

T. 27

UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA

TESIS DOCTORAL

BOSONIZACIÓN DEL MODELO KONDO

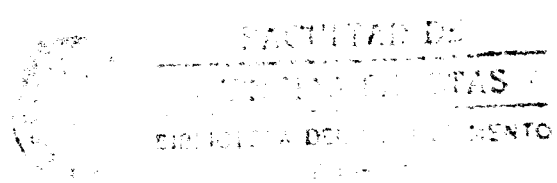
MARIA CECILIA VON REICHENBACH

Director de Tesis: FIDEL A. SCHAPOSNIK

Codirector: EDUARDO FRADKIN

Julio de 1990

28 SEP 1990



Índice

CAPÍTULO 1 - Introducción

CAPÍTULO 2 - Descripción del efecto Kondo y los modelos propuestos para describirlo

2.1 Introducción.

2.2a El efecto Kondo.

2.2b Medidas de susceptibilidad magnética.

2.2c Medidas de calor específico.

2.3 Breve reseña de los métodos empleados previamente para estudiar el problema Kondo.

CAPÍTULO 3 - Teorías Conformes

3.1 Introducción.

3.2 El grupo conforme en dos dimensiones.

3.3 La carga central.

3.4 La carga central del modelo de Wess-Zumino-Witten.

3.5 Representaciones unitarias del álgebra de Virasoro.

3.6 Invarianza conforme y sistemas estadísticos.

3.7 Temperatura finita y tamaño finito.

3.8 El "Teorema c" de Zamolodchikov.

CAPÍTULO 4 - Bosonización e integración funcional

4.1 Introducción.

4.2 La técnica de bosonización.

4.3 Un ejemplo de bosonización no-abeliana.

4.3a El determinante fermiónico.

4.3b El determinante de Fadeev-Popov.

CAPÍTULO 5 - Un modelo Lagrangiano de fermiones para el problema Kondo y su bosonización

- 5.1 Introducción.
- 5.2 Determinación del Lagrangiano fermiónico efectivo.
- 5.3 Bosonización mediante integración funcional
- 5.4 La función beta.
- 5.4a Introducción.
- 5.4b Un ejemplo sencillo.
- 5.4c La función beta para el modelo Kondo.
- 5.5 Susceptibilidad magnética.
- 5.5a Introducción.
- 5.5b Cálculo de la susceptibilidad.
- 5.6 Calor específico.
- 5.7 Cociente de Wilson.

CAPÍTULO 6 - Extensiones del modelo

- 6.1 Introducción.
 - 6.2 Bosonización del problema Kondo multicanal.
 - 6.2a La función beta.
 - 6.2b Susceptibilidad magnética.
 - 6.2c Calor específico.
 - 6.3 El método del loop de Wilson.
 - 6.4 Cuantización geométrica.
- Apéndice

CAPÍTULO 7 - Conclusiones

CAPÍTULO 1 INTRODUCCIÓN

Un problema de gran interés en Mecánica Estadística y en Física de Materia Condensada es el del estudio de teorías microscópicas de aleaciones magnéticas diluidas. De acuerdo con las medidas experimentales, una pequeña cantidad de impurezas magnéticas disueltas en un metal no magnético afecta drásticamente sus propiedades^[1.1,2]. En especial, llamó la atención de los físicos de la década del 60 el hecho de que la susceptibilidad magnética decreciera al aumentar la temperatura, en contraposición con lo que sucede en metales normales.

El modelo más exitoso en dar cuenta de este fenómeno es el modelo Kondo (o de intercambio s-d) propuesto por Jun Kondo en 1964^[1.3]. La mayor dificultad hallada por Kondo en su modelo es que la teoría de perturbaciones (tomando la interacción entre la impureza magnética y los electrones de conducción como parámetro del desarrollo) no es aplicable a bajas temperaturas, justamente donde aparecen los efectos más notables, ya que aparecen divergencias logarítmicas.

La existencia de divergencias logarítmicas en el cálculo perturbativo de las propiedades físicas desafió a los físicos teóricos durante una década. Para soslayar esta dificultad K.G.Wilson desarrolló, en 1975^[1.4], un procedimiento numérico basado en técnicas del Grupo de Renormalización que le permitió

calcular la susceptibilidad magnética asociada a la impureza a bajas temperaturas.

El trabajo de Wilson dió lugar a numerosos estudios, entre los que se destacan los de N.Andrei^[1.5] y P.Wiegmann^[1.6]. En forma independiente, estos autores aplicaron a modelos similares al propuesto por Kondo la técnica del "Ansatz de Bethe"^[1.7], lo que les permitió obtener el espectro de energías, y reobtener en forma analítica, algunos de los resultados de Wilson. Ninguno de estos trabajos, sin embargo, logró expresiones analíticas que permitieran estudiar fenómenos de transporte.

Continuando con el estudio de soluciones analíticas al problema Kondo, presentaremos en esta Tesis un tratamiento alternativo para describir el efecto Kondo. Como veremos, se basa en un análisis de la funcional generatriz del modelo de manera de calcular, no sólo las propiedades termodinámicas, sino también las funciones de correlación corriente-corriente necesarias, por ejemplo, para el estudio de fenómenos de transporte. Estudiaremos en especial el caso en que la energía de la interacción impureza-electrones de conducción es mucho mayor que la energía cinética de estos últimos. Este límite de acoplamiento fuerte presentaba hasta ahora dificultades serias en otras aproximaciones al problema. Más aún, demostraremos que en el límite de acoplamiento fuerte el modelo Kondo puede encuadrarse dentro de la teoría de los modelos conformes, que contiene a todos los fenómenos críticos, clasificados en clases de universalidad.

La simplicidad física del modelo induce a pensar en tratar al problema como de interacción entre partículas libres. Sin embargo, en el límite de temperaturas donde el modelo Kondo es relevante, la energía del acoplamiento es de tal magnitud que la descripción adecuada se realiza por medio de una teoría cuántica.

Trataremos el problema en el marco de la teoría de campos cuánticos, usando el formalismo de la integral funcional. Para describir el problema Kondo, partiremos de un sistema compuesto por una impureza localizada, representada por un campo fermiónico, que interactúa con los electrones de conducción del metal anfitrión. La dinámica de estos campos y su interacción mutua será descrita por un Lagrangiano fermiónico con una simetría no abeliana $SU(N)$, que representa los grados de libertad de spin. Aún cuando la realización física más habitual se centra en $N = 2$, generalizaremos el problema trabajando con N arbitrario, donde $N = 2S+1$ y S es el spin de la impureza. Usando esta invarianza del Lagrangiano aplicaremos al modelo la técnica de bosonización no abeliana desarrollada por F.Schaposnik, R.Gamboa y J.Solomín en 1981^[1.8], y por Polyakov y Wiegmann en 1983^[1.9]. El espíritu de esta técnica consiste en partir de una teoría fermiónica con una simetría no abeliana y hallar una teoría bosónica equivalente. Esta equivalencia debe entenderse en el sentido de que las funciones de correlación corriente-corriente, a partir de las cuales se calculan las propiedades físicas del modelo, son las mismas para ambas teorías.

Como resultado de la bosonización obtendremos una funcional generatriz expresada únicamente en términos de campos bosónicos que representan a la impureza y a los electrones. A partir de ella la evaluación de la susceptibilidad magnética, por ejemplo, es inmediata. Veremos además, mediante el cálculo de la función β , que el modelo es invariante conforme en el límite de acoplamiento fuerte. Esto ubica al modelo Kondo entre los fenómenos críticos, y abre la posibilidad de ubicarlo dentro de una clase de universalidad, que llamaremos la clase de universalidad de Kondo. La simetría conforme tiene una importancia capital en el estudio de sistemas estadísticos cerca del punto crítico; la estructura matemática subyacente la hace particularmente útil para el cálculo de propiedades físicas. En particular, usando los resultados de Blöte, Cardy, Nightingale^[1.10] y Affleck^[1.11], veremos que el cálculo del calor específico se reduce, en el límite de acoplamiento fuerte, al de la carga central del álgebra de Virasoro asociada a los generadores de las transformaciones conformes, es decir, a las componentes del tensor de energía-impulso de la teoría.

El modelo Kondo Multicanal es una extensión del modelo Kondo en la que se tiene en cuenta la estructura orbital de la impureza. Generalizando el procedimiento de bosonización, calcularemos también para este modelo la susceptibilidad magnética, la función β y el calor específico en el límite de

acoplamiento fuerte. Haremos una comparación de nuestros resultados con los obtenidos por Andrei y Destri^[1. 12] para este modelo extendido.

En el modelo Kondo, es posible dar descripciones alternativas para la impureza magnética. Nosotros presentaremos tres de ellas. Dos de estas descripciones se basan en la imposición de vínculos locales a los campos fermiónicos: una de ellas mediante una continuación analítica de una teoría de Wess-Zumino-Witten^[1. 13], la otra usando el método del "loop de Wilson"^[1. 14] para implementar el vínculo. Como tercera opción aplicaremos al modelo la técnica de cuantización geométrica^[1. 15].

El Plan de Tesis es el siguiente :

En el capítulo 2 se describen los resultados experimentales que caracterizan al problema Kondo. A continuación se comentan los principales modelos que han sido empleados para intentar describir estos fenómenos.

El capítulo 3 es una introducción a las teorías conformes bidimensionales, básicas para nuestro análisis de las propiedades del modelo. La técnica de bosonización no abeliana se discute y ejemplifica en el capítulo 4.

En el capítulo 5 se presenta parte de los resultados originales de esta Tesis: los que conciernen a la bosonización del modelo Kondo y al cálculo de sus propiedades físicas. También se

exploran, en el capítulo 6, algunas de las posibles extensiones del modelo. Por un lado se generaliza el estudio del modelo Kondo al del modelo Kondo Multicanal. Por otro, se discuten dos técnicas alternativas para el tratamiento de la impureza: el loop de Wilson y la cuantización geométrica.

Las conclusiones así como posibles extensiones de este trabajo se presentan en el capítulo 7.

Referencias

- [1.1]-C.Kittel, Solid State Physics 22 (1968) 1.
- [1.2]-J.Kondo, "Theory of dilute magnetic alloys", Solid State Physics 23 (1969) 184.
- [1.3]-J.Kondo, Prog.Theo.Phys. 32 (1964) 37.
- [1.4]-K.G.Wilson, Rev.Mod.Phys. 47 (1975) 773.
- [1.5]-N.Andrei, Phys.Rev.Lett. 45 (1980) 379.
- [1.6]-P.B.Wiegmann, JETP Lett. 31 (1980) 364.
- [1.7]-H.Bethe, Z.Phys.71 (1931) 205; N.Andrei, K.Furuya, J.L.Lowenstein, Rev.Mod.Phys. 55 (1983) 331.
- [1.8]-R.E.Gamboa Saraví, F.A.Schaposnik y J.E.Solomín, Nucl Phys B185 (1981)239; Phys.Rev. D30 (1984) 2035.
- [1.9]-A.M.Polyakov y P.B.Wiegmann, Phys.Lett B131 (1983) 121; B141 (1984) 223.
- [1.10]-H.W.J.Blöte, J.L.Cardý y M.P.Nightingale, Phys. Rev.Lett. 56 (1986) 742.
- [1.11]-I.Affleck, Phys.Rev.Lett.56 (1986) 746.
- [1.12]-N.Andrei y C.Destri, Phys.Rev.Lett 52 (1984) 364.
- [1.13]-A.N.Redlich y H.J.Schnitzer, Phys.LettB 183 (1987) 471.
- [1.14]-K.G.Wilson, Phys.Rev.D10 9(1974) 2445.
- [1.15]-E.Fradkin y M.Stone, Phys.Rev B (1989)

CAPÍTULO 2

DESCRIPCIÓN DEL EFECTO KONDO

Y LOS MODELOS PROPUESTOS PARA DESCRIBIRLO

2.1 Introducción

El problema de la formación de momentos magnéticos localizados en metales que contenían una pequeña concentración de átomos impuros atrajo la atención de muchos físicos de la década del 60, particularmente luego del éxito logrado por J.Kondo^[2.1] en explicar teóricamente un comportamiento peculiar observado en numerosos sistemas: el incremento logarítmico de la resistividad de la impureza magnética con el decrecimiento de la temperatura, en contraposición con lo que se observa en metales normales.

El propósito de este capítulo es presentar brevemente los resultados de las medidas experimentales de varias propiedades globales observadas en aleaciones de metales no magnéticos con impurezas magnéticas, así como los modelos que han sido propuestos para intentar describir estos sistemas.

En la sección 2 comentaremos los resultados obtenidos al estudiar la variación de la resistividad con la temperatura (efecto Kondo), y las variaciones del calor específico y la susceptibilidad magnética frente a cambios de temperatura. (Una revisión sistemática y completa de los datos experimentales observados puede hallarse en Rizzuto^[2.2]).

En la sección 3 haremos una reseña de los trabajos previos sobre el problema Kondo, comentando con cierto detalle los más relevantes, y mostraremos los resultados obtenidos.

2.2a El efecto Kondo

En soluciones sólidas de iones magnéticos (Cr, Mn y Fe, por ejemplo) diluídos en un cristal no magnético (como Cu, Ag, Au, Mg, Zn) se ha observado un mínimo en la curva que representa la variación de la resistividad con la temperatura^[2.2,3]. La aparición de un mínimo de resistencia está conectada con la existencia de momentos magnéticos localizados en los átomos de la impureza: si hay un mínimo de resistencia, inevitablemente existe un momento local. La región de temperaturas donde el efecto Kondo es importante se muestra en la figura 2.1. Allí se grafica un resultado fundamental, que surge a la vez de medidas experimentales^[2.4] y de los modelos teóricos^[2.1]: la contribución a la resistividad dependiente del spin es tiene esta dependencia con la temperatura :

$$\rho_{\text{spin}} = c \rho_m \left[1 + \frac{3}{\epsilon} \frac{\mathcal{J}}{T} \ln T \right], \quad (2.1)$$

donde \mathcal{J} es la energía de intercambio, \mathcal{z} es el número de vecinos próximos, c es la concentración y ρ_m es la medida de la magnitud de la dispersión de intercambio. Vemos que si \mathcal{J} es negativo ρ_{spin} crece al descender la temperatura. Si la resistividad debida a los fonones varía como T^5 en la región de interés, y si las resistividades son aditivas, entonces la resistividad total tiene

la forma:

$$\rho = aT^5 + c\rho_0 - c\rho_1 \ln T, \quad (2.2)$$

con un mínimo en

$$\frac{d\rho}{dT} = 5aT^4 - \frac{c\rho_1}{T} = 0, \quad (2.3)$$

es decir en

$$T_{\min} = \left[\frac{c\rho_1}{5a} \right]^{1/5}. \quad (2.4)$$

La variación de T_{\min} con la raíz quinta de la concentración de la impureza magnética concuerda con los resultados experimentales, al menos para Fe en Cu.

En la figura 2.1 se grafican los resultados para el incremento de la resistividad a bajas temperaturas en una aleación diluida de hierro en oro. Estos resultados fueron encontrados por J.Kondo^[2.1] calculando la probabilidad de dispersión de los electrones de conducción en un modelo de interacción s-d, y confirman los datos experimentales^[2.4].

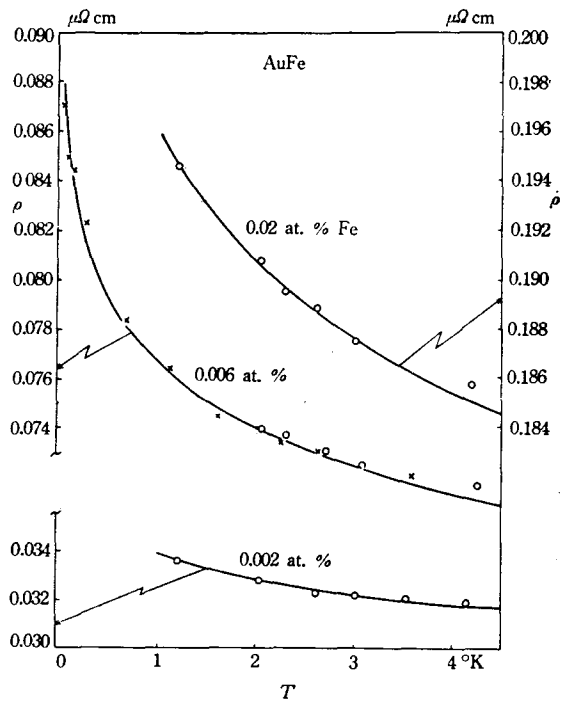


Figura 2.1

El mínimo de resistencia está a la derecha de la figura porque la resistividad se incrementa a altas temperaturas debido a la dispersión de electrones por fonones térmicos.

2.2b Medidas de susceptibilidad magnética

La susceptibilidad magnética a campo cero, obtenida a partir de medidas de la magnetización $M(H)$, se define como:

$$\chi = \left. \frac{dM}{dH} \right|_{H=0} \quad (2.5)$$

Su valor y su variación con la temperatura son fácilmente medibles. La interpretación física de estas medidas se puede ver en forma intuitiva. En la figura 2.2 se grafica el comportamiento de $\chi(T)$ para una impureza aislada:

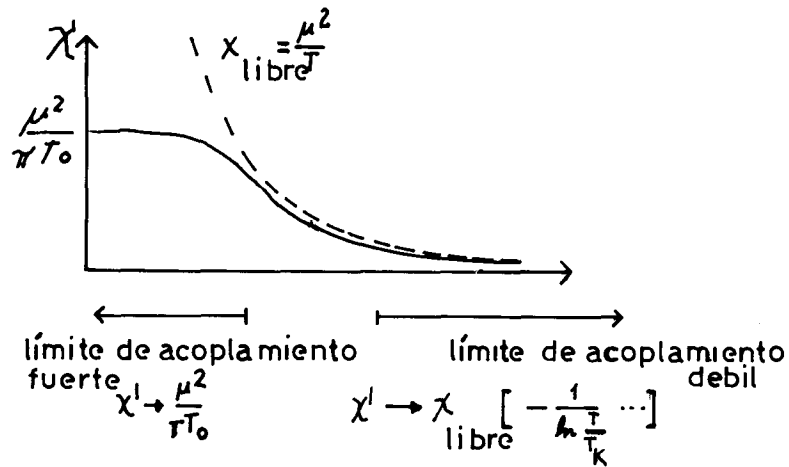


Figura 2.2

Para altas temperaturas la susceptibilidad es la de un ión libre, $\chi = \mu / T$ (Ley de Curie) a menos de correcciones que se anulan logarítmicamente a altas temperaturas.

A temperaturas bajas hay una desviación de la Ley de

Curie debido al apantallamiento del spin de la impureza por su fuerte interacción con los electrones : por debajo de cierta temperatura crítica (cuyo valor depende de la concentración de impurezas) la susceptibilidad se mantiene constante^[2.5].

2.2c Medidas del calor específico

Para un metal a baja temperatura el calor específico se puede expresar como^[2.2]:

$$C(T) = \gamma T + \alpha T^3 + \dots, \quad (2.6)$$

donde los coeficientes γ y α se hallan a partir de un gráfico de C/T vs T^2 . γ resulta ser la contribución de los electrones y α la de los fonones. Al agregar impurezas estos coeficientes se modifican y aparecen términos adicionales a (2.6) (por ejemplo una contribución magnética. Lo que se observa es que al agregar impurezas se aumenta la contribución lineal a $C(T)$. En la figura 2.3 representamos la variación en C debido a la adición de una impureza, dividida por la concentración, en función de la temperatura.

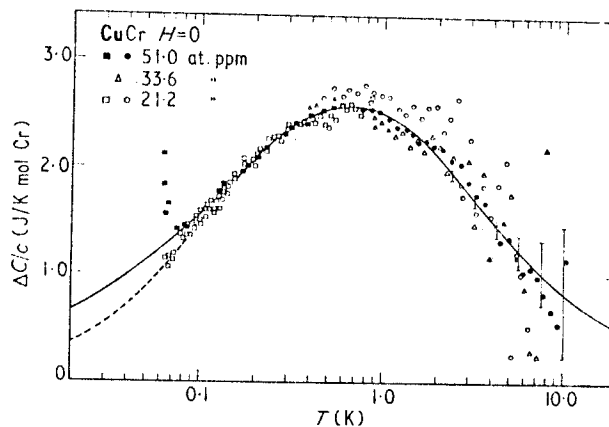


Figura 2.3

La curva muestra un pico en una temperatura θ_c que es independiente de la concentración. La magnitud del pico es del

orden de la contribución de la impureza al calor específico electrónico.

2.3 Breve reseña de los metodos empleados previamente para estudiar el problema kondo

El problema Kondo ha sido estudiado prolíficamente a través de una variedad de métodos.

En 1964 Jun Kondo^[2. 1] aplicó teoría de perturbaciones a un modelo en que una impureza, representada por un momento magnético localizado, interactuaba con los electrones de conducción de un metal. Logró así explicar el crecimiento logarítmico de la resistividad a bajas temperaturas. En 1970 Anderson, Yuval y Hamman^[2. 6] produjeron el primer estudio mediante la integral funcional y llevaron el problema al de un modelo de Ising unidimensional con interacciones $1/r^2$. La mayor parte de lo que hoy conocemos acerca del límite de acoplamiento fuerte surgió de un estudio fenomenológico del líquido de Fermi hecho por Nozieres^[2. 7] en 1974. Anderson^[2. 8] fue el primero en aplicar a este modelo lo que hoy conocemos como métodos del Grupo de Renormalización.

Pero el modelo verdaderamente clave en la búsqueda de una solución exacta al problema fue el estudio numérico de K.Wilson^[2.9] en 1975. A continuación describiremos los puntos fundamentales de este trabajo.

Wilson consideró que la concentración de impurezas magnéticas en el metal era tan baja que era válido considerar una única impureza localizada en un punto fijo dentro del metal. Sobre la impureza inciden electrones pertenecientes a la banda de

conducción, que no interactúan entre sí sino que experimentan un acoplamiento antiferromagnético débil con el spin de la impureza.

Para representar a los electrones de la banda de conducción Wilson propuso una base de estados llamada "base Kondo": el primer estado está localizado alrededor de la impureza y muy cerca de ella. El resto de los estados corresponden aproximadamente a superficies esféricas rodeando la impureza, como se muestra en la figura 2.4.

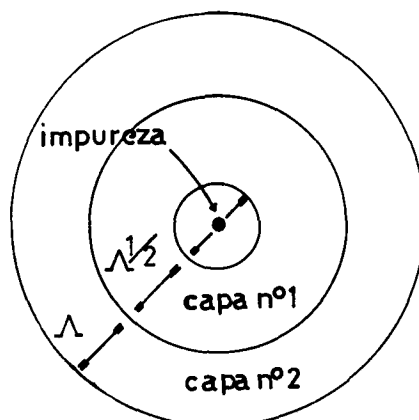


Figura 2.4

Λ es un parámetro ≥ 1 que puede elegirse arbitrariamente. En principio pueden despreciarse los estados alejados de la impureza y, dado que el interés se centra en las propiedades a bajas temperaturas, se consideran sólo superficies cercanas a la superficie de Fermi. El paso siguiente es discretizar el espacio en capas de ancho $\Lambda^{1/2}$, Λ , $\Lambda^{3/2}$,...alrededor de la impureza. Esto se traduce, en el espacio de impulsos, a una discretización logarítmica $1/\Lambda^n$ como se muestra en la figura 2.5

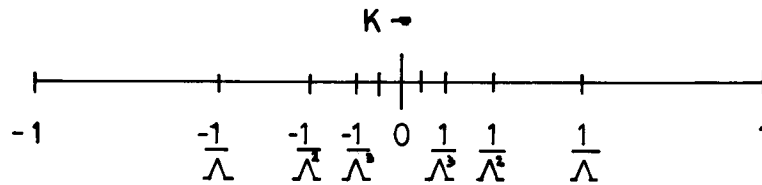


Figura 2.5

Wilson definió una base de funciones dentro de cada capa, normalizadas en función del parámetro Λ y expresadas usando operadores de creación y destrucción. Escribió la expresión para el Hamiltoniano de la capa N como :

$$H_N = \Lambda^{(N-1)/2} \left[\sum_{n=0}^{N-1} \Lambda^{-N/2} (f_n^+ f_{n+1} + f_{n+1}^+ f_n) - \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{J} f_n^+ f_{n+1} \right], \quad (2.7)$$

donde los f_n^+ son operadores discretos de creación de electrones. H_N satisfacen una fórmula recursiva :

$$H_{N+1} = \Lambda^{1/2} H_N + f_{N+1}^+ f_N + f_N^+ f_{N+1}, \quad (2.8)$$

que se usa para definir la transformación del Grupo de Renormalización :

$$H_{N+1} = T(H_N). \quad (2.9)$$

El paso siguiente consiste en diagonalizar H_N (cálculo que se realiza numéricamente), calcular los elementos de matriz de H_{N+1} en la representación en la que H_N es diagonal, y luego diagonalizar H_{N+1} usando la transformación $T(H_N)$.

Wilson mostró, usando el Grupo de Renormalización, que

el sistema tiene dos puntos fijos: $\tilde{J} = 0$ y $\tilde{J} = -\infty$, que pueden estudiarse en el límite de N grande. Se obtiene así el espectro de autovalores de $H = \lim_{N \rightarrow \infty} H_N$. En la figura 2.6 mostraremos los resultados obtenidos de esta manera para la susceptibilidad magnética y el calor específico asociados a la impureza.

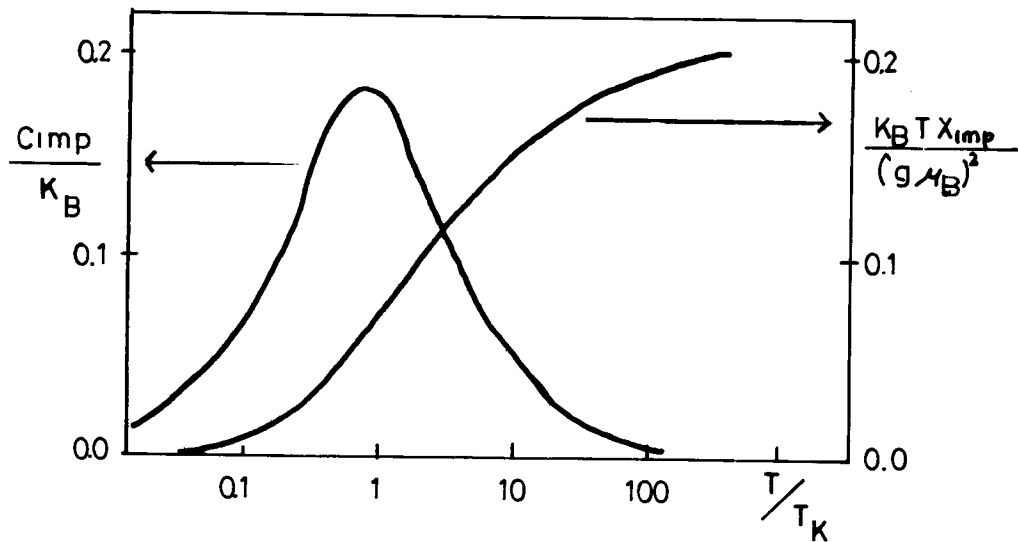


Figura 2.6

Como se ve en la figura, los resultados siguen curvas universales en función de la temperatura, medida en unidades de la temperatura T_K de Kondo. Wilson mostró que

$$k_B T_K = f(rJ) \sqrt{r|J|} e^{1/rJ}, \quad (2.10)$$

donde f es una función analítica del orden de la constante de acoplamiento que, para $rJ \rightarrow \infty$ es del orden del cutoff de energía.

Los resultados de la figura tienen una interpretación física sencilla, conjeturada por Anderson y Kondo y confirmada por

Wilson. Cuando $T \gg T_k$ el pequeño acoplamiento entre la impureza y los electrones de conducción puede ser despreciado y la susceptibilidad magnética sigue aproximadamente la ley de Curie:

$$T \chi_{\text{imp}} = \frac{(g \mu_B)^2}{4 k_B} \quad (2.11)$$

característica de una impureza libre de spin $1/2$.

A medida que se reduce la temperatura el acoplamiento impureza-electrones quiebra la degeneración entre las configuraciones $S_z = 1/2$ y $S_z = -1/2$ de la impureza. En particular, el estado fundamental se acopla antiferromagnéticamente con los electrones que la rodean, formando una combinación singlete separada de las demás configuraciones del sistema impureza-metal por una energía del orden de $k_B T_k$. Para $T \ll T_k$, entonces, la impureza pierde su momento magnético, es decir que $T \chi_{\text{imp}} \rightarrow 0$. Esa ruptura de la degeneración doble está acompañada por una liberación de entropía $\Delta S = k_B \ln 2$, que produce un pico (anomalía de Schottky) en la curva del calor específico en función de T . En la región $T \leq T_k$, por otro lado, el acoplamiento impureza-electrones de conducción se torna más importante que la energía cinética de estos últimos; no es sorprendente, entonces, que una expansión que tome a J como perturbación no sea válida en esa región. Wilson llegó a estas conclusiones por medio del Grupo de Renormalización, confirmando así la relación existente entre las escalas de energía y temperatura.

El de Wilson fue un trabajo importante porque mostró por primera vez el cruce entre los regímenes de constante de acoplamiento débil y fuerte. Pero por sobre todo, y esto le valió el premio Nobel, fue un trabajo pionero por su contribución a las aplicaciones del Grupo de Renormalización en fenómenos críticos.

En 1980 Andrei^[2.10] y Wiegmann^[2.11], independientemente, hallaron una solución exacta para el espectro de energías y la susceptibilidad magnética usando la técnica del Ansatz de Bethe. A continuación comentaremos brevemente el trabajo de Andrei. Para ello, comencemos analizando el espectro típico de dispersión en metales (figura 2.7a); como el interés en el modelo Kondo se restringe, en general, a una pequeña faja de energías en torno al nivel de Fermi, constituye una buena aproximación substituir esa relación por el espectro lineal indicado en la figura 2.7b:

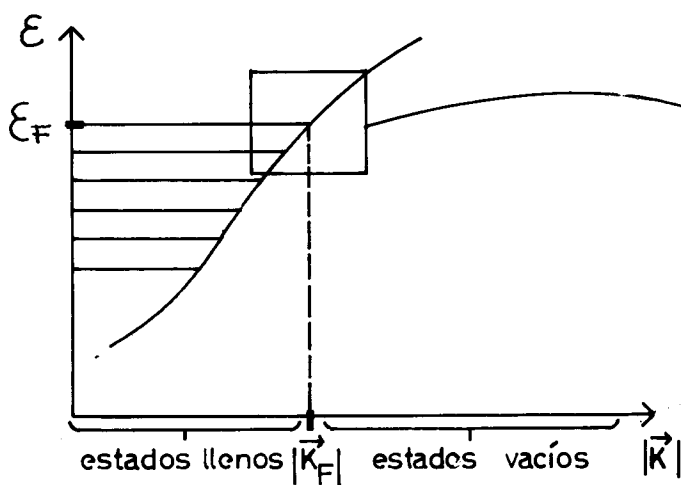


Figura 2.7a

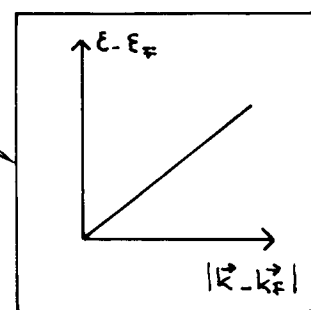


Figura 2.7b

Elijiendo un sistema de unidades apropiado, se puede escribir

$E_k = \hbar v_F k$, aproximación que juega un papel importante en la solución del problema.

Andrei propuso una descripción unidimensional del problema: los electrones, representados por fermiones de quiralidad positiva, se mueven sobre una recta, incidiendo sobre una impureza estacionaria. El hamiltoniano correspondiente es :

$$H_{\text{Kondo}} = \sum_{k=-D}^D k c_{k\alpha}^* c_{k\alpha} + \frac{J}{2\pi} \sum_{k, k'=-D}^D \vec{S} \cdot \vec{\sigma} c_{k\alpha}^* c_{k'\beta}, \quad (2.12)$$

donde sólo se toman en cuenta estados de ondas s (alrededor de la impureza) porque la dispersión es considerada isotrópica (ver figura 2.8). El operador $c_{k\alpha}$ destruye un electrón con momento k ($-D < k < D$) y componente de spin α ($\alpha = \pm 1/2$); \vec{S} es el operador del spin de la impureza localizada en $x = 0$.

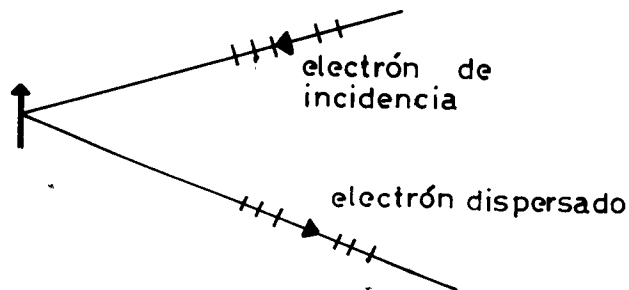


figura 2.8

Si se escribe la función de onda del electrón como :

$$\phi_\alpha(x) = \int e^{ikx} c_{k\alpha} dk / 2\pi, \quad (2.13)$$

el término de energía cinética deviene:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=-D}^D k c_{k\alpha}^* c_{k\alpha} &= \sum_{k=-D}^D \iint dx dy k e^{ikx} e^{-iky} \phi_\alpha^*(x) \phi_\alpha(y) \\
&= 2\pi i \iint dx dy \delta(x-y) \frac{\partial \phi_\alpha^*(x)}{\partial x} \phi_\alpha(y) \\
&= 2\pi i \int dx \frac{\partial \phi_\alpha(x)}{\partial x} \phi_\alpha(x). \tag{2.14}
\end{aligned}$$

Aquí se ha hecho la suposición de que se trabaja tan lejos del cutoff que es válido escribir:

$$2\pi\delta(x-y) = \sum_{k=-D}^D e^{ik(x-y)}. \tag{2.15}$$

Entonces en lugar de H_{kondo} consideraremos el siguiente hamiltoniano:

$$H = -i \int dx \phi_\alpha^*(x) \partial_x \phi_\alpha(x) + J \vec{S} \cdot \phi_\alpha^*(0) \vec{\sigma}_{ab} \phi_b(0), \tag{2.15}$$

donde $\phi_\alpha^*(0) \vec{\sigma}_{ab} \phi_b(0)$ representa la densidad de spin electrónico interactuando con la impureza en $x = 0$. Ambos hamiltonianos son idénticos en ausencia de cutoff.

Esta observaciones inducen a aplicar al modelo conceptos y métodos de la teoría convencional de campos cuánticos. Así, como la constante de acoplamiento J es adimensional, el hamiltoniano es renormalizable. Esto significa que debido a infinitos que aparecen en los cálculos al cuantificar, la constante de acoplamiento debe ser definida apropiadamente dentro de un dado esquema de renormalización. J puede tener diferentes valores en diferentes esquemas: todos llevan al mismo resultado en el régimen universal.

Se podría pensar entonces que, siendo J adimensional (y

como $D \rightarrow \infty$ en el régimen universal), no hay ninguna escala característica del problema. Sin embargo, una de las propiedades fundamentales del modelo^[2.7] es que es capaz de generar una escala T_0 en forma dinámica que determina unívocamente el comportamiento a bajas temperaturas. Esta escala depende del cutoff D y de la constante de acoplamiento en la siguiente forma genérica (ver referencias [2.9] y [2.12]):

$$T_0 = D e^{-\alpha/\lambda(J)}, \quad (2.17)$$

donde $\lambda(j) \rightarrow J$ cuando $J \rightarrow 0$. La forma explícita de $\lambda(J)$ depende del método usado para regularizar y el valor de T_0 suele tomarse como 0.007 eV en el régimen universal. En esta región la energía libre toma la forma

$$\frac{F(T,H,D,J)}{T} \xrightarrow{H,T \ll D} f(T/T_0, H/T), \quad (2.18)$$

donde H es un campo magnético externo y f es una función universal: no depende del esquema particular usado para definir el modelo.

La región de altas temperaturas ($D \gg T \gg T_0$) corresponde al régimen de acoplamiento débil, donde la constante de acoplamiento es pequeña y la teoría de perturbaciones juega un papel relevante. La región de altas temperaturas ($T \ll T_0$) es un régimen de acoplamiento fuerte y no es accesible a la expansión en la constante de acoplamiento. El crossover en el comportamiento entre el régimen de acoplamiento débil (una región asintóticamente

libre) y el de acoplamiento fuerte (donde el spin de la impureza se halla apantallado por su interacción con los electrones) es uno de los puntos claves a estudiar en el problema Kondo. Ambos regímenes pueden estudiarse a partir de la energía libre $F(H,T)$ y sus derivadas: el calor específico, la susceptibilidad, la magnetización y el cociente universal $G^i(t) / T\chi(T)$, donde $G^i(T)$ es la contribución de la impureza al calor específico. Este último cociente sólo se define en el régimen de acoplamiento fuerte y no caracteriza al crossover.

El trabajo de Wiegmann fue similar al de Andrei, en cuanto a los resultados obtenidos. La diferencia entre ambos trabajos está en la representación de la interacción: Wiegmann propuso fermiones de ambas quiralidades para describir a los electrones que eran dispersados por la impureza en $r = 0$, donde imponía condiciones de contorno rígidas.

El éxito de estos trabajos reside en que lograron diagonalizar el hamiltoniano (2.12), dando así una "solución analítica" al problema Kondo. Sin embargo, debe resaltarse que ninguna propiedad dinámica del modelo puede calcularse usando estas técnicas. Más aún, en el caso de propiedades termodinámicas, sólo pudieron obtenerse expresiones analíticas en ciertos límites. Así, Andrei y Wiegmann dieron resultados numéricos para la susceptibilidad y el calor específico para impurezas con un spin arbitrario y bajo la influencia de un campo magnético externo H .

Finalmente, Read y Newns^[2, 13] estudiaron el modelo de

Coqblin-Scrieffer^[2. 14] en el marco de la integral funcional. Este modelo es una generalización $SU(2S+1)$ del modelo Kondo básico $SU(2)$. Haciendo un desarrollo en $1/N$, donde $N = 2S+1$, calcularon el espectro de energías, la susceptibilidad y el cociente de Wilson, resultados que confirman los encontrados por Wilson, Andrei y Wiegmann.

Hasta ahora sólo hemos comentado acerca de las propiedades estáticas de algunas variantes del modelo Kondo. Las propiedades de transporte son menos accesibles porque deben expresarse en términos de funciones de correlación dependientes del tiempo, cuyo cálculo, hasta los trabajos que constituyen esta Tesis, no había sido posible aún en el límite estático.

Sin embargo Andrei^[2. 15], aprovechando la estructura simple que presenta la interacción Kondo, expresó la resistencia magnética en función de la matriz de dispersión T asociada al hamiltoniano (2.16) "on shell", que permite su determinación a partir del espectro. Este cálculo fue hecho a temperatura cero y campo magnético arbitrario y describe adecuadamente el comportamiento observado experimentalmente: la magnetoresistencia decae como $[1/\log(H/T_0)]^2$ para valores grandes del campo aplicado H , y se incrementa al decrecer el campo. Si el campo magnético excita fonones se puede observar un mínimo en la resistencia (precisamente, el efecto Kondo).

Referencias

- [2.1]-Jun Kondo, Progr.Theo.Phys.32 (1964) 37; Solid State Phys.23 (1969) 183.
- [2.2]-C.Rizzuto, Rep.Prog.Phys. 37 (1974) 147.
- [2.3]-F.T.Hedgcocck y P.L.Li, Phys.Rev.Lett B2 (1970) 1342;
J.E.van Dam y P.C.M.Gubbens, Phys.Lett.34A (1971) 185.
- [2.4]-D.K.C.Mac Donald, W.B.Pearson y I.M.Templeton,
Proc.Roy.Soc.(London) A266 (1962) 161.
- [2.5]-D.R.Hamman, Phys.Rev.158 (1967) 570.
- [2.6]-P.W.Anderson, G.Yuval y D.Hamman, Phys.Rev.B1 (1970) 4464.
- [2.7]-P.Nozieres, Journ.Low Temp.Phys. 17 (1974) 31.
- [2.8]-P.W.Anderson, J.Phys.C3 (1970) 2346.
- [2.9]-K.G.Wilson, Rev.Mod.Phys. 47 (1975) 773.
- [2.10]-N.Andrei, Phys.Rev.Lett.45 (1980) 379.
- [2.11]-P.B.Wiegmann, JETP Lett 31 (1980) 364.
- [2.12]-N.Andrei, K.Furuya y J.H.Lowenstein, Rev.Mod.Phys. 55
(1983) 331.
- [2.13]-N.Reads y D.M.Newns, J.Phys. C16 (1983) 3273.
- [2.14]-B.Coqblin y J.R.Schieffer, Phys.Rev.185 (1969) 847.
- [2.15]-N.Andrei, Phys.Rev.Lett A87 (1982) 299;
C.Kittel, "Introduction to solid state physics",J.Wiley &
Sons (New York) 1976.

CAPÍTULO 3
TEORÍAS CONFORMES

3.1 Introducción

El propósito de este capítulo es estudiar la invarianza conforme que, como destacamos en el capítulo 1 es fundamental para el estudio del modelo Kondo. Esta simetría tiene un papel fundamental en Mecánica Estadística y en Teoría de Campos, particularmente en dos dimensiones, ya que presenta una estructura matemática sencilla que permite extraer fácilmente mucha información sobre el modelo en cuestión.

El interés por las teorías conformes bidimensionales renació a partir de un trabajo de Belavin, Polyakov y Zamolodchikov^[3.1]. Estas teorías se han usado con éxito para estudiar el comportamiento crítico de sistemas que sufren transiciones de fase de segundo orden. Fue Polyakov^[3.2] el primero en sugerir, en 1970, que los sistemas conformes críticos deben ser invariantes conformes cerca del punto crítico. En tres o más dimensiones la invarianza conforme no aporta más información que la invarianza de escala. Pero en dos dimensiones, como el álgebra conforme deviene infinito-dimensional, se producen restricciones significativas, lo que permitiría una clasificación de todos los fenómenos críticos en dos dimensiones. Es de señalar que existe un argumento de Zamolodchikov que muestra que la invarianza de escala global implica la local (i.e. invarianza

conforme) bajo ciertas condiciones (ver sección 3.8).

Por otra parte, las teorías de campos bidimensionales invariantes conformes proveen una variable diámica en teorías de cuerdas. En este contexto la invarianza conforme impone restricciones sobre las variables espacio-temporales permitidas y los posibles grados de libertad. Las dos dimensiones representan en este contexto el espacio de parámetros necesario para describir la hoja de universo de la cuerda. La invarianza conforme aparece así como una ecuación de movimiento en la teoría de cuerdas.

Para estudiar la invarianza conforme en la sección 2 de este capítulo describiremos el grupo conforme en dos dimensiones. En particular, mostraremos las propiedades de los generadores de las transformaciones conformes bidimensionales. Veremos en la sección 3 que cuánticamente estos operadores satisfacen un álgebra infinito-dimensional llamada de Virasoro, caracterizada por el valor de su anomalía conforme o carga central, propia de cada modelo. En el capítulo 4 calcularemos la carga central de un importante modelo con invarianza conforme como el de Wess-Zumino-Witten (WZW), que usaremos más adelante para estudiar propiedades del modelo Kondo. En la sección 5 mostraremos cómo la imposición de unitariedad restringe los valores posibles de la carga central de los modelos invariantes conformes.

Las aplicaciones de la invarianza conforme a los sistemas estadísticos ocuparán la sección 6, mientras que en la sección 7

veremos cómo el estudio de un sistema con tamaño finito y temperatura finita nos lleva a relacionar el calor específico con la carga central. Finalmente discutiremos el Teorema-c de Zamolodchikov que estudia, mediante el grupo de renormalización, el comportamiento de un sistema crítico cuando se lo aparta del punto crítico.

3.2 El grupo conforme en dos dimensiones

Consideremos el espacio R^d con métrica plana $\epsilon_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ y el elemento de línea dado por

$$ds^2 = \epsilon_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \quad (3.1)$$

Bajo un cambio de variables $x_\mu \rightarrow x'_\mu$ la métrica cambiará en $\epsilon_{\mu\nu} \rightarrow \epsilon'_{\mu\nu}(x') = \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\nu} \epsilon_{\sigma\rho}(x)$. Por definición, el grupo conforme es el subgrupo de las transformaciones de coordenadas que dejan la métrica invariante a menos de un cambio de escala:

$$\epsilon_{\mu\nu}(x) \rightarrow \epsilon'_{\mu\nu}(x') = \Omega(x) \epsilon_{\mu\nu}(x). \quad (3.2)$$

Estas son las transformaciones que preservan los ángulos entre vectores. Los generadores infinitesimales del grupo conforme pueden determinarse considerando las transformaciones infinitesimales $dx^\mu \rightarrow dx^\mu + f^\mu$, bajo las cuales el elemento de línea cambia en

$$ds^2 \rightarrow ds'^2 = ds^2 + (\partial_\mu f_\nu + \partial_\nu f_\mu) dx^\mu dx^\nu. \quad (3.3)$$

Para que 3.2 y 3.3 sean satisfechas debe cumplirse

$$[\eta_{\mu\nu} \square + (d-2) \partial_\mu \partial_\nu] \partial \cdot f = 0, \quad (3.4)$$

de donde puede inferirse que si $d \leq 2$, f es a lo sumo cuadrática en x .

En $d = 4$ las posibilidades de elegir $f(x)$ son cuatro:

$f_\mu = c_\mu$, translaciones espacio-temporales,

$f_\mu = x_\mu$, dilataciones,

$f_\mu = c_{\mu\nu} x^\nu$, ($c_{\mu\nu} = -c_{\nu\mu}$), transformaciones de Lorentz,

$f_\mu = b_\mu x^2 - 2 x_\mu \vec{b} \cdot \vec{x}$, transformaciones conformes propiamente dichas.

En $d = 2$ la ecuación (3.4) es más interesante, porque se

reduce a las condiciones de Cauchy-Riemann:

$$\partial_1 f_1 = \partial_2 f_2, \quad \partial_1 f_2 = -\partial_2 f_1. \quad (3.5)$$

Es natural entonces escribir $f(z) = f_1 + if_2$,

$\bar{f}(\bar{z}) = f_1 - if_2$, en coordenadas complejas $z, \bar{z} = x_1 \pm ix_2$, con lo cual las transformaciones conformes son todas las transformaciones de coordenadas analíticas:

$$z \rightarrow f(z), \quad \bar{z} \rightarrow \bar{f}(\bar{z}), \quad (3.6)$$

cuyo álgebra local es de dimensión infinita.

Si tomamos como base completa del espacio de funciones analíticas a las potencias de z :

$$f(z) = z^{n+1}, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (3.7)$$

los correspondientes generadores infinitesimales, llamados operadores de Virasoro, son :

$$L_n = z^{n+1} \partial \quad \text{y} \quad \bar{L}_n = \bar{z}^{n+1} \bar{\partial}. \quad (3.8)$$

Se prueba fácilmente que los L_n y \bar{L}_n satisfacen un álgebra, llamada de Virasoro (AV):

$$[L_n, L_m] = (n-m)L_{n+m}, \quad (3.9a)$$

$$[\bar{L}_n, \bar{L}_m] = (n-m)\bar{L}_{n+m}, \quad (3.9b)$$

$$[\bar{L}_n, L_m] = 0. \quad (3.9c)$$

A causa de (3.9c) el álgebra conforme local es la suma directa $\mathcal{A} \otimes \bar{\mathcal{A}}$ de dos subálgebras isomórficas con relaciones de conmutación (3.9a) y (3.9b).

En dos dimensiones el grupo conforme propio consiste del grupo de transformaciones conformes que están bien definidas y son invertibles en la esfera de Riemann. Está generado por los generadores infinitesimales $\{L_{-1}, L_0, L_1\} \cup \{\bar{L}_{-1}, \bar{L}_0, \bar{L}_1\}$. De (3.8)

identificamos a L_1 y \bar{L}_{-1} como los generadores de translaciones, a $L_0 + \bar{L}_0$ y a $i(L_0 - \bar{L}_0)$ como generadores de dilataciones y rotaciones respectivamente, y a L_1, \bar{L}_1 como generadores de las transformaciones especiales conformes. La forma finita de estas transformaciones es :

$$z \rightarrow \frac{az+b}{cz+d}, \quad \bar{z} \rightarrow \frac{\bar{a}\bar{z}+\bar{b}}{\bar{c}\bar{z}+\bar{d}},$$

donde $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ y $ad - bc = 1$. Este es el grupo $SL(2, \mathbb{C})$ y es útil para caracterizar propiedades de los estados físicos. Supongamos estar en una base de autoestados de L_0 y \bar{L}_0 con autovalores h y \bar{h} . En función de estos autovalores la dimensión de escala anómala Δ y el spin s de un estado se anotan $\Delta = h + \bar{h}$ y $s = h - \bar{h}$.

En el caso de la teoría cuántica de campos los generadores del grupo conforme son las componentes del tensor de energía-impulso (de traza nula). El álgebra de estos generadores tiene un término adicional y se denomina álgebra de Virasoro:

$$[L_n, L_m] = (n-m) L_{n+m} + \frac{c}{12}(n^3 - n) \delta_{n,-m}, \quad (3.10)$$

donde el valor de la carga central c es el parámetro de la teoría.

Según Polyakov^[3, 2], una teoría de campos conformes puede describirse completamente en términos de campos primarios o conformes, en el sentido de que toda otra cantidad física de la teoría puede ser expresada en función de éstos.

Definimos como campo primario a aquel que frente a una transformación conforme

$$ds' = \left(\frac{dz'}{dz} \right) \left(\frac{d\bar{z}'}{d\bar{z}} \right) ds \quad (3.11)$$

se transforma según una ley que imita a la de la métrica:

$$\phi'(z', \bar{z}') = \left(\frac{dz'}{dz} \right)^h \left(\frac{d\bar{z}'}{d\bar{z}} \right)^{-\bar{h}} \phi(z, \bar{z}), \quad (3.12)$$

donde h y \bar{h} son constantes reales positivas que se denominan pesos conformes o dimensiones de escala y suelen anotarse (h, \bar{h}) .

Para una transformación infinitesimal el cambio en los campos primarios es :

$$\delta\phi(z, \bar{z}) = \left[h \frac{df}{dz} + \bar{f} \frac{\partial}{\partial z} \right] \phi(z, \bar{z}) + \left[\bar{h} \frac{d\bar{f}}{d\bar{z}} + f \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right] \phi(z, \bar{z}) \quad (3.13)$$

Los generadores de simetrías en general pueden obtenerse mediante la prescripción de Noether. La carga conservada Q , asociada a la corriente mediante una integración sobre el espacio-tiempo de la componente j_0 , genera las transformaciones infinitesimales en los campos : $\delta_\epsilon \phi = \epsilon [Q, \phi]$. En particular, una transformación local de las coordenadas se construye a partir del tensor de energía-impulso T . Este es un tensor simétrico por invarianza rotacional, de divergencia nula por invarianza translacional y, en el caso de las teorías invariantes conformes, de traza nula. Estas suposiciones implican que en $d = 2$ T_μ tiene sólo dos componentes independientes, que elegimos como T_{11} y T_{12} , en función de las cuales podemos definir :

$$T(z) = T_{11} - iT_{12}, \quad (3.14a)$$

$$\bar{T}(\bar{z}) = T_{11} + iT_{12}. \quad (3.14b)$$

Bajo estas condiciones existe un conjunto de corrientes, que definimos como

$$J_\mu = T_{\mu\nu} f_\nu, \quad (3.15)$$

que son conservadas :

$$\partial_\mu J_\mu = 0. \quad (3.16)$$

Esto puede demostrarse usando las propiedades de T .

Antes de proseguir es conveniente pasar al esquema de cuantificación radial. Para evitar divergencias infrarrojas compactificaremos la coordenada espacial : $x = x+2\pi$. Esto define un cilindro de coordenadas $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $-\infty \leq \tau \leq \infty$. Ahora consideraremos una aplicación conforme $z = e^{i\theta - \tau}$ del cilindro al plano complejo. En este esquema igual tiempo significa igual radio, el pasado remoto está en $z=0$ y el futuro lejano en $z=\infty$. Las integrales sobre tiempos iguales serán integrales de línea sobre un círculo de radio fijo. En este esquema $L_0 + \bar{L}_0$, que en el plano generaba las transformaciones de escala, resulta ser el generador de translaciones en el tiempo, de manera que corresponde al operador hamiltoniano, a menos de una constante.

La carga conservada se puede escribir ahora como

$$Q_f = \int J_r(\theta) d\theta = \frac{1}{2\pi i} \oint T(z)f(z) dz + \frac{1}{2\pi i} \oint \bar{T}(\bar{z})\bar{f}(\bar{z}) d\bar{z}, \quad (3.17)$$

donde el contorno de las integrales es alrededor del origen.

La variación del campo bajo una transformación conforme se obtiene conmutando el campo con la carga conservada y puede escribirse como

$$\delta_f \phi(z, \bar{z}) = \frac{1}{2\pi i} \oint_z f(\zeta) R(T(\zeta)\phi(z, \bar{z})) d\zeta + \frac{1}{2\pi i} \oint_{\bar{z}} \bar{f}(\bar{\zeta}) R(\bar{T}(\bar{\zeta})\phi(z, \bar{z})) d\bar{\zeta}, \quad (3.18)$$

donde la función R, orden radial, ordena temporalmente los campos como puede verse de su definición :

$$R\langle A(z)B(z') \rangle = \begin{cases} A(z)B(z) & \text{si } |z| > |z'|, \\ B(z)A(z) & \text{si } |z| < |z'|. \end{cases} \quad (3.19)$$

Comparando (3.18) con la definición de campo primario (3.13), en el caso de una transformación infinitesimal, resulta :

$$R\langle T(\zeta)\phi(z,\bar{z}) \rangle = \frac{\hbar}{(\zeta-z)^2} \phi(z,\bar{z}) + \frac{1}{\zeta-z} \frac{\partial \phi(z,\bar{z})}{\partial z} + \text{términos regulares} \quad (3.20)$$

Es así que la ley de transformación de los campos corresponde a la suposición de una expansión en producto de operadores a corta distancia. En lo que sigue obviaremos el símbolo R.

Si consideramos $f(z) = z^{n+1}$, resulta :

$$L_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_f T(\zeta) \zeta^{n+1} d\zeta. \quad (3.21)$$

Podemos invertir esta relación y obtener la expresión

$$T(\zeta) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{L_n}{\zeta^{n+2}}, \quad (3.22)$$

donde L_n , los operadores de Virasoro, son justamente los coeficientes de la expansión de Laurent del tensor de energía-impulso alrededor del origen. Es decir que trabajar con los operadores de Virasoro L_n es equivalente a hacerlo con el tensor de energía-impulso $T(\zeta)$.

Veremos más adelante que los L_n , definidos en (3.21), satisfacen el AV (3.10).

3.3 La carga central

Mientras que la variación de campos primarios bajo transformaciones conformes tiene las formas (3.13) ó (3.18), el tensor de energía-impulso se transforma de manera más complicada.

Tomemos como ejemplo un campo bosónico ϕ que bajo la transformación $z \rightarrow w(z)$ queda invariante (ϕ es un escalar):

$$\phi(z) + \phi'(w) = \phi(z). \quad (3.23)$$

Entonces

$$\frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial \phi(w)}{\partial w} = \frac{\partial \phi(z)}{\partial z} \quad (3.24)$$

es decir que $\partial\phi/\partial z$ es un operador de campo primario.

El tensor de energía-impulso naif $T(z)$ puede escribirse como

$$T(z) = [\partial_z \phi(z)]^2, \quad (3.25)$$

que por (3.24) parece transformarse como un tensor de segundo rango:

$$T(z) = \left[\frac{\partial w}{\partial z} \right]^2 T'(w). \quad (3.26)$$

Sin embargo, la expresión (3.25) no está bien definida en Teoría Cuántica de Campos, porque sus elementos de matriz son

infinitos, a causa de la energía de punto cero del número infinito de osciladores. Esta energía puede ser sustraída definiendo el orden normal :

$$\begin{aligned} :T(z): &= :(\partial_z \phi(z))^2: \\ &= \lim_{z \rightarrow z'} \langle \partial_z \phi(z) \partial_{z'} \phi(z') - \langle 0 | \partial_z \phi(z) \partial_{z'} \phi(z') | 0 \rangle \rangle \end{aligned} \quad (3.27)$$

ó

$$:T(z): = \lim_{z \rightarrow z'} \left[\partial_z \phi(z) \partial_{z'} \phi(z') - (-1/4\pi) \frac{1}{(z-z')^2} \right]. \quad (3.28)$$

Usando (3.24) el término de la derecha puede escribirse como:

$$\frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial w'}{\partial z'} \frac{\partial \phi'(w)}{\partial w} \frac{\partial \phi'(w')}{\partial w'}, \quad (3.29)$$

y usando el teorema de Wick la expresión anterior se escribe así :

$$\frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial w'}{\partial z'} \left[\frac{\partial \phi'(w)}{\partial w} \frac{\partial \phi'(w')}{\partial w'} + \langle 0 | \partial_w \phi'(w) \partial_{w'} \phi'(w') | 0 \rangle \right] \quad (3.30)$$

Dentro del orden normal podemos tomar el límite $z \rightarrow z' (w(z) \rightarrow w(z'))$ porque no hay singularidades. Con esto obtenemos :

$$\begin{aligned} :T(z): &= \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 :T'(w): + \lim_{z \rightarrow z'} \left[\frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial w'}{\partial z'} \frac{-1}{4\pi} \frac{1}{(w-w')^2} \right. \\ &\quad \left. - \frac{-1}{4\pi} \frac{1}{(z-z')^2} \right]. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Evaluando el corchete y tomando el límite:

$$:T(z): = \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 :T'(w): + \frac{1}{12} \langle w, z \rangle, \quad (3.32)$$

donde $\langle w, z \rangle$, llamada derivada de Schwarz, tiene la forma:

$$\langle f(z), z \rangle = \frac{f'f'' - (3/2)(f'')^2}{(f')^3} \quad (3.33)$$

y hemos absorbido, por conveniencia, un factor (-2π) en la definición de T .

La ecuación (3.32) da la ley de transformación para campos bosónicos. Podemos generalizarla diciendo que el orden normal de $T(z)$ bajo el cambio $z \rightarrow w(z)$ verifica una ley de transformación

$$T'(z) = \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 T(w) + \frac{c}{12} \langle w(z), z \rangle, \quad (3.34)$$

donde c es un número llamado carga central de Virasoro (CCV) o anomalía conforme, y cuyo valor depende de la teoría en cuestión.

Haciendo dos transformaciones conformes sucesivas podemos obtener la expansión en producto de operadores del tensor de energía-impulso:

$$T(z)T(\zeta) = \frac{c/2}{(z-\zeta)^4} + \frac{2}{(z-\zeta)^2} T(\zeta) + \frac{1}{z-\zeta} \frac{\partial T(\zeta)}{\partial \zeta}. \quad (3.35)$$

De esta expresión es fácil ver, de acuerdo con (3.21), que T es un campo conforme de peso $(2,0)$. De la misma manera puede probarse que el peso conforme de \bar{T} es $(0,2)$.

Como $\langle T(z)T(0) \rangle = c/zz^4$, es de esperar que al menos $c \geq 0$ en una teoría con un espacio de Hilbert semidefinido positivo. Idénticas consideraciones se aplican a $\bar{T}(\bar{z})$ y, si la teoría es invariante de Lorentz, el valor de c debe ser el mismo para T que para \bar{T} .

Los correspondientes generadores de Virasoro L_n satisfacen entonces un álgebra extendida llamada de Virasoro:

$$[L_n, L_m] = (n-m) L_{m+n} + \frac{c}{12} (m^3 - m) \delta_{m,-n}, \quad (3.36)$$

que es la adelantada por la ecuación (3.10).

3.4 La carga central del modelo de Wess-Zumino-Witten

Un modelo importante que goza de invarianza conforme es el de Wess-Zumino-Witten^[4]. Es un modelo de campos bosónicos g que toman valores en un grupo semisimple \mathcal{G} y cuya acción en el espacio euclídeo bidimensional es :

$$S = \frac{1}{4\lambda^2} \text{tr} \int d^2x \partial_\mu g \partial_\mu g^{-1} + k \Gamma(g)$$

$$\Gamma(g) = \frac{1}{24\pi} \int_B d^3y \varepsilon^{ijk} \text{tr} g^{-1} \partial_i g g^{-1} \partial_j g g^{-1} \partial_k g. \quad (3.37)$$

La acción de Wess-Zumino-Witten (WZW) $\Gamma(g)$ está integrada sobre una esfera en tres dimensiones cuyo borde es identificado con el espacio bidimensional. λ y k son constantes de acoplamiento adimensionales. Como el término de WZ está definido módulo 2π , k debe ser entero de manera que e^{iS} no sea multivaluado. La teoría es renormalizable y ha sido demostrado por Witten^[3, 5] que si las constantes λ^2 y k están relacionadas por

$$\lambda^2 = 4\pi/k \quad (3.38)$$

el grupo de renormalización posee un punto fijo infrarojo estable (PFIE).

Otra propiedad importante de la acción (3.37) es su invarianza frente a un álgebra de corrientes infinito-dimensionales llamada de Kač-Moody. En efecto, S es invariante frente a transformaciones

$$g(\zeta) \rightarrow \Omega(z) g(\zeta) \Omega^{-1}(\bar{z}), \quad (3.39)$$

donde $\Omega(z)$ y $\Omega(\bar{z})$ son matrices arbitrarias del grupo \mathcal{G} que

dependen analíticamente de las coordenadas complejas

$$z = \zeta_1 + i\zeta_2, \quad \bar{z} = \zeta_1 - i\zeta_2. \quad (3.40)$$

Esta simetría da lugar a un número infinito de corrientes conservadas que puede obtenerse a partir de las ecuaciones

$$\partial_z \bar{J} = 0 \quad \text{y} \quad \partial_z J = 0 \quad (3.41)$$

donde las corrientes básicas

$$J = J^\alpha t^\alpha = -\frac{k}{2} \partial_z g g^{-1}, \quad (3.42a)$$

$$\bar{J} = \bar{J}^\alpha t^\alpha = -\frac{k}{2} g^{-1} \partial_z g, \quad (3.42b)$$

corresponden a los generadores de los grupos $G(z)$ y $G(\bar{z})$ respectivamente. t^α son matrices que representan el álgebra de Lie de G :

$$[t^a, t^b] = f^{abc} t^c. \quad (3.43)$$

Debido a (3.42) podemos escribir

$$J^\alpha = J^\alpha(z), \quad \bar{J}^\alpha = \bar{J}^\alpha(\bar{z}). \quad (3.44)$$

La ecuación (3.43) puede considerarse como una definición del modelo de WZ. En la teoría cuántica estas expresiones tienen el siguiente sentido. Supongamos que los campos $g(z, \bar{z})$ son campos primarios de dimensiones $h = \bar{h}$ que satisfacen las ecuaciones

$$\alpha \frac{\partial g(z, \bar{z})}{\partial z} = :J^\alpha(z) t^\alpha g(z, \bar{z}):, \quad (3.45a)$$

$$\alpha \frac{\partial g(z, \bar{z})}{\partial \bar{z}} = :\bar{J}^\alpha(\bar{z}) t^\alpha g(z, \bar{z}):, \quad (3.45b)$$

donde α es un factor numérico que será calculado más adelante, y el producto local de los campos está regularizado de alguna manera particular. Las ecuaciones (3.45) deben considerarse como una propiedad especial de la expansión en producto de operadores de

$J^\alpha(\zeta) t^\alpha g(z, \bar{z})$ y $\bar{J}^\alpha(\bar{\zeta}) g(z, \bar{z}) t^\alpha$. Consideremos por ejemplo el primero de estos productos, que tendrá la forma general

$$J^\alpha(\zeta) t^\alpha g(z, \bar{z}) = \frac{c_g}{\zeta - z} g(z, \bar{z}) + \sum_{n=1}^{\infty} (\zeta - z)^{n-1} t^\alpha J^{-n} g(z, \bar{z}), \quad (3.46)$$

donde la constante c_g está definida por $t^\alpha t^\alpha = c_g I$. El coeficiente que acompaña a la potencia cero de (3.46) debe coincidir, a menos de un factor numérico con la derivada $\partial_t g$, es decir que

$$J^\alpha(\zeta) t^\alpha g(z, \bar{z}) = \frac{c_g}{\zeta - z} g(z, \bar{z}) + \alpha \frac{\partial g(z, \bar{z})}{\partial z} + \mathcal{O}(\zeta - z), \quad (3.47)$$

Entonces el producto $::$ debe ser definido como

$$:J^\alpha(z) t^\alpha g(z, \bar{z}): \equiv \lim_{\zeta \rightarrow z} \left[J^\alpha(\zeta) - \frac{t^\alpha}{\zeta - z} \right] t^\alpha g(z, \bar{z}), \quad (3.48)$$

con una definición similar para la corriente \bar{J} .

La singularidad de (3.47) permite determinar rápidamente la dimensión anómala h de g . Comparando (3.46) con (3.47) se obtiene

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\zeta - z)^{n-1} t^\alpha J^{-n} g(z, \bar{z}) = \alpha \frac{\partial g(z, \bar{z})}{\partial z} + \mathcal{O}(\zeta - z). \quad (3.49)$$

Usando el hecho de que L_{-1} y \bar{L}_{-1} actúan como operadores diferenciales

$$L_{-1} g(z, \bar{z}) = \frac{\partial g(z, \bar{z})}{\partial z}, \quad \bar{L}_{-1} g(z, \bar{z}) = \frac{\partial g(z, \bar{z})}{\partial \bar{z}}, \quad (3.50)$$

se obtiene

$$\chi \equiv (J_0^{-1} t^{\alpha} - \alpha L_0)g = 0 \quad . \quad (3.51)$$

Para que esta definición tenga sentido χ debe satisfacer las ecuaciones :

$$L_0 \chi = (h+1) \chi, \quad J_0^{\alpha} \chi = t^{\alpha} \chi, \quad (3.52)$$

$$L_n \chi = J_n \chi = 0 \quad \text{para } n > 0. \quad (3.53)$$

Las ecuaciones (3.52) se satisfacen idénticamente, mientras que las (3.53) deben resolverse para $n=1$ porque las demás se deducen de éstas usando las álgebras de Virasoro y Kač-Moody. De hecho, al usar estas álgebras se observa que para que las ecuaciones (3.53) se satisfagan, debe cumplirse que

$$c_g + 2 h \alpha = 0, \quad (3.54)$$

y
$$c_v + k + 2\alpha = 0,$$

donde $f^{acd} f^{bcd} = c_v \delta^{ab}$.

Las ecuaciones (3.54) proveen los valores de la dimensión anómala de g :

$$h = \frac{c_g}{c_v + k} \quad (3.55)$$

y del parámetro α en (3.45) :

$$\alpha = - \frac{c_v + k}{2}. \quad (3.56)$$

Para obtener el valor de la carga central del álgebra de Virasoro recurriremos a la construcción de Sugawara^(3.7) para el tensor de energía-impulso. La idea es construir el álgebra de

Virasoro en términos de bilineales formados con los generadores de Kač-Moody. Esta idea surge naturalmente en la teoría de álgebras de corrientes donde se postula que toda la dinámica puede ser formulada en términos de corrientes. Apoyando esta conjetura, Sugawara y Sommerfeld^[3. 8] mostraron que el tensor de energía-impulso podía escribirse como una expresión bilineal en términos de las corrientes si se tiene en cuenta el término de Schwinger^[3. 9]. La idea de Sugawara es entonces escribir

$$2 \alpha T(z) = :J^a(z)J^a(z): , \quad (3.57a)$$

$$2 \alpha \bar{T}(\bar{z}) = : \bar{J}^a(\bar{z})\bar{J}^a(\bar{z}) : , \quad (3.57b)$$

donde puede mostrarse que el factor α coincide con el de (3.45). Estas definiciones pueden considerarse como otra definición del modelo de WZ, y deben ser entendidas en términos de la expansión en producto de operadores. Por ejemplo, la expansión del producto $J^a(z)J^a(z')$ en el límite $z \rightarrow z'$ tiene los siguientes términos no nulos

$$J^a(z) J^a(z') = \frac{k D}{(z-z')^k} + 2 \alpha T(z') + \mathcal{O}(z-z'), \quad (3.58)$$

donde $D = \delta^{aa}$ es la dimensión del grupo G . Evaluando la función de correlación de cuatro puntos $J^a(z)J^a(z')J^b(z)J^b(z')$, usando el teorema de Wick y la expansión (3.58), y comparando los términos singulares con los que aparecen en (3.35) se ve que la definición (3.57) es consistente si

$$c = \frac{k D}{c_V + k} . \quad (3.59)$$

Este es entonces el valor de la carga central para el modelo de WZW.

3.5 Representaciones unitarias del álgebra de Virasoro

Cada una de las distintas representaciones del álgebra de Virasoro se obtienen a partir de un único campo primario (definido en (3.12)). Los campos restantes en la representación están dados por sucesivos productos con el operador de energía-impulso. Todos estos campos juntos conforman la representación (en términos de modos, los campos secundarios se obtienen conmutando los L_n con los campos primarios). Actuando sobre el vacío los campos secundarios crean estados secundarios. Puede mostrarse que las identidades de Ward conformes proveen ecuaciones diferenciales que determinan las funciones de correlación de los campos secundarios en función de los primarios. La utilidad de organizar una teoría de campos conformes bidimensionales en familias conformes, esto es, en representaciones irreducibles del álgebra de Virasoro, es que entonces la teoría puede ser completamente especificada en términos de las funciones de Green de los campos primarios.

Existe una clase particular de representaciones que es importante en física y que tiene muchas propiedades en común con las representaciones unitarias de álgebras de Lie compactas finito-dimensionales. El criterio de selección es que el espectro de autovalores de L_0 debe ser no-negativo o, al menos, acotado por debajo. En teorías de campos cuánticos en dos dimensiones vimos que existen dos álgebras de Virasoro conmutantes $\{L_n\}$ y $\{\bar{L}_n\}$ con

$$L_0 \cong H - P \quad \text{y} \quad \bar{L}_0 \cong H + P, \quad (3.60)$$

donde H es la energía total y P el momento, así que ambos valores deben ser no-negativos. En teoría de cuerdas, L_0 lo determina el espectro de masas y nuevamente necesitamos que sea no-negativo. En mecánica estadística bidimensional el operador $L_0 + \bar{L}_0$ corresponde a dilataciones. Otra vez, la ausencia de singularidades en el origen requiere que el espectro de L_0 y \bar{L}_0 sea no-negativo.

La relación de conmutación (3.10) implica que la acción de L_n sobre un autovector de L_0 con autovalor λ da un autovector de L_0 con autovalor $\lambda - n$, si no lo aniquila :

$$L_0 L_n |\lambda\rangle = L_n (L_0 - n) |\lambda\rangle = (\lambda - n) L_n |\lambda\rangle. \quad (3.61)$$

Como el espectro de L_0 debe estar acotado por debajo tendrá algún autovalor más bajo h correspondiente a un autovector $|h\rangle$ que satisfaga

$$L_0 |h\rangle = h |h\rangle \quad , \quad L_n |h\rangle = 0 \quad , \quad n > 0. \quad (3.62)$$

Una representación para la cual L_0 está acotado por debajo se denomina "de mayor peso".

La condición de unitariedad es fundamental en teoría de campos, donde es equivalente a la condición de conservación de la probabilidad. En los sistemas de mecánica estadística no juega necesariamente un papel central. Corresponde a la positividad por reflexión, que lleva a la existencia de una matriz de

transferencia hermítica. Si es que el sistema de mecánica estadística cerca de una transición de fase de segundo orden puede ser descrito por una teoría de campos efectiva con un parámetro de orden local, parece razonable esperar que la teoría sea unitaria.

Entonces, si además de la condición de positividad imponemos la condición de unitariedad :

$$L_n^\dagger = L_{-n} \quad (3.36)$$

obtenemos todas las representaciones de interés físico. Estas no son necesariamente irreducibles, pero pueden ser descompuestas en dos o mas representaciones irreducibles.

Es posible enumerar todas las representaciones irreducibles unitarias de mayor peso del álgebra de Virasoro. Es claro que, en tales representaciones, todos los estados pueden construirse a partir de "estados de vacío" $|0\rangle$ que satisfagan (3.62) por aplicación repetida de operadores L_{-n} , con $n > 0$. Todos los productos internos así obtenidos pueden calcularse usando (3.10), (3.62) y (3.63). Así, en particular, si $n > 0$:

$$\begin{aligned} \| L_{-n}|h\rangle \|^2 &= \langle h|L_n L_{-n}|h\rangle = \langle h|[L_n, L_{-n}]|h\rangle \\ &= \left[2 n h + \frac{c}{12} n (n^2-1) \right] \| |h\rangle \|^2 . \end{aligned} \quad (3.64)$$

Es decir que debe cumplirse

$$2 n h + \frac{c}{12} n (n^2-1) \geq 0 \quad \forall n > 0 . \quad (3.65)$$

Tomando primero $n = 1$ y luego n grande vemos que, necesariamente, para tener una representación unitaria de mayor peso debe cumplirse :

$$h \geq 0 \text{ y } c \geq 0. \quad (3.66)$$

Tal representación puede ser entonces caracterizada por el par de números no-negativos (c,h) . No todos los valores de (c,h) están permitidos. las restricciones sobre ellos fueron encontradas por Friedan, Qiu y Schenker ^[3. 10], quienes establecieron el siguiente teorema:

"Para que una dada representación del álgebra de Virasoro sea unitaria los correspondientes valores de c y h deben cumplir:

$$c \geq 1 \text{ y } h \geq 0 , \quad (3.67)$$

o bien

$$c = 1 - \frac{6}{(m+2)(m+3)} \quad (3.68)$$

y

$$h = \frac{[(m+3)p - (m+2)q]^2 - 1}{4(m+2)(m+3)} , \quad (3.69)$$

donde $m = 0,1,2,\dots$; $p = 1,2,\dots,m+1$; $q = 1,2,\dots,p$."

La prueba se basa en el cálculo del determinante de Kač. Este es el determinante de una matriz construída con los productos internos de los estados de un dado nivel. Si el determinante es negativo quiere decir que hay estados de norma negativa en ese nivel y la representación no es unitaria.

Quando la carga central de un modelo tiene un valor c que satisface (3.68) para algún valor de m , se dice de él que es

un modelo mínimo, o que su carga central está dentro de la serie de Friedan, Qiu y Schenker (FQS). Ha sido probado que estos modelos poseen un álgebra de operadores cerrada y un número finito de operadores primarios. Se logra con esto, entonces, que la parte más singular de la expansión en producto de operadores defina un álgebra de campos cerrada y de dimensión finita. Acerca de estas teorías conformes todas las funciones de correlación pueden ser determinadas.

3.6 Invarianza conforme y sistemas estadísticos

En mecánica estadística son de gran importancia los sistemas que sufren una transición de fase de segundo orden. Para estos sistemas existe un punto crítico en el espacio de parámetros en el cual los grados de libertad (por ejemplo los spines) están correlacionados a grandes distancias. La medida de la correlación ζ es la llamada longitud de correlación.

Cuando ζ diverge hay fluctuaciones en todas las escalas, desde distancias muy cortas a distancias muy largas, del orden de ζ . La idea de que la longitud de correlación es la magnitud importante en los fenómenos críticos lleva a la hipótesis de escala : cerca del punto crítico la divergencia de ζ controla las divergencias en las cantidades físicas. Estas divergencias suelen aproximarse por una ley de potencias. Estas potencias de t ($=\frac{T-T_c}{T_c}$ =temperatura reducida) son los exponentes críticos, cantidades básicas en las transiciones de fase de segundo orden.

Exactamente en el punto crítico, donde ζ diverge, el sistema tiene el mismo comportamiento a todas las escalas, es decir, es invariante de escala. Esto hace posible estudiar el problema mediante una teoría de campos cuánticos continuos. Más aún, como será mostrado en la sección 3.8, en dos dimensiones la invarianza de escala implica la invarianza conforme, bajo ciertas condiciones. La importancia de la invarianza conforme al proveer información acerca de comportamientos críticos fue conjeturada por Polyakov^[3. 2], y posteriormente la conjetura fue llevada a la

práctica por Belavin, Polyakov y Zamolodchikov^[3.11], quienes mostraron que el grupo conforme puede ser usado para analizar en detalle las teorías de campos bidimensionales invariantes conformes.

Un sistema invariante conforme se describe por las relaciones de conmutación de ciertos campos primarios $\phi(z, \bar{z})$:

$$[L_n, \phi] = z^{n+1} \frac{\partial \phi}{\partial z} + h (n+1) z^n \phi \quad (3.70a)$$

$$[\bar{L}_n, \phi] = \bar{z}^{n+1} \frac{\partial \phi}{\partial \bar{z}} + \bar{h} (n+1) \bar{z}^n \phi \quad (3.70b)$$

El vacío de la teoría es invariante bajo el subgrupo $SU(1,1)$, generado por $\{L_{-1}, L_0, L_1\}$, del grupo conforme. En efecto :

$$L_n |0\rangle = 0, \quad n \geq 1. \quad (3.71)$$

Entonces, si ϕ es univaluado, se deduce de (3.70a) que :

$$L_0 \phi(0) |0\rangle = h \phi(0) |0\rangle \quad (3.72)$$

y la función de dos puntos está dada por

$$\langle 0 | \phi(z_1) \phi(z_2) | 0 \rangle = r^{-2(h+\bar{h})} e^{-2i(h-\bar{h})} \langle 0 | \phi(0) \phi(1) | 0 \rangle, \quad (3.73)$$

donde $z_2 - z_1 = r e^{i\theta}$, así que $h+\bar{h}$ es la dimensión de escala anómala del campo ϕ y $h-\bar{h}$ su spin. Los exponentes críticos de la teoría son combinaciones lineales de estas dimensiones de escala. Debe notarse que, como las funciones de correlación deben decaer con la separación, (3.73) implica que $h+\bar{h}$ es positivo.

Como señalamos, Friedan, Qiu y Schenker mostraron cuan restrictivas son la invarianza conforme y la unitariedad cuando $c < 1$. Los estados de la teoría deben caer en representaciones irreducibles de las álgebras de Virasoro L_n y \bar{L}_n . Se sigue de su teorema, presentado en la sección anterior, que en ese caso c debe tomar uno de los valores (3.68). Además, asociado con cada campo primario univaluado ϕ existe un estado de mayor peso :

$$|h\rangle = \phi(0)|0\rangle \quad (3.74)$$

que satisface (3.62), lo cual implica que h debe tomar uno de los valores (3.69) para el valor de m correspondiente a c . Comparando los valores racionales permitidos de las dimensiones de escala y spines con los valores conocidos de varios sistemas estadísticos bidimensionales Friedan, Qiu y Schenker fueron capaces de deducir los correspondientes valores de c :

$c = 1/2$, modelo de Ising,

$c = 7/10$, modelo de Ising tricrítico,

$c = 4/5$, modelo de Potts de tres estados,

$c = 6/7$, modelo de Potts de tres estados tricrítico.

Posteriormente fueron identificados otros modelos con valores de c mayores.

Las cuestiones de mayor interés acerca de los modelos de la mecánica estadística invariantes conformes son: a) la clasificación de las clases de universalidad y, lo que no es menos importante, el desarrollo de criterios para decidir cuándo un sistema dado está en una clase de universalidad; b) el cálculo de

exponentes críticos; c) el cálculo de otras cantidades universales, incluyendo efectos de tamaño finito en el punto crítico y cocientes de magnitudes termodinámicas fuera del punto crítico; y d) el cálculo de funciones de correlación, tanto en el punto crítico como fuera de él.

Lamentablemente hay muy pocas evidencias experimentales de fenómenos críticos en dos dimensiones. Hasta ahora sólo las predicciones del modelo de Ising y el de Potts de tres estados han podido ser cotejadas con experimentos reales precisos. Nuestros resultados para el modelo Kondo constituyen un aporte en este dominio, por cuanto confirman por un lado la invarianza conforme conocida en el modelo, y aportan resultados que pueden cotejarse con los valores experimentales para determinadas magnitudes (calor específico, susceptibilidad).

3.7 Temperatura finita y tamaño finito

La invarianza conforme puede usarse para estudiar los efectos del tamaño finito en sistemas estadísticos bidimensionales y los efectos de la temperatura finita en sistemas cuánticos unidimensionales. Estos están relacionados porque una teoría de campos cuánticos en (1+1) dimensiones puede definirse en términos de una integral funcional en espacio euclideo sobre una banda de ancho $L = \beta = 1/T$ (en la dirección del tiempo imaginario), con condiciones periódicas en el contorno.

Usando los resultados de las secciones anteriores hallaremos una expresión para la energía libre a temperatura finita de un sistema cuántico unidimensional definido sobre un intervalo finito a lo largo del eje real $0 \leq |\text{Re } z| \leq L$. A partir de dicha expresión obtendremos el valor del calor específico como función de la temperatura.

Consideremos la transformación

$$z \rightarrow W(z) = e^{(2\pi/L)z}, \quad (3.75)$$

que mapea la banda $0 \leq |\text{Re } z| \leq L$, $0 \leq |\text{Im } z| \leq \infty$ al plano, y corresponde al estudio de una teoría de campos a temperatura finita $T = 1/\beta = 1/L$.

Bajo (3.75) los campos primarios se transforman como

$$\begin{aligned} \phi(z, \bar{z}) \rightarrow \phi'(z, \bar{z}) &= U \phi(z, \bar{z}) U^{-1} \\ &= (\partial W / \partial z)^{\bar{h}} \phi(W(z), \bar{W}(\bar{z})), \end{aligned} \quad (3.76)$$

y el tensor de energía-impulso como

$$\begin{aligned} T(z) \rightarrow T'(z) &= U T(z) U^{-1} \\ &= (\partial w / \partial z)^2 T(w(z)) + (c/12)\{w(z), z\} \end{aligned} \quad (3.77)$$

En general los operadores U no dejan el vacío invariante. Si llamamos $|0\rangle_b$ al vacío de la teoría cuantizada en la banda y $|0\rangle_p$ al del plano, resulta que

$$U |0\rangle_b = |0\rangle_p . \quad (3.78)$$

Entonces

$$\begin{aligned} {}_b\langle 0 | T(z) | 0 \rangle_b &= {}_b\langle 0 | U^{-1} U T(z) U^{-1} U | 0 \rangle_b \\ &= {}_p\langle 0 | (\partial w / \partial z)^2 T(w(z)) | 0 \rangle_p + \\ &\quad + (c/12)\{w(z), z\}. \end{aligned} \quad (3.79)$$

Si el tensor de energía-impulso está normalizado de tal modo que

$${}_p\langle 0 | T(w) | 0 \rangle_p = 0 , \quad (3.80)$$

entonces

$${}_b\langle 0 | T(z) | 0 \rangle_b = \frac{c}{12} \{w(z), z\} , \quad (3.81)$$

y para la transformación (3.45)

$${}_b\langle 0 | T(z) | 0 \rangle_b = \frac{\pi^2 c}{6 L^2} . \quad (3.82)$$

(Lo mismo puede probarse para $\bar{T}(\bar{z})$ con $\bar{w}(\bar{z}) = e^{(2\pi/L)\bar{z}}$).

Ahora recobramos el factor (-2π) absorbido en (3.33) y, usando el hecho de que la densidad hamiltoniana es $\mathcal{H} = T(z) + \bar{T}(\bar{z})$, encontramos que

$${}_b\langle 0 | \mathcal{H} | 0 \rangle_b = - \frac{\pi^2 c}{6 L^2} , \quad (3.83)$$

y la energía total es

$$\begin{aligned} \langle 0 | H | 0 \rangle &= \int_0^L d(\text{Re } z) \langle 0 | \mathcal{H} | 0 \rangle \\ &= - \frac{\pi c}{6 L} = - \frac{\pi c T}{6} . \end{aligned} \quad (3.84)$$

El valor de espectación de vacío del Hamiltoniano corresponde al límite de temperatura cero de la energía libre, que podemos escribir como

$$F(T) = F_0 - \frac{\pi c}{6} T^2, \quad (3.85)$$

donde F_0 corresponde a $F(T=0, L \rightarrow \infty)$.

A partir de (3.85) se puede calcular el calor específico a temperatura finita:

$$C = - T \frac{\partial^2 F}{\partial T^2} = \frac{\pi c T}{3} . \quad (3.86)$$

Es éste un resultado importante, descubierto al mismo tiempo por Blöte, Cardy y Nightingale ^[3.11] por un lado y por Affleck ^[3.12] por otro. Ellos demostraron que un sistema bidimensional de tamaño finito en el punto crítico, (donde es invariante conforme) tiene un calor específico proporcional a la temperatura y a la carga central del modelo. Nosotros usaremos este resultado para calcular el calor específico del modelo Kondo.

3.8 El "Teorema c" de Zamolodchikov

Completando la revisión de los aspectos más relevantes de las teorías conformes estudiaremos ahora un importante teorema establecido por Zamolodchikov^[9, 13]. Se trata de un estudio cualitativo del comportamiento de un sistema crítico cuando se lo aparta del punto crítico. Este resultado será muy importante en nuestro análisis de la carga central del modelo Kondo.

El teorema de Zamolodchikov puede ser enunciado como sigue :

" Dado un sistema bidimensional crítico con una anomalía conforme c , si se saca al sistema de su punto crítico y se lo lleva a un nuevo punto fijo infrarojo estable (PFIE), en que la anomalía conforme es c^* , se puede relacionar el valor de c^* con el de c . En efecto, existe una función $C(g_i)$ (donde g_i son constantes de acoplamiento adimensionales) con las propiedades siguientes :

- i) no se incrementa a lo largo de las trayectorias del grupo de renormalización,
- ii) es estacionaria sólo en los puntos fijos,
- iii) en un punto fijo su valor es igual al de la anomalía conforme .

En particular esto significa que $c^* \leq c$."

La demostración de este teorema es como sigue:

Como señalamos, el tensor de energía-impulso tiene tres componentes independientes que pueden elegirse como T_{zz} , \bar{T}_{zz} y $\Theta = T_{zz} - \bar{T}_{zz}$. T_{zz} tiene peso conforme $(2,0)$, como puede verse

comparando (3.20) con (3.35). De forma análoga puede mostrarse que \bar{T} y Θ tienen pesos conformes (0,2) y (1,1) respectivamente. Entonces las funciones de correlación de dos puntos deben tener la forma :

$$\langle T(z,\bar{z})T(0,0) \rangle = F(z,\bar{z})/z^4, \quad (3.87a)$$

$$\langle \Theta(z,\bar{z})T(0,0) \rangle = \langle T(z,\bar{z})\Theta(0,0) \rangle = G(z,\bar{z})/z^2(\bar{z}\bar{z}), \quad (3.87b)$$

$$\langle \Theta(z,\bar{z})\Theta(0,0) \rangle = H(z,\bar{z})/(z\bar{z})^2, \quad (3.87c)$$

porque z y \bar{z} son funciones de peso conforme $h=1$ y $\bar{h}=1$ respectivamente.

Por otra parte, la ley de conservación del tensor de energía-impulso $\partial_\mu T^{\mu\nu}=0$ en función de z y \bar{z} toma la forma

$$\partial_z T + \partial_{\bar{z}} \Theta = 0, \quad (3.88a)$$

$$\partial_{\bar{z}} \bar{T} + \partial_z \Theta = 0. \quad (3.88b)$$

Tomando la función de correlación de (3.58) con $T(0,0)$ y $\Theta(0,0)$ y usando (3.87) encontramos que

$$\partial_{\bar{z}}(F(z,\bar{z})/z^4 + \partial_z(G(z,\bar{z})/z^3\bar{z})) = 0, \quad (3.89a)$$

$$\partial_{\bar{z}}(G(z,\bar{z})/z^3\bar{z}) + \partial_z(H(z\bar{z})/z^2\bar{z}^2) = 0. \quad (3.89b)$$

Si definimos $\hat{F} = R\partial F/\partial R$ ($R^2 = z\bar{z}$), etc., estas ecuaciones pueden escribirse así:

$$\hat{F} + \hat{G} - 6G = 0, \quad (3.90a)$$

$$\hat{G} - 2G + \hat{H} - 4H = 0. \quad (3.90b)$$

Eliminando G de las ecuaciones anteriores y definiendo una función

$$C(R,g_i) = 2(F - 2G - 3H), \quad (3.91)$$

vemos que esta función satisface

$$R \frac{\partial C(R,g_i)}{\partial R} = -24 H(R,g_i). \quad (3.92)$$

Si la teoría es invariante Θ es un operador real,

entonces por (3.57c) H es semidefinida positiva. Así, cuando la escala de longitud R en (3.62) se escala a distancias más y más grandes mientras se mantienen las constantes de acoplamiento g_i fijas, entonces C decrece, probando así la primera proposición del teorema. La segunda proposición se verifica cuando $H=0$, haciendo C estacionaria. En ese caso $\Theta=0$ y por (3.88) la teoría es invariante conforme, es decir que estamos en un punto fijo. Finalmente, en un punto fijo $G=H=0$ y $F=C/2$, de modo que por (3.91) $C=c$, con lo que se completa la prueba del teorema.

El teorema de Zamolodchikov permite ver que el flujo del grupo de renormalización es irreversible, y que debe existir alguna clase de función de entropía que mide esta pérdida de información. La idea es que la acción original y aquella que se obtiene mediante el cambio de escala son equivalentes en el sentido de que todas las funciones de correlación de ambas teorías coinciden a escalas mayores que el cutoff escaleado. Por lo tanto hemos perdido información acerca del comportamiento ultravioleta porque ya no es más legítimo preguntarse que sucede a escalas menores que el cutoff. En este sentido el movimiento en el espacio de parámetros bajo la influencia del grupo de renormalización es un proceso irreversible. Es interesante notar que este argumento general puede aplicarse no sólo en dos dimensiones, pero una generalización naif falla si para $d>2$, porque hay más amplitudes relevantes en la función de correlación.

Uno de los logros más relevantes de este teorema es el haber probado que, en dos dimensiones, la invarianza de escala

(IE) implica la invarianza conforme (IC). Esto había sido predicho por Polyakov^[3. 16] y Migdal^[3. 17], quienes mostraron que las ecuaciones de Schwinger-Dyson satisfechas por un sistema estadístico cerca del punto crítico eran consistentes con una solución invariante conforme. Nada dijeron, sin embargo, de soluciones que no fueran IC. Schäfer^[3. 16], generalizando el grupo de renormalización de Wilson, mostró que en general las condiciones de IC son en general más fuertes que las de IE.

J. Polchinsky^[3. 17] ha completado el argumento de Zamolodchikov mostrando que la IE implica la IC sólo en dos dimensiones. Para tres o más dimensiones no se ha hallado todavía ni una prueba ni un contraejemplo. En el trabajo de Polchinsky, sin embargo, se establece que un sistema puede ser IE sin ser IC si la traza del tensor de energía-impulso es la divergencia de un operador local que no es de por sí una corriente conservada más una divergencia (en $d \geq 3$) o un gradiente (en $d=2$).

Bibliografía general

- P.Goddard y D.Olive,"Kac-Moody and Virasoro algebras in relation quantum physics", Int.Journ. of Mod.Phys.A (1986).
- T.Eguchi, "Lectures on conformal and Kac-Moody algebras", Inst. Física de Taipei, Taiwan, marzo de 1986.
- J.Cardy,"Conformal invariance" en Domb and Lebowits, Phase Transitions 11, Academic Press (1987).
- P.Ginsparg,"Applied conformal field theory", en "Champs, Cordes et Phenomenes critiques" (Les Houches, Junio de 1988) N Holland, 1990.
- D.Boyansky y C.M.Naón, "An introduction to conformal invariance quantum field theory and statistical mechanics", a publicarse Nuovo Cimento.

Referencias

- [3.1]-A.A.Belavin, A.M.Polyakov y A.B.Zamolodchikov, Nucl.Ph B241 (1984) 333.
- [3.2]-A.M.Polyakov, Zh.Eksper.Teor.Fiz.Pis.Red. 12(1970)538 (JETP Lett 12 (1970) 381)
- [3.3]-V.G.Knizhnik y A.B.Zamolodchikov, Nucl.Phys. B247 (1984)83.
- [3.4]-J.Wess y B.Zumino, Phys.Lett B37(1971) 95.
- [3.5]-E.Witten,Commun.Math.Phys. 92 (1984) 455.
- [3.6]-A.M.Polyakov y P.B.Wiegmann, Phys.Lett B131 (1983) 121.
- [3.7]-H.Sugawara, Phys.Rev.170 (1968) 1659.

- [3.8]-C.Sommerfeld, Phys.176 (1968) 2019.
- [3.9]-J.Schwinger, Phys.Rev.Lett 3 (1959)296.
- [3.10]-D.Friedan, Z.Qiu y S.Schenker, Phys.Rev.Lett 52 (1984) 1575.
- [3.11]-H.W.J.Blöte, J.L.Cardý, M.P.Nightingale, Phys.Rev.Lett
56 (1986) 742.
- [3.12]-I.Affleck, Phys.Rev.Lett 56 (1986)746.
- [3.13]-A.B.Zamolodchikov, JETP Lett 43 (1986) 730.
- [3.14]-A.M.Polyakov, JETP Lett 12 (1970) 381.
- [3.15]-A.A.Migdal, Phys.Lett 37B (1971) 386.
- [3.16]-L.Schäfer, J.Phys. A9 (1976) 377.
- [3.17]- J.Polchinski, Nucl.Phys.B303 (1988) 226.

CAPITULO 4
BOSONIZACIÓN E INTEGRACIÓN FUNCIONAL

4.1 INTRODUCCIÓN

Describimos en el capítulo 2 diversas técnicas de teoría de campos utilizadas para estudiar el problema Kondo. Ninguno de estas técnicas utiliza una propiedad básica de los modelos fermiónicos bidimensionales cual es la de bosonización. Una de las razones de ello es que el modelo Kondo tiene una simetría no-abeliana, lo que complica grandemente el proceso de bosonización utilizando las técnicas operacionales habituales. (Fue Witten, en 1984^[4.8], quien finalmente pudo formular las reglas correctas de bosonización que respetan las simetrías internas y esto, sólo para fermiones libres).

Existe sin embargo desde 1981^[4.2,3] una técnica de bosonización alternativa, en el marco de la integral funcional. Su extensión al caso de simetrías internas no-abelianas es particularmente sencilla y fue aplicada al estudio de Cromodinámica Cuántica en dos dimensiones^[4.2], modelo de Thirring^[4.4], etc. Se basa en el cálculo exacto del determinante que resulta de integrar las variables fermiónicas del modelo. La conexión entre esta técnica y la operacional formulada por Witten, para el caso no-abeliano, fue posible a partir de los trabajos de Polyakov y Wiegmann^[4.4] sobre determinantes fermiónicos.

Expondremos en este capítulo los detalles técnicos asociados a la bosonización no-abeliana via integral funcional, de manera de contar con las herramientas apropiadas para atacar, en el capítulo siguiente, la bosonización del modelo Kondo.

4.2 LA TECNICA DE BOSONIZACIÓN VIA INTEGRAL FUNCIONAL

Uno de los aspectos mas espectaculares de la física matemática en 1+1 dimensiones es la existencia de transformaciones (no locales) de ciertos productos de campos fermiónicos locales en productos de campos bosónicos locales^[4.9]. Así, si consideramos la teoría de fermiones libres sin masa descrita por el Lagrangiano:

$$L_F = \bar{\psi} i \not{\partial} \psi, \quad (4.1)$$

esta teoría es equivalente a la teoría de campos escalares sin masa cuyo Lagrangiano es :

$$L_E = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi. \quad (4.2)$$

El campo fermiónico ψ tiene una expresión en términos de ϕ que es no-local y relativamente complicada. Sin embargo ciertas formas bilineales tienen una expresión sencilla en términos de ϕ . Por ejemplo, la corriente $J_\mu = \bar{\psi} \gamma_\mu \psi$ escrita en términos de ϕ tiene esta forma: $J_\mu = \pi^{-1/2} \epsilon_{\mu\nu} \partial^\nu \phi$.

Este procedimiento, que puede extenderse a teorías en interacción, como el modelo de Thirring masivo^[4.9] o el de Schwinger^[4.10], es extraordinariamente útil para analizar propiedades de teorías en 1+1 dimensiones. Muchos fenómenos que son difíciles de atacar en la versión de fermiones tienen una

explicación sencilla en la bosónica.

En el esquema de la integral funcional la prescripción para bosonizar consiste en efectuar un cambio en las variables fermiónicas, elegido de tal modo que los fermiones se desacoplen de los demás campos (campos de gauge, campos auxiliares, etc). A nivel cuántico este cambio lleva a un Lagrangiano efectivo bosónico que incluye la contribución del Jacobiano de Fujikawa^[4.11] asociado al cambio de variables. A continuación daremos un ejemplo de aplicación de esta técnica, que incluye las dificultades que encontraremos al bosonizar el modelo Kondo.

4.3 Un ejemplo de bosonización no abeliana :
una teoría de gauge SU(N)

4.3a El determinante fermiónico

Sea el Lagrangiano

$$\mathcal{L} = \bar{\Psi}(i\not{\partial} + \not{A})\psi = \bar{\Psi} \not{\partial} \psi, \quad (4.3)$$

donde ψ es un fermión de Dirac en la representación fundamental de SU(N), interactuando con un campo de gauge A que toma valores en el álgebra de Lie de SU(N).

Consideremos ahora la transformación quirral

$$\psi = e^{\int \not{\partial} \phi(x)} \chi, \quad (4.4)$$

$$\bar{\Psi} = \bar{\chi} e^{\int \not{\partial} \phi(x)}, \quad (4.5)$$

con $\phi = \phi^a t^a$ tomando valores en el álgebra de Lie de SU(N) y t^a los generadores de SU(N), $\text{tr } t^a t^b = \delta^{ab}$. Para que esta transformación desacople los fermiones del campo de background A, el Lagrangiano fermiónico debe transformarse como

$$\bar{\Psi} \not{\partial} \psi \rightarrow \bar{\chi} i\not{\partial} \chi. \quad (4.6)$$

Para que (4.6) devenga una identidad es necesario imponer condiciones sobre el campo de background^[4.2]:

$$\not{A} = -i(\not{\partial} e^{\int \not{\partial} \phi}) e^{-\int \not{\partial} \phi}. \quad (4.7)$$

Puede probarse^[4.3] que todo A puede escribirse en términos de algún ϕ como (4.7) en cierto gauge, conocido como "gauge desacoplante".

Para tratar el problema a nivel cuántico debemos calcular el jacobiano asociado a la transformación (4.2), de manera de poder interpretar (4.3) como un cambio de variables en

la integral funcional que define la funcional generatriz de la teoría. En primer lugar, construyamos la transformación finita a partir de transformaciones infinitesimales introduciendo un parámetro t que varíe entre 0 y 1^[4.3]. Así, consideramos la transformación :

$$\psi = e^{i\delta\phi} \psi_t, \quad (4.8)$$

$$\bar{\psi} = \bar{\psi}_t e^{i\delta\phi}. \quad (4.9)$$

El Lagrangiano fermiónico puede escribirse en esta forma:

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}_t D_t \psi_t, \quad (4.10)$$

donde

$$D_t = e^{\delta\phi} \not{\partial} e^{\delta\phi}. \quad (4.11)$$

Ahora, efectuando el cambio de variables en la integral funcional

$$Z_F = \int D\bar{\psi} D\psi e^{-\int \bar{\psi} D \psi d^4x}, \quad (4.12)$$

obtenemos

$$Z_F = \int D\bar{\psi} D\psi J(t) e^{-\int \bar{\psi} D_t \psi d^4x}, \quad (4.13)$$

es decir que

$$Z_F = J(t) \det D_t. \quad (4.14)$$

Como Z_F no puede depender de t :

$$\frac{dZ_F}{dt} = 0 = \frac{dJ}{dt} \det D_t + J(t) \frac{d(\det D_t)}{dt} \quad (4.15)$$

Integrando la expresión anterior obtenemos

$$J \equiv J(1) = e^{-\int_0^1 w(t) dt}, \quad (4.16)$$

donde

$$w'(t) = \frac{dw}{dt} = \frac{d \log \det D_t}{dt} \quad (4.17)$$

$J(1)$ es precisamente el jacobiano que estamos buscando. Para evaluarlo podemos escribir

$$w'(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} [\log \det D_{t+\Delta t} - \log \det D_t] \quad (4.18)$$

Es posible desarrollar $D_{t+\Delta t}$ como

$$D_{t+\Delta t} = D_t + \phi \mathcal{A}(x) \Delta t + \mathcal{O}(\Delta t^2) \quad (4.19)$$

donde

$$\phi \mathcal{A}(x) = Y_S \phi D_t + D_t Y_S \phi, \quad (4.20)$$

con lo cual

$$\begin{aligned}
\log [\det D_t + \Delta_t / \det D_t] &= \text{tr} \log (D_t + \Delta_t) D_t^{-1} \\
&= \text{tr} \log (1 + \phi \not{x} D_t^{-1} \Delta_t + \dots) \\
&= \text{tr} \phi \not{x} D_t^{-1} \Delta_t \\
&= 2 \text{tr} \not{Y}_5 \phi \Delta_t .
\end{aligned} \tag{4.21}$$

Tenemos finalmente

$$w' = 2 \text{tr} \not{Y}_5 \phi . \tag{4.22}$$

Todas estas manipulaciones son puramente formales, debido a que los determinantes que aparecen en (4.18) deben ser regularizados. La prescripción de regularización propuesta por Fujikawa^[4.12] se basa en la introducción de un cutoff M . La forma regularizada de $w'(t)$ es :

$$w'(t) = \lim_{M^2 \rightarrow \infty} 2 \text{Tr} \not{Y}_5 \phi e^{-D_t^2/M^2}, \tag{4.23}$$

con $D = e^{i\not{Y}_5 \phi} \not{D} e^{i\not{Y}_5 \phi}$, y Tr incluye ahora una traza sobre los índices de la simetría interna.

Es fácil evaluar $w'(t)$. En efecto, de (4.24) tenemos

$$\begin{aligned}
w'(t) &= \lim_{M^2 \rightarrow \infty} \text{tr} \frac{2}{(2\pi)^2} \int d^2x d^2k e^{ikx} e^{-D_t^2/M^2} \not{Y}_5 \phi e^{-ikx} \\
&= \lim_{M^2 \rightarrow \infty} \text{tr} \frac{\not{Y}_5 \phi}{2\pi^2} \int d^2x d^2k e^{-(D_t + \not{k})^2/M^2}.
\end{aligned} \tag{4.24}$$

Expandiendo el último exponencial se obtiene

$$w'(t) = \lim_{M^2 \rightarrow \infty} \text{tr} \frac{\not{Y}_5 \phi}{2\pi^2} \int d^2x d^2k e^{-(k^2/M^2)} [1 - D_t^2/M^2 + \mathcal{O}(1/M^4)] \tag{4.25}$$

En dos dimensiones el término $1/M^2$ es el que contribuye en el límite $M^2 \rightarrow \infty$ después de escalar las variables tenemos :

$$w'(t) = \frac{1}{2\pi^2} \int d^2x \int d^2p e^{-P^2} \text{tr } \gamma_3 \phi D_t^2. \quad (4.26)$$

Así obtenemos para el jacobiano la siguiente expresión :

$$\log J = - \frac{1}{2\pi} \int d^2x \int_0^1 dt \text{Tr } \gamma_3 \phi D_t^2, \quad (4.27)$$

que puede escribirse como

$$\log J = \frac{1}{2\pi} \int d^2x \int_0^1 dt \text{Tr } \gamma_3 \phi (\not{\partial} \not{A}^t - i \not{A}^t \not{A}^t), \quad (4.28)$$

con

$$\not{A}^t = -i(\not{\partial} e^{t\gamma_3\phi})e^{-t\gamma_3\phi} \quad (4.29)$$

ó

$$\log J = - \frac{1}{2\pi} \int d^2x \text{Tr} \left[\frac{\not{A}\not{A}}{2} + \int_0^1 dt \not{A}^t \phi \not{A}^t \right] \quad (4.30)$$

El primer término, en el cual la integración en t es trivial, es el responsable de que el vampo de gauge adquiera masa. El segundo término está relacionado con la funcional de Wess-Zumino^[4.12] (3.37). Para verlo, definamos una función U así^[4.13] :

$$U = U(\phi; t) = e^{2t\phi} \quad (4.31)$$

y

$$A_{\mu}^t = v_{\mu}^t - \epsilon_{\mu\nu} a_{\nu}^t \quad (4.32)$$

con

$$v_{\mu}^t = -\frac{i}{2} [\partial_{\mu} U^{1/2}, U^{-1/2}] \quad (4.33)$$

$$a_{\mu}^t = \frac{1}{2} [\partial_{\mu} U^{1/2}, U^{-1/2}] \quad (4.34)$$

La ecuación (4.32) corresponde, en el espacio en dos dimensiones, a la descomposición del campo de gauge en componentes vectorial y axial, porque la relación $\gamma_{\mu}\gamma_{\nu} = i\epsilon_{\mu\nu}\gamma^3$ hace desaparecer la matriz.

Las siguientes identidades serán útiles:

$$\partial_{\mu} v_{\nu}^t - \partial_{\nu} v_{\mu}^t - i[v_{\mu}^t, v_{\nu}^t] + i[a_{\mu}^+, a_{\nu}^+] = 0, \quad (4.35)$$

$$\partial_{\mu}\phi - i[v_{\mu}^t, \phi] = \partial a_{\mu} / \partial t, \quad (4.36)$$

$$\partial_{\mu} a_{\nu}^t - i[v_{\mu}^t, \phi] = \partial_{\nu} a_{\mu}^t - i[v_{\nu}^t, v_{\mu}^t]. \quad (4.37)$$

Usándolas podemos escribir, en lugar de (4.30) :

$$\begin{aligned} W[U] = \log J = & \frac{1}{8\pi} \int d^2x \operatorname{tr} \partial_{\mu} U^{-1} \partial_{\mu} U - \\ & - \frac{i}{4\pi} \int_0^1 dt \int d^2x \operatorname{tr} (\epsilon_{\mu\nu} U^{-1} \partial_t U U^{-1} \partial_{\nu} U U^{-1} \partial_{\nu} U). \end{aligned} \quad (4.38)$$

El segundo término de la expresión anterior, que llamaremos W_z , puede ser identificado con un término de Wess-Zumino. Para verlo, consideremos a U como un elemento U_c de $SU(2)$:

$$U_c = e^{2i\phi(x)t} \quad (4.39)$$

Tomando el espacio-tiempo como una gran esfera y $\Pi_2(SU(2))=0$ podemos pensar que U_c es una transformación de la esfera sólida B (cuyo contorno es S^2) en la variedad $SU(2)$. Tomaremos como coordenadas en B al tiempo t y las dos coordenadas espacio-temporales (escribiendo $t=\cos\theta$, podemos pensar a B como la semiesfera superior de S^3). La continuación analítica de W_z es entonces :

$$W_z^c = 4\pi i \Gamma_{WZ} , \quad (4.40)$$

donde Γ_{WZ} es la funcional de Wess-Zumino :

$$\Gamma_{WZ} = \frac{1}{24\pi^2} \int_B d^3x \varepsilon^{ijk} \text{tr}(U_c^{-1} \partial_i U_c U_c^{-1} \partial_j U_c U_c^{-1} \partial_k U_c), \quad (4.41)$$

que tiene la propiedad importante de estar definida módulo 2π .

4.3b El determinante de Fadeev-Popov ^[4. 5; 4. 7,8,9]

Sea la funcional generatriz

$$Z = \int \mathcal{D}A \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi e^{-\int d^4x \bar{\psi} \star(A) \psi}. \quad (4.42)$$

Al efectuar en Z los cambios de variables (4.2) y (4.4) debemos tener en cuenta la variación de la medida de integración funcional fermiónica y la del campo de gauge. El jacobiano asociado al cambio

de variables fermiónicas fue calculado en la sección anterior. Calcularemos ahora el jacobiano asociado al cambio en el campo de gauge (veremos que de hecho coincide con el determinante de Fadeev-Popov). ES sabido que el campo A más general puede escribirse siempre como el transformado de gauge de desoplante por una transformación $e^{i\eta}$:

$$A = e^{-i\eta} [(-i\cancel{\not{D}} e^{i\eta}) e^{-i\eta} g] e^{i\eta} + e^{-i\eta} i\cancel{\not{D}} e^{i\eta},$$

donde la cantidad entre corchetes es el desoplante. Entonces :

$$DA\mu = J[g,\eta] Dg D\eta, \quad (4.43)$$

Elegir el gauge desoplante es poner $\eta = 0$, es decir, incluir en la medida $\delta(\eta)$:

$$DA\mu|_{\text{desoplante}} = J[g,0] Dg D\eta \delta(\eta) \equiv J[g,0] Dg. \quad (4.44)$$

Como la medida de integración en un dado gauge es el producto del determinante de Fadeev-Popov Δ_{FP} por la medida de integración de los grados de libertad que quedan, se ve de (4.44) que $J[g,0]$ coincide con el Δ_{FP} en el gauge desoplante.

El jacobiano puede ser evaluado fácilmente considerando una variación infinitesimal δg de g . El correspondiente cambio en es :

$$\frac{\delta A}{\delta g} = i \cancel{\not{D}}^{Adj}, \quad (4.45)$$

donde \not{D}^{Adj} es la derivada covariante en la representación adjunta:

$$\not{D}^{\text{Adj}} = i\not{\partial} + [\not{A}, \cdot]. \quad (4.46)$$

El jacobiano es :

$$J(g) = \det \not{D}^{\text{Adj}}, \quad (4.47)$$

y podemos expresarlo como una integral funcional sobre fermiones en la representación adjunta de $SU(N)$:

$$J(g) = \int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi e^{i \int d^4x \bar{\psi} \not{D}^{\text{Adj}} \psi}. \quad (4.48)$$

Podemos relacionar $J(g)$ con el determinante de la derivada covariante en la representación fundamental de $SU(N)$. Para hacer esto notemos que, luego de una regularización apropiada (usando el método del Heat-kernel por ejemplo), el determinante puede escribirse como :

$$\log \det \not{D} = - \frac{i}{4\pi} \int_0^1 dt \int d^4x \varepsilon^{\mu\nu} F_{\mu\nu}^{ta} \phi^b \text{tr}(t^a t^b), \quad (4.49)$$

donde $F_{\mu\nu}^{ta}$ es la curvatura asociada al campo A_{μ}^t :

$$F_{\mu\nu}^t = -i(\not{\partial}_{\mu} e^{\not{\xi}\phi t}) e^{-\not{\xi}\phi t}; \quad (F^{t=1} = \not{F}). \quad (4.50)$$

Notemos ahora que la expresión (4.49) es válida para cualquier representación fermiónica. Esto nos permite relacionar los resultados en las representaciones adjunta y fundamental. En

efecto, ambos resultados difieren en el factor $\text{tr}(t^a t^b)$. Para t^a en la fundamental nuestra convención es $\text{tr}(t^a t^b) = \delta^{ab}/2$. Para la representación adjunta, en que los generadores coinciden con las constantes de estructura, la normalización corresponde al Casimir cuadrático (en la representación adjunta): $\text{tr}(T_{\text{adj}}^a)^{ij} (T_{\text{adj}}^a)^{ij} = f^{aij} f^{bij} = C \delta^{ab}$. Obtenemos así el resultado esperado:

$$\log \det \mathcal{Y}|_{\text{Adj}} = 2C \log \det \mathcal{Y}|_{\text{Fund}} \quad (4.51)$$

ó

$$J(g) = e^{-2CW[g]}, \quad (4.52)$$

donde $W[g]$ es la acción de Wess-Zumino-Witten.

Referencias

- [4.1]-J.Kondo, Prog.Theo.Phys. 32 (1964): Solid State Phys.23 (1969) 183.
- [4.2]-Gamboa, Schaposnik,Solomin, Nucl.Phys B185 (1981) 23.
- [4.3]-R.Roskies, "Festschrift for Feza Gursey's 60th birthday",Eds. I.Bars, A.Chodos y C.Tze, Plenum, 1984.
- [4.4]-A.M.Polyakov y P.B.Wiegmann, Phys.Lett 131B (1983) 121; 141B(1984) 435.
- [4.5]-R.E.Gamboa Saravi, F.A.Schaposnik, J.E.Solomín, Phys.Rev.D30 (1984) 2035.
- [4.6]-R.E.Gamboa Saravi, F.A.Schaposnik y C.M.Naón, Phys.Lett 153B (1985) 97 y 163B (1985)
- [4.7]-K.D.Rothe, Nucl.Phys B269 (1986) 296.
- [4.8]-E.Witten, Commun.Math Phys. 92 (1984) 435.
- [4.9]- S.Colemann, Phys.Rev.D11 (1975) 2088.
- [4.10]-J.Lowenstein y J.Swieca, Ann.of Phys,(N.Y.) 68 (1971) 175.
- [4.11]-Fujikawa, Phys.Rev.Lett.42 (1979) 1195; Phys.Rev.D21 (1980) 2848.
- [4.12]-J.Wess y B.Zumino, Phys.Lett.B37 (1971) 95.
- [4.13]-R.E.Gamboa Saravi,F.A.Schaposnik, J.E.Solomín, Phys.Rev D30 (1984) 2035.
- [4.14]-Nepomechie, Ann.Phys.(N.Y.) 158 (1984) 67.

CAPITULO 5

Bosonización del modelo Kondo

5.1 Introducción

En este capítulo estudiaremos el problema Kondo mediante la técnica de bosonización no abeliana descrita en el capítulo anterior. Veremos que esta técnica presenta ventajas sobre las descritas en el capítulo 2. Trabajaremos dentro del marco de la integral funcional, lo que nos permitirá tratar cuidadosamente ciertas ambigüedades propias de toda teoría de fermiones quirales. Dentro de este marco han surgido avances recientes^[5. 4-6] que nos servirán de herramienta apropiada para obtener rápida y eficazmente resultados que ocupaban largos cálculos numéricos y analíticos.

La acción bosonizada que presentaremos describe fermiones de quiralidad positiva o "right-handed" (los electrones de la banda de conducción) interactuando con una impureza magnética localizada en el origen, representada por fermiones de quiralidad negativa o "left-handed". Traduciremos el problema al de una teoría de campos bosónicos con una acción de Wess-Zumino-Witten^[5. 7] acoplados a otro bosón que representa a la impureza. Esta acción bosonizada provee una versión alternativa del modelo Kondo que permite calcular funciones de correlación. Constituye una de las contribuciones originales de esta Tesis.

En la Sección 2 de este capítulo describiremos el procedimiento que nos llevó a la acción bosónica; además discutiremos el límite de acoplamiento fuerte y mostraremos que corresponde una teoría invariante de escala que describe una impureza completamente apantallada. En la Sección 3 calcularemos la función β en el límite de acoplamiento fuerte y mostraremos que se anula cuando la constante de intercambio ferromagnética g (la constante de acoplamiento) tiende a infinito. En las Secciones 4 y 5 calcularemos la susceptibilidad magnética y el calor específico respectivamente, ambas en el límite $g \rightarrow \infty$.

Los resultados de estos cálculos forman parte de un trabajo realizado en colaboración con Eduardo Fradkin, de la Universidad de Urbana, y con Fidel Schaposnik, y fueron publicados en Nuclear Physics B316 (1989) 710.

5.2 Determinación del Lagrangiano fermiónico efectivo

Consideraremos para el modelo Kondo el siguiente Lagrangiano en el espacio de Minkowski bidimensional :

$$\mathcal{L}_k = \int (i\psi^\dagger \partial_+ \psi + id^\dagger \partial_t d - g \psi^\dagger t^a \psi d^\dagger t^a d) d^2 x \quad (5.1)$$

donde ψ es un fermión left-handed que representa al electrón :

$$\psi = \begin{pmatrix} 0 \\ \psi_L \end{pmatrix}, \quad (5.2)$$

y d es un fermión right-handed que representa a la impureza :

$$d = \begin{pmatrix} d_R \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (5.3)$$

ambos fermiones en la representación fundamental de $SU(N)$.

En nuestra convención $\partial_+ = \partial_x + \partial_t$ y t^a son los generadores de $SU(N)$, normalizados de acuerdo a :

$$[t^a, t^b] = if^{abc} t^c, \quad (5.4a)$$

$$\text{tr } t^a t^b = \delta^{ab} / 2, \quad (5.4b)$$

$$f^{abc} f^{a'bc} = C(G) \delta^{aa'}, \quad (5.4c)$$

con $C(G)$ el operador cuadrático de Casimir del grupo G , $C(SU(N))=N$.

El Lagrangiano (5.1) puede ser obtenido fácilmente a partir del Hamiltoniano (2.16) propuesto por Andrei^[5.14]. En

efecto, el primer término de \mathcal{L}_k contiene el término de energía cinética de los electrones de la banda de conducción. En el esquema en que la impureza está fija ésta no posee energía cinética y sólo queda la contribución $d^\dagger \partial_t d$, en el segundo término de (5.1). El último término de \mathcal{L}_k corresponde a la interacción entre la densidad de spin electrónico $\psi^\dagger t^a \psi$ y la densidad de spin de la impureza $d^\dagger t^a d$.

Los números cuánticos asociados a la representación fundamental de $SU(N)$ representan los grados de libertad de spin de la impureza. Es posible considerar otras representaciones agregando un grado de libertad de "sabor" s al campo de la impureza e imponiendo a los estados físicos la condición de ser singletes bajo las corrientes de "sabor"

$$d^{\dagger s} \lambda_{ss'}^i d^{s'} | \text{físico} \rangle = 0, \quad (5.5)$$

donde los λ^i son los generadores del grupo de sabor. Por ejemplo, una representación de spin s de $SU(2)$ se obtiene tomando un número de sabores igual a $2s+1$. En lo que sigue nos restringiremos a la representación fundamental de $SU(N)$.

En el Lagrangiano (5.1) la impureza interactúa con el campo eléctrico de la banda de conducción a través de una interacción cuártica que puede ser eliminada introduciendo en la integral funcional la identidad :

$$e^{-ig \int d^2x \psi^\dagger t^a \psi d^\dagger t^a d} = \int \mathcal{D}A^a \mathcal{D}B^a \exp(-i \int d^2x (A^a B^a +$$

$$+ \sqrt{g} B^{\alpha} d^{\dagger} t^{\alpha} d + \sqrt{g} A^{\alpha} \psi^{\dagger} t^{\alpha} \psi). \quad (5.6)$$

Los campos A^{α} y B^{α} toman valores en el álgebra de Lie de $SU(N)$. En realidad, B^{α} actúa como una componente temporal porque la impureza está fija (y por lo tanto ya no vale la invarianza de Lorentz).

Usando la ecuación (5.6), la funcional generatriz tiene la forma :

$$Z = \int \mathcal{D}\psi^{\dagger} \mathcal{D}\psi \mathcal{D}d^{\dagger} \mathcal{D}d \mathcal{D}A^{\alpha} \mathcal{D}B^{\alpha} \exp [i \int d^4x (A^{\alpha} B^{\alpha} + \psi^{\dagger} (i\partial_{\mu} + \sqrt{g} A_{\mu}) \psi + d^{\dagger} (i\partial_{\mu} + \sqrt{g} B_{\mu}) d)] \quad (5.7)$$

Para representar una única impureza en el origen debemos imponer la condición de que el número de impurezas sea uno, es decir que :

$$d^{\dagger} d = 1, \quad (5.8)$$

condición que implementaremos introduciendo un multiplicador de Lagrange $a(x)$.

A los fines del cálculo de valores de espectación de vacío es conveniente introducir campos auxiliares H y F como fuentes externas. Con estos agregados (5.7) queda dada por :

$$Z(F, H) = \int \mathcal{D}\psi^{\dagger} \mathcal{D}\psi \mathcal{D}d^{\dagger} \mathcal{D}d \mathcal{D}A^{\alpha} \mathcal{D}B^{\alpha} \mathcal{D}a \exp [i \int d^4x A^{\alpha} B^{\alpha} + i \int d^4x \mathcal{L}_{\text{eff}}], \quad (5.9)$$

donde

$$\mathcal{L}_{\text{eff}} = \psi^\dagger (i\partial_+ + \sqrt{g} A_+ + F)\psi + d^\dagger (i\partial_t + \sqrt{g} B_- + H)d + a - (d^\dagger d - 1). \quad (5.10)$$

Las fuentes externas pueden ser absorbidas en el término $A_+ B_-$ mediante el siguiente cambio de variables en (5.5) :

$$\sqrt{g} A_+ + F \rightarrow A_+, \quad (5.11a)$$

$$\sqrt{g} B_- + H \rightarrow B_-. \quad (5.11b)$$

5.3 Bosonización mediante integral funcional

Aplicaremos ahora la técnica de bosonización no abeliana descrita en el capítulo 4 a la integral funcional fermiónica (5.9) para obtener como resultado una acción puramente bosónica. Integrando las variables fermiónicas logramos una funcional de la siguiente forma :

$$Z = \int \mathcal{D}A_+ \mathcal{D}B_- \mathcal{D}a_- \det_L (i\partial_+ + A_+) \det_R (i\partial_- + B_-) \cdot \exp[i \int d^2x \{ (1/g) (A_+ + F)(B_- + H) - a_- \}] \quad (5.12)$$

Los determinantes fermiónicos \det_L y \det_R son cantidades mal definidas porque los operadores de Dirac quirales no definen un problema de autovalores. Esta dificultad puede soslayarse añadiendo fermiones libres de la quiralidad opuesta, y considerando entonces un operador de Dirac. Los grados de libertad fermiónicos agregados no son físicos. Es decir que debe evitarse el acoplarlos a los grados de libertad físicos, y deben ser cuidadosamente sustraídos. Adoptaremos entonces la siguiente definición :

$$\det_L (i\partial_+ + A_+) \equiv \frac{1}{\det i\partial_-} \int \mathcal{D}A_- \det (i\cancel{\partial}_+ + A_+) \delta(A_-) \Delta_{FP}[A], \quad (5.13)$$

$$\det_R (i\partial_- + B_- + a_-) \equiv \frac{1}{\det i\partial_x} \int \mathcal{D}B_- \mathcal{D}a_- \det (i\cancel{\partial}_- + B_- + a_-) \delta(B_-) \cdot \delta(a_-) \Delta_{FP}[B] \Delta_{FP}[a]. \quad (5.14)$$

Al escribir esta última identidad hemos supuesto la continuación

analítica $t \rightarrow t-x$ en el miembro derecho.

Es posible hacer un cambio de variables para escribir el determinante en (5.14) en función de un sólo campo auxiliar. Para ello usamos la identidad :

$$i\cancel{\gamma} + \cancel{\beta} + \cancel{\alpha} = e^{\int \phi} (i\cancel{\gamma} + \cancel{\beta}) e^{-\int \phi}, \quad (5.15)$$

con

$$a = -\partial_t \phi. \quad (5.16)$$

Para efectuar este cambio de variables en (5.14) es necesario introducir un jacobiano de Fujikawa^[5, 6] $J(\phi)$ que puede ser evaluado fácilmente^[5, 3]:

$$J(\phi) = \exp \left[\frac{-i}{8\pi} \int d^2 x \phi \partial_x \partial_t \phi \right], \quad (5.17)$$

y finalmente la expresión del determinante (5.14) queda como :

$$\det \tau(i\partial_t + B + a) = j(\phi) \det(i\cancel{\gamma} + \cancel{\beta}) \delta(B) \Delta_{FP}[B] \Delta_{FP}[a(\phi)]. \quad (5.18)$$

Como es usual, introduciremos campos fantasmas para representar a los determinantes de Fadeev-Popov que surgen de las identidades (13) y (5.14) :

$$\Delta_{FP}[A] = \int \mathcal{D}\eta^{+\alpha} \mathcal{D}\varepsilon^\alpha \exp(i \int d^2 x \eta^{+\alpha} \partial_- \varepsilon^\alpha) \quad (5.19)$$

$$\Delta_{FP}[B] = \int \mathcal{D}\eta^{-\alpha} \mathcal{D}\sigma^\alpha \exp(i \int d^2 x \eta^{-\alpha} \partial_+ \sigma^\alpha) \quad (5.20)$$

$$\Delta_{FP}[a] = \int \mathcal{D}\rho^- \mathcal{D}\tau \exp(i \int d^2 x \rho^- \partial_+ \tau) \quad (5.21)$$

$\eta^{+\alpha}$ y $\eta^{-\alpha}$ son las componentes + y - (variables del cono de luz) de un campo fantasma que, al igual que los campos fantasmas $\varepsilon^{\alpha}, \sigma^{\alpha}, \rho$ y τ están en la representación adjunta de $SU(N)$.

Consideremos ahora los determinantes no abelianos en (5.13) y (5.14). Como vimos en el capítulo 4, el determinante correspondiente al electrón puede escribirse en función de la acción de Wess-Zumino-Witten (WZW) para un campo bosónico $h \in SU(N)$, relacionado con A_+ por $A_+ = -ih^{-1}\partial_+h$:

$$\det_L(i\partial_+ + A_+) = e^{-iW[h]}, \quad (5.22)$$

$$W[h] = \frac{1}{8\pi} \text{tr} \int_B d^2x \partial_\mu h^{-1} \partial^\mu h + \Gamma_{\text{WZ}}[h], \quad (5.23)$$

$$\Gamma_{\text{WZ}}[h] = \frac{1}{12\pi} \text{tr} \int_B d^3y \varepsilon^{ijk} h^{-1} \partial_i h h^{-1} \partial_j h h^{-1} \partial_k h. \quad (5.24)$$

El determinante correspondiente a la impureza puede escribirse como :

$$\det_R(i\partial_t + B_-) = e^{i\hat{W}[l]}, \quad (5.25)$$

con $B_- = -il^{-1}\partial_t l$, $l \in SU(N)$, y \hat{W} está relacionada con W a través de una continuación analítica, como :

$$\hat{W}[l] = \frac{1}{8\pi} \text{tr} \int d^2x \partial_x l \partial_t l + \Gamma_{\text{WZ}}[l]. \quad (5.26)$$

Para reescribir Z como una funcional generatriz sobre las variables h y l es necesario introducir los correspondientes

Jacobianos, similares a los calculados en la sección 4.3b :

$$\mathcal{D}A_+ = \exp(-2iN W[h]) \mathcal{D}h , \quad (5.27)$$

$$\mathcal{D}B_- = \exp(-2iN \mathring{W}[l]) \mathcal{D}l , \quad (5.28)$$

$$\mathcal{D}a_- = \mathcal{D}\phi . \quad (5.29)$$

Finalmente, la funcional generatriz queda escrita así :

$$\begin{aligned} Z = & \int \mathcal{D}\phi \mathcal{D}h \mathcal{D}l e^{-i(1+2N)W[h]} e^{-i(1+2N)\mathring{W}[l]} \\ & e^{(i/g) \int d^2x (-ih^{-1}\partial_+h+F)(-il^{-1}\partial_-l+H)} \\ & \Delta_{FP}[A] \Delta_{FP}[B] \Delta_{FP}[a] e^{-(i/8\pi) \int d^2x \phi \partial_x \partial_t \phi} . \end{aligned} \quad (5.30)$$

Puede verse entonces que la acción fermiónica de partida fue convertida en una acción efectiva en la que dos campos bosónicos h y l , con acciones tipo WZW, interactúan mediante un término pesado con un factor $1/g$, más un campo escalar libre y campos fantasmas libres. Esta forma de Z es la que será el punto de partida en nuestro análisis del problema Kondo.

5.4 La función beta

5.4a Introducción

Como puede verse en la acción bosónica obtenida en la sección anterior, la constante de acoplamiento es adimensional. Esto implica que la teoría es renormalizable, es decir que los infinitos que aparecerán al calcular las correcciones cuánticas de la teoría pueden ser eliminados agregando contratérminos adecuados en el Lagrangiano. Dichos contratérminos serán iguales a alguno de los términos originales que aparecen en el Lagrangiano, salvo por factores multiplicativos. Entonces, sin cambiar la forma del Lagrangiano de partida, es posible escribirlo como una expresión renormalizada por medio de una redefinición de las constantes de acoplamiento.

La parte finita del contratérmino se determina imponiendo algunas restricciones sobre los términos divergentes de las funciones de Green : se establecen para ellas valores determinados sobre un punto fijo arbitrario. Por cierto, la teoría física no puede depender de la elección de dichos valores ni del punto fijo elegido. Por lo tanto, los cambios en la constante de acoplamiento deben compensarse con un cambio del punto fijo y un reescalado de los campos. En particular, la función β describe cómo cambia la constante de acoplamiento por un cambio en el punto de renormalización arbitrario. Es fácil mostrar que cambiar el punto de renormalización es equivalente a cambiar la escala de energías (o distancias). Entonces, la información física que aporta la

función β es acerca del comportamiento de la constante de acoplamiento en diferentes escalas de energía. En la sección siguiente ejemplificaremos estas ideas en un modelo sencillo.

5.4b Un ejemplo sencillo

Sea el Lagrangiano

$$\mathcal{L} = - \frac{\lambda}{4!} \phi^4 + \text{contratérminos},$$

donde λ es una constante adimensional y los contratérminos deben agregarse para evitar divergencias. El objetivo es escribir a \mathcal{L} como:

$$\mathcal{L} = - \frac{\lambda_0}{4!} \phi_0^4 \tag{5.31}$$

donde el campo y la constante de acoplamiento "desnudas" ϕ_0 y λ_0 están vinculadas a las renormalizadas por la relación :

$$\phi_0 = Z^{1/4} \phi, \tag{5.32}$$

$$\lambda_0 = Z^4 \lambda. \tag{5.33}$$

En general Z es función de λ y el cutoff ultravioleta Λ , y diverge cuando éste se hace tender a infinito.

Imponemos restricciones sobre las funciones de Green "una partícula irreducible" Γ estableciendo para ellas ciertos

valores sobre un punto fijo :

$$\Gamma^{(4)}(\vec{p}=\vec{p}_0) = \lambda, \quad (5.34)$$

con $p_i^0 p_j^0 = -\mu^2 (\delta_{ij} - 1/4)$, μ un parámetro arbitrario , y

$$\Gamma^{(2)}(p^2 = -\mu^2) = -\mu^2. \quad (5.35)$$

Las funciones de Green renormalizadas $\Gamma^{(n)}$ se obtienen de las no renormalizadas poniendo un factor $Z^{1/4}$ por cada pata amputada:

$$\Gamma^{(n)}(\lambda, \mu) = Z^{n/4}(\lambda_0, 1/\mu) \Gamma_0^{(n)}(\lambda_0, \Lambda). \quad (5.36)$$

Γ_0 depende de Λ pero no de μ , mientras que Γ , que depende explícitamente de μ , es independiente de Λ cuando $\Lambda \rightarrow \infty$. Sin embargo, como μ es arbitrario, un cambio en μ es equivalente a un cambio en Λ y en la escala de los campos ϕ . La ecuación del grupo de renormalización (EGR) expresa este hecho :

$$\mu \left. \frac{d}{d\mu} \right|_{\lambda_0, \Lambda} \Gamma_0^{(n)}(\lambda_0, \Lambda) = 0, \quad (5.37)$$

es decir que

$$\mu \left. \frac{d}{d\mu} \right|_{\lambda_0, \Lambda} Z^{-n/4} \Gamma^{(n)}(\lambda, \mu) = 0. \quad (5.38)$$

Derivando y dividiendo por $Z^{-n/4}$ hallamos la EGR :

$$\left[\mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \beta(\lambda) \frac{\partial}{\partial \lambda} - n \gamma(\lambda) \right] \Gamma^{(n)}(\lambda, \mu) = 0, \quad (5.39)$$

donde la función β , definida por

$$\beta(\lambda) = \mu \left. \frac{\partial \lambda}{\partial \mu} \right|_{\lambda_0, \Lambda} \quad (5.40)$$

y

$$\gamma(\lambda) = \mu \left. \frac{\partial}{\partial \mu} \right|_{\lambda_0, \Lambda} \ln \sqrt{Z} \quad (5.41)$$

sólo dependen de Λ y μ a través de la relación Λ/μ .

5.4c La función β para el modelo Kondo

Para calcular la función β pueden usarse diferentes métodos. Nosotros usaremos el método del campo de background, siguiendo un trabajo de M.Bos^[5, 10] en el que se estudia la renormalización de la constante de acoplamiento para el modelo de Wess-Zumino-Witten.

Escribamos los campos h y l introducidos en la sección 3 en términos de campos de background \bar{h} y \bar{l} (soluciones de las ecuaciones clásicas de movimiento) y de campos π y φ representando las fluctuaciones cuánticas :

$$h(x) = \bar{h}(x) e^{i\pi(x)}, \quad (5.42)$$

$$l(x) = \bar{l}(x) e^{i\varphi(x)}, \quad (5.43)$$

donde $\pi = \pi^a t^a$, $\varphi = \varphi^a t^a$, y t^a son los generadores de $SU(N)$, normalizados de acuerdo a :

$$\text{tr } t^a t^b = \delta^{ab} / 2, \quad (5.44a)$$

$$[t^a, t^b] = i f^{abc} t^c, \quad (5.44b)$$

$$t^a t^a = C_d I, \quad (5.44c)$$

$$f^{abc} f^{a'bc} = C(G) \delta^{aa'}. \quad (5.44d)$$

$C(G)$ es el operador cuadrático de Casimir y C_d es el índice de Dynkin de la representación.

Las divergencias de la teoría pueden encontrarse estudiando la funcional :

$$Z[\bar{h}, \bar{l}] = \int \mathcal{D}\varphi \mathcal{D}\pi \exp(iS(\bar{h}, \bar{l}) - iS(\bar{h}, \bar{l}) - \text{términos lineales en } \varphi \text{ y } \pi), \quad (5.45)$$

donde

$$S(\bar{h}, \bar{l}) = (1+2N) W[\bar{h}] + (1+2N) \hat{W}[\bar{l}] + S_{int}(\bar{h}, \bar{l}), \quad (5.46)$$

$$S_{int}(\bar{h}, \bar{l}) = \frac{1}{g} \text{tr} \int d^2x (-ih^{-\frac{1}{2}h+F})(-il^{-\frac{1}{2}l+H}). \quad (5.47)$$

Consideremos ahora las contribuciones a la función β de los tres términos que aparecen en S_{int} .

i) La función β correspondiente al término de Wess-Zumino-Witten

En primer lugar, las constantes frente a cada término de

$W[h]$, ecuación (5.23), han sido elegidas de tal modo de asegurar la invarianza conforme; como veremos a continuación, esto implica que la contribución de $W(h)$ a la función β es cero.

Consideremos un campo escalar $h(x)$, que toma valores en un grupo de Lie simple, cuya dinámica está definida por la acción bidimensional :

$$W[h] = \frac{1}{4\lambda^2} \int d^2x \operatorname{tr} \partial_\mu h \partial^\mu h^{-1} + k \Gamma[h], \quad (5.48a)$$

$$\Gamma[h] = \varepsilon^{ijk} \int d^3y h^{-1} \partial_i h h^{-1} \partial_j h h^{-1} \partial_k h. \quad (5.48b)$$

Es sabido que la invarianza conforme implica $\lambda^2 = 4\pi/k$. La renormalización con el método del campo de background indica que las divergencias de la teoría están contenidas en la funcional :

$$Z[\bar{h}] = \int \mathcal{D}\pi \exp\{ i(W[\bar{h}e^{i\pi}] - W[\bar{h}] - \text{término lin. en } \pi \quad) \}, \quad (5.49)$$

Para calcular el exponente en la expresión anterior es conveniente hacerlo en forma infinitesimal, introduciendo un parámetro auxiliar t , $0 \leq t \leq 1$:

$$W[\bar{h} e^{i\pi}] - W[\bar{h}] = \int_0^1 dt \frac{d}{dt} W[\bar{h} e^{it\pi}]. \quad (5.50)$$

Usando propiedades conocidas de la acción de Wess-Zumino y escribiendo la expresión $\eta^{\mu\nu} - k\lambda^2 \varepsilon^{\mu\nu} / 4\pi = P^{\mu\nu}$ se obtiene :

$$W[\bar{h} e^{i\pi}] - W[\bar{h}] = \int d^2 x \int_0^1 dt \frac{-i}{2\lambda^2} P^{\mu\nu} \text{tr} \partial_\mu \pi (e^{-i t \pi} \partial_\nu e^{i t \pi} + e^{-i t \pi} \bar{1}^{-1} \partial_\nu \bar{1} e^{i t \pi}). \quad (5.51)$$

La teoría de perturbaciones requiere que $Z[\bar{h}]$ esté regularizada a la vez en el infrarojo y en el ultravioleta. Las divergencias infrarojas pueden evitarse sumando un término de masa a la acción. Esto no afecta a los coeficientes del grupo de renormalización tales como la función β , y se sabe que los observables invariantes bajo la acción del grupo tienen expresiones perturbativas convergentes en el infrarojo. Una elección conveniente para este contratérmino es :

$$S_m(U) = \frac{m^2}{4\lambda^2} \int d^2 x \text{tr}(U + U^\dagger). \quad (5.52)$$

Al usar $S+S_m$ en lugar de S en $Z[\bar{h}]$, los términos cuadráticos en π proveerán la masa.

En el límite ultravioleta conviene usar la regularización dimensional. Introduciendo un tensor métrico bidimensional $\bar{\eta}$ definido a través de :

$$\varepsilon^{\mu\nu} \varepsilon^{\rho\sigma} = \bar{\eta}^{\mu\sigma} \bar{\eta}^{\nu\rho} - \bar{\eta}^{\mu\rho} \bar{\eta}^{\nu\sigma} \quad (5.53)$$

podemos definir $\hat{\eta}^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - \bar{\eta}^{\mu\nu}$, que tiene la propiedad de que $\hat{\eta}^\mu{}_\mu = d-2$.

La expresión regularizada de (5.51) es :

$$W[\bar{h} e^{i\pi}] - W[\bar{h}] = \int d^2 x \left[\int dt \frac{-i}{2\lambda^2} P^{\mu\nu} \text{tr} \partial_\mu \pi (e^{-i t \pi} \partial_\nu e^{i t \pi} + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + e^{-i\pi} \bar{h}^{-1} \partial_\nu \bar{h} e^{i\pi} + \frac{m^2}{4\lambda^2} \text{tr} [\bar{h} e^{i\pi} - \bar{h} + \\
& + e^{-i\pi} \bar{h}^+ - \bar{h}^+] - \text{términos lineales en } \pi \Big]. \tag{5.54}
\end{aligned}$$

Ahora llevamos a cabo la renormalización a un loop. Existen dos diagramas divergentes a un loop, que provienen de la parte de (5.54) cuadrática en π . Uno contribuye a la renormalización de la masa y su parte divergente puede cancelarse por un contratérmino de la forma :

$$\Delta S_m = \frac{m^2}{16\pi} \frac{C_d}{\varepsilon} \int d^d x \text{tr} (h + h^+). \tag{5.55}$$

El otro término corrige la constante de acoplamiento (es decir que contribuye a la función β) y lleva a los siguientes contratérminos:

$$\begin{aligned}
\Delta S_n = & \frac{C}{8\pi} \frac{1}{\varepsilon} \left[1 - \left(\frac{k\lambda^2}{4\pi} \right)^2 \right] \int d^d x \eta^{\mu\nu} \text{tr} \partial_\mu h \partial_\nu h^{-1} + \\
& + \frac{C}{8\pi} \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{k\lambda^2}{4\pi} \right)^2 \int d^d x \hat{\eta}^{\mu\nu} \text{tr} \partial_\mu U \partial_\nu U^{-1}. \tag{5.56}
\end{aligned}$$

La corrección a λ se anula si $\lambda^2 = 4\pi/k$ y el término de Wess-Zumino no resulta renormalizado : es invariante conforme y su contribución a la función β es cero. Debe notarse sin embargo que ha aparecido un nuevo término, conteniendo un operador que se anula en el límite $d \rightarrow 2$. Por consistencia debe ser tenido en cuenta en cálculos con mayor número de loops, donde sus efectos serán no nulos.

ii) La contribución a la función β del término $\mathring{W}[J]$

Siguiendo un razonamiento similar al de i) es fácil ver que tampoco $\mathring{W}[J]$ resulta renormalizado y por lo tanto su contribución a la función β es cero.

iii) La contribución a la función β del término de interacción

El término de interacción (5.47) es el único responsable de la renormalización de la constante de acoplamiento. Para calcular este cambio, siguiendo las prescripciones del método del campo de background, vestimos a los campos \bar{h} y \bar{l} con fluctuaciones cuánticas $e^{i\varphi}$ y $e^{i\pi}$. Los contratérminos pueden ser calculados a partir de :

$$S_{int}(\bar{h}e^{i\pi}, \bar{l}e^{i\varphi}) - S_{int}(\bar{h}, \bar{l}) = \int_0^1 dt \frac{d}{dt} S_{int}(\bar{h}e^{i\pi t}, \bar{l}e^{i\varphi t}) \quad (5.57)$$

Las divergencias ocurrirán cuando aparezcan derivadas de los campos φ y π que, al transformar Fourier, se convertirán en factores k que harán infinitas las integrales. Precisamente, surgirán de :

$$\frac{1}{\xi^4} \text{tr} \int d^4x d^4y \varphi(x) (\bar{l}^{-1} \partial_l \bar{l} - 1) \partial_x \pi(x) \varphi(x) \\ (\bar{l}^{-1} \partial_l \bar{l} + \bar{h}^{-1} \partial_h \bar{h} + 1) \partial_l \varphi(x) \quad (5.58)$$

o, transformando Fourier :

$$\delta S_{int} = \frac{1}{g} \text{tr} \int \frac{d^2 k}{(2\pi)^4} \frac{d^2 k'}{(2\pi)^4} \left[(\bar{l}^{-1} \partial_t \bar{l}) (\bar{h}^{-1} \partial_+ \bar{h}) \right]_{(-k-k', k+k')}^{ijpm} \cdot k_1' (-k_0') \tilde{\Delta}^{\varphi}_{ip}(k) \tilde{\Delta}^{\pi}_{jm}(k'), \quad (5.59)$$

donde

$$\langle \tilde{\varphi}_i(k) \tilde{\varphi}_p(q) \rangle_0 = i \tilde{\Delta}^{\varphi}_{ip}(k, q) = -(2\pi)^2 \delta^{(2)}(k+q) \tilde{\Delta}^{\varphi}_{ip}(k), \quad (5.60a)$$

$$\begin{aligned} \langle \tilde{\pi}_j(k') \tilde{\pi}_m(q) \rangle_0 &= i \tilde{\Delta}^{\pi}_{jm}(k', q) \\ &= - (2\pi)^2 \delta^{(2)}(k'+q) \tilde{\Delta}^{\pi}_{jm}(k'), \end{aligned} \quad (5.60b)$$

$$\tilde{\Delta}^{\varphi}_{ip}(k) = - \frac{4 \pi}{1+2N} \quad ; \quad \tilde{\Delta}^{\pi}_{jm}(k') = - \frac{4 \pi}{1+2N} \frac{\delta_{ij}}{k'^2 + m^2}. \quad (5.60c)$$

Después de algunos cálculos se obtiene :

$$\delta S_{int} = \frac{1}{g^2 \pi^2} \frac{(2\pi)^2}{(1+2N)^2} \text{tr} \int d^2 x (\bar{l}^{-1} \partial_t \bar{l})_{(x)} (\bar{h}^{-1} \partial_+ \bar{h})_{(x)} \cdot t^i t^j t^i t^j \int d^2 k \frac{1}{k^2 + m^2}. \quad (5.61)$$

Usando regularización dimensional para tratar las divergencias infrarojas ($\epsilon = 2-d$), el contratérmino divergente resulta :

$$\delta S_{int} = \frac{2 \pi}{g^2 (1+2N)^2} \frac{N^2 - 1}{N \epsilon} \int d^d x (\bar{l}^{-1} \partial_t \bar{l})_{(x)} (\bar{h}^{-1} \partial_+ \bar{h})_{(x)}. \quad (5.62)$$

Vemos así que es necesario renormalizar la constante de acoplamiento. Si llamamos μ a la escala de masa introducida en el proceso de regularización y g_0 a la constante de acoplamiento

desnuda y g a la renormalizada, tenemos :

$$\frac{1}{g_0} = Z \mu^\epsilon \frac{1}{g} . \quad (5.63)$$

La ecuación del grupo de renormalización es entonces :

$$\epsilon \beta(1/g) + \beta(1/g) \frac{\partial \ln Z}{\partial(1/g)} + \epsilon = 0, \quad (5.64)$$

donde

$$\beta(1/g) = \mu \left. \frac{\partial(1/g)}{\partial \mu} \right|_{g_0, \Lambda} . \quad (5.65)$$

Entonces la expresión para $\beta(1/g)$ es :

$$\beta(1/g) = - \frac{\epsilon}{\epsilon + \frac{\partial \ln Z}{\partial(1/g)}} . \quad (5.66)$$

Mirando δS_{int} vemos que :

$$Z = 1 - \frac{A}{g \epsilon} , \quad (5.67a)$$

con

$$A = \frac{8 \pi}{(1+2N)^2} \left[- \frac{N^2-1}{4N} \right], \quad (5.67b)$$

así que

$$\beta(1/g) = - \frac{\epsilon}{g - A/\epsilon} = - \frac{\epsilon g}{1-A/\epsilon g} \cong - \epsilon g + A . \quad (5.68)$$

Considerando el límite de acoplamiento fuerte ($g \rightarrow \infty$) y haciendo $\epsilon \rightarrow 0$, obtenemos :

$$\beta(g) = - \frac{2 \pi}{(1+2N)^2} \frac{N^2-1}{N} + \mathcal{O}(1/g). \quad (5.69)$$

Es decir que, a orden líder en $1/g$, el valor de la función β para el modelo Kondo es una constante que sólo depende de N . Descubrimos así la existencia de un punto fijo infrarrojo estable en el límite de acoplamiento fuerte, $g \rightarrow \infty$. Cuando se consideran energías más y más bajas (distancias más y más largas) la constante de acoplamiento no cambiará sino que permanecerá constante, representando así en el estado fundamental una impureza apantallada. El signo de la función β para g grande es consistente con el cálculo perturbativo standard de la función β para g pequeño.

En general, para otros valores de g , $\beta(g)$ no será constante. Será necesario renormalizar la teoría, con la introducción de un parámetro con dimensiones. Esto determinará que la teoría ya no será invariante conforme : habrá una longitud característica del sistema.

5.5 Susceptibilidad magnética

5.5a Introducción

En esta sección calcularemos la susceptibilidad magnética χ del modelo Kondo usando los métodos funcionales desarrollados en las secciones anteriores. En particular, estudiaremos el valor de χ en el PFIRE, es decir, en el límite de acoplamiento fuerte. Surgirán además de nuestros cálculos las funciones de correlación en el límite $g \rightarrow \infty$.

Cuando el sistema se halla inmerso en un campo magnético externo \vec{H} el acoplamiento Zeeman tiene la forma :

$$H_{\text{ext}} = \int d^3x c^\dagger(x) \vec{\sigma} \cdot c(x) \vec{H} + \vec{H} \cdot \vec{S}, \quad (5.70)$$

donde el primer término corresponde al acoplamiento de los electrones de la banda y el segundo a la impureza. En nuestra notación este término puede incluirse en la acción fácilmente, ya que juega el mismo rol que el acoplamiento a fuentes externas F y H con $F = H = \vec{H} \cdot \vec{S}$, con F y H en el álgebra de Lie de $SU(N)$.

Tomemos la expresión (5.11) para la funcional generatriz; obviemos la dependencia en el campo a que no contribuye a los observables que estamos observando. Partamos entonces de :

$$Z[H] = \int \mathcal{D}A_+ \mathcal{D}B_- e^{(i/g) \int d^4x (A_+ - H)(B_- - H)},$$

$$\cdot \det_L(i\partial_+ + A_+) \det_R(i\partial_- + B_-). \quad (5.70)$$

Definimos la magnetización local como :

$$M^\alpha(x) = \frac{1}{iZ} \frac{\delta Z}{\delta H^\alpha(x)}, \quad (5.71)$$

que toma la forma

$$M^\alpha(x) = \frac{1}{g} H^\alpha(x) - \frac{i}{g} \langle A_+^\alpha(x) + B_-^\alpha(x) \rangle. \quad (5.72)$$

Escrita en términos de los campos de WZW :

$$M^\alpha(x) = \frac{1}{g} H^\alpha(x) - \frac{i}{g} \text{tr} [k^{-1}(x)\partial_+ h(x) + l^{-1}(x)\partial_- l(x)] t^\alpha \quad (5.73)$$

Análogamente, la función de correlación $\chi^{ab}(x, x')$, definida por :

$$\chi^{ab}(x, x') = \frac{1}{iZ} \frac{\delta^2 Z}{\delta M^a(x) \delta M^b(x')} \Big|_{H=0}, \quad (5.74)$$

es igual a :

$$\begin{aligned} \chi^{ab}(x, x') = & \frac{1}{g} \delta(x-x') \delta^{ab} - \frac{i}{g} \langle \text{tr}[h^{-1}(x)\partial_+ h(x) + \\ & + l^{-1}(x)\partial_- l(x)] t^a \text{tr}[h^{-1}(x')\partial_+ h(x') \\ & + l^{-1}(x')\partial_- l(x')] t^b \rangle. \end{aligned} \quad (5.75)$$

La susceptibilidad magnética a campo cero es entonces :

$$\chi^{ab} = \int d^2 x_i \frac{1}{Z} \frac{\delta^2 Z}{\delta H^a(x) \delta H^b(0)}, \quad (5.76)$$

y es la susceptibilidad total del sistema, dado que Z involucra tanto a la impureza como a los electrones. La susceptibilidad Kondo, χ_k , que describe el comportamiento de la interacción en presencia de un campo externo, se halla sustrayendo la susceptibilidad de los fermiones libres :

$$\chi_k = \chi - \chi(g=0). \quad (5.77)$$

Nosotros calcularemos χ_k sólo en el límite de acoplamiento fuerte, donde el sistema es invariante de escala ($\beta(1/g) \rightarrow 0$ para $g \rightarrow \infty$) y la invarianza conforme resultante nos permite una descripción detallada en este límite. Es posible además una expansión perturbativa en potencias de $1/g$, pero nosotros no lo haremos aquí.

5.5b Cálculo de la susceptibilidad

De la funcional generatriz (5.30) es fácil ver que en el límite de acoplamiento fuerte los campos h y l se desacoplan, y entonces :

$$\langle h^{-1} \partial_+ h t^a \rangle_{g=0} = \langle l^{-1} \partial_+ l t^a \rangle_{g=0} = 0. \quad (5.78)$$

Para calcular las funciones de correlación en el límite $g \rightarrow \infty$ usaremos los métodos de la sección 5.2.

En este límite podemos usar las aproximaciones :

$$h \cong 1 + i\pi^a t^a, \quad (5.79a)$$

$$l \cong 1 + i\varphi^a t^a, \quad (5.79b)$$

con lo cual

$$\text{tr}(h^{-1}\partial+h t^a) \cong (i/2)\partial+\pi^a, \quad (5.80a)$$

$$\text{tr}(l^{-1}\partial+l t^a) \cong (i/2)\partial+i\varphi^a. \quad (5.80b)$$

A orden líder la función de correlación a tiempo real es

$$\begin{aligned} \chi^{ab}(x,x') = & \frac{1}{g} \delta(x-x')\delta^{ab} - \frac{i}{4g^2} [\langle \partial+\pi^a(x)\partial+\pi^b(x') \rangle + \\ & + \langle \partial+i\varphi^a(x)\partial+i\varphi^b(x') \rangle + \langle \partial+\pi^a(x), \partial+i\varphi^b(x') \rangle + \\ & + \langle \partial+i\varphi^a(x)\partial+\pi^b(x') \rangle]. \end{aligned} \quad (5.81)$$

Las funciones de correlación dentro de los paréntesis son :

$$\langle \pi^a(x)\pi^b(x') \rangle = -i\delta^{ab} \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{2N+1}{\pi} \frac{k_0 k_1}{D} e^{ik.(x-x')}, \quad (5.82)$$

$$\langle \varphi^a(x)\varphi^b(x') \rangle = -i\delta^{ab} \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{2N+1}{8\pi} \frac{k^2 k_0^2}{D} e^{ik.(x-x')}, \quad (5.83)$$

$$\langle \pi^a(x)\varphi^b(x') \rangle = \frac{i\delta^{ab}}{2g} \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{k_+ k_0}{D} e^{ik.(x-x')}, \quad (5.84)$$

donde

$$D = \left[\frac{2N+1}{8\pi} \right]^2 k^2 k_0 k_1 - \left[\frac{k_+ k_0}{2g} \right]^2, \quad (5.85)$$

$$k^2 = k_0^2 - k_1^2, \quad k_{\pm} = k_0 \pm k_1, \quad k.x = (k_+ x_- + k_- x_+)/2. \quad (5.86)$$

Usando estos resultados hallamos para la transformada de Fourier de $\chi^{ab}(x, x')$:

$$\chi^{ab}(k) = \delta^{ab} \chi(k), \quad (5.87a)$$

donde

$$\chi(k) = \frac{1}{g} + \frac{1}{g^2 D} \left[\frac{2N+1}{\pi} \right] [k_0 k_1 (k - \frac{1}{2}) + k^2 k_0^2] - \frac{2\pi}{g D} k + k - k_0^2. \quad (5.87b)$$

Como estamos interesados en la susceptibilidad estática, definida en el límite

$$\chi = \lim_{k_1 \rightarrow \infty} \lim_{k_0 \rightarrow 0} \chi(k), \quad (5.88)$$

encontramos

$$\chi = \frac{1}{g} - \frac{1}{g^2} \frac{2\pi}{2N+1} + \mathcal{O}(1/g^3). \quad (5.89)$$

Este resultado muestra una impureza apantallada, cosa que era de esperar en este límite. Recordemos que, según vimos en la sección 2.3b, debido a la fuerte interacción impureza-electrones por debajo de cierta temperatura T_0 , la susceptibilidad se aparta de la ley de Curie $\chi \approx 1/T$ para dar un valor constante, como el hallado en (5.89).

Este valor T_0 , llamado escala Kondo^[2. 41], está dado por :

$$T_0 = \frac{g}{T}, \quad (5.90)$$

de acuerdo con el hecho de que estamos en el límite de acoplamiento fuerte.

5.6 Calor específico

Tal como vimos en la sección 2.7 Böte, Cardy y Nightingale por un lado y Affleck por otro, establecieron casi simultáneamente una ley que relaciona el calor específico de un sistema cuántico en una dimensión en un punto crítico con la anomalía conforme. Vimos que el modelo Kondo posee puntos fijos en los que es invariante conforme, lo que nos permite, usando la citada relación, escribir el calor específico a bajas temperaturas para la impureza en términos de la anomalía conforme c que calcularemos a continuación.

Como vimos, el modelo Kondo tiene dos puntos fijos :

$g = 0$ y $g = \infty$. El punto fijo $g = \infty$ es estable en el infrarrojo, tal como lo mostramos en la sección 5.4, y describe un estado singlete. Al ser un punto fijo es invariante de escala y, por lo tanto, invariante conforme.

En el límite $g \rightarrow \infty$ el término de interacción desaparece de la acción (5.30) y la funcional generatriz puede escribirse como :

$$Z = \det i\partial_t \det i\partial_t Z_w Z_w^0 Z_{\text{fant}} Z_\phi \quad (5.91)$$

donde los determinantes provienen de los fermiones libres introducidos para redefinir el determinante quirral; Z_w , Z_w° y Z_ϕ son las funciones de partición para los campos h , l y ϕ respectivamente, y $Z_{fant.}$ contiene los campos fantasmas provenientes de los determinantes de Padeev-Popov. (ver ecuaciones (5.19,20,21 y 30)).

Ahora bien, Z_w° y Z_ϕ son independientes de la métrica, y por lo tanto de la temperatura. Esto es así porque un cambio en la temperatura $T \rightarrow T'$ es equivalente a la dilatación de la escala del tiempo imaginario (y por lo tanto a un cambio en la métrica). Entonces, Z_w° y Z_ϕ no afectan la termodinámica del sistema. Lo mismo ocurre con los fantasmas asociados a la impureza.

La carga central del álgebra de Virasoro¹ puede ser calculada entonces a partir de las contribuciones restantes :

$$c_{kondo}(g=0) = c_{el.libres} + c_{v(h)} + c_{fant.} \quad (5.92)$$

El primer término corresponde al $\det i\partial_+$ y es igual al número de fermiones libres(ver ref [5.4] y referencias allí) :

$$c_{el.libres} = N. \quad (5.93)$$

$c_{v(h)}$, la carga central asociada al campo h puede obtenerse a partir de Z_w usando el resultado de Kniznik y Zamolodchikov comentado en la sección 3.4 :

$$c_{\text{vthj}} = \frac{-(2N+1)(N-1)}{-(2N+1) - N} . \quad (5.94)$$

Cada uno de los fantasmas contribuye con un (-2) a $c_{\text{fant.}}$ ^[5.4] y por lo tanto :

$$c_{\text{fant.}} = -2 (N^2 - 1). \quad (5.95)$$

Finalmente obtenemos, para el límite $g \rightarrow \infty$:

$$c_{\text{kondo}(g=\infty)} = 1. \quad (5.96)$$

Por otra parte, en el punto fijo correspondiente a $g = 0$ sólo contribuyen los fermiones libres. El valor total de $c_{\text{kondo}(g=0)}$ es entonces :

$$c_{\text{kondo}(g=0)} = N . \quad (5.97)$$

Comparando (5.96) con (5.97) vemos que :

$$c_{\text{kondo}(g=\infty)} < c_{\text{kondo}(g=0)}, \quad (5.98)$$

que es consistente con el teorema c de Zamolodchikov (ver sección 2.8).

Usando ahora los resultados de Affleck y Blöte et al (y recordando que sólo contribuyen los grados de libertad left-handed), escribimos entonces el calor específico a bajas

temperaturas, C , en términos de la anomalía conforme $c_{\text{kondo}}(g=\infty)$

$$C(T) = \frac{\pi}{6} c_{\text{kondo}}(g=\infty) = \frac{\pi T}{6}, \quad (5.99)$$

donde T es la temperatura. Este resultado confirma el obtenido por Wilson usando métodos numéricos.

5.7 El cociente de Wilson

Existe una relación entre el calor específico y la susceptibilidad magnética que caracteriza al modelo a bajas temperaturas: es una magnitud universal conocida como "cociente de Wilson" y está definida por:

$$\mathcal{W} = \frac{\delta\chi / \chi}{\delta C / C}, \quad (5.100)$$

donde C y χ son el calor específico y la susceptibilidad del sistema libre ($g = 0$), mientras que δC y $\delta\chi$ son los cambios producidos por el apantallamiento de la impureza en ambas cantidades.

En otros términos:

$$\mathcal{W} = \frac{\frac{\chi(g=\infty) - \chi(g=0)}{\chi(g=0)}}{\frac{C(g=\infty) - C(g=0)}{C(g=0)}}. \quad (5.101)$$

Como vimos en la sección 5.5, $\chi(g=\infty) = 0$; y de acuerdo a los

resultados de la sección 5.6 $C(g=\infty) = \pi T/6$, $C(g=0) = N\pi T/6$.

Entonces obtenemos para el cociente de Wilson el valor:

$$\Psi = \frac{N}{N-1}, \quad (5.102)$$

resultado que coincide con el calculado por Nozières y Blandin^[5. 14].

Referencias

- [5.1]-R.E.Gamboa Saraví,F.A.Schaposnik y J.E.Solomín, Nucl Phys B185 (1981)239; Phys.Rev. D30 (1984) 2035.
- [5.2]-A.M.Polyakov y P.B.Wiegmann, Phys.Lett B131 (1983) 121; B141 (1984) 223.
- [5.3]-F.A.Schaposnik en Particles and fields, eds A.da Silva et al (World Scientific, Singapore, 1988) y las referencias allí citadas.
- [5.4]-E.Witten, Commun.Math.Phys. 92 (1984) 455.
- [5.5]-L.Alvarez Gaumé y P.Ginsparg, Nucl.Phys. B243 (1987) 471.
- [5.6]-K.Fujikawa, Phys.Rev.Lett. 42 (1979) 1195;Phys. Rev. D21 (1980) 2848.
- [5.7]-A.N.Redlich y H.J.Schnitzer, Phys.Lett. B183 (1987) 471.
- [5.8]-A.Ceresole,A.Lerda, P.Pizzochero y P. van Nieuvenhuizen,Phys. Lett. B189(1987) 34.
- [5.9]-E.Fradkin, C.M.Naón y F.A.Schaposnik,PhysRev.D21 (1987) 3809.
- [5.10]-M.Bos, Phys Lett. B189 (1987) 435.
- [5.11]-H.W.J.Blöte, J.L.Cardy y M.P.Nightingale, Phys.Rev.Lett 56 (1986) 742.
- [5.12]-I.Affleck, Phys.Rev.Lett 56 (1986) 746.
- [5.13]-A.Polyakov, Phys.Lett B103 (1981) 207.
- [5.14]-A.Nozieres y P.Blandin, J.Phys.Paris, 41 (1980) 193.

CAPITULO 6

EXTENSIONES DEL MODELO KONDO; TRATAMIENTOS ALTERNATIVOS

El esquema desarrollado en el capítulo anterior para estudiar el modelo Kondo permite una generalización simple a modelos más complejos como por ejemplo el llamado modelo Kondo multicanal. En este capítulo describiremos esta generalización.

También describiremos tratamientos alternativos al utilizado en el capítulo 5 para la impureza magnética, que implican el cálculo de determinantes fermiónicos usando la técnica del loop de Wilson y la de la cuantificación geométrica.

En la sección 2 mostraremos como el modelo puede ser generalizado de manera de incluir los efectos de la estructura orbital del átomo de la impureza. Hallaremos una versión bosónica para la integral funcional que define la funcional generatriz del modelo, calcularemos la función β y la susceptibilidad magnética en el límite de acoplamiento fuerte y mostraremos la dependencia del calor específico con la temperatura en el mismo límite. Mostraremos que nuestros resultados difieren de los hallados previamente y explicaremos las discrepancias.

En la sección 3 describiremos un tratamiento alternativo para la parte de la acción correspondiente a la impureza. Mostraremos cómo el determinante fermiónico de la impureza puede calcularse directamente usando la técnica del "loop de Wilson".

Además tendremos en cuenta exactamente , en esta versión del modelo, los efectos de la restricción que implica considerar una única impureza fija.

Por último, en la sección 4, aplicaremos al modelo Kondo un método de cuantización alternativo al del capítulo 5 : el método de cuantización geométrica^[6.6], también llamado de estados coherentes^[6.7]. Este método ha sido adaptado por Wiegman^[6.6], Fradkin y Stone^[6.8] para desarrollar integrales funcionales para sistemas de spin, usando estados coherentes de spin. La mayor ventaja de la cuantización geométrica es que preserva completamente la simetría rotacional del Lagrangiano.

6.2 Bosonización del problema Kondo Multicanal.

El problema Kondo Multicanal surge en el estudio de impurezas magnéticas en un metal cuando se tiene en cuenta la estructura orbital de la impureza. El Hamiltoniano propuesto por Andrei y Destri^[6, 11] para describirlo es el siguiente :

$$\begin{aligned}
 H_m = & -i \sum_{a,m} \int dx \psi_{a,m}^*(x) \partial_x \psi_{a,m}(x) + \\
 & + 2J \sum_{a,b,m} \psi_{a,m}^*(0) \vec{\sigma}_{a,b} \psi_{b,m}(0) \cdot \vec{S} ,
 \end{aligned} \tag{6.1}$$

donde los campos $\psi_{a,m}$ describen electrones que llevan un índice de spin a ($a = \pm 1/2$) y un índice de "sabor" $m = 1, 2, \dots, N_s$ (que numera los canales orbitales), en interacción via intercambio de spin con una impureza de spin \vec{S} localizada en $x = 0$.

Trataremos este problema usando la metodología ya aplicada al problema Kondo, introduciendo ahora un índice de "sabor" para los electrones. El Lagrangiano que obtenemos, y que puede obtenerse de (6.1), es entonces :

$$\mathcal{L}_{mk} = i \sum_{n=1}^{N_f} \psi_n^\dagger \partial_t \psi_n + i d^\dagger \partial_t d - g \sum_{n=1}^{N_f} \psi_n^\dagger t^a \psi_n d^\dagger t^a d. \tag{6.2}$$

Aquí $\psi_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \psi_n \end{pmatrix}$ es un fermión left-handed que representa a un electrón en el canal n y, como antes, $d = \begin{pmatrix} d \\ 0_R \end{pmatrix}$ es un fermión right-handed que representa a la impureza. Como en el modelo Kondo, la impureza y los electrones están en una representación

fundamental de SU(N) de "color".

Del mismo modo que en el caso previo, la interacción cuártica puede eliminarse usando campos auxiliares A+ y B-. Usando para los determinantes quirales las definiciones (5.13) y (5.14), e introduciendo los campos fantasmas correspondientes, la funcional generatriz obtenida tiene la forma siguiente:

$$\begin{aligned}
 Z_{Mk} = & \int Dh Dl D\eta^{+a} D\varepsilon D\eta^{+a} D\sigma^a D\rho^l D\tau (\det i\partial_+)(\det i\partial_-) \\
 & \exp \left\{ -(i/g) \text{tr} \int d^2x (-i h^{-1} \partial_+ h + F) (-i l^{-1} \partial_- l + H) \right\} \\
 & \exp \left\{ i \int d^2x (\eta^{+a} \partial_- \varepsilon + \eta^{+a} \partial_x \sigma^a + \rho^l \partial_x \tau) \right\} \\
 & \exp \left\{ -i(N_f + 2N) W[h] - i(1 + 2N) \tilde{W}[l] - \right. \\
 & \quad \left. - (i/8\pi) \int d^2x (\phi \partial_x \partial_l \phi) \right\} \tag{6.3}
 \end{aligned}$$

Los campos que aparecen en esta funcional generatriz son los campos bosónicos h y l que representan a los electrones y la impureza, el campo de background auxiliar (desacoplado del resto) ϕ , y los campos fantasmas $\eta^+, \varepsilon, \eta^+, \sigma, \rho^l$ y τ .

Usando (6.3) calcularemos a continuación la función β , la susceptibilidad magnética, y el calor específico.

6.2a La función β

Como en el problema Kondo standard, la constante de acoplamiento en (6.2) es adimensional. Por lo tanto la teoría es renormalizable y los infinitos que aparezcan por correcciones cuánticas pueden ser eliminados dentro de un esquema de renormalización determinado. Siguiendo el mismo método que en la sección 5.4.3, calculamos la función β , definida por :

$$\beta(1/g) = \mu \left. \frac{\partial(1/g)}{\partial\mu} \right|_{g_0, \mu}, \quad (6.4)$$

cerca del punto fijo $g = \infty$. No daremos el detalle de los cálculos, similares a los del caso standard. El resultado, a orden líder en $1/g$, es :

$$\beta = - 2\pi \frac{N^2-1}{N} \frac{1}{(Nf+2N)(1+2N)} + \mathcal{O}(1/g). \quad (6.5)$$

Este resultado muestra nuevamente que $g = \infty$ es un punto fijo estable.

6.2b Susceptibilidad magnética

Siguiendo el mismo procedimiento que en la sección 5.5 para el caso standard, calculamos la susceptibilidad magnética para el modelo multicanal en el límite de acoplamiento fuerte. Así definimos la susceptibilidad estática, a partir de una transformada de Fourier, en la siguiente forma :

$$\chi = \lim_{k_1 \rightarrow 0} \lim_{k_0 \rightarrow 0} \chi(k). \quad (6.6)$$

En el caso del modelo multicanal, se obtuvo la siguiente expresión para χ :

$$\chi = \frac{1}{g} - \frac{1}{g^2} \frac{\pi}{2(N_1 + 2N)} + O(1/g^3), \quad (6.7)$$

Este resultado muestra que la impureza está apantallada, como en el caso standard.

6.2c Calor específico

A partir de la funcional generatriz (6.3) y siguiendo el mismo procedimiento que en la sección 5.6 hallamos que la carga central total para el modelo Kondo multicanal en el límite de acoplamiento fuerte está dada por :

$$c_{KM}(g=\infty) = N N_f + \frac{-(2N+N_f)(N^2-1)}{-(2N+N_f)+N} - 2(N^2-1), \quad (6.8)$$

es decir que

$$c_{KM}(g=\infty) = N_f. \quad (6.9)$$

Esta es una generalización de los resultados de la sección 5.6, válida para $N_f = 1$.

El calor específico a baja temperatura en el límite de acoplamiento fuerte es entonces :

$$C_{KM}(g=\infty) = \frac{\pi N_f T}{6}. \quad (6.10)$$

Este resultado está en franco desacuerdo con el hallado por Andrei y Destri^[6.1] usando la técnica del Bethe-Ansatz. En efecto, ellos calculan el calor específico a bajas temperaturas en un PFIE de una nueva constante de acoplamiento grande pero no ∞ . El resultado que obtienen es una potencia fraccional de T . Sin embargo, en base a los resultados de Affleck^[6.2] y Blöte et

al^[6. 3] comentados en la sección 2.7, es claro que para sistemas invariantes conformes, tales como los modelos Kondo y Kondo multicanal en sus puntos fijos, el único comportamiento coherente del calor específico es $C \sim T$, como en (6.10).

La razón de la discrepancia entre nuestro trabajo y los citados es la siguiente. El límite de bajas temperaturas que ellos estudian es el de un punto fijo infrarojo estable (pero no infinito). Un estudio cuidadoso muestra que con la técnica del Ansatz de Bethe lo que se ha hecho es estudiar, no el límite de la constante de acoplamiento desnuda J yendo a infinito, sino el límite de bajas temperaturas de una constante de acoplamiento J^* relativamente débil, esto es, tal que T_k pueda aproximarse por $e^{-(1/NJ)}$. Esta aproximación es válida en la región crítica del punto fijo de acoplamiento débil, pero no si $J \rightarrow \infty$. De hecho, la solución del Ansatz de Bethe que ellos utilizan no puede ser extrapolada más allá de un valor de J^* de orden uno. El origen de este problema es simple. El estado ligado está localizado alrededor de la impureza. Al hacer J mayor y mayor el estado ligado disminuye su tamaño y eventualmente alcanza el tamaño del cutoff. Así, el límite de acoplamiento fuerte está muy afectado por la regularización. De hecho, el valor de J^* cambia con la elección de la regularización como en el parámetro de regularización r de Andrei^[6. 2]

6.2 El método del "loop de Wilson"

Comencemos por considerar aquellos términos del Lagrangiano (5.7) que contienen al campo de la impureza:

$$\mathcal{L}_i = d^\dagger (i\partial_t + B_-) d. \quad (6.11)$$

El cálculo de los determinantes que involucren a este Lagrangiano corresponde al de operadores que actúen sobre coordenadas del espacio-tiempo; puede sin embargo reducirse al cálculo de determinantes de operadores que actúan sobre coordenadas espaciales solamente. Para ello debe imponerse un rango finito al tiempo euclídeo τ , lo cual significa trabajar en teoría de campos a temperatura finita. Consideremos la restricción :

$$0 \leq \tau \leq \beta \equiv 1/kT, \quad (6.12)$$

donde T es la temperatura. Por supuesto, recobramos los resultados a temperatura cero cuando kT sea mucho menor que las otras energías puestas en juego en el problema.

En estas condiciones para todo campo de gauge B_- actuando como background existe la siguiente cantidad invariante de gauge :

$$U(x) = \hat{T} e^{i \int_0^\beta dt B_-}, \quad (6.13)$$

que corresponde, en este contexto, al llamado "loop de Wilson"^[6.3].

Puede mostrarse (ver en el apéndice los resultados de Elitzur et al^[6.4] y Blanckerbecler^[6.5]) que se cumple la siguiente identidad:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \int \mathcal{D}d^+ \mathcal{D}d e^{i \int_0^T dt \mathcal{L}_i} = \det \left[1 + \hat{T} e^{i \int_0^T dt B^-(t)} \right], \quad (6.14)$$

donde el lado derecho es el determinante de una matriz de $N \times N$. Aquí B^- está en el álgebra de Lie de $SU(N)$ y el exponencial ordenado temporalmente es un elemento del grupo.

Para tener en cuenta el número de ocupación de la impureza proponemos la siguiente funcional generatriz :

$$Z_{imp} = \int \mathcal{D}a e^{-i \int dx dt a(x,t) n(x,t)} \int \mathcal{D}d^+ \mathcal{D}d e^{-i \int dx dt d^+ (i\partial_t + B^- + a) d}, \quad (6.15)$$

donde

$$n(x,t) = \begin{cases} 1 & \text{donde hay una impureza,} \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (6.16)$$

Esta funcional puede escribirse así:

$$Z_{imp} = \int \mathcal{D}a e^{-i \int dx dt a(x,t) n(x,t)} \prod_x \det (i\partial_t + B^- + a) \quad (6.17)$$

El determinante funcional puede ser evaluado en forma simple (como puede verse en el Apéndice). Su resultado es :

$$J_F = \frac{\det (i\partial_t + B - \tau a)}{\det (i\partial_t)} = \det \left[1 + e^{-i\int dt} a(x,t) \hat{T} e^{i\int dt} B^- \right] \quad (6.18)$$

con lo cual Z_{imp} toma la forma siguiente :

$$Z_{imp} = \int \mathcal{D}a e^{-i\int dx dt} a(x,t) n(x,t) \prod_x \det \left[1 + e^{-i\int dt} a(x,t) U(x) \right] \quad (6.19)$$

Haciendo un desarrollo en serie para el lado derecho encontramos que para $n = 0$, $Z_{imp} = 0$, mientras que para $n = 1$ tenemos :

$$Z_{imp}(x) = \text{tr } U(x) \equiv \text{tr } e^{i\int dt} B^- \quad (6.20)$$

Esto nos lleva a reescribir la funcional generatriz en la forma :

$$Z_{imp}(x) = \prod_x \left[\text{tr } \hat{T} e^{i\int dt} B^-(x,t)_{n(x,t)} + (1 - n(x)) \right] \quad (6.21)$$

Ahora escribimos a B^- en términos de l como en (5.25),

$B^- = -i l^{-1} \partial_t l$, $l \in SU(N)$, y resolvemos esta ecuación para $l(x,t)$:

$$l(x,t) = l(x,0) \hat{T} e^{-i\int_0^t dt' B^-(x,t')} \quad (6.22)$$

Luego

$$\hat{T} e^{-i\int_0^{\bar{T}} dt B^-(x,t)} = l(x,\bar{T}) l^{-1}(x,0), \quad (6.23)$$

donde \bar{T} es el tiempo durante el cual evolucionó el sistema

($\bar{T} \rightarrow \infty$). A temperaturas distintas de cero \bar{T} es la inversa de la temperatura β .

Aún tenemos que considerar el cambio en la medida de integración de $\mathcal{D}B_-$ a $\mathcal{D}l$. El Jacobiano correspondiente es J_{B_-} :

$$\mathcal{D}B_- = J_{B_-} \mathcal{D}l, \quad (6.24)$$

que coincide con el determinante evaluado antes excepto por el hecho de que el operador correspondiente está en la representación adjunta de $SU(N)$:

$$J_{B_-} = \det (i\partial_t + i[B_-, \cdot]), \quad (6.25)$$

En el Apéndice mostraremos que J_{B_-} puede relacionarse con J_F . Para $SU(2)$ el resultado es $J_{B_-} = 2(J_F - 2)^2$. Nótese que para los electrones de conducción hemos hallado una relación (ver (4.49)) mucho más simple. En todo caso, los resultados de estas manipulaciones son factores de la forma :

$$\prod_x J_{B_-} [K(x, \bar{T}) I^{-1}(x, 0)] \text{tr} I^{-1}(x, \bar{T}) I(x, 0). \quad (6.26)$$

Estos factores actúan solamente sobre valores de los campos en los extremos $t = \bar{T}$ y $t = 0$. Se puede pensar en esos factores como promedios sobre condiciones de contorno. Es así que, siendo un operador local, el término de la acción correspondiente a la impureza dará una contribución nula al calcular la función β .

6.4 Quantización geométrica

Siguiendo el procedimiento de Fradkin y Stone^[6, 8], comenzaremos por la integral funcional para la interacción de fermiones con un único grado de libertad de spin (para SU(2)).

Sea $g_{\vec{n}} \in \text{SU}(N)$ dado por la siguiente expresión :

$$g_{\vec{n}}^{\vee} = e^{(i/2)\theta \vec{n} \cdot \vec{\sigma}}, \quad (6.27)$$

con $\vec{\sigma}$ las matrices de Pauli y

$$\check{m} = (\check{e} \wedge \check{n}) | \check{e} \wedge \check{n} |^{-1}. \quad (6.28)$$

Ahora, dado un Hamiltoniano $H(t)$ que toma valores en el álgebra de Lie de SU(2), la cuantización geométrica implica^[6, 8]:

$$\text{tr} e^{i \int_0^T dt H^a(t) \sigma^a} = \int \mathcal{D}\check{n} e^{iS}, \quad (6.29)$$

con

$$S = W_{\check{n}} - \frac{1}{2} \int_0^T dt H^a \check{n}^a, \quad (6.30)$$

$$\mathcal{D}\check{n} = \mathcal{D}\vec{n} \delta(n - 1) \quad (6.31)$$

$$W_{\check{n}} = \int_0^T dt \int_0^T d\tau \check{n} \cdot (\partial_t \check{n} \wedge \partial_\tau \check{n}). \quad (6.32)$$

Para el modelo Kondo, consideremos la interacción entre fermiones left-handed ψ y la impureza :

$$\mathcal{H}_{int} = g \int dx \psi^\dagger(x,t) \sigma^a \psi(x,t) n^a \delta^{(1)}(x), \quad (6.33)$$

$$\mathcal{H}_{int} = g H^a(t) \sigma^a, \quad H^a(t) = g \int dx \psi^\dagger(x,t) n^a \psi(x,t) \delta^{(1)}(x)$$

Usando integración funcional normal para los electrones y cuantización geométrica para la impureza llegamos a la siguiente funcional generatriz :

$$Z = \int \mathcal{D}\psi^\dagger \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\check{n} e^{i S_{Kondo}}, \quad (6.35)$$

con

$$S_{Kondo} = \int d^2x \psi^\dagger \partial_t \psi - \frac{g}{2} \int d^2x \psi^\dagger(x,t) \sigma^a \psi(x,t) n^a \delta^{(1)}(x) + W_n. \quad (6.36)$$

Evaluando la integral funcional fermiónica hallamos :

$$Z = \int \mathcal{D}\check{n} \det(i\partial_t - \frac{g}{2} \check{n} \delta(x)) e^{iW_n}. \quad (6.37)$$

En lugar de $g \check{n} \delta(x)$ podemos considerar una función $g(x)$ que presente un pico alrededor de $x = 0$ (por ejemplo podemos pensar en un continuo de grados de libertad de spin que se acoplan a los fermiones sólo en $x = 0$). Tenemos entonces :

$$-\frac{g}{2} \check{n} \cdot \vec{\sigma} = i \hbar^{-1} \partial_t h. \quad (6.38)$$

Notemos que el lado izquierdo de esta última igualdad depende tanto de x como de t . Por lo tanto debemos incluir en (6.32) una integración sobre x . La forma final de Z es entonces :

$$Z_{\text{sin } \delta(x)} = \int \mathcal{D}\check{n} e^{i\int dx W_n} e^{iW(h)}. \quad (6.39)$$

Aquí $W(h)$ es la acción de Wess-Zumino-Witten standard dada por las ecuaciones (5.23) y (5.24).

Este esquema alternativo confirma los resultados hallados en el capítulo 5 para Z , utilizando técnicas diferentes.

Apéndice

En este apéndice calcularemos el determinante

$$J_F = \frac{\det(i\partial_t + H(t))}{\det(i\partial_t)} \quad (A.1)$$

siguiendo la técnica desarrollada por Elitzur et al^[6.4].

Consideremos la funcional generatriz

$$Z[H] = \lim_{T \rightarrow} \int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \exp \left[i \int_0^T dt \bar{\psi}(t) (i\partial_t + H(t)) \psi(t) \right] \quad (A.2)$$

donde ψ , son campos Grassman y $H(t)$ está en el álgebra de $U(N)$.

Entonces, tenemos :

$$J_F = [\det(i\partial_t)]^{-1} Z[H]. \quad (A.3)$$

Podemos calcular Z explícitamente. Usaremos un regulador invariante de gauge (Pauli-Villars) y elegiremos el gauge

$H(t) = \bar{H}$, con

$$T \bar{H} = \int_0^T dt H(t). \quad (A.4)$$

Bajo transformaciones de gauge $U(t) \in U(N)$, $\psi(t)$ y $H(t)$ se transforman como:

$$\psi(t) \rightarrow \psi'(t) = U(t)\psi(t), \quad (A.5)$$

$$H(t) \rightarrow H'(t) = U^{-1}(t) H(t)U(t) + i U^{-1}(t)\partial_t U(t). \quad (A.6)$$

El objeto

τ

$$W = \hat{T} e^{i \int_0^T dt H(t)} \quad (A.7)$$

(donde \hat{T} indica el orden temporal) se transforma como un elemento del grupo :

$$W \rightarrow W' = U^{-1}(0)W U(T). \quad (A.8)$$

Si elegimos condiciones de contorno periódicas para los campos de gauge $H(t)$, tendremos $U(T) = U(0)$. Así, podemos escribir :

$$Z = \int D\bar{\psi} D\psi \exp \left[i \int_0^T dt \bar{\psi}(t)(i\partial_t + \bar{H})\psi(t) \right]. \quad (A.9)$$

En espacio euclideo (tiempo imaginario), donde $t = i\tau$, $T = -i\beta$ y $\bar{H} \equiv i\tilde{H}$, Z tiene esta forma :

$$Z = \int D\bar{\psi}(\tau) D\psi(\tau) \exp \left[- \int_0^T d\tau \bar{\psi}(\tau)(i\partial_\tau + H(\tau))\psi(\tau) \right], \quad (A.10)$$

con $\psi(\tau+\beta) = -\psi(\tau)$. Expandiendo en modos normales hallamos :

$$\psi(\tau) = \sum_{n=-N_1}^{N_2} \psi_n e^{i(n+1/2)\frac{2\pi}{\beta}\tau}, \quad (\text{A.11})$$

donde N_1 y N_2 son cutoffs. La acción es :

$$S = i \sum_{n=-N_1}^{N_2} \bar{\psi}_n [2\pi(n+1/2) + \beta\bar{H}] \psi_n. \quad (\text{A.12})$$

Elitzur et al, usando reguladores de Pauli-Villars invariantes de gauge, hallaron que

$$Z = \prod_{j=1}^k (1 + e^{2\pi i \bar{h}_j}), \quad (\text{A.13})$$

donde $\{\bar{h}_j\}$ es el conjunto de autovalores de la matriz de rango $\beta\bar{H}/2\pi$. Claramente :

$$Z = \det (1 + e^{2\pi i \bar{h}}) \equiv \det (1 + e^{i\beta\bar{H}}). \quad (\text{A.14})$$

Una nueva rotación al espacio de Minkowski nos lleva a

$$Z = \det (1 + \hat{T} e^{\int_0^T dt H(t)}) \equiv \det (1+W) = \Delta, \quad (\text{A.15})$$

que es independiente de la representación. Una deducción alternativa hecha por Blanckenbecler et al^[6, 6] lleva a la misma conclusión.

Como segunda parte de este Apéndice mostraremos la relación entre las representaciones fundamental y adjunta de $SU(N)$.

Consideremos el determinante finito en la representación fundamental de $SU(N)$:

$$\Delta_F = \det (1 + e^{iW \cdot t_F}), \quad (A.16)$$

donde t_F^α son los generadores de $SU(N)$ en la representación fundamental (ver sección 5.2). Usando propiedades de invarianza del determinante y el hecho de que es una "class function", podemos escribir (para $U \in SU(N)$ arbitrario):

$$\Delta_F = \det[U^{-1}(1+e^{iW \cdot t_F})U] = \det [1 + U^{-1}e^{iW \cdot t_F}U]. \quad (A.17)$$

Siempre es posible elegir U de tal forma que $U^{-1}e^{iW \cdot t_F}U$ sea una matriz diagonal, es decir que $U^{-1}e^{iW \cdot t_F}U = e^{i\tilde{W} \cdot t_F}$, donde \tilde{W} sólo tiene componentes en el subálgebra de Cartan (\mathfrak{H}_1^F) con $i = 1, 2, \dots, N-1$. Los generadores diagonales (\mathfrak{H}_i^F) tienen N autovectores $|\mu_F\rangle$ con autovalores $\mu_{i,F}^\alpha$. Los vectores μ_F^α son los pesos de la representación fundamental de $SU(N)$ y satisfacen

$$\sum_{\alpha=1}^N \mu_F^\alpha = 0. \quad (A.18)$$

Entonces

$$\Delta_F = \prod_{\alpha=1}^N \langle 1 + \exp \left[i \sum_{j=1}^r \tilde{W}_j \mu_{j,r}^\alpha \right] \rangle. \quad (A.19)$$

En el caso de la representación adjunta debemos calcular:

$$\Delta_A = \det(1 + e^{iW.t^a}), \quad (A.20)$$

donde t^a son los generadores de $SU(N)$ en la representación adjunta. Nótese que los parámetros W son los mismos que antes. Los mismos argumentos esgrimidos antes implican ahora que Δ_A puede escribirse en términos de los pesos de la representación adjunta, es decir, las raíces del álgebra. $N-1$ de dichas raíces son cero, y las demás son diferencias de pesos en la representación fundamental. Así, podemos escribir :

$$\Delta_A = \prod_{\alpha=1}^{N^2-1} (1 + e^{i\tilde{W}_i H_i^\alpha}) = 2^{N-1} \prod_{\alpha \neq b=1}^N \left[1 + \exp [i\tilde{W}_i (\mu_{iF}^a - \mu_{iF}^b)] \right]. \quad (A.21)$$

Usando la ecuación (A.18) tenemos :

$$\Delta_A = 2^{N-1} \prod_{\alpha \neq b=1}^N (e^{i\tilde{W}_i \mu_{iF}^a + i\tilde{W}_i \mu_{iF}^b}). \quad (A.22)$$

En el caso de $SU(2)$ estas expresiones llevan a :

$$\Delta_F = (1 + e^{i\tilde{W}/2})(1 + e^{-i\tilde{W}/2}) = 2 + 2 \cos \tilde{W}/2. \quad (A.23)$$

para la fundamental y

$$\begin{aligned}\Delta_A &= 2(e^{i\tilde{W}/2} + e^{-i\tilde{W}/2})(e^{i\tilde{W}/2} + e^{-i\tilde{W}/2}) \\ &= 8 \cos^2 \tilde{W}/2.\end{aligned}\tag{A.24}$$

para la representación adjunta.

Obtenemos entonces la siguiente relación :

$$\Delta_A = 2 (\Delta_F - 2)^2.\tag{A.25}$$

Debe notarse que esta relación difiere de los resultados para el determinante fermiónico (4.49).

Referencias

- [6.1]-N.Andrei y G.Destri, Phys.Rev.Lett. 52 (1984) 364.
- [6.2]-I.Affleck, Phys.Rev.Lett 56 (1986) 746.
- [6.3]-H.W.J.Blöte, J.L.Cardy y M.P.Nightingale, Phys.Rev.Lett
56 (1986) 742.
- [6.4]-S.Elitzur, E.Rabinovici, Y.Frishman y A.Schwimmer,
Nucl.Phys B273 (1986) 93.
- [6.5]-R.Blanckenbecler, D.J.Scalapino y R.L.sugar, Phys.Rev.
D24 (1981) 2278.
- [6.6]-P.B.Wiegmann, Phys.Rev.Lett 60 (1988) 821.
- [6.7]-E.Fradkin y M.Stone, Phys.Rev. B
- [6.8]-A.Perelomov."Generalized coherent states and their
applications", Springer, Berlin, 1986.

CAPITULO 7

CONCLUSIONES

En este trabajo de Tesis se ha estudiado el problema Kondo mediante la técnica de bosonización no-abeliana en el marco de la integral funcional.

Tal como señalamos en la Introducción, el problema Kondo había sido objeto de múltiples estudios que utilizaban las técnicas más diversas. Estos trabajos estaban motivados no sólo por el interés físico del problema, sino porque a pesar de estar éste ligado a propiedades físicas claras, presentaba singulares complicaciones en su tratamiento. De hecho, el primer avance significativo en la comprensión del modelo Kondo fue hecho, como vimos, por K.Wilson^[7. 1] más de diez años después de la propuesta inicial de J.Kondo^[7. 2].

Son sobre todo las propiedades a bajas temperaturas (para las que la constante efectiva de acoplamiento aumenta) las que han atraído más atención, dadas las dificultades que se enfrentan al no poder utilizarse una teoría de perturbaciones convencional para estudiar fenómenos que se producen en tales condiciones.

Las primeras propuestas alternativas a los cálculos perturbativos fueron las provistas por modelos fenomenológicos que permitían una descripción intuitiva del problema^[7. 3,9] sin lograr, sin embargo, dar una respuesta acabada sobre los cambios de comportamiento que se producen en la transición entre las regiones

ultravioleta e infraroja. En este contexto, parecería que la única forma de caracterizar este cambio es mediante un análisis numérico.

Otra propuesta presentada para evitar desarrollos perturbativos es aquella que recurre a la integrabilidad del modelo Kondo. En efecto, mediante la técnica del Ansatz de Bethe, es posible hallar el espectro de energías del Hamiltoniano Kondo y, mediante cálculos numéricos aproximados, los valores del calor específico y la susceptibilidad magnética en presencia de un campo magnético externo. En este esquema no ha resultado posible el cálculo de funciones de correlación.

Uno de los aspectos originales de esta Tesis es el de la presentación de otra alternativa para atacar el problema Kondo: la de la bosonización no-abeliana en el marco de la integral funcional. Usando este método, nos fue posible dar, partiendo de un modelo fermiónico bidimensional que describe el problema Kondo, una funcional generatriz expresada únicamente en términos de campos bosónicos: los campos h y l que representan electrones e impurezas, con acciones del tipo Wess-Zumino-Witten W y \check{W} . Aparecen además un campo escalar libre ϕ y campos fantasmas (también desacoplados) η , σ , ε , ρ y τ .

La interacción entre los campos h y l es descrita por un término simple, pesado con un factor $1/g$, lo que nos permitió estudiar de una manera sencilla las propiedades del modelo en el límite de acoplamiento fuerte. Esta es justamente una de las

principales ventajas de nuestra propuesta. La funcional generatriz obtenida resulta ser (ver ecuación (5.30)):

$$\begin{aligned}
 Z = & \int \mathcal{D}h \mathcal{D}l \mathcal{D}\eta^{+\alpha} \mathcal{D}\epsilon \mathcal{D}\eta^{l\alpha} \mathcal{D}\sigma^{\alpha} \mathcal{D}\rho^t \mathcal{D}\tau (\det i\partial_+) (\det i\partial_t) \\
 & \exp \left\{ -(i/g) \text{tr} \int d^2x (-i h^{-1} \partial_+ h + F) \cdot (-i l^{-1} \partial_t l + H) \right\} \\
 & \exp \left\{ i \int d^2x (\eta^{+\alpha} \partial_- \epsilon^{\alpha} + \eta^{l\alpha} \partial_x \sigma^{\alpha} + \rho^t \partial_x \tau) \right\} \\
 & \exp \left\{ -i(1+2N) \text{W}[\mathbf{h}] - i(1+2N) \hat{\text{W}}[\mathbf{l}] - \right. \\
 & \quad \left. - (i/8\pi) \int d^2x (\phi \partial_x \partial_t \phi) \right\} \tag{7.1}
 \end{aligned}$$

Aunque de apariencia complicada, escrita de esta manera, vimos que Z nos permitió un estudio simple de las propiedades básicas del problema Kondo. Así, mediante el cálculo explícito de la función β , pudimos mostrar que en el límite de acoplamiento fuerte el modelo Kondo corresponde a una teoría invariante conforme. Este es un resultado fundamental: el haberlo obtenido nos permitió utilizar en este límite las poderosas herramientas de la Teoría de Campos Conformes bidimensionales para estudiar propiedades de interés físico como el calor específico C . En efecto, usando los resultados de Blöte, Cardy, Nightingale^[7.4] y Affleck^[7.5] para teorías conformes, pudimos calcular C en el límite de acoplamiento fuerte a partir de la anomalía conforme c (sección 5.6). Pudimos así concluir que tanto los campos que representan a la impureza y los electrones de conducción como los campos auxiliares (campo escalar libre y fantasmas) contribuyen al valor de la carga central dando un valor de c en el límite $g \rightarrow \infty$ (ver ecuación ())

mayor que el del caso $g \rightarrow 0$, tal como lo predice el teorema c de Zamolodchikov^[7. 6]. Nuestro resultado para el calor específico, para $g \rightarrow \infty$ es (ecuación (5.99)):

$$C(T) = \frac{\pi T}{6}, \quad (7.2)$$

que confirma el obtenido por Wilson^[7. 4] usando métodos numéricos.

También calculamos la susceptibilidad magnética χ para $g \rightarrow \infty$ (sección 5.5). Vimos que toma la forma (ecuación (5.89)):

$$\chi = \frac{1}{g} - \frac{1}{g^2} \frac{\pi}{2(1+2N)} + \mathcal{O}(1/g^3). \quad (7.3)$$

El hecho de que χ sea independiente de la temperatura muestra el apantallamiento de la impureza, resultado esperable en este límite. Usando los resultados obtenidos en las secciones anteriores calculamos el cociente de Wilson (ver sección 5.7), cuyo valor:

$$\mathcal{W} = \frac{N}{N-1} \quad (7.4)$$

coincide, para $N = 2$, con el valor predicho por Nozières y Blandin^[7. 10].

Como una primera extensión del modelo estudiado presentamos el análisis del modelo Kondo multicanal, para el que también obtuvimos una acción bosónica. Los campos que representan a los electrones resultan tener una acción de Wess-Zumino-Witten

con peso conforme $-(N_f+2N)$; los que representan a la impureza tienen una acción que corresponde a una continuación analítica de la acción de Wess-Zumino-Witten, con un peso conforme $-(1+2N)$. La interacción entre ambos es mediante un término cuártico en los campos bosónicos. Aparecen además en el Lagrangiano efectivo, tal como en el modelo Kondo, un campo escalar libre y campos fantasmas libres que provienen de imponer vínculos sobre el modelo fermiónico de partida.

Al calcular la función β del modelo multicanal verificamos que $g = \infty$ es un punto fijo infrarojo estable : también esta extensión del modelo Kondo corresponde a una teoría invariante conforme. Por otra parte el valor de la susceptibilidad que obtuvimos muestra nuevamente una impureza apantallada:

$$\chi = \frac{1}{g} - \frac{1}{g^2} \frac{\pi}{2(N_f+2N)} + \mathcal{O}(1/g^3). \quad (7.4)$$

En cuanto al calor específico C , es de destacar que nuestros resultados difieren de los presentados por Andrei y Destri^[7. 7]. En efecto, mientras que nosotros mostramos que :

$$C = \frac{\pi N_f T}{6} \quad (7.5)$$

en la referencia [7.7] se obtiene una potencia fraccional de T . El límite de bajas temperaturas que se estudia en esta referencia es el de un punto fijo infrarojo estable. Un estudio cuidadoso muestra que con la técnica del Ansatz de Bethe lo que se ha estudiado no es el límite de la constante de acoplamiento desnuda

yendo a ∞ , sino el límite de bajas temperaturas de una constante de acoplamiento J^* relativamente débil, esto es, tal que T_k pueda aproximarse por $e^{-\frac{1}{N J}}$. Esta aproximación es válida en la región crítica del punto fijo de acoplamiento débil, pero no si $J \rightarrow \infty$. De hecho, la solución del Ansatz de Bethe que utilizan estos autores no puede ser extrapolada más allá de un valor de J^* de orden uno.

Hemos estudiado también otra versión del modelo que consiste en calcular el determinante fermiónico que corresponde a la impureza mediante la técnica del loop de Wilson, que describimos en detalle en la sección (6.3). Est nos permitió, por un lado, reducir el cálculo de este determinante al de un determinante que depende solamente de las coordenadas espaciales. Por otra parte, pudimos tratar en forma exacta el vínculo que limita a uno el número de impurezas involucradas en el problema. El resultado que se obtiene para la parte libre de la impureza es un promedio sobre condiciones de contorno. Por ser un operador local, se ve claramente en este contexto, su contribución a la función β es nula. Con esto confirmamos la validez de los resultados obtenidos anteriormente.

También propusimos el estudio del problema Kondo por medio de la técnica de estados coherentes o cuantización geométrica^[7, 8]. Es éste un método alternativo que merece ser estudiado más extensamente, de manera de establecer contacto con la descripción propuesta por Anderson, Yuval y Hamman^[7, 9]. Una virtud de nuestros métodos es que nunca debemos reducir la

simetría como estos autores lo hacen en su tratamnio.

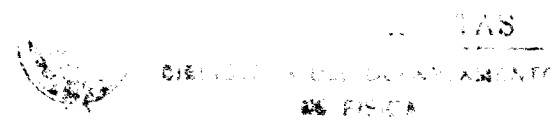
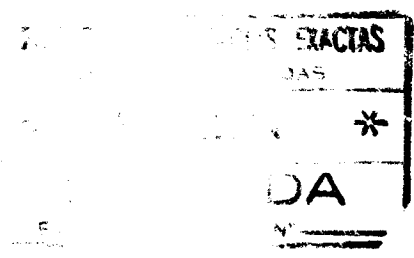
Nuestro trabajo abre muchas perspectivas interesantes para abordar. Concluiremos entonces este capítulo señalando algunas de ellas. Por una parte, nuestra propuesta de bosonización parece especialmente apropiada para hacer un estudio semiclásico del problema Kondo, dado que ha sido establecida en el marco de la integral funcional. En particular tendría mucho interés identificar en esta aproximación las soluciones de carga fraccionaria presentadas en los trabajos que utilizan el Ansatz de Bethe.

Señalemos que una ventaja de nuestro esquema es la de permitir el cálculo de funciones de correlación (dependientes del tiempo) a partir de derivadas de la funcional generatriz (7.1) respecto del campo magnético externo. Esto hace posible el estudio de propiedades de transporte como la resistividad eléctrica que, si bien es básica en la caracterización del problema Kondo, no ha podido ser calculada aún en forma analítica.

Finalmente, notamos repetidamente que nuestro esquema se vuelve particularmente simple en el límite de constante de acoplamiento grande. Es por ello esperable poder estudiar de manera completa todas las propiedades del modelo en este límite e, inclusive, en la región de cruce con el régimen de constante de acoplamiento débil.

Referencias

- [7.1]-K.G.Wilson, Rev.Mod.Phys. 47 (1975) 773
- [7.2]-J.Kondo, Prog.Theo.Phys. 32 (1964) 37.
- [7.3]-P.Nozieres, Journ,Low Temp.Phys.17 (1974) 31; P.W.Anderson, Journrn.Phys.C3 (1970) 2364.
- [7.4]-H.W.J.Blöte, J.L.Cardy y M.P.Nightingale, Phys.Rev.Lett 56(1986) 742.
- [7.5]-I.Affleck, Phys.Rev.Lett 56 (1986) 746.
- [7.6]-A.B.Zamolodchikov, JETP Lett 43 (1986) 730.
- [7.7]-N.Andrei y C.Destri, Phys.Rev.Lett 52 (1984) 364.
- [7.8]-P.B.Wiegmann, Phys.Rev.Lett 60 (1988) 821; E.Fradkin y M.Stone, Phys.Rev. B; A.Perelomov."Generalizad coherent states their applications", Springer, Berlin, 1986.
- [7.9]-P.W.Anderson, G.Yuval y D.Hamman, Phys.Rev B1 (1970) 4464.
- [7.10]-P.Nozières y A.Blandin, J.Phys.Paris, 41 (1980) 193.



T. 27
38
C