grupo de gauge G.

La acción efectiva fermiónica está definida por:

$$e^{-\Gamma[a]} = \int D\bar{\Psi} D\Psi e^{i\int d^{2n}x\bar{\Psi}\gamma.DP_{+}\Psi} \tag{5.12}$$

donde la integración se realiza sobre fermiones de Dirac. D_μ está definida en la sección anterior y $P_{+} = \frac{1+\gamma_5}{2}$.

Las corrientes de gauge son:

$$j^{\mu a} = \bar{\Psi}\gamma^\mu t^a P_{+}\Psi \tag{5.13}$$

donde t^a son los generadores del álgebra de G en la representación ρ. Clásicamente esta corriente esta covariantemente conservada, es decir:

$$D_\mu j^\mu = (i\partial_\mu + [A_\mu,])j^\mu = 0 \tag{5.14}$$

$$(j^\mu = j^{\mu a}t^a)$$

Bajo una transformación de gauge los campos se transforman:

$$A_\mu \rightarrow A_\mu^{g^{-1}} = gA_\mu g^{-1} + ig\partial_\mu g^{-1} \tag{5.15}$$

$$\Psi \rightarrow g\Psi; \quad \bar{\Psi} \rightarrow \bar{\Psi}g^{-1}$$

y la acción clásica permanece invariante. Si g es infinitesimal $g \sim 1+iv$ las ecuaciones de transformación (5.15) toman la forma:

$$A_\mu \rightarrow A_\mu^v = A_\mu - iD_\mu v \tag{5.16}$$

$$\Psi \rightarrow \Psi + iv\Psi; \quad \bar{\Psi} \rightarrow \bar{\Psi} - \bar{\Psi}iv$$

Analicemos entonces el comportamiento de la acción efectiva $\Gamma(A)$ cuando efectuamos la transformación (5.16)

$$\begin{aligned} e^{-\Gamma(A-iDv)} &= \int D\bar{\Psi}D\bar{\Psi} \exp[i\int \bar{\Psi}\gamma.D\Psi + i\int (D_\mu j^\mu)^a v^a dx] \\ &\approx e^{-\Gamma(A)}(1 + i\int v^a < (D_\mu j^\mu)^a >) \end{aligned} \tag{5.17}$$

Por otra parte:

$$\bar{\Psi}\gamma.D(A+iDv)\Psi \approx \bar{\Psi}(1+iv)\gamma.D(A)(1-iv)\Psi \tag{5.18}$$

y el cambio en A puede entonces cancelarse realizando el cambio de variables fermiónicas sugerido por la ecuación (5.18). Sin embargo, como veremos más adelante, este cambio de variables involucra un jacobiano de Fujikawa $J(v,A)$. Tenemos entonces:

$$e^{-\Gamma(A-iDv)} = e^{-\Gamma(A)}J(A,v) \tag{5.19}$$

Finalmente derivando funcionalmente respecto de $v^a(x)$ obtenemos la ecuación anómala:

$$\frac{\delta \ln J[A,v]}{\delta v^a(x)}\Big|_{v=0} = i < (D_\mu j^\mu)^a > . \tag{5.20}$$

Es importante señalar que la identificación de la integral funcional (5.12) con un determinante es problemática pues el operador $\gamma.DP_+$ transforma espinores de quiralidad derecha en espinores de quiralidad izquierda y por lo tanto no define una ecuación de autovalores. Este problema se resuelve introduciendo el operador:

$$\hat{D} = i\gamma.\partial + \gamma.AP_+ = \gamma.DP_+ + \gamma.\partial P_- \tag{5.21}$$

que agrega a la integral funcional fermiones libres de la quiralidad opuesta. Definimos en consecuencia:

$$e^{-\Gamma(A)} \equiv \int D\bar{\Psi}D\Psi e^{i\int \bar{\Psi}\hat{D}\Psi dx} = \det\hat{D}. \tag{5.22}$$

que satisface ciertos requerimientos de consistencia necesarios (Alvarez Gaumé y Ginsparg, 1984): El operador $\hat{D}$ actúa sobre funciones de Dirac y define un correcto problema de autovalores. El acoplamiento con el campo de gauge solo involucra a las componentes de quiralidad derecha luego la teoría de gauge definido por $\hat{D}$ es en principio equivalente a la definida por $\gamma.DP_+$ a menos de un factor global constante independiente del campo de gauge. Consecuentemente **det** $\hat{D}$ genera la misma expansión perturbativa que **det** $\gamma.DP_+$ para pequeños valores del campo de gauge. Finalmente puesto que el operador $i\gamma.\partial P_-$ no tiene modos cero no triviales, los modos cero de $\hat{D}$ son todos de quiralidad derecha y coinciden con los de $\gamma.DP_+$ y las reglas de selección de quiralidad en presencia de instantones son los mismos para ambos operadores.

Sin embargo, con esta definición de la acción efectiva $\Gamma(A)$ la acción clásica no es más invariante de gauge. Este es el origen del jacobiano de Fujikawa $J(v, A)$ asociado a la transformación (5.16).

A partir de (5.21) puede entonces calcularse el jacobiano $J(v, A)$ usando alguna regularización adecuada. El resultado para 2 dimensiones es (ver por ejemplo (Moreno, von Reichenbach y Schaposnik, 1989)):

$$\ln J(a, v) = -\frac{\delta^{\mu\nu} - i\varepsilon^{\mu\mu}}{4\pi} \int tr(\partial_\mu A_\nu - \alpha\partial_\nu A_\mu + i[A_\mu, A_\nu])v \tag{5.23}$$

donde, como en capítulos anteriores, el parámetro α determina distintas prescripciones de regularización.

El jacobiano correspondiente a una transformación de gauge finita puede obtenerse a partir del jacobiano infinitesimal (5.19). En efecto, consideremos la familia de transformaciones de gauge $g_t(x)$ que interpola entre la identidad y cierta transformación $g(x)$ cuando t varía de 0 a 1. Tenemos entonces:

$$\Gamma(A) - \Gamma(A^{g^{-1}}) = -\int_0^1 dt \frac{\partial\Gamma(A^{g_t^{-1}})}{\partial t} \tag{5.24}$$

Pero puede comprobarse fácilmente que:

$$\frac{\partial\Gamma}{\partial t}(A^{g_t^{-1}}) = \ln J[A^{g_t^{-1}}, v_t] \tag{5.25}$$

donde el segundo miembro está dado en (5.23) con $v_t = -\partial_t g_t g_t^{-1}$. Un cálculo directo aunque tedioso nos permite obtener de (5.24) y (5.25) para 2 dimensiones:

$$\ln J[A, g^u] = W[g] - \frac{(\delta^{\mu\nu} - i\varepsilon^{\mu\nu})}{4\pi} tr \int d^2x[(A_\mu g\partial_\nu g^{-1} + \alpha(A_\nu A_\mu^g - A_\nu A_\mu)] \tag{5.26}$$

donde $W[g]$ es la acción de Wess-Zumino-Witten definida en el capítulo II (ecuación (2.90)).

Capítulo 6

Modelos σ no lineales acoplados a fermiones de Weyl

6.1 Introducción

Vimos que las teorías cuánticas de campos de fermiones en interacción con campos de gauge no abelianos exhiben en algunos casos una anomalía en la corriente de gauge. Esta anomalía es generalmente una manifestación de una obstrucción global para definir la teoría correctamente. Recientemente se ha observado que ciertos modelos σ no lineales presentan anomalías cuando están acoplados a fermiones de Weyl que no se transforman en una representación libre de anomalías.

Los modelos σ no lineales son teorías campos en los cuales las variables dinámicas (bosónicas) toman valores en una variedad Riemanniana M. Los modelos σ homogéneos son aquellos en los que la variedad M resulta el espacio homogéneo G/H siendo G un grupo de Lie y H el subgrupo de isotropía.

Los modelos σ homogéneos acoplados a fermiones de Weyl son relevantes para la física de partículas en las aproximaciones de bajas energías (Coleman, Wess y Zumino, 1969; Callan, Coleman, Wess y Zumino, 1969). En una aproximación de lagrangiano efectivo se considera una teoría que incorpora un grupo G de simetrías quirales (realizadas linealmente en alguna teoría subyacente) espontaneamente rota a un subgrupo H por debajo de cierta escala energética. Las teorías de bajas energías describen entonces a bosones de Goldstone que toman valores en el espacio coset G/H con G realizado de manera no lineal como grupo de simetría. Los teoremas de bajas energías se deducen de las identidades de Ward manifestando la presencia de la simetría original G en el mundo de las bajas energías. Cuando se acoplan fermiones de Weyl a estos modelos las identidades de Ward devienen anómalas. Estas anomalías deben ser canceladas para asegurar la consistencia de la teoría.

Proponemos en este capítulo un método de cuantificación de los modelos σ inspirados en las ideas de Polyakov (Polyakov 1981), Babelon, Schaposnik y Viallet (Babelon, Schaposnik y Viallet, 1986) y Faddeev- Shatashvili (Faddeev y Shatashvili, 1986) sobre cuantificación en presencia de anomalías que conducen a teorías consistentes.

La idea que subyace tras nuestra propuesta es la siguiente. En el formalismo de la integral funcional la acción efectiva debe considerarse como una integral sobre el total del grupo G aunque clasicamente los grados de libertad definidos sobre H pueden ser trivialmente eliminados. Debido a la presencia de los fermiones de Weyl estos grados de libertad no pueden ser eliminados sin crear términos anómalos. Como consecuencia los campos sobre H reaparecen integrando una acción efectiva no trivial que contiene una acción de Wess-Zumino. Este mismo fenómeno es el que ocurre con la acción de Liouville en la cuantificación de cuerdas y con la acción de Wess-Zumino en la cuantificación de teorías de gauge y gravitacionales acopladas a fermiones de Weyl.

La propuesta aquí descripta se halla expuesta en la referencia (Moreno, von Reichenbach y Schaposnik, 1989).

6.2 El modelo σ no lineal

Consideremos una teoría de N_B campos escalares ϕ_i que toman valores en el espacio coset G/H donde G es un grupo de Lie y H es el subgrupo de isotropía.

$(N_B = \dim G - \dim H)$. Los campos escalares estan acoplados a fermiones de Weyl transformandose en alguna representación ρ_H del subgrupo H.

Llamaremos $H^a (1 \leq a \leq \dim H)$ a los generadores del álgebra de Lie de H $(\hat{h})$ y $T^i (1 \leq i \leq N_B)$ a los demás generadores de G. Asumiremos también que el álgebra de Lie de G admite una *separación reductiva* es decir que las relaciones de conmutación tienen la forma:

$$[H^a, H^b] = i f^{abc} H^c \tag{6.1}$$

$$[H^a, T^i] = i f_j^{ai} T^j$$

$$[T^i, T^j] = i f_k^{ij} T^k + i f_a^{ij} H^a.$$

La primera ecuación (6.1) expresa la condición de subgrupo de H mientras que la segunda es la condición de separación reductiva (que es siempre posible si H es compacto). Usaremos la convención siguente: los índices (a,b,c,....) corren sobre los generadores de H y los índices $(i, j, k \cdots)$ sobre los demás generadores de G . Los generadores de G y H son ortogonales respecto del producto interno invariante G definido por la traza.

Los campos φ_i son coordenadas locales del espacio cociente G/H y siempre pueden ser definidas de manera tal que las isometrías en H dejen el origen invariante (Coleman, Wess y Zumino, 1969). Estas coordenadas estan parametrizadas por los elementos de G:

$$g^*(\varphi) = e^{i\varphi_i T_i} \tag{6.2}$$

El modelo σ acoplado a fermiones de Weyl puede ser formulado a partir del siguiente lagrangiano en el espacio de Minkowski bidimensional (di Vechia, Ferrara y Girardello, 1985):

$$\mathcal{L} = tr(D_\mu g)^\dagger D^\mu g - i\bar{\Psi}\gamma.D\Psi \tag{6.3}$$

donde $g \epsilon$ G y D_μ es la derivada covariante respecto de H:

$$D_\mu g \;\; = \;\; \partial_\mu g - g A_\mu^a H^a \tag{6.4}$$

$$D_\mu \Psi \;=\; \partial_\mu \Psi - A^a_\mu \rho_H(H^a)\Psi,$$

$\rho_H(H^a)$ es el generador a-ésimo de H en la representación fermiónica ρ_H y A_μ es un campo auxiliar que toma valores en el álgebra de Lie de H. Los fermiones Ψ son de quiralidad derecha, $\Psi = \gamma_5 \Psi$.

Las ecuaciones de movimiento del campo A_μ permiten escribir a este en función de los campos g y Ψ :

$$A_\mu = g^{-1}\partial_\mu g|_H + \frac{1}{2} i j^{\mu a} H^a \tag{6.5}$$

donde

$$j^{\mu a} = \bar{\Psi}\gamma^\mu \rho_H(H^a)\Psi \tag{6.6}$$

en la corriente vectorial fermiónica y hemos indicado con el subíndice $_H$ la proyección sobre la subálgebra H.

Reemplazando este valor de A_μ en el lagrangiano obtenemos:

$$\mathcal{L} = tr(g^{-1}\partial_\mu g|_{G/H} g^{-1}\partial_\mu g|_{G/H}) - i\bar{\Psi}\gamma.D[A_\mu(g)]\Psi \tag{6.7}$$

donde la derivada covariante toma la forma:

$$D_\mu[A] = \partial_\mu - A_\mu(g) \tag{6.8}$$

con $A_\mu(g)$ la conexión canónica (Ginsparg, 1985):

$$A_\mu[g] = \rho_H(g^{-1}\partial_\mu g|_H). \tag{6.9}$$

En virtud de la parametrización (6.2) podemos escribir para los elementos de G:

$$g = g^* h \tag{6.10}$$

con g^* dado por (6.2) y $h \epsilon H$:

$$h = e^{i\eta} \quad \eta \varepsilon \hat{h} \tag{6.11}$$

Mencionaremos ahora 2 importantes propiedades, consecuencia de las relaciones de conmutación (6.1). si $g \epsilon$ G y $h \epsilon$ H valen las siguientes identidades:

$$h^{-1}(g^{-1}dg)h|_H = h^{-1}(g^{-1}dg)|_H h \tag{6.12}$$

$$h^{-1}(g^{-1}dg)h|_{G/H} = h^{-1}(g^{-1}dg)|_{G/H}h \qquad (6.13)$$

Utilizando la parametrización (6.10) para los elementos de G y con la ayuda de las identidades (6.12) y (6.13) podemos escribir el lagrangiano (6.7) de la forma:

$$\mathcal{L} = -g_{ij}(\phi)\partial_\mu\phi^i\partial_\mu\phi j - i\bar{\Psi}\gamma.D[A^{\rho(h)}[\phi]]\Psi \qquad (6.14)$$

donde $g_{ij}(\phi)$ es la métrica natural invariante G sobre G/H:

$$g_{ij}(\phi) = tr(e^{-i\phi}\frac{\partial e^{i\phi}}{\partial\phi i}e^{-i\phi}\frac{\partial e^{i\phi}}{\partial\phi i}|_{G/H}) \qquad (6.15)$$

y la conexión $A_\mu(\phi)$ toma la forma:

$$A_\mu(\phi) = \rho_H(e^{-i\phi}\partial_\mu e^{i\phi}|_H). \qquad (6.16)$$

Hemos definido:

$$A_\mu^{\rho(h)} = \rho(h)^{-1}A_\mu\rho(h) + \rho(h)^{-1}\partial_\mu\rho(h). \qquad (6.17)$$

Es importante notar que clasicamente el campo h no juega ningún papel en el lagrangiano (6.14) pues puede ser eliminado mediante una transformación de gauge:

$$\Psi \to \rho(h)^{-1}\Psi \ , \ \bar{\Psi} \to \bar{\Psi}\rho(h) \qquad (6.18)$$

resultando:

$$\mathcal{L} = -g_{ij}(\phi)\partial_\mu\phi^i\partial^\mu\phi^j - i\bar{\Psi}\gamma.D[A]\Psi \qquad (6.19)$$

Sin embargo, como fue discutido en el capítulo anterior, la transformación (6.18) es anómala cuando los fermiones involucrados son de Weyl. Tomaremos entonces al lagrangiano (6.14) (y no al (6.19)) como punto de partida para la cuantificación.

6.3 Simetrías

A nivel clásico el lagrangiano (6.14) es invariante frente al grupo de transformaciones globales G. Estas transformaciones se implementan en las coordenadas ϕ^i

definidas en (6.2) por multiplicaciones a izquierda $g^* \rightarrow Kg^*$. El elemento Kg^*, que se encuentra fuera de G/H, se lleva a la forma standart por una multiplicación a derecha de un elemento de H. La transformación combinada mapea elementos G/H en elementos G/H:

$$e^{i\phi} \rightarrow e^{i\phi'} = Ke^{i\phi}f^{-1}[\phi, K] \tag{6.20}$$

donde $K \epsilon G$ global y f es el elemento compensador. En los fermiones esta transformación se implementa:

$$\Psi \rightarrow \rho(f)\Psi \quad , \quad \bar{\Psi} \rightarrow \bar{\Psi}\rho(f)^{-1} \tag{6.21}$$

Analicemos ahora el comportamiento de la métrica $g_{ij}(\phi)$ y de la conexión canónica $A_\mu(\phi)$ bajo la transformación (6.21). De su definición se deduce que la métrica se transforma según:

$$g_{ij}(\phi) \rightarrow g'_{ij}(\phi') = tr(e^{-i\phi'}\frac{\partial e^{i\phi'}}{\partial \phi' i}e^{-i\phi'}\frac{\partial e^{i\phi'}}{\partial \phi j}|_{G/H}) \tag{6.22}$$

Utilizando la forma (6.20) para las coordenadas ϕ' y con ayudas de la igualdad (6.12) obtenemos:

$$g'_{ij}(\phi') = g_{k\ell}(\phi)\frac{\partial \phi^k}{\partial \phi'_i}\frac{\partial \phi^\rho}{\partial \phi'_j} \tag{6.23}$$

Es decir: *la métrica en G/H se transforma covariantemente frente a las trasnformaciones G globales* y por la tanto la invarianza del primer término del lagrangiano (6.19) es obvia.

De la misma manera, pero con el auxilio de la igualdad (6.13) pude probarse que la *conexión $A_\mu(\phi)$ se transforma como un campo de gauge*:

$$A_\mu(\phi) \rightarrow A'_\mu(\phi') = A_\mu^{\rho(f)^{-1}}(\phi) \tag{6.24}$$

y compensa exactamente la transformación fermiónica (6.21). Verificamos entonces la invarianza del lagrangiano frente a la transformación G en (6.20) y (6.21).

La utilidad de la parametrización standard (6.2) para los elementos G/H queda manifiesta en la forma que adquiere las transformaciónes (6.20) para simetrías en $H(K\epsilon H)$. En este caso el campo compensador f es global y se reduce a K:

$$e^{i\phi} \longrightarrow e^{i\phi'} = Ke^{i\phi}K^{-1} \; K\epsilon H \tag{6.25}$$

Infinitesimalmente estas trasformaciones se pueden escribir de la siguiente manera:

A Si $K\epsilon H$

$$\begin{aligned} K &\simeq \; 1+\varepsilon^a H^a \\ \delta\phi^i &\simeq \; \varepsilon^a f_j^{ai}\phi^j \\ \delta\Psi &\simeq \; i\varepsilon^a\rho(H^a)\Psi \end{aligned} \tag{6.26}$$

Es decir que las transformaciones en H están representadas linealmente en los campos y no cambian el origen de G/H.

B Si K está generado por los T_i

$$\begin{aligned} K &\simeq \; 1+\varepsilon^i T^i \\ \delta\phi^i &\simeq \; \varepsilon^i - \tfrac{1}{2}\varepsilon^i f_k^{ji}\phi^k + \tfrac{1}{4}\varepsilon^j\phi^k\phi^\ell f_k^{ja} f_\ell^{ia} \\ \delta\Psi &\simeq \; -\tfrac{1}{2}i\varepsilon^i\phi^j f_j^{ia}\rho(H^a)\Psi \end{aligned} \tag{6.27}$$

que generan una transformación no lineal sobre los campos.

Las corrientes de Noether asociadas a estas invarianzas son:

para el caso A:

$$iJ_\mu^a = 2g_{ik}(\phi)\partial_\mu\phi^i\phi^j f_j^{ak} + \bar\Psi\gamma_\mu\rho(e^{-i\phi}\partial_k e^{i\phi})\Psi\phi^j f_j^{ak} + j_\mu^a \tag{6.28}$$

y para el caso B:

$$\begin{aligned} iJ_\mu^m \; = \; & 2g_{im}(\phi)\partial_\mu\phi^i - g_{ik}(\phi)\partial_\mu\phi^i\phi^\ell f_\ell^{mk} + \\ & +\frac{1}{2}g_{ik}(\phi)\partial_\mu\phi^i\phi^p\phi^\ell f_p^{ma} f_\ell^{ka} + \bar\Psi\gamma_\mu\rho(e^{-i\phi}\partial_m e^{i\phi}|_H)\Psi - \end{aligned}$$

$$-\frac{1}{2}\bar{\Psi}\gamma_\mu\rho(e^{-i\phi}\partial_k e^{i\phi}|_H)\Psi\phi^\ell f_\ell^{mk} + \frac{1}{4}\bar{\Psi}\gamma_\mu\rho(e^{-i\phi}\partial_k e^{i\phi}|_H)\Psi\phi^p\phi^\ell f_p^{ma} f_\ell^{ka} -$$
$$-\frac{i}{2}j_\mu^a f_j^{am}\phi^j. \tag{6.29}$$

Finalmente notemos que si mantenemos al campo h en el langrangiano (como en la ecuación (6.14)), las rotaciones globales G pueden ser vistas como transformaciones de los campos bosónicos ϕ acompañadas de rotaciones fermiónicas:

$$e^{i\phi} \to K e^{i\phi} f^{-1}[\phi, H] \tag{6.30}$$

$$\Psi \to \rho(h^{-1} f h)\Psi \tag{6.31}$$

o como transformaciones de los campos ϕ y h sin afectar a los fermiones:

$$e^{i\phi} \to K e^{i\phi} f^{-1} \tag{6.32}$$

$$h \to f^{-1} h. \tag{6.33}$$

6.4 Anomalías

Hemos visto que el grupo de isometrías G actúa sobre el modelo σ como una transformación de gauge en el subgrupo H (ver ecuaciones (6.21) y (6.24)). Luego, como ya mencionamos, el modelo puede presentar anomalías si los fermiones no se encuentran en una representación libre de anomalías.

Las anomalías surgen en este modelo a dos niveles. Primero, partiendo del lagrangiano (6.14), la eliminación del grado de libertad de gauge h no es posible. Aunque la transformación fermiónica (6.18) lo elimina del lagrangiano, aparece a través de un jacobiano de Fujikawa debido a la no invarianza de gauge de la medida de integración. Esto es análogo a lo que ocurre en teorías de cuerdas para $d \neq 26$ debido a la anomalía conforme. El grado de libertad de dilatación de la métrica bidimensional, que clasicamente desaparece de la acción, reaparece como un grado de libertad física en la acción de Liouville luego de la cuantificación (Polyakov, 1981).

Existe un segundo lugar donde las anomalías pueden afectar la cuantificación aún si se parte del lagrangiano (6.19) (es decir, se fija el gauge clasicamente y luego se cuantifica). En efecto, puesto que las anomalías surgen debido a la imposibilidad de regularizar las divergencias ultravioletas de manera tal que la simetría sea respetada, el teorema de Noether cuántico presentará un término anómalo, indicador de la rotura de la simetría G. Con el objeto de analizar esta situación consideremos la acción efectiva del campo ϕ.

$$e^{i\Gamma[\phi]} = \int D\bar{\Psi} D\Psi e^{i\int \bar{\Psi}\gamma.D[A(\phi)]\Psi d^2x} = \det \gamma.D[A(\phi)] \tag{6.34}$$

Hagamos ahora una transformación infinitesimal de la conexión A_μ (ecuación (6.24)):

$$\rho(f) \simeq 1 + iv \tag{6.35}$$

$$A_\mu(\phi) \rightarrow A_\mu(\phi) - iD_\mu v \tag{6.36}$$

La acción efectiva $\Gamma(\phi)$ cambiará entonces (ecuación (5.17) del capítulo V):

$$e^{i(\Gamma(\phi')-\Gamma(\phi))} = 1 + i < \int d^2x (D_\mu j^\mu)^a v^a > \tag{6.37}$$

Por otra parte la transformación (6.36) puede cancelarse mediante una rotación fermiónica adecuada (ecuación (6.21)). Sin embargo debemos tener en cuenta, como lo expusimos en el capítulo anterior, que la integral funcional (6.34) está mal definida debido a la presencia de los fermiones de Weyl. Este problema se corrige introduciendo fermiones libres de la quiralidad opuesta que modifican el operador de Dirac. El operador modificado no es más covariante de gauge y su determinante no es invariante. Obtenemos entonces (ecuación (5.19) del Capítulo V):

$$e^{i(\Gamma(\phi^1)-\Gamma(\phi))} = J[A, v] \tag{6.38}$$

donde $J[A, v]$ es el jacobiano de Fujikawa asociado a la transformación (6.21). La ecuación de anomalía toma entonces la forma (ecuación (5.20) del Capítulo V):

$$\frac{\delta J[A, v]}{\delta v^a(x)} = i < (D_\mu j^\mu)^a > \tag{6.39}$$

Es decir la conservación covariante está subordinada a la eliminación del jacobiano de Fujikawa.

El valor del jacobiano $J[A, v]$ fue calculado en el capítulo anterior (ecuación (6.30)):

$$\ln J[A, v] = -\frac{i}{4\pi}\int d^2x tr\{(\partial_- A_+ - a\partial_+ A_- + a[A_+, A_-])v(x)\}. \qquad (6.40)$$

Su valor para una transformación finita (6.24):

$$A_\mu(\phi) \to A_\mu(\phi)^{\rho(f)^{-1}} \qquad (6.41)$$

es de la forma (ecuación (5.26) Capítulo V):

$$\begin{aligned} \ln J[A, \rho(f)] &= W[\rho(f)] + \frac{1}{4\pi}tr\int d^2x[A_+\rho(f)\partial_-\rho(f)^{-1} + \\ &\quad +a(A_- A_+^{\rho(f)} - A_- A_+)] \end{aligned} \qquad (6.42)$$

donde $W[g]$ es la acción de Wess-Zumino-Witten (Capítulo II). (El cálculo del jacobiano en sus 2 versiones (6.40) y (6.42) puede hallarse en (Moreno, von Reichenbach y Schaposnik, 1989).

La ecuación (6.37) para las transformaciones globales generados por los elementos T^i (ecuación (6.27)) se escribe:

$$e^{i\delta\Gamma(\phi)} = 1 - \frac{i}{2}\int d^2x\varepsilon^i\phi^j f_j^{ia} < (D_\mu j^\mu)^a > . \qquad (6.43)$$

y en virtud de (6.38) y (6.40) la simetría es anómala para cualquier valor del parámetro a.

Sin embargo para las rotaciones en H (ecuación (6.26)) tenemos

$$e^{i\delta\Gamma(\phi)} = 1 + i\varepsilon^a\int d^2x < D_\mu j^\mu)^a > \qquad (6.44)$$

y si $a = 0$ (anomalía consistente) vemos de (6.40):

$$\delta\Gamma[\phi] = 0. \qquad (6.45)$$

Si $a \neq 0$ podemos, no obstante, agregar contratérminos adecuados al lagrangiano original (de la forma $A_\mu A^\mu$) de manera de obtenerse nuevamente el resultado (6.45).

Concluímos entonces esta sección afirmando que: *solo las rotaciones que no estan en H son anómalas. Las rotaciones en H son no-anómalas.*

6.5 Cuantificación Consistente

Hemos visto que si los fermiones se transforman en una representación anómala de H, la acción efectiva (6.34) no es invariante frente al grupo de isometrías en G. Por lo tanto, la teoría cuántica definida por esta acción efectiva no es consistente.

Sin embargo, como ya lo anunciamos, un tratamiento cuidadoso de los grados de libertad en H permite obtener una acción efectiva alternativa no anómala. Implementaremos este tratamiento, que ha permitido definir de manera consistente a teorías de gauge y gravitacionales acoplados a fermiones de Weyl (Babelón, Schaposnik y Viallet, 1986; Harada y Tsutsui, 1987; Schaposnik y Vucetich, 1987) en el modelo σ no lineal.

Considermos la integral funcional completa que describe al modelo dado en la ecuación (6.14):

$$Z = \int D\phi Dh D\bar{\Psi} D\Psi e^{i\int d^2x(-g_{ij}\partial_\mu\phi^i\partial^\mu\phi^j - i\bar{\Psi}\gamma.D[A^{\rho(h)}]\Psi)} \tag{6.46}$$

Intentemos eliminar al campo h fijando el gauge $h = 1$ mediante el procedimiento de Faddeev-Popov. Consideremos entonces la resolución de la identidad de Faddeev-Popov:

$$1 = \int \delta(h\ell - 1) D\ell \tag{6.47}$$

Insertado (6.47) en (6.46) y haciendo el siguiente cambio de variable:

$$\begin{aligned} h &\to h\ell \\ \Psi \to \rho^{-1}(\ell)\Psi, &\; \bar{\Psi} \to \bar{\Psi}\rho(\ell) \end{aligned} \tag{6.48}$$

obtenemos:

$$Z = \int D\phi D\bar{\Psi} D\Psi D\ell J[\ell^{-1}, A(\phi)] e^{i\int [\mathcal{L}(\phi) + i\bar{\Psi}\gamma . D(A)\Psi] d^2x} \tag{6.49}$$

donde $J[\ell^{-1}, A]$ es el jacobiano de Fujikawa asociado a la transformación fermiónica y está dado en la ecuación (6.42).

Vemos entonces que la acción efectiva natural para los campos ϕ es:

$$e^{i\tilde{\Gamma}(\phi)} = \int D\bar{\Psi} D\Psi D\ell J[\ell^{-1}, A(\phi)] e^{i\int \bar{\Psi}\gamma . D[A]\Psi d^2x} \tag{6.50}$$

y solo en el caso no anómalo (J=1) coincide con $\Gamma(\phi)$ (ecuación (6.34)).

El campo ℓ valuado en H se presenta como físico en el mismo pie de igualdad que los fermiones y los bosones con una acción de Wess-Zumino-Witten.

Este punto de vista sobre cuantificación de modelos anómalos está inspirado en los trabajos de Polyakov sobre cuantificación de teorías de cuerdas (Polyakov, 1981) y fue sugerido para teorías de gauge por Faddeev y Shatashvili (Faddeev y Shatashvili, 1986).

Verifiquemos ahora que la acción $\tilde{\Gamma}(\phi)$ es invariante frente a las isometrías en G. Hagamos para ello la transformación (6.20):

$$e^{i\tilde{\Gamma}(\phi')} = \int D\bar{\Psi} D\Psi D\ell J[\ell^{-1}, A(\phi)^{\rho^{-1}(f)}] e^{i\int \bar{\Psi}\gamma . D[A^{\rho^{-1}}]\Psi d^2x} \tag{6.51}$$

Haciendo el cambio de variables fermiónica:

$$\Psi \to \rho^{-1}(f)\Psi, \ \bar{\Psi} \to \bar{\Psi}\rho(f) \tag{6.52}$$

obtenemos:

$$e^{i\tilde{\Gamma}(\phi')} = \int D\bar{\Psi} D\Psi D\ell J[f^{-1}, A] J[\ell^{-1}, A^{\rho^{-1}(f)}] e^{i\int \bar{\Psi}\gamma . D(A)\Psi d^2x} \tag{6.53}$$

donde $J[f^{-1}, A]$ es el jacobiano asociado a la transformación (6.52). Finalmente haciendo uso de la propiedad de *1-cociclo* que satisface en J:

$$\ln J[h, A] + \ln J[f, A^{\rho(h)}] = \ln J[hf, A] \tag{6.54}$$

(puede verificarse explicitamente de (6.42)), obtenemos, el resultado deseado:

$$e^{i\tilde{\Gamma}[\phi']} = \int D\bar{\Psi} D\Psi D\ell J[\ell^{-1}, A] e^{i\int \bar{\Psi}\gamma.D[A]\Psi d^2x} = e^{i\tilde{\Gamma}(\phi)} \tag{6.55}$$

(Hemos usado que $D\ell f = D\ell$).

Esta invarianza resulta aún mas explícita si se integran los fermiones antes de desacoplar el campo ℓ:

$$e^{i\tilde{\Gamma}(\phi)} = \int D\ell \det \gamma.D(A^{\rho(\ell)}) \tag{6.56}$$

Es entonces ovbio que $\tilde{\Gamma}[A(\phi)] = \tilde{\Gamma}[A(\phi)^{\rho(f)}]$. Como mencionamos en el capítulo anterior, debido a las ambigüedades de regularización, el jacobiano (6.42) depende de un parámetro arbitrario a. La importancia de este parámetro fue puesta de manifiesto por Jackiw y Rajaraman (Jackiw y Rajaraman, 1985) en su solución del modelo de Schwinger quiral. Estos autores mostraron que si $a > 1$ el modelo resulta unitario, invariante Lorentz y consistente.

Numerosos autores (Manohar, Moore y Nelson, 1985; Alvarez Gaumé y Ginsparg 1985) observaron que las anomalías de los modelos σ no lineales pueden cancelarse en ciertos casos por medio de adecuados contratérminos agregados al lagrangiano de tal manera que la variación de la teoría efectiva resultante es cero. En efecto, consideremos los generadores de G en alguna representación $\bar{\rho}_G$. Sea entonces

$$\bar{g}^*(\phi) = \bar{\rho}(g^*(\phi)) = e^{i\phi_i \bar{T}^i} \tag{6.57}$$

el representante de G/H (6.2) en la nueva representación, y escribamos:

$$\bar{A}_\mu(\phi) = \bar{g}^{*-1} \partial_\mu \bar{g}^*|_H = \bar{\rho}(A_\mu(\phi)) \tag{6.58}$$

Si $\bar{g}_t^*$ es una interpolación entre $\bar{g}_0^* = 1$ y $\bar{g}_1^* = \bar{g}^*$, construimos la cantidad:

$$\int_0^1 \det \frac{\partial}{\partial t} \Gamma[\bar{A}(\phi)^{\bar{g}_t^{*-1}}] = \Gamma[\bar{A}(\phi)^{\bar{g}_t^{*-1}}] - \Gamma[\bar{A}(\phi)] \tag{6.59}$$

que es esencialmente una acción de Wess-Zumino-Witten para los bosones ϕ. (Esta definición es independiente de la función interpolante).

Bajo una transfornación global G (ecuación (6.20)) tenemos

$$\bar{A}^{g_x^{-1}} \rightarrow (\bar{A}^{\bar{f}^{-1}})^{\bar{f}\bar{g}_*^{-1}k^{-1}} = (A^{\bar{g}_*^{-1}})^{K^{-1}} \tag{6.60}$$

Pero $\Gamma(\bar{A})$ es *insensible a cambios globales*, por lo tanto el primer término del lado derecho (6.59) es invariante. El segundo término tendrá una variación dada por (6.40) en la representación $\bar{\rho}_H$. Luego esta variación cancelará la variación de $\Gamma(\phi)$ si se satisface la siguiente relación entre las trazas de los generadores de H en la representación fermiónica y la nueva representación $\bar{\rho}$:

$$tr(\rho(H^a)\rho(H^b)) = tr(\bar{\rho}(H^a)\bar{\rho}(H^b)) \tag{6.61}$$

Podemos relacionar esta propuesta de cancelación de anomalías con la nuestra de la manera siguiente. Consideremos en (6.50) la integración sobre f:

$$\int DfJ[f^{-1}, A(\phi)] = e^{i(\tilde{\Gamma}[\phi]-\Gamma(\phi))} = e^{i\Delta(\phi)} \tag{6.62}$$

Luego $\Delta(\phi)$ juega en nuestro caso el mismo rol que el contratérmino (6.59). Notemos sin embargo que en nuestro caso $\Delta(\phi)$ aparece naturalmente en la representación fermiónica.

Hemos presentado en este capítulo una propuesta de cuantificación del modelo σ no lineal definido en un espacio homogéneo G/H de manera que la teoría cuántica resultante sea consistente aún cuando las anomalías internas estan presentes. Mostramos que un tratamiento cuidadoso de los grados de libertad del subgrupo de isotropía H nos conduce a un modelo con invarianza global G en el que los campos en H juegan un rol dinámico. Este es el principal resultado y esta resumido en la ecuación (6.50) donde se expone explicitamente la acción efectiva $\tilde{\Gamma}[\phi]$ invariante frente a las isometrías de G. La presencia del jacobiano de Fujikawa asegura la cancelación de la variación anómala de la medida de integración fermiónica. Este punto de vista de cuantificación esta inspirado en el tratamiento de Polyakow de la teoría de cuerdas: grados de libertad que clasicamente se desacoplan, reaparecen a nivel cuántico con una acción no trivial (la acción de Liouville en el caso de las cuerdas y la acción de Wess-Zumino-Witten dada en $J[A, f]$ en el caso de los modelos sigma).

Nuestra propuesta puede ser comparada con la desarrollada por Manohar, Moore y Nelson; Alvarez Gaumé y Ginsparg y Bagger, Nemeschansky y Yankielowickz donde la cancelación de nomalías se produce por medio de contratérminos agregados a la acción. La diferencia básica con nuestro formalismo es que en este la acción de Wess-Zumino-Witten surge naturalmente del proceso de cuantificación y no es agregado ad-hoc. Sin embargo ambas propuestas estan relacionadas como se ve de las ecuaciones (6.59) y (6.62).

Capítulo 7

Conclusiones

Como señalamos en la introducción, el propósito de esta Tesis fue el analizar la realización de simetrías a nivel cuántico, así como su eventual violación, utilizando como laboratorio modelos bidimensionales relevantes en distintos campos de la Física. Hemos utilizado para este propósito el formalismo de la integral funcional. Es importante notar que los fenómenos que describimos no dependen esencialmente del hecho de que trabajemos en d=2 dimensiones, por lo que son de esperar en d=3,4,...

El primer modelo tratado fue el de Gross-Neveu quiral, introducido originalmente para estudiar la generación dinámica de masa en teorías con libertad asintótica, fenómeno este de interés en modelos que pretenden describir interacciones fundamentales. La bosonización completa del modelo nos permitió obtener de manera sencilla dos importantes resultados. En primer lugar, mostrarnos como las excitaciones no masivas del vector U(1) se desacoplan del resto. Este fenómeno, predicho por Witten a partir de un análisis heurístico, (Witten, 1978) se obtiene de manera muy simple y clara con nuestra técnica de bosonización no abeliana. En segundo lugar, al analizar el sector de simetría SU(N) pudimos mostrar que el modelo deviene invariante conforme para dos familias de valores de la constante de acoplamiento:

$$i) \quad g_\mu^2 = -1/(2N+1)\alpha$$

(α es un parámetro arbitrario que determina la regularización elegida para el cálculo del determinante fermiónico).

$$ii) \quad g_\mu^2 = -1/(2N+1)(\alpha + \pi/4)$$

En ambos la simetría clásica vectorial global SU(N) se amplía: Para los valores de la constante de acoplamiento correspondientes al caso (i) la realización que da el modelo de los generadores del grupo conforme corresponde a un álgebra conforme con una carga central c=1. En este caso la simetría clásica se extiende a una simetría vectorial local SU(N). En cambio, para los valores de la constante de acoplamiento dados por (ii) la teoría conforme que resulta posee una carga central $c = 2N^2 - N$ y la simetría original se extiende a una simetría global quiral SU(N).

Es importante señalar que esta extensión de la simetría clásica debida a la cuantificación del modelo es un fenómeno de mucho interés que puede encontrar aplicaciones en otros campos de la Física. En el caso presente está ligada al "teorema C de Zamolodchikov" que describe la posibilidad de que un dado modelo (no necesariamente bidimensional) devenga invariante conforme según las propiedades de una función $C(g)$ de la constante de acoplamiento, ligada a la función beta de la teoría.

El segundo modelo que analizamos corresponde a una teoría de fermiones sometidos a un vínculo a través de un multiplicador de Lagrange con topología no trivial. Dada la estructura topológica no trivial del vínculo el modelo no puede bosonizarse en forma ingenua. La teoría efectiva resultante contiene un sector bosónico que puede ser escrito como una acción de bosones sin masa en interacción con un campo gravitatorio convenientemente elegido. Este sector, que incluye una interacción con la curvatura, recuerda la construcción de Dotsenko y Fateev (Dotsenko y Fateev, 1984, 1985) para obtener las funciones de correlación de una teoría general.

En efecto, la construcción de Dotsenko y Fateev corresponde a una teoría de bosones libres con condiciones de contorno no triviales por el agregado de una carga en el infinito. Esta carga aparece en nuestro modelo como la carga topológica N del vórtice que actúa como fondo ("background"). El álgebra de Virasoro resultante posee una carga central $c = 3N^2 - 1$.

Hemos así mostrado que la ténica de bosonización vía integración funcional no solamente da lugar a una formulación sencilla en el caso de simetrías no abelianas sino que tambien permite en forma natural el estudio de fenómenos asociados a propiedades topológicas de los campos.

Finalmente analizamos en esta Tesis el modelo sigma no lineal homogéneo acoplado a fermiones de Weyl, que es objeto de mucho interés por su relevancia en la construcción de modelos de cuerdas y supercuerdas.

El modelo de bosones en un espacio homogéneo G/H presenta anomalías cuando los fermiones de Weyl no se transforman en una representación libre de anomalías del subgrupo H. En este contexto hemos presentado una propuesta de cuantificación consistente aun cuando las anomalías internas de la teoría están presentes. Nuestra propuesta está basada en un tratamiento cuidadoso de los grados de libertad asociados al sugbrupo H, que aunque clásicamente se desacoplan, reaparecen a nivel cuántico a través de una acción de Wess-Zumino. Este nuevo término cancela exactamente la variación anómala de la medida de integración fermiónica y así la simetría global G se restaura.

Nuestra propuesta está inspirada en las ideas de Polyakov sobre cuantificación de la cuerda y fue aplicada con éxito a la cuantificación de teorías de gauge anómalas (Faddeev y Shatasvili, 1986; Babelón, Schaposnik y Viallet, 1986). En el caso presente, los grados de libertad en H que reaparecen en la acción de Wess-Zumino son equivalentes al modo de dilatación de la métrica que reaparece en la acción de Liouville en la cuantificación de la cuerda.

Nuestra propuesta puede ser también conectada con la formulada por otros autores (Manohar, Moore y Nelson; Alvarez Gaumé y Ginsparg; Bagger, Nemeschansky y Yankielowicz) que obtienen una cancelación de anomalías por el agregado de contratérminos a la acción. La diferencia básica con este tratamiento es que en nuestro caso el término de Wess-Zumino no debe ser agregado ad-hoc sino que surge naturalmente en el proceso de cuantificación.

Como colofón a nuestro estudio de simetrías en modelos fermiónicos podemos señalar que la cuantificación de una teoría afecta profundamente las simetrías que esta tiene a nivel clásico, más allá de las eventuales anomalías que puedan aparecer a causa de la necesidad de regularización. En efecto, hemos visto que una simetría clásica puede extenderse por efectos cuánticos (fenómeno este opuesto al de aparición de anomalías, que son violaciones a simetrías clásicas). Por ello, el tratamiento de los grados de libertad asociados a las simetrías de un modelo debe ser muy cuidadoso. Aún cuando tales grados de libertad estén ausentes a nivel clásico, el proceso de cuantificación puede hacerlos reaparecer enriqueciendo así las propiedades del modelo. Este fenómeno, descubierto por Polyakov en la cuantificación de la cuerda y en el origen de la aparición de la acción de Liouville, ha sido revelado por nuestro análisis en conexión con simetrías globales, conformes y de gauge.

Apéndice

Demostraremos en este apéndice la identidad (3.32) del Capítulo III que relaciona el determinante de la derivada covariante en la representación adjunta con el mismo en la representación fundamental del grupo G.

La derivada covariante en la representación adjunta se define:

$$D_\mu(A)^{ADJ} = i\partial_\mu - g_N[A_\mu,] \tag{A.1}$$

donde $A_\mu = A^a_\mu t^a$ siendo t^a los generadores del grupo en la representación fundamental que satisfacen:

$$[t^a, t^b] = if^{abc}t^c \tag{A.2}$$

$$trt^a t^b = \frac{1}{2}\delta^{ab} \tag{A.3}$$

La ecuación (A.1) puede escribirse en términos de los generadores de la representación adjunta T^a:

$$D_\mu(A)_{ab} = i\partial_\mu \delta_{ab} - g_N A^c_\mu (T^c)_{ab} \tag{A.4}$$

donde los generadores T^a están definidos:

$$(T^a)_{bc} = -if^{abc} \tag{A.5}$$

y satisfacen el álgebra (A.2) en virtud de la identidad de Jacobi.

Volvamos ahora al jacobiano (3.27) del Capítulo III:

$$J_F = \frac{\det(\gamma.(i\partial - g_N A))}{\det \gamma.i\partial} \tag{A.6}$$

Este determinante se calcula usando alguna regularización adecuada (por ejemplo el método del Heat-Kernel) y se obtiene, en un paso previo al resultado final (3.28), el valor (ver por ej. (Schaposnik, 1978))

$$\begin{aligned} \ln[\frac{\det \gamma.(i\partial - g_N A)}{\det \gamma.i\partial}] &= tr(t^a t^b)\{-\frac{i}{4\pi}\int_0^1 dt \int d^2x \varepsilon^{\mu\nu} F^{at}_{\mu\nu}\phi^b + \\ &+ i2\alpha g_N^2 \int d^2x A^a_\mu A^b_\mu\} \end{aligned} \tag{A.7}$$

donde $F^t_{\mu\nu}$ es la curvatura asociada al campo A^t_μ:

$$F^t_{\mu\nu} = \partial_\mu A^t_\nu - \partial_\nu A^t_\mu + ig_N[A^t_\mu, A^t_\nu] \tag{A.8}$$

y

$$\gamma.A^t = \frac{i}{g^N} e^{-\gamma_5 \phi t} \gamma.\partial e^{\gamma_5 \phi t} \tag{A.9}$$

El resultado (A.7) muestra que el valor del determinante solo depende de la representación elegida de los campos en el factor $tr(t^a t^b)$. Para la representación adjunta tenemos:

$$trT^aT^b = -f^{aij}f^{bji} = C_G \delta^{ab} \tag{A.10}$$

donde C_G es el Casimir en la representación adjunta. Teniendo en cuenta la normalización (A.3) para los generadores en la representación fundamental obtenemos finalmente el resultado deseado:

$$\ln\left[\frac{\det D(A)^{ADJ}}{\det D(0)^{ADJ}}\right] = 2C_G \ln\left[\frac{\det D(A)^{FUND}}{\det D(0)^{FUND}}\right] \tag{A.11}$$

Referencias

Alvarez Gaumé y Ginsparg, Nucl. Phys. B243 (1984) 449; Nucl. Phys. B262 (1985) 439.

Atiyah y Singer, Ann. Math. 87 (1968) 485; Ann. Math. 93 (1971) 119.

Babelon, Schaposnik y Viallet, Phys. Lett. B177 (1986) 385.

Bagger, Nemeschansky y Yankielowicz ; Nucl. Phys. B262 (1985) 478.

Bardakci y Crescimanno; Nucl. Phys. B313 (1989) 269.

Belavin, Polyakov y Zamolodchikov; Nucl. Phys. B241 (1984) 339.

Cabra y Moreno; (en referato 1989).

Cabra, Moreno y von Reichenbach; Int. Jour. of Mod. Phys. A5 (1990) 2313.

Callan, Coleman, Wess y Zumino; Phys. Rev. 177(1969) 2247.

Cardy; Nucl. Phys. B270 (1986) 287.

Coleman; Commun. Math. Phys. 31 (1973) 259.

Coleman, Wess y Zumino; Phys. Rev. 177 (1969) 2239.

Dashen y Frishman; Phys. Rev. D 11 (1975) 2781.

Di Vechia, Ferrara y Girardello; Phys. Lett. 151 (1985) 199.

Dotsenko y Fateev; Nucl. Phys. B240 (1984) 312; Nucl. Phys. B251 (1985) 691.

Friedan, Qiu y Shenker; Phys. Rev. Lett. 52 (1984) 1575.

Fujikawa; Phys. Rev. Lett. 42 (1979) 1195; Phys. Rev. Lett. 44 (1980) 1733; Phys. Rev. D21 (1980) 2848; Phys. Rev. D22 (E) (1980) 1499; Phys. Rev. D23 (1981) 2262.

Furuya, Gamboa Saraví y Schaposnik; Nucl. Phys. B208 (1982) 159.

Faddeev y Shatasvili; Phys. Lett. B 167 (1986) 225.

Gamboa Saraví, Muschietti, Schaposnik y Solomin; Ann. Phys. 157 (1984) 360

Ginsparg; "Proceeding of the XVI GIFT seminar" (1985).

Goddard, Kent y Olive; Phys. Lett. 152B (1985) 88.

Gross y Neveu; Phys. Rev. D10 (1974) 3235.

Harada y Tsutsui; Phys. Lett. 183 B (1987) 311.

Jackiw y Rajaraman; Phys. Rev. Lett. 54 (1985) 1219.

Knizhnik y Zamolodchikov; Nucl. Phys. B 247 (1984) 83.

Manohar, Moore y Nelson; Phys. Lett. B 152 (1985) 68.

Ludwig y Cardy; U.Cal. 83/1986 report (no publicado).

Mitter y Weisz; Phys. Rev. D 8 (1973) 4410.

Moreno y Schaposnik; Int. Jour. of Mod. Phys. A4 (1989) 2827

Moreno, von Reichenbach y Schaposnik; Int Jour. of Mod. Phys. A4 (1989) 2797.

Polyakov; Zh EFT Lett. 12 (1970) 538; Phys. Lett. 103 B (1981) 207; Phys. Lett. 103 B (1981) 211.

Polyakov y Weigmann; Phys. Lett. 131 B (1983) 121; Phys. Lett. 141 B (1984) 223.

Schaposnik; "Proceedings of the Jorge André Swieca School on Particles and Fields" (1987).

Schaposnik y Vucetich; Int. Jour. of Mod. Phys. A2 (1987) 1755.

Steinberger; Phys. Rev. 76 (1949) 1180.

Tsutsui; Phys. Rev. D 40 (1989) 3543.

Witten; Nucl. Phys. B 145 (1978) 110; Commun. Math. Phys. 92 (1984) 455.

Zamolodchikov; JETP Lett. 43 (1986) 731.

Zumino; "Chiral anomalies and differential geometry"; Relativity, groups and topology II. eds. B.S. de Witt y R.Stora (North-Holland, Amsterdam, 1984).