

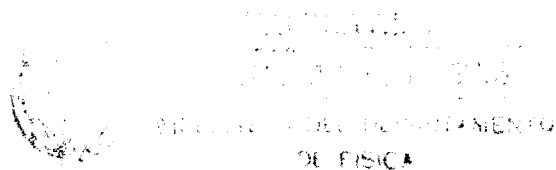
T. 31

UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA
Departamento de Física

TESIS DE DOCTORADO

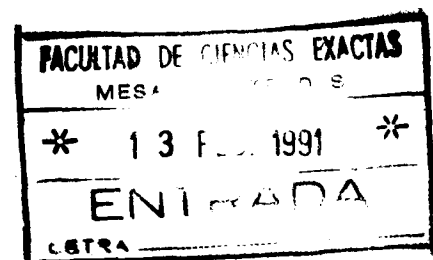
ECUACIONES DE AUTODUALIDAD
Y TEORIAS TOPOLOGICAS

G.Lozano



Director: F.A.Schaposnik

Febrero 1991



1

Indice

Introducción	3
1 Vórtices en teorías de gauge	12
1.1 Topología y grupos	13
1.2 Propiedades globales del modelo de Higgs	14
1.3 Los vórtices del modelo Abelian de Higgs	17
1.4 Los vórtices del modelo no Abelian de Higgs	18
2 Ecuaciones de Bogomol'nyi	21
2.1 El método de Bogomol'nyi	22
2.2 Ecuaciones de Bogomol'nyi para el modelo no Abelian de Higgs	28
3 El sistema de Chern-Simons-Higgs	36
3.1 El término de Chern-Simons	37
3.2 El momento angular y el término de Chern-Simons	40
3.3 Vórtices cargados y el término de Chern-Simons	43
4 Teorías Topológicas de Campos	51
4.1 La teoría topológica de campos de Yang y Mills	52
4.2 La función de partición y los invariantes topológicos	55

5 El método de Batalin y Vilkovisky	66
5.1 El método de Batalin y Vilkovisky para álgebras irreducibles	67
5.2 El método de Batalin y Vilkovisky para álgebras reducibles	75
6 Ecuaciones de Bogomol'nyi y Teorías Topológicas	78
6.1 La construcción de Labastida y Pernici	79
6.2 Las Ecuaciones de Bogomol'nyi y las Teorías topológicas	87
Conclusiones	95
Bibliografía	99

Introducción

En esta tesis se estudian algunos problemas clásicos y cuánticos de teorías de campos, de interés en la física y en la matemática.

Para situar a estos problemas en su contexto, daremos primero una descripción de la manera en la que se desarrolló en los últimos veinte años el estudio de soluciones clásicas con propiedades topológicas en teorías de gauge y de sus aplicaciones a la cuantificación de las mismas. Luego, describiremos los trabajos que constituyen esta tesis.

Es bien sabido que la mayoría de las teorías cuánticas de campos no pueden resolverse exactamente, lo que justifica el interés que tiene el desarrollo de métodos de aproximación. Durante las décadas del 50 y 60, el esquema de aproximación más utilizado fue el dado por la teoría de perturbaciones, desarrollada por Dyson, Feynmann y Schwinger, que es la versión para teoría de campos del método perturbativo de Born para la mecánica cuántica.

Existen sin embargo fenómenos que no pueden estudiarse perturbativamente, ya que por ejemplo, las expresiones que describen a los mismos presentan singularidades en el parámetro perturbativo.

Durante la década del 70, a partir de los trabajos de Dashen, Hasslacher y Neveu [1] y de Goldstone y Jackiw [2], fue desarrollado un nuevo método de aproximación capaz de superar estos problemas: el método de cuantificación semiclásico, que es la extensión a teorías de campos de los de Born y Openheimer y de Wentzel, Kramers y Brioullin en la mecánica cuántica.

Este método comienza con el estudio de las ecuaciones de Heisenberg para los operadores de campo en la aproximación en que todos los efectos cuánticos son ignorados, es decir que se considera a las ecuaciones como ecuaciones diferenciales (en general no lineales) clásicas. De allí entonces el

interés que tiene el estudio de las ecuaciones de movimiento de las teorías clásicas de campos.

Paralelamente a estos desarrollos se produjeron grandes progresos en el estudio de soluciones clásicas en diversas teorías de campos [4]. Si bien antes de 1970 se pudieron encontrar estudios de soluciones de algunas teorías de campos clásicas ligadas a la física de partículas, tales como las investigaciones llevadas adelante por Skyrme [5], Finkelstein [6] y Rubinstein [7] entre otros, es indudable que los trabajos de Nielsen y Olesen [8] sobre vórtices en el modelo de Higgs (1973), de 't Hooft [9] y Polyakov [10] sobre monopolos en el modelo de Georgi y Glashow (1974) y de Belavin, Polyakov, Schwartz y Tseytlin [11] sobre instantones en la teoría de Yang y Mills (1975) marcan el comienzo de una nueva etapa en este campo.

Los vórtices de Nielsen y Olesen son soluciones estáticas axialmente simétricas del modelo Abeliiano de Higgs en $3 + 1$ dimensiones, con energía finita (por unidad de longitud); corresponden a un tubo de flujo magnético. Naturalmente, como consecuencia de la simetría cilíndrica, los vórtices también pueden ser considerados como soluciones estáticas de la teoría definida en $2 + 1$ dimensiones. Finalmente, por no depender del tiempo, pueden pensarse como soluciones en un espacio Euclídeo bidimensional. Según las aplicaciones que se tengan en mente, una u otra interpretación será utilizada. Así, en la cosmología donde los vórtices juegan el papel de cuerdas cósmicas, son tomados en un espacio tiempo con $d = 3 + 1$. En materia condensada los vórtices aparecen como soluciones de las ecuaciones de movimiento de teorías efectivas de modelos de superconductividad en un espacio tiempo $2 + 1$ dimensional. Finalmente, en el análisis del mecanismo de confinamiento en teorías de gauge causado por la presencia de soluciones clásicas que interpolan entre distintos vacíos, se los considera como soluciones en un espacio Euclídeo bidimensional.

Para estos vórtices, a causa del mecanismo de Higgs, el campo de gauge decae exponencialmente a grandes distancias originando un campo magnético confinado en las vecindades del origen. Este campo magnético es tal que su flujo está cuantificado por razones de carácter topológico y el número de cuantos de flujo magnético está asociado con una carga topológica.

Algo similar sucede con las soluciones de las ecuaciones de movimiento del modelo de Georgi y Glashow en $3 + 1$ dimensiones encontradas por 't Hooft y Polyakov. Se trata de soluciones estáticas de energía finita, regu-

lares, localizadas, con carga magnética y que pueden ser interpretadas por lo tanto como monopolos.

Tanto los vórtices como los monopolos deben su estabilidad a razones de carácter topológico. En ambos casos, la condición de energía finita fuerza a los campos de Higgs a permanecer en el estado de vacío para grandes distancias. De esta manera, los campos de Higgs determinan una aplicación del espacio en infinito (que puede ser identificado con S^1 en el caso de los vórtices y S^2 en el caso de los monopolos) en la variedad que representa los ceros del potencial (vacío de Higgs). Así, podemos caracterizar a las soluciones con el número de enrollamientos de esta aplicación, cantidad que juega el rol de una carga conservada.

La posibilidad de obtener soluciones con las que se pueda asociar una carga topológica era conocida ya en otros modelos como por ejemplo la teoría $\lambda\phi^4$ y la teoría de Seno Gordon. Este tipo de soluciones recibe el nombre genérico de solitones¹.

Los solitones tienen varias propiedades características de partículas como por ejemplo: localización, energía finita y estabilidad. Por ello, este tipo de soluciones clásicas puede asociarse a partículas con existencia física. Tal es el caso, por ejemplo, de las soluciones de monopolo de las teorías de gauge no Abelianas. El método de cuantificación semiclásica permite incorporar estas soluciones en la teoría cuántica como nuevo estados, que no son accesibles por métodos perturbativos.

Por otra parte, los instantones, a pesar de poseer características similares a los vórtices y a los monopolos en cuanto a localización y carga topológica, tienen una interpretación física diferente. Esto se debe a que son soluciones de la teoría de Yang y Mills (pura) en 4 dimensiones *Euclídeas*. De esta manera, las soluciones instantónicas están asociadas con el efecto túnel en la teoría formulada en el espacio de Minkowski 3+1 dimensional. En el caso de la mecánica cuántica de una partícula que se mueve bajo la influencia de un potencial $V(q)$, donde $V(q)$ es por ejemplo un potencial anarmónico, la búsqueda de soluciones instantónicas es equivalente al estudio del movimiento de una "partícula" de energía cero en presencia de un potencial $-V(q)$. De esta manera, el instantón es una solución que interpola, en tiempo imaginario, entre los diferentes estados fundamentales

¹Ciertos autores reservan este nombre al caso de ondas que preservan su forma después de una colisión. Véase al respecto la discusión en la referencia [12].

del sistema. Como se sabe, la presencia de los mismos remueve la aparente degeneración del estado fundamental.

Las aplicaciones de los instantones en la Teoría de Yang y Mills constituyó un activo campo de investigación hacia finales de la década del 70 y varios aspectos tales como la estructura del vacío de la cromodinámica cuántica [17], [18], el problema $U(1)$ [19] y el confinamiento de quarks [20] fueron investigados en este contexto [12]-[16], [21], [22].

Una particularidad notable de las soluciones instantónicas de la teoría de Yang y Mills es que pueden ser estudiadas a partir de las ecuaciones de primer orden, llamadas de autodualidad. En efecto, un razonamiento sencillo muestra que las soluciones de estas ecuaciones son también soluciones de las ecuaciones de movimiento de Euler y Lagrange que son de segundo orden [11]. Más aún, para las configuraciones que satisfacen las ecuaciones de autodualidad, la acción es proporcional a la carga topológica y por lo tanto la configuración es estable.

El hecho de resolver ecuaciones de primer orden mucho más simples que las ecuaciones de movimiento de segundo orden, ha permitido avanzar notablemente en el conocimiento de las soluciones de la teoría de Yang y Mills; en particular en lo que se refiere a la búsqueda de soluciones explícitas [23], [24]. Por otra parte, también ha sido estudiado el espacio de parámetros que caracteriza a las soluciones (el espacio *moduli*) vía el teorema del índice de Atiyah y Singer [25].

Volvamos ahora a las soluciones *estáticas* tipo monopolo y vórtice. En el caso de los monopolos, inmediatamente después de los trabajos de 't Hooft y Polyakov, Prasad y Sommerfield [26] encontraron, por prueba y error, una solución exacta para un límite particular de las constantes de acoplamiento. Poco tiempo después, Bogomol'nyi [27] mostró que en el límite de Prasad y Sommerfield, las soluciones de las ecuaciones de movimiento podían ser halladas a partir de ecuaciones de primer orden y que para estas configuraciones, la energía resultaba proporcional a la carga topológica. Las soluciones de Prasad y Sommerfield pueden obtenerse en forma muy sencilla resolviendo las ecuaciones de Bogomol'nyi.

Vemos entonces que las ecuaciones de Bogomol'nyi juegan el mismo rol para los monopolos que las ecuaciones de autodualidad para los instantones. Para este caso, la afirmación anterior es algo más que una simple analogía. En efecto, estas ecuaciones de Bogomol'nyi pueden ser obtenidas

a partir de la reducción dimensional (eliminando la variable tiempo) de las ecuaciones de autodualidad de la teoría de Yang y Mills una vez que se ha identificado la componente temporal del campo de gauge con el campo de Higgs. Así, la reducción lleva a estudiar soluciones en un espacio Euclídeo de tres dimensiones. Los monopolos en tal espacio, juegan el papel de los instantones para $d = 4$. Esta identificación formal fue usada por Nahm en 1982 [28] para adaptar la construcción de Atiyah, Hitchin, Drinfel'd y Manin de las soluciones del problema de autodualidad [24] al caso de las ecuaciones de Bogomol'nyi para los monopolos. En este contexto han sido presentadas recientemente soluciones explícitas correspondientes al caso de n -monopolos estáticos [29].

En el caso de los vórtices, en 1975 de Vega y Schaposnik [30] e independientemente Bogomol'nyi [27] encontraron que para un valor particular de las constantes de acoplamiento de la teoría, las ecuaciones de movimiento podían ser estudiadas a partir de ecuaciones de primer orden. De la misma manera que para el caso anterior, la energía de la configuración resulta proporcional a la carga topológica. Posteriormente, Weinberg [31] encontró la dimensión del espacio *moduli* para los vórtices usando técnicas relacionadas con el teorema del índice. Finalmente, Taubes [32] demostró la existencia de soluciones correspondientes a n -vórtices, mostrando que existe una solución única una vez que se determinan n puntos en el plano que corresponden a la posición de los vórtices. Sin embargo soluciones explícitas correspondiente a multivórtices no han sido dadas hasta el momento.

Es interesante señalar que la relación de parámetros para la cual existen las ecuaciones de Bogomol'nyi en el caso de los vórtices es la misma que corresponde a la transición de fase entre superconductividad tipo I y tipo II habida cuenta de la conexión entre el modelo Abelian de Higgs y el modelo de Ginzburg y Landau para la superconductividad [33]. También es para esta relación de parámetros que el modelo Abelian de Higgs admite una extensión supersimétrica [34], [35].

Debemos notar que a diferencia del caso de los monopolos, las ecuaciones de Bogomol'nyi para los vórtices *no* están relacionadas a través de un proceso de reducción dimensional con la ecuaciones de autodualidad de Yang y Mills. De hecho, el mismo proceso que hemos descrito para pasar de la ecuaciones de autodualidad de Yang y Mills a la ecuación de Bogomol'nyi para el caso de los monopolos puede ser aplicado una vez más conduciendo a ecuaciones de autodualidad en dos dimensiones estudiadas

por Hitchin [79], pero que no corresponden a las ecuaciones de movimiento del modelo de Higgs.

Los vórtices y los monopolos descritos más arriba, representan objetos con carga magnética, eléctricamente neutros. Naturalmente se plantea la pregunta de si es posible encontrar generalizaciones con carga eléctrica.

La pregunta fue contestada afirmativamente por Julia y Zee en 1975 [38] para el caso de los monopolos. Luego fueron descubiertos efectos cuánticos notables al estudiarse la cuantificación de teorías con "término θ " en presencia de monopolos cargados [37].

En el caso de los vórtices, tal generalización a soluciones que representen vórtices cargados no es posible [38], [39]. Sin embargo, la situación es completamente distinta si se toma a los vórtices como soluciones en un espacio tiempo de $d = 2 + 1$ y se agrega al Lagrangiano de Higgs un término de Chern Simons. Este término fue originalmente sumado al Lagrangiano de Yang y Mills en $2 + 1$ dimensiones como una manera alternativa de proveer masa a las excitaciones de la teoría sin romper explícitamente la simetría ni recurrir al mecanismo de Higgs [40], [41]. La adición de este término al Lagrangiano usual del modelo de Higgs provoca efectos interesantes: los vórtices de este modelo adquieren necesariamente carga eléctrica [42]-[44]. Más aún, en el caso no Abelian, la carga eléctrica y el momento angular resultan cuantificados a nivel clásico [42].

Es de señalar que el término de Chern Simons ha recibido también gran atención en los últimos años dada su posible relevancia en la descripción de fenómenos en materia condensada tales como el efecto Hall cuántico y la superconductividad a altas temperaturas [45], [46], [47].

Recientemente, Hong, Kim y Pac [48] e independientemente Jackiw y Weinberg [49] estudiaron el modelo de Chern Simons Higgs en $d = 2 + 1$, es decir un modelo de Higgs en el que la dinámica del campo de gauge está gobernada sólo por el término de Chern Simons. En estos trabajos se muestra que tabajando con un potencial de Higgs séxtuple, el sistema admite ecuaciones tipo Bogomol'nyi. A partir de este resultado, el espacio *moduli* [50] y la extensión supersimétrica del modelo [51] fueron recientemente analizados.

Ha quedado claro de la discusión anterior la importancia de las ecuaciones de autodualidad de la teoría de Yang y Mills y de las ecuaciones de Bogomol'nyi del modelo de Georgi y Glashow y del modelo Abelian de

Higgs en la obtención de soluciones exactas. Asimismo, vemos que las ecuaciones de autodualidad y de Bogomol'nyi juegan papeles análogos, lo que justifica que de ahora en adelante, hablemos indistintamente de ecuaciones de autodualidad o de Bogomol'nyi.

Además del interés intrínseco que tiene el obtener tales soluciones hemos mencionado que las mismas juegan un papel central en la comprensión de problemas de interés de la física de partículas. Así las soluciones tipo instantón de la teoría de Yang y Mills en $d = 4$ (como así también las soluciones estáticas tipo monopolos y vórtices consideradas como soluciones en espacio Euclídeo en 2 y 3 dimensiones respectivamente) pueden estar en el origen del confinamiento de cargas (confinamiento de quarks). Esto fue probado para la electrodinámica compacta en $d = 3$ en la referencia [20] y para el modelo Abeliiano de Higgs en $d = 2$ en las referencias [18] y [52]. También los instantones han permitido comprender mejor la estructura del vacío [18], [17] (vacío θ en cromodinámica cuántica), resolver el problema de la no existencia del noveno bosón de Goldstone ([19], [53], [54]) y avanzar en el análisis de la violación de CP y la eventual existencia del axión [55]. Ultimamente, soluciones de tipo instantón (*esfalerones*) están siendo consideradas por diversos grupos como responsables de la violación de números fermiónicos (número bariónico) [56].

En el dominio de la cosmología, monopolos y vórtices tomados como soluciones de las ecuaciones de movimiento en espacio de Minkowski imponen condiciones muy restrictivas a los posibles modelos Gran Unificados y a la par proveen mecanismos (los únicos disponibles actualmente) para explicar la formación de galaxias [57].

Más allá de las aplicaciones físicas que hemos mencionado, es necesario señalar el interés que las soluciones instantónicas y solitónicas despertaron en la matemática de la última década.

Uno de los avances más importantes en este sentido concierne al estudio de la topología de variedades de bajas dimensiones vía las ecuaciones de autodualidad iniciado por Donaldson [58].

Dado que los estudios de Donaldson están ligados a la propiedades de los instantones en teorías de gauge, una cuestión de interés es la de si sus resultados pueden ser obtenidos utilizando técnicas de la teoría de campos.

Este problema ha sido recientemente analizado por Witten [59] en el contexto de las llamadas Teorías Topológicas de Campos, mostrando que los invariantes de Donaldson pueden ser calculados en forma simple a partir de las funciones de correlación de una teoría de campos: la teoría topológica de Yang y Mills.

Este tipo de teorías constituye una nueva clase en las que la covarianza no se logra integrando sobre todas las métricas como habitualmente se hace en gravitación cuántica sino porque el tensor de energía impulso puede escribirse como un conmutador BRST y tiene por lo tanto valor de expectación nulo.

Tal como fue demostrado por Labastida y Pernici [60] e independientemente por Baulieu y Singer [61], la teoría topológica de Yang y Mills puede ser obtenida como resultado de cuantificar una acción clásica. En el primer esquema, la acción que describe la teoría topológica se obtiene de cuantificar una acción clásica construida a partir de las ecuaciones de autodualidad. En el esquema de Baulieu y Singer, en cambio, la acción clásica de la que se parte es la carga topológica y las ecuaciones de autodualidad aparecen como condiciones de fijado de gauge.

A partir de estos resultados, nuevos ejemplos de teorías topológicas fueron construidas tomando como base las ecuaciones de Bogomol'nyi de distintos modelos [62].

Señalemos por otra parte que es posible establecer una relación entre la construcción de Labastida y Pernici y el método de cuantificación estocástica. En este contexto, las ecuaciones de autodualidad coinciden con las ecuaciones de Langevin, que son el punto de partida en la cuantificación estocástica, y las teorías topológicas son teorías supersimétricas para las cuales las ecuaciones de Langevin dan el mapeo de Nicolai [63].

En esta tesis presentaremos ecuaciones de autodualidad (ecuaciones de Bogomol'nyi) asociadas con teorías de gauge no Abelianas así como su aplicación a la construcción de teorías topológicas de campos.

En lo que se refiere a las ecuaciones de autodualidad, obtendremos las ecuaciones correspondientes a una teoría de gauge no Abeliana con rotura de simetría, tanto cuando el término de energía cinética para el campo de gauge es el habitual (*i.e.* un término del tipo del de Maxwell) como cuando corresponde a un término de Chern-Simons. También construire-

mos una teoría topológica en dos dimensiones a partir de las ecuaciones de autodualidad de la primera de las teorías no Abelianas arriba citadas.

El plan de la tesis es el siguiente: Luego de analizar las propiedades globales del modelo de Higgs en el capítulo 1, presentaremos las ecuaciones de Bogomol'nyi asociadas con los vórtices del modelo no Abeliano de Higgs [64] en el capítulo 2. Este constituye el primer aporte original de esta tesis. En el capítulo 3, luego de introducir el término de Chern Simons y de ilustrar la manera en que altera las propiedades usuales del momento angular y la estadística, analizaremos las ecuaciones de Bogomol'nyi del modelo de Chern Simons Higgs no Abeliano [65], que es el segundo aporte original de esta tesis. En el capítulo 4, presentaremos una breve introducción a las teorías topológicas de campos siguiendo las ideas de Witten. Luego de introducir el método de cuantificación de Batalin y Vilkovisky en el capítulo 5, presentaremos en el capítulo 6 una discusión sobre la relación existente entre las ecuaciones de Bogomol'nyi y las teorías topológicas basados en la construcción de Labastida y Pernici. En este capítulo presentaremos también la teoría topológica asociada con las ecuaciones de Bogomol'nyi del modelo no Abeliano de Higgs [66] que constituye otro aporte original de esta tesis. Finalmente presentaremos las conclusiones de este trabajo.

Capítulo 1

Vórtices en teorías de gauge

Como es bien sabido, algunas teorías de campos no lineales presentan soluciones regulares de energía finita topológicamente estables [12]-[16], [21]. Una característica importante de estos modelos es la existencia de una carga topológica conservada que asegura la estabilidad de las soluciones. Estas cargas topológicas están asociadas con propiedades globales del modelo, en contraposición a las cargas conservadas usuales originadas en las simetrías del Lagrangiano vía el teorema de Noether.

Son varias las soluciones de este tipo conocidas en distintas dimensiones del espacio tiempo y correspondientes a distintas teorías no lineales. Los *kinks* del modelo de Sine-Gordon, los vórtices del modelo de Higgs, los monopolos del modelo no-Abeliano de Higgs y los instantones de la teoría de Yang y Mills son algunos ejemplos.

Los vórtices aparecen como soluciones de teorías de gauge espontáneamente rotas [8]. En este capítulo analizaremos de qué forma las propiedades globales de estas soluciones están ligadas al grupo de gauge y a la manera en que esta simetría está rota por el vacío. La sección 1.1 es un breve resumen de definiciones y resultados básicos de topología. En la sección 1.2 analizaremos las propiedades globales del modelo de Higgs relacionando la existencia de vórtices con la no trivialidad del grupo fundamental $\Pi_1(G/H)$. En las secciones 1.3 y 1.4 presentaremos como ejemplos el modelo Abeliano y no Abeliano de Higgs respectivamente prestando particular atención al esquema de ruptura de simetría necesario para la existencia de vórtices.

1.1 Topología y Grupos

Como señalamos anteriormente las propiedades globales de los grupos son de fundamental importancia en el estudio y clasificación de las soluciones de una teoría de campos.

Una de las ideas básicas es la noción de homotopía. Dados dos espacios topológicos X e Y , dos funciones continuas $f, g : X \rightarrow Y$ son homotópicas si existe una deformación continua que interpole entre ellas; es decir, si existe $F(x, t) : X \times I \rightarrow Y$, continua, tal que

$$F(x, 0) = f(x) \quad F(x, 1) = g(x). \quad (1.1)$$

Se puede ver fácilmente que la homotopía es una relación de equivalencia. Esto determina una partición en clases disjuntas, llamadas clases de homotopía, del conjunto de aplicaciones continuas de X en Y .

Para nuestros propósitos es útil identificar a X como S^1 y considerar las aplicaciones que mapean un punto determinado $s_0 \in S^1$ a uno determinado $y_0 \in Y$. Con esta condición, las aplicaciones

$$\begin{aligned} f(t) &: S^1 \rightarrow Y \\ f(0) &= y_0 \end{aligned} \quad (1.2)$$

son curvas cerradas en Y que pasan por el punto y_0 . Designaremos con $\Pi_1(Y, y_0)$ al conjunto de clases de equivalencia correspondientes a las curvas en Y cuyo punto final e inicial es y_0 .

Podemos dotar al conjunto de clases de equivalencia $\Pi_1(Y, y_0)$ de una operación, $+$, de la siguiente manera:

$$[f] + [g] = [f + g] . \quad (1.3)$$

en donde con $[f]$ denotamos la clase de f y con $f + g$ designamos la suma, es decir la curva que resulta de recorrer f y luego g .

Con esta operación definida, $\Pi_1(Y, y_0)$ tiene estructura de grupo y se conoce como primer grupo de homotopía, grupo fundamental o grupo de Poincaré.

Dado un grupo G que actúa sobre Y diremos que G lo hace transitivamente, si para todo y_0, y_1 de Y existe $g \in G$ tal que $y_1 = g(y_0)$. Bajo esta condición es posible demostrar que $\Pi_1(Y, y_0)$ no depende de y_0 .

En el caso en que exista un grupo de simetría G que actúe transitivamente sobre una variedad Y es posible establecer una identificación entre Y y G .

En efecto, el hecho de que G actúe transitivamente sobre Y implica que tomando un punto y_0 como base, $g(y_0)$ cubre todo Y cuando g varía en G . En general esta relación no es unívoca. Dados dos elementos $g_1, g_2 \in G$, éstos darán el mismo punto de Y si y solo si

$$g_1(y_0) = g_2(y_0) . \quad (1.4)$$

Esto es equivalente a decir que $g_2^{-1}g_1$ está en el grupo de invarianza (*little group*) H de y_0 :

$$H = \{h \in G : h(y_0) = y_0\} . \quad (1.5)$$

A partir de esta observación es fácil ver entonces que la identificación debe hacerse entre Y y G/H , el espacio de *cosets* izquierdo:

$$G/H = \{gH : g \in G\} . \quad (1.6)$$

Como consecuencia inmediata surge entonces la identificación entre los respectivos grupos fundamentales:

$$\Pi_1(Y) = \Pi_1(G/H) . \quad (1.7)$$

1.2 Propiedades globales del modelo de Higgs

El modelo de Higgs está descrito por la siguiente densidad Lagrangiana:

$$L = -\frac{1}{2} \text{tr} F_{\mu\nu} F_{\mu\nu} - \sum_{i=1}^k \text{tr} (D_\mu \Phi^i) (D_\mu \Phi^i)^* + V(\Phi^1, \dots, \Phi^k) . \quad (1.8)$$

En 1.8, $F_{\mu\nu}$ es el tensor de campo:

$$F_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}^a T^a \quad (1.9)$$

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g f^{abc} A_\mu^b A_\nu^c . \quad (1.10)$$

Los generadores del grupo de gauge G , T^a ($a = 1, \dots, m$) satisfacen las siguientes reglas de conmutación:

$$[T^a, T^b] = f^{abc} T^c \quad (1.11)$$

Los campos de Higgs Φ^i ($i = 1, \dots, k$) están en alguna representación p -dimensional del grupo de gauge y la derivada covariante está definida de la siguiente manera:

$$(D_\mu \Phi^i)_s = \partial_\mu \Phi^i_s + g A_\mu t^a_{sr} \Phi^i_r, r = 1, \dots, p \quad (1.12)$$

$$[t^a, t^b] = f^{abc} t^c \quad (1.13)$$

Los generadores T^a y t^a (no necesariamente en la misma representación) están normalizados de acuerdo con :

$$\text{tr} T^a T^b = \text{tr} t^a t^b = -\frac{\delta^{ab}}{2} \quad (1.14)$$

Nos concentraremos en el modelo en dos dimensiones ya sea porque estamos pensando en los vórtices como instantones en $d = 2$ dimensiones Euclídeas o como soluciones estáticas axialmente simétricas en $d = 3 + 1$.

La condición de energía finita requiere que:

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} V(\Phi) = 0 \quad (1.15)$$

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} D_\mu \Phi = 0 \quad (1.16)$$

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} F_{\mu\nu} = 0 \quad (1.17)$$

donde por simplicidad denotamos con Φ el conjunto de campos de Higgs (Φ^1, \dots, Φ^k) .

Llamaremos vacío de Higgs al conjunto de ceros del potencial:

$$Y = \{y : V(y) = 0\} . \quad (1.18)$$

La condición 1.15 determina entonces una aplicación de infinito (que puede ser identificado con S^1) en Y

$$\Phi(\theta) : S^1 \rightarrow Y . \quad (1.19)$$

Siendo V invariante de gauge, es fácil ver que G actúa sobre Y . Además supondremos que lo hace transitivamente. En ese caso, como hemos establecido en la sección anterior, Y es isomorfo a G/H y la aplicación 1.19 deviene entonces:

$$\Phi(\theta) : S^1 \rightarrow G/H \quad (1.20)$$

donde H es el grupo de invarianza del vacío:

$$H = \{h : h(y_0) = y_0, y_0 \in Y\} . \quad (1.21)$$

Las aplicaciones 1.20 son entonces clasificadas de acuerdo con $\Pi_1(G/H)$.

$\Pi_1(G/H)$ es un conjunto discreto, y sus elementos (las clases de homotopía) pueden ser designadas con elementos de Z ó Z_N . Supongamos que imponemos como condición de contorno una aplicación 1.20 que pertenece a la clase designada por q . Si existe una solución de las ecuaciones de movimiento con estas condiciones de contorno, q será una carga conservada ya que siendo la evolución temporal una homotopía, $\Phi(\theta)$ no puede cambiar de clase.

Hemos establecido entonces un criterio necesario para la existencia de vórtices, éste es la no trivialidad de $\Pi_1(G/H)$.

Una vez determinado el grupo de gauge G y la representación del mismo a la cual pertenecen los campos de Higgs es necesario elegir un potencial tal que el grupo fundamental $\Pi_1(G/H)$ sea no trivial. Luego, las aplicaciones no triviales son impuestas como condiciones de contorno sobre los campos de Higgs.

Las condiciones de contorno sobre el campo de gauge A_μ deben determinarse consistentemente con la ecuación 1.16. Como veremos en la siguiente sección, esta ecuación liga las propiedades topológicas de los campos de Higgs con las propiedades topológicas del campo de gauge permitiendo identificar la carga q con el flujo magnético.

Antes de presentar los ejemplos consideraremos dos puntos. En primer lugar señalaremos que el criterio que hemos establecido no asegura la existencia de vórtices. El estudio de la existencia de las soluciones requiere necesariamente un análisis detallado de las ecuaciones de movimiento. En segundo lugar, podría suceder que dos condiciones de contorno topológicamente equivalentes pero diferentes den origen a soluciones con propiedades diversas. Aunque estas condiciones sean equivalentes de gauge en el infinito nada asegura que la transformación de gauge que las relaciona pueda ser extendida regularmente a todo R^2 .

1.3 Los vórtices del modelo Abeliano de Higgs

Consideraremos como ejemplo los vórtices del modelo Abeliano de Higgs [8]. La densidad Lagrangiana que describe la teoría es:

$$L = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F_{\mu\nu} - \frac{1}{2}(D_\mu\Phi)(D_\mu\Phi)^* - \frac{\lambda}{8}(\Phi\Phi^* - a^2)^2 . \quad (1.22)$$

donde

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu . \quad (1.23)$$

y Φ es un campo escalar complejo. La derivada covariante está definida por:

$$D_\mu\Phi = \partial_\mu + ieA_\mu\Phi . \quad (1.24)$$

El vacío de Higgs viene dado para esta modelo por el siguiente conjunto:

$$Y = \{\Phi = ae^{i\alpha}\} \quad (1.25)$$

Vemos que la simetría esta totalmente rota, es decir, que el grupo H de invarianza del vacío es la identidad. La identificación de Y con $G/H = U(1)$ es, en este caso, inmediata. El grupo fundamental, $\Pi_1(G/H) = \Pi_1(U(1))$ es el conjunto de numeros enteros Z y los representantes de cada clase pueden ser elegidos como:

$$\Phi(\theta) = ae^{in\theta} \quad n \in Z . \quad (1.26)$$

De acuerdo con lo que dijimos en la sección anterior, éstas son las condiciones de contorno que se imponen sobre los campos de Higgs,

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \Phi(\rho, \theta) = ae^{in\theta} . \quad (1.27)$$

La condición de contorno para A_μ es impuesta de manera que:

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} D_\mu\Phi = 0 \quad (1.28)$$

y por lo tanto,

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} A_\mu = -\frac{i}{e}\Phi^{-1}\partial_\mu\Phi . \quad (1.29)$$

A partir de aquí es fácil identificar a n como el número de cuantos de flujo magnético. En efecto, el flujo magnético está dado por:

$$\Theta = \int B ds = \oint A_\mu dx_\mu . \quad (1.30)$$

Utilizando 1.27 y 1.29, se tiene:

$$\Theta = n \frac{2\pi}{e} \quad (1.31)$$

1.4 Los vórtices del modelo no Abelian de Higgs

Analizaremos ahora el esquema de ruptura de simetría necesario para la existencia de vórtices cuando el grupo de gauge es $G=SU(N)$ [8], [42]-[44], [67], [68]. Nos restringiremos al caso de ruptura total de simetría. Para el caso con simetrías residuales puede consultarse por ejemplo la referencia [69].

En primer lugar, notemos que la elección de la representación para los campos de Higgs es de carácter decisivo. En efecto si elegimos la representación fundamental de $SU(N)$ o cualquier otra representación fiel (es decir, isomorfa al grupo), el grupo fundamental $\Pi_1(G/H)$ es trivial. Esto es así ya que estando la simetría totalmente rota, H coincide con la identidad en el grupo y entonces:

$$\Pi_1(G/H) = \Pi_1(SU(N)) = 0 \quad (1.32)$$

ya que $SU(N)$ es simplemente conexo.

En cambio, la situación es diferente si consideramos a los campos de Higgs en la representación adjunta. Esta no es una representación fiel de $SU(N)$. Por ejemplo, los elementos $z_i = \omega^i I$ donde I es la identidad y $\omega = e^{i\frac{2\pi}{N}}$ es la raíz N -ésima de la unidad, son mapeados en el mismo elemento. Es por ésto, que cuando decimos que la simetría esta totalmente rota, H es en realidad Z_N , el grupo de raíces N -ésimas de la unidad. En este caso:

$$\Pi_1(G/H) = \Pi_1(SU(N)/Z_N) = Z_N \quad (1.33)$$

y obtenemos así un grupo fundamental no trivial.

Hay una manera alternativa de comprender este hecho. Ya que los campos de Higgs están en la representación adjunta, las aplicaciones 1.19 deben considerarse como:

$$\Phi_i(\theta) = S(\theta)\Phi_i(0)S^{-1}(\theta) \quad i = 1, \dots, k \quad (1.34)$$

donde $\Phi_i = \Phi_i^a t^a$ es una matriz de $N \times N$. Como consecuencia de que $S(0) = 0$ y de que $\Phi_i(2\pi) = \Phi_i(0)$ se deduce inmediatamente que:

$$[S(2\pi), \Phi_i(0)] = 0 \quad (1.35)$$

Como la simetría está totalmente rota, no hay ninguna combinación de generadores de $SU(N)$ que conmute con $\Phi_i(0)$ para todo i . De manera que $S(2\pi)$ pertenece al centro de $SU(N)$ que es precisamente Z_N . Así, cuando θ recorre los valores de 0 a 2π , $S(\theta)$ genera un camino en $SU(N)$. Pero estos caminos no son curvas cerradas en $SU(N)$ sino que comienzan en la identidad y tienen su punto final en alguno de los z_i . Es decir,

$$S(2\pi) = e^{i\frac{2\pi n}{N}} I \quad (1.36)$$

Analícemos ahora la cantidad de campos de Higgs necesaria para romper totalmente la simetría en la representación adjunta de $SU(N)$. En primer lugar consideraremos como ejemplo $SU(2)$. Es obvio que un solo campo de Higgs no es suficiente para romper totalmente la simetría ya que en este caso obtendríamos una invarianza residual consistente en las rotaciones alrededor de la dirección en la que se encuentra el campo. Para romper esta simetría residual hay que considerar un segundo campo de Higgs, no paralelo al primero [8].

Para el caso más general de $SU(N)$, será conveniente trabajar con los generadores del álgebra en la base estándar de Cartan y Weyl¹:

$$\begin{aligned} [H_i, H_j] &= 0 & i, j &= 1, \dots, N-1 \\ [H_i, E_\alpha] &= r_i(\alpha) E_\alpha & \alpha &= \mp 1, \dots, \mp \frac{N(N-1)}{2} \\ [E_\alpha, E_{-\alpha}] &= r_i(\alpha) H_i \\ [E_\alpha, E_\beta] &= \begin{cases} N_{\alpha\beta} E_\gamma & \text{si } r(\gamma) = r(\alpha) + r(\beta) \\ 0 & \text{en todo otro caso} \end{cases} \end{aligned} \quad (1.37)$$

donde $r_i(\alpha)$ es la componente i de $r(\alpha)$, el vector de raíces correspondiente a $E(\alpha)$.

Es posible demostrar que para romper totalmente la simetría basta tomar un campo de Higgs Ψ en la subálgebra de Cartan (el álgebra generada por los H_i) y $N-1$ campos Φ^k en el complemento ortogonal [42].

¹Nuestras convenciones coinciden con las de la referencia [70].

Una vez que se han elegido las direcciones para los campos de Higgs, la ecuación 1.34, con $S(\theta)$ que satisface 1.36, es impuesta como condición de contorno.

$S(\theta)$ puede ser elegida como:

$$S_n(\theta) = \text{diag}\{e^{i\frac{n}{N}\theta}, e^{i\frac{n}{N}\theta}, \dots, e^{-i\frac{n(N-1)}{N}\theta}\} = e^{inM\theta} \quad (1.38)$$

donde M toma la forma:

$$M = \frac{1}{N} \text{diag}\{1, 1, \dots, 1 - N\} . \quad (1.39)$$

Como se ve, M pertenece la subálgebra de Cartan lo que a su vez implica, a partir de 1.34, que Ψ es constante en infinito.

Evidentemente, el esquema de ruptura que hemos descrito no es el único posible. Por ejemplo, para el caso de $SU(2)$ nuestra prescripción corresponde a tomar un campo Ψ en la dirección σ_3 y Φ en el plano generado por σ_1 y σ_2 dando lugar a las siguientes condiciones de contorno [42]:

$$\Psi = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Phi = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \text{sen}\theta \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1.40)$$

Una manera alternativa sería considerar las siguientes condiciones de contorno [43], [68]:

$$\Psi = \begin{pmatrix} \text{sen}\theta \\ -\cos\theta \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Phi = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \text{sen}\theta \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1.41)$$

Si bien ambas prescripciones son topológicamente equivalentes (de hecho son equivalentes de gauge en infinito) las soluciones asociadas con estas condiciones no son equivalentes de gauge ya que la transformación no puede ser extendida regularmente a todo el plano [72].

Nosotros adoptaremos el esquema de ruptura que hemos descrito en primer término fundamentalmente por dos razones. En primer lugar, las soluciones con condiciones de contorno 1.40 resultan de menor energía que aquellas que satisfacen 1.41 [71]. En segundo lugar, como veremos más adelante, la presencia de campos de Higgs en la subálgebra de Cartan permite una definición natural del tensor electromagnético y del flujo magnético en teorías no abelianas [42].

Capítulo 2

Ecuaciones de Bogomol'nyi

En el capítulo precedente hemos analizado las propiedades globales de teorías clásicas en dos dimensiones espaciales. Un análisis similar puede realizarse con el fin de establecer los criterios para estudiar la existencia de soluciones topológicamente estables en otro número de dimensiones [33].

Como hemos comentado anteriormente, estos criterios establecen condiciones necesarias para la existencia de soluciones. Un estudio mas completo requiere necesariamente el análisis de las ecuaciones de movimiento de cada modelo.

Originariamente, los vórtices Abelianos [8] y los monopolos [9], [10] fueron estudiados a partir de las ecuaciones de Euler y Lagrange. Poco tiempo después, Bogomol'nyi [27] (e independientemente de Vega y Schaposnik para el caso de vórtices [30]) encontró que para determinados valores críticos de las constantes de acoplamiento, las soluciones correspondientes a configuraciones de campo estáticas de estas teorías podían ser estudiadas a partir de ciertas ecuaciones de primer orden, que en principio, son mas simples que las ecuaciones de Euler y Lagrange asociadas a estos modelos. De hecho, las soluciones exactas presentadas hasta ese momento correspondían a soluciones de estas ecuaciones de primer orden [26], [30]. Por otra parte, para las configuraciones de campo que satisfacen las ecuaciones de Bogomol'nyi o de autodualidad , la energía puede ser calculada exactamente sin recurrir a la forma explícita de las soluciones, encontrándose que ésta resulta proporcional a la carga topológica.

Esta situación es completamente similar a la que se presenta en el estudio de las soluciones instantónicas de la teoría de Yang y Mills en cuatro di-

mensiones Euclídeas. Estas soluciones fueron originariamente encontradas resolviendo la ecuacion de autodualidad [11],

$$F_{\alpha\beta} = \tilde{F}_{\alpha\beta}$$

donde

$$\tilde{F}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \epsilon_{\alpha\beta\lambda\delta} F_{\lambda\delta} .$$

Las ecuaciones de Bogomol'nyi han sido objeto de un renovado interés en el marco de las Teorías Topológicas, recientemente introducidas por Witten [59]. Como veremos en el capítulo 6, estas ecuaciones constituyen el punto de partida para la construcción de este tipo de teorías.

En las seccion 2.1 de este capítulo discutiremos a modo de ejemplo la derivación de las ecuaciones de Bogomol'nyi para el modelo Abeliano de Higgs y las ecuaciones asociadas con los monopolos del modelo no Abeliano. En la sección 2.2 presentaremos uno de los aportes originales de esta tesis, las ecuaciones de Bogomol'nyi asociadas con los vórtices del modelo no Abeliano de Higgs [64]. Postergaremos el tratamiento de la relación entre éstas ecuaciones y las Teorías Topológicas hasta el capítulo 6, luego de introducir algunas herramientas necesarias para tal discusión.

2.1 El método de Bogomol'nyi

El método de Bogomol'nyi consiste esencialmente en rescribir la energía de manera que ésta quede expresada como una suma de términos positivos más un término proporcional a la carga topológica. Este último término es entonces una cota para la energía y las ecuaciones de primer orden resultan de exigir que esta cota sea saturada. Luego, las soluciones de las ecuaciones de Bogomol'nyi son soluciones de las ecuaciones de movimiento.

Cabe señalar las siguientes particularidades de las soluciones:

- La energía de la configuración es proporcional a la carga topológica.
- Para calcular la energía correspondiente a una solución no es necesario conocerla explícitamente sino que basta establecer que dicha solución existe.

Para ilustrar el método, discutiremos a continuación (sección 2.1.1 y 2.1.2) las ecuaciones de Bogomol'nyi para el modelo Abelian de Higgs, que admiten soluciones tipo vórtice, y las ecuaciones para el modelo de Georgi y Glashow, que admiten soluciones tipo monopolo.

2.1.1 Ecuaciones de Bogomol'nyi para el modelo Abelian de Higgs

La energía por unidad de longitud para una configuración estática axialmente simétrica es:

$$E = \int d^2x \left[\frac{1}{4} F_{ij} F_{ij} + \frac{1}{2} (D_i \Phi_a D_i \Phi_a) + \frac{g}{8} (|\Phi|^2 - \eta^2)^2 \right] \quad (2.1)$$

donde Φ_a , con $a=1,2$, son las componentes del campo complejo, $\Phi = \Phi_1 + i\Phi_2$, $F_{ij} = \partial_i A_j - \partial_j A_i$ es el tensor de campo y la derivada covariante $D_i \Phi_a$ está definida por $D_i \Phi_a = \partial_i \Phi_a + e\epsilon_{ab} A_i \Phi_b$ ($\epsilon_{12} = 1$).

De acuerdo con lo que hemos discutido en la sección 1.3, la condición de energía finita impone el siguiente comportamiento para los campos:

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \Phi(\rho, \theta) = \eta e^{in\theta} \quad (2.2)$$

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} A(\rho, \theta) = \frac{n}{e\rho} \quad (2.3)$$

donde n es la carga topológica.

Con motivo de facilitar el análisis redefiniremos las variables de la siguiente manera:

$$\Phi_a \rightarrow \eta \Phi_a \quad A_i \rightarrow \eta A_i \quad x \rightarrow \frac{1}{e\eta} y \quad (2.4)$$

En términos de las nuevas variables la energía resulta:

$$E = \eta^2 \int d^2y \left[\frac{1}{4} F_{ij} F_{ij} + \frac{1}{2} D_i \Phi_a D_i \Phi_a + \lambda (|\phi|^2 - 1)^2 \right] \quad (2.5)$$

donde ahora,

$$D_i \Phi_a = \partial_i \Phi_a + \epsilon_{ab} A_i \Phi_b \quad (2.6)$$

y

$$\lambda = \frac{g}{8e^2} \quad (2.7)$$

Vemos así que la energía depende únicamente de λ (la dependencia en η^2 es trivial). Este parámetro es una medida de la intensidad relativa de la interacción "electromagnética" respecto al autoacoplamiento cuártico de los campos de Higgs. Es fácil comprobar que la masa del campo de gauge y del campo de Higgs están relacionadas:

$$\frac{m_H^2}{m_v^2} = 8\lambda \quad (2.8)$$

Las ecuaciones de movimiento correspondientes a una configuración estática son:

$$\partial_i F_{ij} = \epsilon_{ab} \phi_b D_j \phi_a \quad (2.9)$$

$$D_i D_i \phi_c = 4\lambda \phi_c (|\phi|^2 - 1) \quad (2.10)$$

Veremos a continuación que para un cierto valor de λ , estas ecuaciones se reducen a un sistema de ecuaciones de primer orden.

Para ello será conveniente describir la energía de la siguiente forma:

$$E = \eta^2 \int d^2 y \left[\frac{1}{4} (F_{ij} \pm \frac{1}{2} \epsilon_{ij} (\Phi^2 - 1))^2 + \frac{1}{4} (D_i \Phi_a \mp \epsilon_{ab} \epsilon_{ij} D_j \Phi_b)^2 \right. \\ \left. + (\lambda - \frac{1}{8}) (\Phi^2 - 1)^2 \mp \frac{1}{2} \epsilon_{ij} (\frac{1}{2} F_{ij} (1 - \Phi^2) - \epsilon_{ab} D_i \Phi_a D_j \Phi_b) \right] \quad (2.11)$$

La idea de Bogomol'nyi consiste en establecer un vínculo entre el último término de la expresión anterior y la carga topológica de la configuración. Si se usa la identidad:

$$\epsilon_{ab} \epsilon_{ij} D_i \Phi_a D_j \Phi_b = \epsilon_{ab} \epsilon_{ij} \partial_i (\Phi_a D_j \Phi_b) - \frac{1}{2} \Phi^2 \epsilon_{ij} F_{ij} \quad (2.12)$$

la energía puede ser escrita como:

$$E = \eta^2 \int d^2 y \left[\frac{1}{4} (F_{ij} \pm \frac{1}{2} \epsilon_{ij} (\Phi^2 - 1))^2 + \frac{1}{4} (D_i \Phi_a \mp \epsilon_{ab} \epsilon_{ij} D_j \Phi_b)^2 \right. \\ \left. + (\lambda - \frac{1}{8}) (\Phi^2 - 1)^2 \pm \frac{1}{4} (\epsilon_{ij} F_{ij} \mp \frac{1}{2} \epsilon_{ab} \epsilon_{ij} \partial_i (\Phi_a D_j \Phi_b)) \right] \quad (2.13)$$

El término

$$\frac{1}{2} \epsilon_{ab} \epsilon_{ij} \partial_i (\Phi_a D_j \Phi_b) \quad (2.14)$$

no contribuye a la energía ya que puede ser convertido en una integral de línea que se anula en virtud de la condición

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} D_j \Phi_b = 0 \quad . \quad (2.15)$$

Por otra parte, como discutimos en el capítulo anterior,

$$\frac{1}{4} \int d^2 y \epsilon_{ij} F_{ij} = \pi n \quad (2.16)$$

De esta manera la energía resulta:

$$\begin{aligned} E = \eta^2 \int d^2 y & \left[\frac{1}{4} (F_{ij} \pm \frac{1}{2} \epsilon_{ij} (\Phi^2 - 1))^2 + \frac{1}{4} (D_i \Phi_a \mp \epsilon_{ab} \epsilon_{ij} D_j \Phi_b)^2 \right. \\ & \left. + (\lambda - \frac{1}{8}) (\Phi^2 - 1)^2 \right] \pm \eta^2 \pi n \end{aligned} \quad (2.17)$$

Como podemos ver en la ecuacion 2.17, $\lambda = \frac{1}{8}$ es un punto peculiar. En efecto, el tercer término se anula, y la energía queda expresada como una suma de términos positivos más un término proporcional a la carga topológica. Resulta inmediato entonces que este último término es una cota para la energía:

$$E \geq \eta^2 \pi |n| \quad (2.18)$$

Esta cota es saturada cuando los dos primeros términos de 2.17 se anulan, es decir, cuando los campos satisfacen las siguientes ecuaciones no lineales en derivadas parciales de primer orden:

$$F_{ij} \pm \epsilon_{ij} (\Phi^2 - 1) = 0 \quad (2.19)$$

$$D_i \Phi_a \mp \epsilon_{ab} \epsilon_{ij} D_j \Phi_b = 0 \quad (2.20)$$

Las ecuaciones 2.19-2.20 son las ecuaciones de Bogomol'nyi para el modelo Abelian de Higgs. El signo más (menos) corresponde a la carga topológica positiva (negativa).

Vemos así que las soluciones de las ecuaciones 2.19-2.20 son mínimos de la energía del modelo de Higgs para $\lambda = \frac{1}{8}$.

Es de notar que el caso $\lambda = \frac{1}{8}$ es muy peculiar: por un lado, en el caso de pretender extender el modelo Abelian de Higgs de manera de hacerlo supersimétrico, es condición necesaria que λ tome tal valor, [34], [35], lo que asegura que las todas las masas en la teoría sean iguales (ver la ecuación

2.8). Además, si se identifica al Lagrangiano del modelo con la energía libre del modelo fenomenológico de Ginzburg y Landau para la superconductividad del tipo II, este valor de la constante de acoplamiento corresponde a la frontera entre la expulsión completa de campo magnético (superconductividad tipo I) y la penetración de campo magnético bajo la forma de filamentos -vórtices - (superconductividad tipo II) [33].

Notemos que cuando se satisfacen estas ecuaciones, la energía es proporcional a la carga topológica.

$$E = \eta^2 \pi |n| \quad (2.21)$$

Si proponemos el siguiente *ansatz* para las soluciones:

$$\Phi(\rho, \theta) = e^{in\theta} f(\rho) \quad (2.22)$$

$$A_j(\rho, \theta) = \epsilon_{jk} x_k \frac{n}{\rho} a(\rho) \quad (2.23)$$

las ecuaciones de Bogomol'nyi toman la siguiente forma:

$$\rho \frac{df}{d\rho} - n(1-a)f = 0 \quad (2.24)$$

$$\frac{2n}{\rho} \frac{da}{d\rho} + f^2 - 1 = 0 \quad (2.25)$$

que corresponden a las ecuaciones encontradas previamente por de Vega y Schaposnik, quienes establecieron la existencia de soluciones por medio de un análisis numérico [30].

El *ansatz* 2.22, 2.23 puede interpretarse como correspondiente al caso de n vórtices superpuestos en el origen. Naturalmente, la cota de Bogomol'nyi también es saturada en caso de n vórtices ubicados suficientemente grandes. Si la cota fuera saturada para una configuración de vórtices ubicados a distancias arbitrarias, no existiría interacción entre los mismos y esta configuración constituiría una solución multisolitónica de las ecuaciones estáticas de movimiento.

Evidencia numérica de la ausencia de interacción en el caso de $\lambda = \frac{1}{8}$ fue obtenida por Jacobs y Rebbi [73]. Por otra parte, Weinberg [31] utilizó el teorema del índice de Atiyah y Singer para estudiar el espacio *moduli* de las ecuaciones 2.19, 2.20. Finalmente, la prueba rigurosa de la existencia de soluciones multivórtices fue dada por Taubes [32] quien demostró que dados n puntos en el plano (correspondientes a la posición de los vórtices) las ecuaciones 2.19, 2.20 admiten solución única.

2.1.2 Ecuaciones de Bogomol'nyi del modelo de Georgi y Glashow

Un análisis similar al de la sección anterior puede efectuarse para el modelo de Georgi y Glashow. La energía para una configuración estática es [27]:

$$E = \int d^3x \left[\frac{1}{4} F_{ij}^a F_{ij}^a + \frac{1}{2} D_i \Phi^a D_i \Phi^a + \frac{\lambda}{8} (\Phi^2 - \eta^2)^2 \right] \quad (2.26)$$

La expresión para la carga topológica en este modelo es:

$$m = \frac{1}{4\pi\eta} \int d^3x \epsilon_{ijk} F_{ij}^a D_k \Phi^a \quad (2.27)$$

Mediante un procedimiento análogo al de la sección anterior, podemos reescribir E de la siguiente manera:

$$E = \frac{4\pi\eta}{e} m + \int d^3x \left[\frac{1}{4} (F_{ij}^a - \epsilon_{ijk} D_k \Phi^a)^2 + \frac{\lambda}{8} (\Phi^2 - \eta^2)^2 \right] \quad (2.28)$$

Vemos entonces que para $\lambda \rightarrow 0$, el primer término en 2.28 es una cota para la energía y ésta es saturada cuando se satisfacen las siguientes ecuaciones de Bogomol'nyi:

$$F_{ij}^a = \epsilon_{ij\rho} D_\rho \Phi^a \quad (2.29)$$

El valor crítico para el cual valen las ecuaciones de Bogomol'nyi es entonces $\lambda = 0$, que corresponde al límite en el que Prasad y Sommerfield [26] encontraron una solución exacta correspondiente a un monopolo de carga magnética 1.

Este límite es un punto muy peculiar ya que corresponde a la eliminación de la autointeracción de los bosones de Higgs, cuando en realidad la presencia de ésta es necesaria para provocar la ruptura de simetría (que es requerida para la existencia de monopolos).

La existencia de soluciones multisolitónicas en el límite de Prasad y Sommerfield fue intensamente estudiada en los últimos años y soluciones explícitas han sido encontradas por varios métodos (véase por ejemplo la referencia [74]). Por otra parte, como señalamos en la Introducción, las ecuaciones 2.29 pueden ser obtenidas a partir de las ecuaciones de auto-dualidad de Yang y Mills, hecho que ha permitido extender los métodos basados en la geometría algebraica al análisis de las soluciones de esta ecuación [28], [29].

2.2 Ecuaciones de Bogomol'nyi para el modelo no Abelian de Higgs

En esta sección presentaremos uno de los resultados originales de esta tesis, las ecuaciones de Bogomol'nyi asociadas con los vórtices del modelo no Abelian de Higgs con $G=SU(2)$ [64].

De esta manera presentamos una teoría no Abelian para la cual las ecuaciones de existen sin necesidad de eliminar la autointeracción de los bosones de Higgs (como es el caso para los monopolos).

Por otra parte veremos que la topología Z_2 asociada con este modelo se traduce en que la energía para las configuraciones que satisfacen las ecuaciones de Bogomol'nyi es un invariante topológico *modulo 2*.

Es de señalar que una de las aplicaciones más interesantes de las soluciones tipo vórtice está conectada con la formación de galaxias [57]. En efecto, los modelos cosmológicos que dan cuenta de la evolución del universo utilizan Teorías Gran Unificadas en las que la simetría inicial va sufriendo sucesivas roturas al producirse la expansión. Así, durante la expansión del Universo, al descender la temperatura, los parámetros del potencial efectivo pueden ajustarse para producir ruptura de simetría con la consiguiente posibilidad de aparición de vórtices. Estos vórtices, masivos, proveen las fluctuaciones de masa capaz de generar la formación de galaxias. Dado que los grupos de simetría en la Teorías Gran Unificadas son no Abelianos, resulta de interés estudiar las soluciones tipo vórtice asociadas.

2.2.1 El modelo y las condiciones de contorno

La energía para el modelo bidimensional (Euclídeo) de Higgs con $G=SU(2)$ es ¹:

$$E = \int d^2x \left[\frac{1}{4} \vec{F}_{ij} \cdot \vec{F}_{ij} + \frac{1}{2} D_i \vec{\Phi} \cdot D_i \vec{\Phi} + \frac{1}{2} D_i \vec{\Psi} \cdot D_i \vec{\Psi} + V(\vec{\Phi}, \vec{\Psi}) \right] \quad (2.30)$$

donde el tensor de campo \vec{F}_{ij} en término del campo de gauge \vec{A}_i es:

$$\vec{F}_{ij} = \partial_i \vec{A}_j - \partial_j \vec{A}_i + e \vec{A}_i \wedge \vec{A}_j \quad (2.31)$$

¹Usaremos notación vectorial para denotar los elementos de álgebra de Lie. Con \vec{B} designamos el vector 3-dimensional las componentes de en una base de generadores t^a tal que $[t^a, t^b] = \epsilon_{abc} t^c$. Es inmediato comprobar que si $C = [A, B]$ entonces $\vec{C} = \vec{A} \wedge \vec{B}$.

Los campos $\vec{\Phi}$ y $\vec{\Psi}$ son los dos campos de Higgs en la representación adjunta del grupo necesarios para romper totalmente la simetría. La derivada covariante para estos campos está definida como:

$$D_i \vec{\Phi} = \partial_i \vec{\Phi} + e \vec{A}_i \wedge \vec{\Phi} \quad (2.32)$$

Como explicamos en la sección 1.4 el potencial debe ser elegido de manera de romper totalmente la simetría. Con este fin consideramos un potencial de la forma:

$$V(\vec{\Phi}, \vec{\Psi}) = \frac{g}{8}(\Phi^2 - \eta^2)^2 + \frac{g'}{8}(\Psi^2 - \eta'^2)^2 + \frac{g''}{8}(\vec{\Phi} \cdot \vec{\Psi})^2 \quad (2.33)$$

El último término en 2.33 asegura que para la configuración de vacío los campos de Higgs son perpendiculares.

De ahora en adelante será conveniente trabajar con variables adimensionales:

$$\vec{A}_i \rightarrow \eta \vec{A}_i \quad \vec{\Phi} \rightarrow \eta \vec{\Phi} \quad \vec{\Psi} \rightarrow \eta' \vec{\Psi} \quad \rho \rightarrow \frac{1}{e\eta} \rho \quad (2.34)$$

Con este cambio de variables la energía es:

$$E = \eta^2 \int d^2 y \left[\frac{1}{4} \vec{F}_{ij} \vec{F}_{ij} + \frac{1}{2} D_i \vec{\Phi} D_i \vec{\Phi} + \frac{\eta'^2}{\eta^2} D_i \vec{\Psi} D_i \vec{\Psi} + \lambda_1 (\Phi^2 - 1)^2 + \lambda_2 \frac{\eta'^2}{\eta^2} (\Psi^2 - 1)^2 + \lambda_3 \frac{\eta'^2}{\eta^2} (\vec{\Phi} \cdot \vec{\Psi})^2 \right] \quad (2.35)$$

donde ahora la carga e ha desaparecido de las derivadas covariantes y de \vec{F}_{ij} y:

$$\lambda_1 = \frac{g}{8e^2} \quad \lambda_2 = \frac{g'}{8e^2} \quad \lambda_3 = \frac{g''}{8e^2} \quad (2.36)$$

La condición de energía finita requiere que:

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} V(\vec{\Phi}, \vec{\Psi}) = 0 \quad (2.37)$$

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} D_i \vec{\Phi} = 0 \quad (2.38)$$

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} D_i \vec{\Psi} = 0 \quad (2.39)$$

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \vec{F}_{ij} = 0 \quad (2.40)$$

Como ya hemos discutido en la sección 1.4 la condición 2.37 determina una aplicación de S^1 (el infinito en R^2) en G/H . Las aplicaciones que pondremos como condiciones de contorno son:

$$\vec{\Phi}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos n\theta \\ \text{sen } n\theta \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{\Psi} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.41)$$

En 2.41, la carga topológica no debe asociarse con n sino con $n(\text{mod}2)$. En efecto, recordemos que las aplicaciones están clasificadas de acuerdo a $\Pi_1(SU(2)/Z_2) = Z_2$, lo que indica que existe una única clase no trivial.

Las aplicaciones no triviales corresponden en este caso a $n = 2k + 1$ con k entero y son todas topológicamente equivalentes entre sí [67].

Por otra parte es posible demostrar que las aplicaciones con $n = 2k$ son topológicamente equivalentes a la aplicación trivial:

$$\vec{\Phi}_0(\theta) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{\Psi}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.42)$$

Para comprobar este hecho, consideremos por ejemplo la aplicación con $n = 2$

$$\vec{\Phi}_2(\theta) = \begin{pmatrix} \cos 2\theta \\ \text{sen } 2\theta \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{\Psi}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.43)$$

y veamos que puede ser deformada a la configuración trivial 2.42 a través de configuraciones de vacío. En efecto, tal transformación existe y viene dada por la siguiente función $F(\theta, \beta) = (\vec{\Phi}(\theta, \beta), \vec{\Psi}(\theta, \beta))$:

$$\vec{\Phi}(\theta, \beta) = \begin{pmatrix} -1 + (1 + \cos \beta) \cos^2 \theta \\ + (1 + \cos \beta) \text{sen } \theta \cos \theta \\ \text{sen } \beta \cos \theta \end{pmatrix} \quad \vec{\Psi}(\theta, \beta) = \begin{pmatrix} -\text{sen } \beta \cos \theta \\ -\text{sen } \beta \text{sen } \theta \\ \cos \beta \end{pmatrix}$$

para β entre 0 y π y

$$\vec{\Phi}(\theta, \beta) = \begin{pmatrix} \cos \beta \\ 0 \\ \text{sen } \beta \end{pmatrix} \quad \vec{\Psi}(\theta, \beta) = \begin{pmatrix} \text{sen } \beta \\ 0 \\ \cos \beta \end{pmatrix} \quad (2.44)$$

si β esta entre π y 2π .

La función $F(\theta, \beta)$ así definida es continua e interpola entre las configuraciones con $n = 2$ y $n = 0$ cuando β recorre los valores de 0 a 2π . Notemos que la interpolación se hace a través de configuraciones de vacío, ya que durante la transformación se satisface :

$$\Phi^2(\theta, \beta) = \Psi^2(\theta, \beta) = 1 \quad (2.45)$$

$$\vec{\Phi}(\theta, \beta) \cdot \vec{\Psi}(\theta, \beta) = 0 \quad (2.46)$$

Para finalizar con la descripción del modelo y de las condiciones de contorno veamos cómo de las condiciones 2.38-2.39 y de las condiciones de contorno 2.41 para los campos de Higgs se deducen las condiciones de contorno para \vec{A}_i . Para ello, observemos que de la condición 2.41 para $\vec{\Psi}$ y de 2.39 se deduce que \vec{A}_i está en la tercera dirección. Usando este último resultado y 2.38 se ve que cuando ρ tiende a infinito:

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \vec{A}_i = -\vec{\Phi} \wedge \partial_i \vec{\Phi} \quad (2.47)$$

es decir que :

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} A_\theta = -\frac{n}{\rho} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.48)$$

2.2.2 Las ecuaciones de Bogomol'nyi para SU(2)

Para la búsqueda de las ecuaciones de Bogomol'nyi para $G=\text{SU}(2)$ procederemos de manera análoga a la sección anterior, es decir acotando la energía y determinando cuáles son las ecuaciones que deben satisfacer los campos para saturar la cota [64].

Como primer paso, señalemos que la energía 2.30 será mínima cuando uno de los campos de Higgs, digamos $\vec{\Psi}$, no juegue ningún rol dinámico, es decir cuando:

$$D_i \vec{\Psi} = 0 \quad (2.49)$$

y cuando ambos campos de Higgs sean perpendiculares:

$$\vec{\Phi} \cdot \vec{\Psi} = 0 \quad (2.50)$$

Esto es así ya que $D_i \vec{\Psi}$ y $\vec{\Phi} \cdot \vec{\Psi}$ aparecen como términos definidos positivos en la energía 2.30 y por lo tanto ésta está acotada por:

$$E' = \eta^2 \int d^2 y \left[\frac{1}{4} \vec{F}_{ij} \cdot \vec{F}_{ij} + \frac{1}{2} D_i \vec{\Phi} \cdot D_i \vec{\Phi} + \lambda (\Phi^2 - 1)^2 \right]. \quad (2.51)$$

Entonces,

$$E \geq E' \quad (2.52)$$

y el mínimo de E ocurrirá cuando la cota se satura, es decir cuando valen 2.49 y 2.50. Proseguiremos entonces acotando E' bajo estas condiciones.

Es fácil comprobar que E' puede ser rescrita de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} E' = & \eta^2 \int d^2 y \left\{ \frac{1}{4} [\vec{F}_{ij} - a \epsilon_{ij} (\Phi^2 - 1) \vec{\Psi}]^2 + \frac{1}{2(1+b^2)} [D_i \vec{\Phi} \right. \\ & + b \epsilon_{ij} \vec{\Psi} \wedge D_j \vec{\Phi}]^2 + \left(\lambda - \frac{1}{2} a^2 \right) (\Phi^2 - 1)^2 - \frac{1}{2} a \epsilon_{ij} \vec{F}_{ij} \cdot \vec{\Psi} (\Phi^2 - 1) \\ & \left. - \frac{b}{1+b^2} \epsilon_{ij} D_i \vec{\Phi} \cdot (\vec{\Psi} \wedge D_j \vec{\Phi}) + \frac{b^2}{2(1+b^2)} (\vec{\Psi} \cdot D_j \vec{\Phi})^2 \right\} \quad (2.53) \end{aligned}$$

donde a y b son dos constantes arbitrarias. El último término en 2.53 es cero ya que:

$$\vec{\Psi} \cdot D_j \vec{\Phi} = \partial_j (\vec{\Phi} \cdot D_j \vec{\Psi}) - \vec{\Phi} \cdot \vec{\Psi} = 0 \quad (2.54)$$

en virtud de 2.49 y 2.50.

Por otra parte, el anteúltimo término de 2.53 puede describirse de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \epsilon_{ij} D_i \vec{\Phi} \cdot (\vec{\Psi} \wedge D_j \vec{\Phi}) &= \epsilon_{ij} [\vec{\Psi} \cdot D_j (\vec{\Phi} \wedge D_i \vec{\Phi}) + \frac{1}{2} (\Phi^2 \vec{F}_{ij} \cdot \vec{\Psi} \\ & - (\vec{\Phi} \cdot \vec{\Psi}) \vec{F}_{ij} \cdot \vec{\Phi})] \\ &= \epsilon_{ij} [\vec{\Psi} \cdot D_j (\vec{\Phi} \wedge D_i \vec{\Phi}) + \frac{1}{2} \Phi^2 \vec{F}_{ij} \cdot \vec{\Psi}] \quad (2.55) \end{aligned}$$

como consecuencia de la ortogonalidad entre $\vec{\Phi}$ y $\vec{\Psi}$.

Usando 2.54 y 2.55 E' resulta:

$$\begin{aligned} E' = & \eta^2 \int d^2 y \left\{ \frac{1}{4} [\vec{F}_{ij} - a \epsilon_{ij} (\Phi^2 - 1) \vec{\Psi}]^2 + \frac{1}{2(1+b^2)} [D_i \vec{\Phi} + \right. \\ & b \epsilon_{ij} \vec{\Psi} \wedge D_j \vec{\Phi}]^2 + \left(\lambda - \frac{1}{2} a^2 \right) (\Phi^2 - 1)^2 - \frac{1}{2} \left(a + \frac{b}{1+b^2} \right) \epsilon_{ij} \vec{F}_{ij} \cdot \vec{\Psi} \Phi^2 \\ & \left. - \frac{b}{1+b^2} \epsilon_{ij} \vec{\Psi} \cdot D_i (\vec{\Phi} \wedge D_j \vec{\Phi}) + \frac{1}{2} a \epsilon_{ij} \vec{F}_{ij} \cdot \vec{\Psi} \right\}. \quad (2.56) \end{aligned}$$

El anteúltimo término no contribuye a la energía ya que trivialmente puede ser transformado en una integral de superficie que es nula en virtud de las condiciones de contorno. Usando la arbitrariedad de a y b elegimos :

$$a = -\frac{b}{1+b^2} \quad (2.57)$$

y E' puede escribirse entonces en la forma:

$$\begin{aligned} E' = & \eta^2 \int d^2y \left\{ \frac{1}{4} [\vec{F}_{ij} + \frac{b}{1+b^2} \epsilon_{ij} (\Phi^2 - 1) \vec{\Psi}]^2 + \frac{1}{2(1+b^2)} [D_i \vec{\Phi} \right. \\ & + b \epsilon_{ij} \vec{\Psi} \wedge D_j \vec{\Phi}]^2 + \left(\lambda - \frac{1}{2} \frac{b^2}{(1+b^2)^2} \right) (\Phi^2 - 1)^2 \\ & \left. - \frac{1}{2} \frac{b}{1+b^2} \epsilon_{ij} \vec{F}_{ij} \cdot \vec{\Psi} \right\} \quad (2.58) \end{aligned}$$

El último término de 2.58 puede ser relacionado con el flujo magnético del vórtice. En efecto, el tensor de campo electromagnético \mathcal{F}_{ij} puede ser definido proyectando el tensor de campo \vec{F}_{ij} sobre un campo de Higgs [42]:

$$\mathcal{F}_{ij} = \vec{\Psi} \cdot \vec{F}_{ij} \quad (2.59)$$

Notemos que con esta definición \mathcal{F}_{ij} resulta una cantidad invariante de gauge (a diferencia de \vec{F}_{ij} que es covariante de gauge).

El flujo magnético Θ está definido entonces como:

$$\begin{aligned} \Theta &= \frac{1}{2} \int d^2y \epsilon_{ij} \mathcal{F}_{ij} \\ &= \frac{1}{2} \int d^2y \epsilon_{ij} \vec{\Psi} \cdot \vec{F}_{ij} \quad (2.60) \end{aligned}$$

Para calcular Θ basta con elegir un gauge tal que $\epsilon_{ij} \vec{A}_i \wedge \vec{A}_j = 0$. En tal caso,

$$\begin{aligned} \Theta &= \int d^2y \epsilon_{ij} \vec{\Psi} \cdot D_i \vec{A}_j \\ &= \int d^2y \epsilon_{ij} \partial_i (\vec{\Psi} \cdot \vec{A}_j) \\ &= \oint dx_i \vec{\Psi} \cdot \vec{A}_i \\ &= -2\pi n \quad (2.61) \end{aligned}$$

Usando esta expresión para el flujo magnético, la energía E' resulta entonces:

$$\begin{aligned}
 E' = & \eta^2 \int d^2y \left\{ \frac{1}{4} [\vec{F}_{ij} + \frac{b}{1+b^2} \epsilon_{ij} (\Phi^2 - 1) \vec{\Psi}]^2 + \frac{1}{2(1+b^2)} [D_i \vec{\Phi} \right. \\
 & \left. + b \epsilon_{ij} \vec{\Psi} \wedge D_j \vec{\Phi}]^2 + \left(\lambda - \frac{1}{2} \frac{b^2}{(1+b^2)^2} \right) (\Phi^2 - 1)^2 \right\} \\
 & + \frac{b}{1+b^2} \eta^2 2n\pi
 \end{aligned} \tag{2.62}$$

Elegiremos ahora b de manera que el tercer término en E sea siempre positivo o nulo. Esto se logra eligiendo los siguientes valores para b :

$$\begin{aligned}
 |b| &= 1 & \text{si } \lambda \geq \frac{1}{8} \\
 \frac{b^2}{2(1+b^2)^2} &= \lambda & \text{si } \lambda \leq \frac{1}{8}
 \end{aligned} \tag{2.63}$$

De esta manera E está acotada por el último término de 2.62:

$$\begin{aligned}
 E &\geq \mp \eta^2 \pi n & \text{si } \lambda \geq \frac{1}{8} \\
 E &\geq \mp \sqrt{2\lambda} \eta^2 2\pi n & \text{si } \lambda \leq \frac{1}{8}
 \end{aligned} \tag{2.64}$$

y la cota se satura cuando valen las siguientes ecuaciones:

$$\vec{F}_{ij} + \frac{b}{1+b^2} \epsilon_{ij} (1 - \Phi^2) \vec{\Psi} = 0 \tag{2.65}$$

$$D_i \vec{\Phi} + b \epsilon_{ij} \vec{\Psi} \wedge D_j \vec{\Phi} = 0 \tag{2.66}$$

donde en 2.65 y 2.66 debemos expresar b en función de λ de acuerdo con 2.63.

En este punto, parecería que hemos encontrado las ecuaciones de Bogomol'nyi de la energía E para cualquier valor de λ . Sin embargo es fácil comprobar que la ecuaciones 2.65 y 2.66 son incompatibles a menos que

$$b = \pm 1 \tag{2.67}$$

es decir,

$$\lambda = \frac{1}{8} \tag{2.68}$$

Por lo tanto las ecuaciones de Bogomol'nyi del modelo descrito por la energía E están representadas por el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden:

$$\vec{F}_{ij} \pm \frac{1}{2} \epsilon_{ij} (1 - \Phi^2) \vec{\Psi} = 0 \quad (2.69)$$

$$D_i \vec{\Phi} \pm \epsilon_{ij} \vec{\Psi} \wedge D_j \vec{\Phi} = 0 \quad (2.70)$$

$$D_i \vec{\Psi} = 0 \quad (2.71)$$

donde el signo positivo (negativo) corresponde a n positivo (negativo).

La energía, para las configuraciones que satisfacen 2.69-2.71 es

$$E = \eta^2 \pi |n| \quad (2.72)$$

Notemos que como sucede en el caso Abeliano, la energía es proporcional al flujo magnético. Sin embargo observemos aquí que para este modelo el flujo magnético *no* es un número topológico. Por lo que hemos indicado en las secciones precedentes la carga topológica se conserva *modulo* 2. Vemos así que las soluciones más estables diferentes del vacío son las que corresponden a $n = 1$ y $n = -1$, vórtice y antivórtice respectivamente.

En lo que concierne a las soluciones de 2.69-2.71, notemos que el siguiente *ansatz*:

$$\vec{\Phi}(\rho, \theta) = f(\rho) \begin{pmatrix} \cos n\theta \\ \sin n\theta \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{\Psi} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.73)$$

$$A_\theta(\rho) = \frac{a(\rho)n}{n\rho} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.74)$$

con $a(\infty) = f(\infty) = 1$ y $a(0) = f(0) = 0$ reduce las ecuaciones 2.69-2.71 a las ecuaciones de Bogomol'nyi del modelo Abeliano de Higgs 2.24-2.25 para las cuales se conoce una solución [30].

Capítulo 3

El sistema de Chern-Simons-Higgs

En los capítulos 1 y 2 hemos discutido las propiedades globales de las soluciones clásicas del modelo de Higgs mostrando que existen soluciones con flujo magnético cuantificado, como consecuencia de las propiedades topológicas del modelo.

Los vórtices que hemos descrito son vórtices magnéticos eléctricamente neutros. Naturalmente, se plantea la pregunta de si es posible, tal cual ocurre para el caso de los monopolos [38], encontrar generalizaciones cargadas de los vórtices del modelo de Higgs. Fue demostrado en las referencias [38] y [39] que es imposible obtener soluciones cargadas con energía finita.

La situación es radicalmente diferente cuando se agrega al Lagrangiano del modelo de Higgs, considerado como un modelo en $d = 2 + 1$, un término de Chern-Simons [40], [41]. En efecto, los vórtices de este modelo son necesariamente portadores de carga eléctrica [42]-[44].

El interés en los modelos con término de Chern-Simons se ha intensificado en los últimos años en el marco del estudio de teorías que presentan estadística fraccionaria [75]. En efecto, Wilczek observó en 1982 [76] que los compuestos formados por tubos de flujo y carga eléctrica tienen estadística fraccionaria que interpola entre bosones y fermiones. Los modelos con término de Chern-Simons constituyen una realización de esta idea para una teoría de campos.

En muchas de las aplicaciones de estos modelos (por ejemplo en el do-

minio de la materia condensada) resulta de interés considerar el límite de bajas energías de estas teorías, en el cual el término de energía cinética de los campos de gauge se vuelve irrelevante frente al término de Chern-Simons. En este contexto, Hong *et al.* [48] e independientemente Jackiw y Weinberg [49] estudiaron recientemente el modelo Abeliiano de Chern Simons Higgs (es decir el modelo de campos escalares acoplados mínimamente a un campo de gauge cuya dinámica está gobernada solamente por el término de Chern-Simons) mostrando que para una forma particular del potencial el sistema admite ecuaciones de movimiento tipo Bogomol'nyi.

En este capítulo presentaremos otro de los aportes originales de esta tesis, que consiste en el estudio del modelo no Abeliiano de Chern-Simons-Higgs presentando así mismo las correspondientes ecuaciones de Bogomol'nyi [65].

El capítulo está organizado de la siguiente manera: En la sección 3.1 introduciremos el término de Chern-Simons discutiendo algunas de sus propiedades; en la sección 3.2 presentaremos un modelo sencillo con el fin de ilustrar la relación entre el término de Chern Simons, la carga eléctrica y la estadística fraccionaria. Finalmente, en la sección 3.3, discutiremos el modelo no Abeliiano de Chern-Simons-Higgs y presentaremos las ecuaciones de Bogomol'nyi asociadas.

3.1 El término de Chern-Simons

La dinámica del campo de gauge A_μ , en cualquier número de dimensiones del espacio tiempo, puede ser gobernada por la siguiente densidad Lagrangiana de Yang y Mills:

$$L_{YM} = -Tr \frac{1}{2} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} . \quad (3.1)$$

Sin embargo, en tres dimensiones del espacio tiempo disponemos de otra estructura que puede suplementar e incluso reemplazar 3.1, el término de Chern-Simons [40], [41], [77]:

$$L_{CS} = -\mu \epsilon^{\alpha\beta\gamma} Tr (\partial_\alpha A_\beta A_\gamma + \frac{2}{3} e A_\alpha A_\beta A_\gamma) \quad (3.2)$$

donde μ tiene dimensiones de masa.

Originariamente, L_{CS} fue adicionado al término cinético usual 3.1 proveyendo una "masa topológica" a las excitaciones de la teoría.

En efecto, consideremos las ecuaciones de movimiento correspondientes a $L = L_{YM} + L_{CS}$:

$$D_\mu F^{\mu\nu} + \frac{\mu}{2} \epsilon^{\nu\alpha\beta} F_{\alpha\beta} = 0 . \quad (3.3)$$

Usando la identidad de Ricci:

$$[D_\alpha, D_\beta] = F_{\alpha\beta} \quad (3.4)$$

la ecuación 3.3 se puede escribir de la siguiente manera:

$$(D_\alpha D^\alpha + \mu^2) \tilde{F}_\mu = \epsilon_{\mu\nu\alpha} [\tilde{F}^\alpha, \tilde{F}^\beta] \quad (3.5)$$

donde

$$\tilde{F}_\mu = \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\alpha\beta} F^{\alpha\beta} . \quad (3.6)$$

En la aproximación lineal, el término de la derecha de 3.5 desaparece y la naturaleza masiva de las excitaciones resulta inmediata.

Analicemos ahora las propiedades de transformación del Lagrangiano ante un cambio de gauge:

$$A_\mu \rightarrow g^{-1} A_\mu g + g^{-1} \partial_\mu g . \quad (3.7)$$

Si bien el Lagrangiano de Yang y Mills L_{YM} resulta invariante, L_{CS} se transforma de la siguiente manera:

$$L_{CS} \rightarrow L_{CS} + \mu \epsilon^{\alpha\beta\gamma} \partial_\alpha \text{Tr} (\partial_\beta g g^{-1} A_\gamma) + 8\pi^2 \mu \omega(g) \quad (3.8)$$

donde,

$$\omega(g) = \frac{1}{24\pi^2} \epsilon^{\alpha\beta\gamma} \text{Tr} (g^{-1} \partial_\alpha g g^{-1} \partial_\beta g g^{-1} \partial_\gamma g) . \quad (3.9)$$

Se puede comprobar que $\omega(g)$, al igual que el segundo término en 3.8, es una derivada total,

$$\omega(g) = \partial_\alpha \omega^\alpha . \quad (3.10)$$

Vemos entonces, que el cambio ante una transformación de gauge de L_{CS} es una derivada total. Pero aún así,

$$S_{CS} = \int d^3x L_{CS} \quad (3.11)$$

no es invariante de gauge. En efecto, supongamos adicionalmente que las únicas transformaciones de gauge permitidas son aquellas que tienden a una constante en infinito. Si bien con esta condición el anteúltimo término de 3.8 se integra a cero, encontramos que la integral del último término es proporcional al número de enrollamientos (*winding number*) $W(g)$ de g :

$$W(g) = \int d^3x \omega(g) = \frac{1}{24\pi^2} \int d^3x \epsilon^{\alpha\beta\gamma} \text{Tr} (g^{-1} \partial_\alpha g g^{-1} \partial_\beta g g^{-1} \partial_\gamma g) . \quad (3.12)$$

El requerir que las transformaciones de gauge tiendan a una constante en infinito significa que debemos considerar a $g(x)$, no como a una transformación de $R^3 \rightarrow G$ sino como a una transformación de $S^3 \rightarrow G$. De una manera análoga a la que discutimos las aplicaciones de $S^1 \rightarrow Y$ en la sección 1.2, podemos concluir que las aplicaciones de $S^3 \rightarrow G$ están clasificadas en clases de homotopía. Este conjunto es denotado como $\Pi_3(G)$.

Puede demostrarse que si G es compacto y no Abelianiano entonces:

$$\Pi_3(G) = Z \quad (3.13)$$

y que 3.12 es la expresión del número de enrollamiento,

$$W(g) = m \quad m \in Z . \quad (3.14)$$

De esta manera, ante una transformación de gauge encontramos que:

$$S_{CS}[A^g] = S_{CS}[A] + 8\pi^2 \mu W(g) . \quad (3.15)$$

Vemos así que S_{CS} no es invariante de gauge. Sin embargo, para la invarianza de gauge de la integral funcional que define la función de partición de la teoría cuántica de campos asociada, no es necesaria la invarianza de S_{CS} sino que es suficiente que:

$$\exp i S_{CS}[A^g] = \exp i S_{CS}[A] . \quad (3.16)$$

Esta condición puede ser satisfecha si el último término en 3.15 es un múltiplo entero de 2π , es decir si:

$$\mu = \frac{e^2}{4\pi} W(g) = \frac{e^2}{4\pi} m . \quad (3.17)$$

Encontramos así que el requisito de invarianza de gauge resulta en la cuantificación del coeficiente del término Chern-Simons.

Notemos que para el caso Abeliano

$$L_{CS}^{abel} = -\mu \epsilon^{\alpha\beta\gamma} \partial_\alpha A_\beta A_\gamma \quad (3.18)$$

el número de enrollamientos es nulo,

$$W(g) = 0 \quad (3.19)$$

La teoría Abeliana es entonces, automáticamente invariante de gauge, y el parámetro μ no está restringido a tomar valores discretos.

3.2 El momento angular y el término de Chern-Simons

Consideraremos ahora un sistema de partículas puntuales interactuando con un campo de gauge cuya dinámica está regida por un término de Chern-Simons. Este es un modelo sencillo que ilustra la manera en que la presencia del término de Chern-Simons altera las propiedades usuales del momento angular y de la estadística de las partículas.

Consideremos el modelo descrito por el siguiente Lagrangiano [78]:

$$L = L_{mat} + L_{int} + L_{CS} \quad (3.20)$$

donde

$$L_{mat} = \frac{1}{2} \sum_{p=1}^N m_p \vec{v}_p^2(t) \quad (3.21)$$

$$L_{int} = \sum_{p=1}^N (e_p (\vec{v}_p(t) \cdot \vec{A}(t, \vec{r}_p(t)) - A_0(t, \vec{r}_p(t)))) \quad (3.22)$$

$$= - \int d^2x A_\mu(x) j^\mu(x) \quad (3.23)$$

$$L_{CS} = \frac{\mu}{2} \int d^2x \epsilon_{ij} \dot{A}_i(x) A_j(x) - \mu \int d^2x A_0(x) B(x) \quad (3.24)$$

Estamos considerando N partículas puntuales con coordenadas $\vec{r}_p(t)$, con $p = 1, \dots, N$ y velocidades $\vec{v}_p(t) = \dot{\vec{r}}_p(t)$. Las masas y las cargas son m_p y e_p respectivamente.

La ecuación de Euler y Lagrange para las partículas no es otra cosa que la expresión de la fuerza de Lorentz:

$$m_p \ddot{\vec{v}}_p^i = e_p (E^i(\vec{r}_p) + \epsilon^{ij} v_p^j B(\vec{r}_p)) . \quad (3.25)$$

Por otra parte las ecuaciones de movimiento para los campos son:

$$E^i(x) = \frac{1}{\mu} \epsilon^{ij} j^j(x) \quad (3.26)$$

$$B(x) = -\frac{1}{\mu} \rho(x) . \quad (3.27)$$

A partir de 3.27 vemos que las partículas portadoras de carga son también portadoras de flujo.

Las ecuaciones 3.25-3.27 pueden combinarse en una ecuación de movimiento "cerrada" para las partículas:

$$m_p \ddot{\vec{v}}_p^i = \frac{1}{\mu} \epsilon^{ij} e_p \sum_{p \neq q} e_q (v_q^j - v_p^j) \delta(\vec{r}_p - \vec{r}_q) . \quad (3.28)$$

El Hamiltoniano asociado con 3.20-3.24 es:

$$H = \frac{1}{2} \sum_{p=1}^N m_p \vec{v}_p^2 + \int d^2x A_0(x) (\mu B(x) + \rho(x)) . \quad (3.29)$$

El multiplicador de Lagrange A_0 puede ser puesto a cero (eligiendo el gauge de Weyl) siempre que 3.27 sea impuesto como un vínculo. Vemos así que H se reduce al Hamiltoniano libre:

$$H = \frac{1}{2} \sum_{p=1}^N m_p \vec{v}_p^2 \quad (3.30)$$

A pesar de que el potencial A no aparece explícitamente en 3.30, su presencia modifica el álgebra de conmutadores.

El sistema descrito por 3.20-3.24 es invariante ante traslaciones:

$$\begin{aligned} \delta \vec{r}_p^i &= a^i \\ \delta A_\mu &= -a^i \partial_i A_\mu \end{aligned} \quad (3.31)$$

y ante rotaciones:

$$\begin{aligned}\delta\vec{r}_p^i &= -\epsilon^{ij}\vec{r}_p^j \\ \delta A_0 &= \epsilon^{ij}x^j\partial_i A_0 \\ \delta A_i &= -\epsilon^{jk}x^j\partial_k A_i - \epsilon^{ij}A_j\end{aligned}\quad (3.32)$$

siendo las constantes de movimiento conservadas el momento \vec{P} y el momento angular J respectivamente:

$$\begin{aligned}\vec{P} &= \sum_{p=1}^N(m_p\vec{v}_p + e_p\vec{A}(\vec{r}_p)) + \mu \int d^2x \vec{A}B \\ &= \sum_{p=1}^N \vec{p}_p + \mu \int d^2x \vec{A}B\end{aligned}\quad (3.33)$$

$$\begin{aligned}J &= \sum_{p=1}^N(\vec{r}_p \wedge (m_p\vec{v}_p + e_p\vec{A}(\vec{r}_p))) + \int d^2x (\vec{x} \wedge \vec{A})B \\ &= \sum_{p=1}^N \vec{r}_p \wedge \vec{p}_p + \mu \int d^2x (\vec{x} \wedge \vec{A})B.\end{aligned}\quad (3.34)$$

En el segundo renglón de cada una de las expresiones anteriores hemos introducido el momento canónico definido como:

$$\vec{p}_p = \frac{\partial L}{\partial \vec{v}_p} = m_p\vec{v}_p + e_p\vec{A}(\vec{r}_p). \quad (3.35)$$

El último término en 3.33 y 3.34, proporcional a μ , aparece como consecuencia de haber considerado al campo A_μ como una variable dinámica. Si lo hubiéramos tomado como un campo externo, éste término no aparecería.

Observemos que $\sum_{p=1}^N \vec{r}_p \wedge \vec{p}_p$ posee autovalores enteros cuando es aplicado sobre funciones de onda monovaluadas. Esto es así ya que \vec{p}_p actúa como $-i\nabla$. El segundo término sin embargo, no toma necesariamente valores enteros. En efecto, luego de usar 3.27, éste toma la forma:

$$\mu \int (\vec{x} \wedge \vec{A})B = \frac{Q^2}{4\pi\mu} \quad (3.36)$$

de manera que:

$$J = j + \frac{Q^2}{4\pi\mu} \quad j \in Z. \quad (3.37)$$

Analicemos ahora la estadística de las partículas. Imaginemos que transportamos una de ellas alrededor de la otra, lo que corresponde a un doble intercambio. La función de onda de la partícula de prueba adquirirá, además del factor estadístico convencional, la fase:

$$\exp[iQ \int_C dx^i A_i] \quad (3.38)$$

donde C es una curva sin intersecciones que rodea a la partícula. La fase adquirida ante un único intercambio es la mitad de la anterior. Esto conduce a la definición del factor estadístico:

$$\Delta\vartheta = \frac{1}{2}Q\Theta \quad (3.39)$$

de tal modo que la fase ante un intercambio de partículas es:

$$e^{i\Delta\vartheta} \quad (3.40)$$

Usando la relación 3.27 vemos que:

$$\Delta\vartheta = \frac{1}{2\mu}Q^2 \quad (3.41)$$

de manera que

$$\Delta\vartheta = 2\pi J \quad (3.42)$$

que es la relación usual entre espín y estadística. Vemos así que el término de Chern-Simons altera los valores del momento angular y del factor estadístico preservando la relación usual entre ambos.

3.3 Vórtices cargados y el término de Chern-Simons

Como adelantamos en la introducción, originariamente el término de Chern-Simons fue adicionado al Lagrangiano usual de Yang y Mills de manera de incluir un término de masa en Lagrangiano sin romper explícitamente la simetría ni recurrir al mecanismo de Higgs [40], [41].

Más tarde, L_{CS} fue considerado como el Lagrangiano total para los campos de gauge dando lugar a las teorías que hoy conocemos como "Teorías

de Chern-Simons” [79], [80], [81], [82]. La relación entre estas teorías y la superconductividad a altas temperatura [83], el cálculo de invariantes topológicos [80] y las teorías conformes en dos dimensiones [81] son temas que han sido intensamente discutidos en los últimos años.

La adición del término de Chern-Simons a teorías de gauge espontáneamente rotas también produce efectos interesantes: los vórtices característicos de estas teorías adquieren carga eléctrica [42]-[44], [84]. Este fenómeno es una consecuencia de la relación entre la carga eléctrica Q y el flujo magnético Θ :

$$Q = \mu\Theta \quad (3.43)$$

que, como veremos más adelante, puede ser deducida de la componente temporal de la ecuación de movimiento cuando el término de Chern-Simons está presente.

Esta relación implica que bajo la influencia de un término de Chern-Simons los vórtices poseen carga eléctrica y magnética, fenómeno que como hemos indicado está en la base de la transmutación estadística [75].

Las soluciones de vórtice cargado han sido investigadas para las teorías de gauge espontáneamente rotas vía un potencial cuártico y con un término de Chern-Simons. Estas soluciones fueron estudiadas numéricamente en el límite en el cual el coeficiente de Chern-Simons es pequeño, es decir para el límite en el cual la dinámica del campo de gauge está dominada por el término de Yang y Mills [84].

Naturalmente, se plantea la cuestión de cuál es el comportamiento de las soluciones en el límite opuesto, para el cual la dinámica de los campos de gauge está dominada por el término de Chern-Simons, siendo el Lagrangiano resultante el relevante en superconductividad aniónica [75].

Recientemente, Jatkari y Khare estudiaron este modelo, encontrando que existen soluciones de vórtice cargado. Como consecuencia de la eliminación del término $F_{\mu\nu}^2$ el campo magnético se anula en el centro del vórtice [85].

Más recientemente, Hong *et al.* [48] e independientemente Jackiw y Weinberg [49] estudiaron este modelo pero con un potencial séxtuple encontrando que el sistema admite ecuaciones de Bogomol’nyi para un valor particular de las constantes del potencial.

En la siguiente sección extenderemos los resultados de las referencias [48] y [49] a un modelo no Abelian [65]. Este es otro de los aportes originales de esta tesis.

Las principales diferencias entre los modelos Abeliano y no Abelianos son de naturaleza topológica. Una de estas diferencias, ya discutida en el capítulo 2, radica en que para el modelo no Abelianos solo existen dos clases de vórtices (como consecuencia de que $\Pi_1(G/H) = Z_2$) mientras que para el modelo abeliano existen infinitas clases, asociadas con el conjunto de números enteros Z . La otra diferencia fundamental es que para el modelo no Abelianos, el coeficiente de Chern-Simons está cuantificado, en contraposición a lo que sucede en el modelo Abelianos en el cual este coeficiente puede tomar cualquier valor. Como veremos esta propiedad se traducirá en la cuantificación de la carga eléctrica y del momento angular.

3.3.1 Ecuaciones de Bogomol'nyi para el modelo no Abelianos de Chern-Simons-Higgs

Consideremos el modelo descrito por la siguiente densidad Lagrangiana [65] en $d = 2 + 1$ dimensiones:

$$L = \frac{1}{2} D_\mu \vec{\Phi} D_\mu \vec{\Phi} + \frac{1}{2} D_\mu \vec{\Psi} D_\mu \vec{\Psi} - V[\vec{\Phi}, \vec{\Psi}] + \frac{\mu}{4} \epsilon_{\mu\nu\alpha} [\vec{F}^{\mu\nu} \cdot \vec{A}^\alpha - \frac{e}{3} \vec{A}^\alpha \cdot (\vec{A}^\mu \wedge \vec{A}^\nu)] \quad (3.44)$$

en donde como establecimos antes, la dinámica de los campos de gauge \vec{A}_μ está gobernada por el término de Chern-Simons y el término $F_{\mu\nu}^2$ no está presente. De la misma manera que en el modelo descrito en la sección 2.2, la presencia de dos campos de Higgs en la representación adjunta de $SU(2)$ es necesaria para producir la ruptura total de la simetría vía el potencial $V[\vec{\Phi}, \vec{\Psi}]$ que elegiremos de la siguiente forma:

$$V[\vec{\Phi}, \vec{\Psi}] = V_1[\vec{\Phi}] + V_2[\vec{\Psi}] + g(\vec{\Phi} \cdot \vec{\Psi})^2 \quad (3.45)$$

El último término en 3.45 asegura que $\vec{\Phi}$ y $\vec{\Psi}$ no sean paralelos en el isoespacio.

Las ecuaciones de Euler-Lagrange para el modelo descrito por 3.44 son:

$$\frac{\mu}{2} \epsilon_{\mu\nu\alpha} \vec{F}^{\nu\alpha} = J_\mu = \vec{\Phi} \wedge D_\mu \vec{\Phi} + \vec{\Psi} \wedge D_\mu \vec{\Psi} \quad (3.46)$$

$$D_\mu D^\mu \vec{\Phi} = -\frac{\delta V}{\delta \vec{\Phi}} \quad (3.47)$$

$$D_\mu D^\mu \vec{\Psi} = -\frac{\delta V}{\delta \vec{\Psi}} . \quad (3.48)$$

Notemos que de la componente temporal de la ecuación 3.46 es fácil deducir la relación entre la carga eléctrica y el flujo magnético que hemos anticipado. En efecto, proyectando la componente temporal de 3.46 en la dirección de $\vec{\Psi}$ obtenemos:

$$\frac{\mu}{2} \epsilon^{0ij} \mathcal{F}_{ij} = \sigma \quad (3.49)$$

donde usamos la definición 2.61 del tensor electromagnético y definimos la densidad de carga σ como $\sigma = J^0 \cdot \vec{\Psi}$.

Ya que $B = \frac{1}{2} \epsilon^{0ij} \mathcal{F}_{ij}$ llegamos a que:

$$\mu B = \sigma \quad (3.50)$$

Integrando esta ecuación obtenemos la relación anunciada entre la carga Q y el flujo Θ :

$$Q = \mu \Theta . \quad (3.51)$$

Esta última relación también es válida para el modelo 3.44 más el término de Yang y Mills [42]. Sin embargo, cuando el término de Yang y Mills no está presente vemos que la relación vale *localmente*. La localización de la carga y el flujo es una de las propiedades más notables de las teorías de Chern-Simons-Higgs.

Analicemos ahora las condiciones de contorno para esta teoría. La condición de energía finita (o equivalentemente acción finita) requiere que:

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} V[\Phi, \Psi] = 0 \quad (3.52)$$

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} D_\mu \vec{\Phi} = 0 \quad (3.53)$$

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} D_\mu \vec{\Psi} = 0 . \quad (3.54)$$

Las condiciones 3.52-3.54 son las mismas que 2.58-2.61, a diferencia que aquí ninguna condición sobre $\vec{F}_{\mu\nu}$ es requerida. Sin embargo, la condición:

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \vec{F}_{\mu\nu} = 0 , \quad (3.55)$$

se deduce fácilmente de 3.53 y 3.54. En efecto, derivando covariantemente 3.53 encontramos que:

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} D_\nu D_\mu \vec{\Phi} = 0 \quad (3.56)$$

lo que a su vez implica que:

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \vec{F}_{\mu\nu} \wedge \vec{\Phi} = 0 \quad (3.57)$$

La misma conclusión vale cambiando $\vec{\Phi}$ por $\vec{\Psi}$, es decir:

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \vec{F}_{\mu\nu} \wedge \vec{\Psi} = 0 \quad (3.58)$$

Ya que $\vec{\Phi}$ y $\vec{\Psi}$ no son paralelos, podemos concluir que efectivamente vale la ecuación 3.55.

Vemos entonces que las condiciones de energía finita son las mismas que en el capítulo 2. Esto nos conduce a considerar las siguientes condiciones de contorno:

$$\vec{A}_\varphi = -\frac{n}{e\rho} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{\Phi} = \eta \begin{pmatrix} \cos n\theta \\ \text{sen } n\theta \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{\Psi} = \eta' \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (3.59)$$

Buscaremos ahora una cota para la energía y determinaremos las condiciones que deben satisfacer los campos para saturar esta cota.

La energía de una configuración estática es:

$$E = \int d^2x T_{00} = \int d^2x \left[\frac{e^2}{2} (\vec{A}_\varphi \wedge \vec{\Phi})^2 + \frac{1}{2} (D_i \vec{\Phi})^2 + V_1[\vec{\Phi}] \right] \quad (3.60)$$

En 3.60, por las mismas razones que en la sección 2.2, hemos considerado:

$$D_\mu \vec{\Psi} = 0 \quad (3.61)$$

$$\vec{\Phi} \cdot \vec{\Psi} = 0 \quad (3.62)$$

Como vemos, en la expresión 3.60 para la energía no aparece ninguna referencia explícita al término de Chern-Simons. Esto es una consecuencia de haber expresado la energía como la integral de la componente tiempo-tiempo del tensor de energía impulso:

$$T_{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{g}} \frac{\delta L}{\delta g^{\mu\nu}} = D_\mu \vec{\Phi} D_\nu \vec{\Phi} - g_{\mu\nu} \left(\frac{1}{2} D_\alpha \vec{\Phi} D^\alpha \vec{\Phi} - V_1[\vec{\Phi}] \right) \quad (3.63)$$

Ya que el término de Chern-Simons no depende de la métrica:

$$\frac{\delta L_{CS}}{\delta g^{\mu\nu}} = 0 . \quad (3.64)$$

es natural que no aparezca explícitamente en 3.60. Sin embargo, al usar las ecuaciones de movimiento para eliminar A_0 de 3.60, introduciremos una dependencia explícita en μ . En efecto, la componente temporal de la ecuación para el campo de gauge es:

$$e(\vec{\Phi} \wedge D^0 \vec{\Phi}) = \frac{\mu}{2} \epsilon^{ij} \vec{F}_{ij} \equiv \mu \vec{B} \quad (3.65)$$

que implica necesariamente que:

$$\vec{\Phi} \cdot \vec{B} = 0 . \quad (3.66)$$

También de 3.65 se deduce que:

$$\vec{A}_0 \wedge \vec{\Phi} = \frac{\mu}{e^2 \Phi^2} \vec{B} \wedge \vec{\Phi} \quad (3.67)$$

y por lo tanto encontramos que podemos expresar la energía de la siguiente manera:

$$E = \int d^2x \left[\frac{\mu^2}{2e^2 \Phi^2} B^2 + \frac{1}{2} (D_i \vec{\Phi})^2 + V_1[\Phi] \right] \quad (3.68)$$

Esta expresión puede ser reescrita en la forma:

$$\begin{aligned} E = & \int d^2x \left[\frac{1}{4} (D_i \vec{\Phi} \pm \epsilon_{ij} \check{\Psi} \wedge D_j \vec{\Phi})^2 + \right. \\ & \left. \frac{\mu^2}{2e^2 \Phi^2} (\vec{B} \mp \frac{e^3}{2\mu^2} \Phi^2 (\Phi^2 - \eta^2) \check{\Psi})^2 + \right. \\ & \left. (V_1[\Phi] - \frac{e^4}{8\mu^2} \Phi^2 (\Phi^2 - \eta^2)^2) \mp \frac{e}{2} \eta^2 (\check{\Psi} \cdot \vec{B}) \right] \quad (3.69) \end{aligned}$$

Para pasar de 3.68 a 3.69 hemos usado reiteradamente las ecuaciones 3.61 y 3.62.

Podemos reconocer en el último término de 3.69 el flujo magnético del vórtice:

$$\Theta = \int d^2x \check{\Psi} \cdot \vec{B} = \frac{2\pi n}{e} \quad (3.70)$$

Vemos entonces que si elegimos el potencial de tal manera de anular el anteúltimo término en 3.69,

$$V_1[\Phi] = \frac{e^4}{8\mu^2} \Phi^2 (\Phi^2 - \eta^2)^2 \quad (3.71)$$

la energía resulta acotada

$$E \geq \eta^2 \pi n \quad (3.72)$$

La cota es saturada cuando los campos satisfacen las siguientes ecuaciones de Bogomol'nyi:

$$D_i \vec{\Phi} \pm \epsilon_{ij} \vec{\Psi} \wedge D_j \vec{\Phi} = 0 \quad (3.73)$$

$$\vec{B} \mp \frac{e^3}{2\mu^2} \Phi^2 (\Phi^2 - \eta^2) \vec{\Psi} = 0 \quad (3.74)$$

$$D_i \vec{\Psi} = 0 \quad (3.75)$$

Notemos, que como sucede en el modelo descrito en el capítulo 2, las ecuaciones de Bogomol'nyi valen para una relación particular de las constantes de la teoría. En efecto, en 3.71 hemos expresado las constantes del potencial en función de la constante de acoplamiento de gauge y el coeficiente de Chern-Simons. Es fácil comprobar que esta relación es tal que la masa del mesón vectorial y del campo de Higgs coinciden [49].

Observemos también que como consecuencia de la eliminación del término de Yang y Mills, el campo magnético se anula en el centro del vórtice. El vórtice en vez de tener la forma de un tubo de flujo, es tal que el campo magnético es diferente de cero en un anillo.

Con respecto a las soluciones de las ecuaciones 3.73-3.75, notemos que el siguiente *ansatz*:

$$\vec{A}_\varphi = \frac{1}{e\rho} (a(\rho) - n) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{\Phi} = \eta g(\rho) \begin{pmatrix} \cos n\theta \\ \sin n\theta \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{\Psi} = \eta' \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (3.76)$$

separa la dependencia angular y reduce las ecuaciones 3.73-3.75 al siguiente sistema de ecuaciones ordinarias:

$$g' = \pm \frac{ag}{\rho} \quad (3.77)$$

$$\frac{a'}{\rho} = \pm \frac{e^4 \eta^4}{2\mu^2} g^2 (g^2 - 1) \quad (3.78)$$

Estas ecuaciones son precisamente las ecuaciones del modelo abeliano, estudiadas por Jackiw y Wienberg para las que se conoce una solución numérica [49].

El valor de la carga eléctrica de las soluciones tipo vórtice, resulta de la relación 3.51 y de la expresión relación 3.17 para el coeficiente μ :

$$Q = \frac{1}{2}mne \quad (3.79)$$

Analicemos ahora el momento angular de la configuración 3.76. Como sabemos,

$$J = \int d^2x \epsilon^{ij} x_i T_{0j} = \int d^2x \epsilon^{ij} x_j D_0 \vec{\Phi} \cdot D_j \vec{\Phi} \quad (3.80)$$

expresión que, luego de usar 3.76 y 3.17, se convierte en:

$$J = \frac{mn^2}{4} \quad (3.81)$$

Vemos entonces que, tal como ocurre en el modelo que incluye al término de Yang y Mills [42], el momento angular y la carga resultan cuantificadas a nivel clásico. Esto es así ya que como hemos señalado, el carácter no-Abeliano del grupo implica la cuantificación del coeficiente de Chern-Simons.

Finalizaremos señalando que el parámetro estadístico $\Delta\vartheta$ resulta:

$$\Delta\vartheta = \pi \frac{mn^2}{2} \quad (3.82)$$

de tal manera que

$$\Delta\vartheta = 2\pi J \quad (3.83)$$

Vemos así que para $m = 1$ y $n = 1$, el vórtice tiene carga $Q = \frac{e}{2}$ y momento angular $J = \frac{1}{4}$ y obedece la estadística de Fermi semientera¹.

¹Algunos autores dan el nombre de *semiones* a las partículas que obedecen esta estadística. Ver por ejemplo, A.Zee en la referencia [46].

Capítulo 4

Teorías Topológicas de Campos

Las Teorías Topológicas de Campos fueron recientemente introducidas por Witten [59], [86], [80], como una nueva clase de teorías covariantes generales, es decir, teorías que pueden ser definidas sobre una variedad M sin ninguna determinación *a priori* de la métrica sobre la variedad.

Uno de los ejemplos más conocidos de teorías covariantes es la relatividad general, en la que la métrica es introducida como una variable dinámica. De esta forma, cuando en la formulación funcional de la teoría cuántica se integra sobre todas las métricas posibles en M , se recupera la covarianza.

Para las teorías topológicas la covarianza general es lograda de un modo radicalmente diferente. En todas estas teorías existe una simetría fermiónica Q con la propiedad $Q^2 = 0$. El tensor de energía impulso puede ser escrito como $T_{\alpha\beta} = \{Q, \Lambda_{\alpha\beta}\}$, y como consecuencia de este hecho, la función de partición resulta independiente de la métrica.

La primera teoría de esta clase presentada por Witten fue la teoría topológica de Yang y Mills [59]. Esta teoría brinda la posibilidad de interpretar los invariantes de Donaldson (definidos originariamente a partir del espacio *moduli* asociado con la ecuación de autodualidad de la teoría de Yang y Mills [58]) en términos de funciones de correlación de una teoría de campos.

Inmediatamente después, se presentó una gran variedad de teorías topológicas asociadas con diferentes modelos físicos, como por ejemplo, el modelo sigma topológico [86] y el modelo de gravedad topológica [87].

Notemos que un antecedente de las teorías topológicas es la Chern-Simons. En este modelo la covarianza tiene su origen en que la acción es explícitamente independiente de la métrica. La teoría topológica de Chern Simons ha entrado en un período de renacimiento a partir de los trabajos de Witten [80], [88] en los que se muestra que los valores medios de los lazos (*loops*) de Wilson corresponden a invariantes topológicos asociados con los nudos (los polinomios de Jones [89]) y se señalan además importantes relaciones con las teorías conformes en dos dimensiones.

Mientras que para la teoría de Chern Simons la simetría fermiónica Q es la simetría BRST asociada con la invarianza de gauge usual, el origen de esta simetría no es tan evidente para las otras teorías topológicas. Fue recién a partir de la construcción de Labastida y Pernici [60] y de Baulieu y Singer [61] que Q pudo interpretarse como la carga BRST resultante de fijar el gauge en cierta acción clásica invariante ante una "simetría topológica". En estas construcciones veremos que las ecuaciones de Bogomol'nyi juegan un papel central.

En este capítulo presentaremos algunas de las propiedades fundamentales de las teorías de campos topológicas. En la sección 1 discutiremos los aspectos generales y presentaremos la teoría topológica de Yang y Mills [59], como ejemplo de modelo topológico, postergando para la sección 4.2 el cálculo de los invariantes topológicos asociados con esta teoría. La construcción de teorías topológicas será tratada en el capítulo 6 luego de introducir un método de cuantificación adecuado que nos permita tratar la simetría topológica.

4.1 La Teoría Topológica de Campos de Yang y Mills

La teoría topológica de Yang y Mills presentada por Witten [59] fue inspirada en una conjetura de Atiyah [90] sobre la posibilidad de interpretar la teoría de Donaldson [58] como una generalización relativista de la teoría de Floer [91].

En los trabajos de Donaldson a los que nos estamos refiriendo [58], se estudia la topología de variedades de cuatro dimensiones sin borde vía las ecuaciones autoduales de Yang y Mills encontrándose nuevos invariantes

topológicos.

Por otra parte, Floer [91] estudió un tipo particular de teorías en variedades del tipo $Y \times \mathbb{R}$, con Y una variedad tridimensional, en donde los estados fundamentales del sistema están representados por un grupo finito de invariantes topológicos de Y .

Para extender el trabajo de Donaldson a variedades con borde, es necesario que los invariantes de Donaldson tomen valores en el grupo de Floer del borde de la variedad. Este hecho condujo a Atiyah a suponer que en realidad los invariantes de Donaldson podían ser interpretados a partir de una teoría que fuera una extensión relativista de la teoría de Floer [90].

La teoría de Floer es no relativista debido a la presencia de campos anticonmutantes de espín entero. Esta dificultad es superada en la teoría de Witten como consecuencia de la existencia de una simetría fermiónica del estilo BRST que permitirá identificar los estados físicos eliminando los eventuales estados de norma negativa que pueden aparecer en una teoría con campos anticonmutantes de espín entero.

La acción propuesta por Witten para describir la teoría es [59]:

$$\begin{aligned}
 S = \int_M d^4x \operatorname{tr} & \left[\frac{1}{4} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} + \frac{1}{4} F_{\alpha\beta} \tilde{F}^{\alpha\beta} + \frac{1}{2} \phi D_\alpha D^\alpha \lambda - i\eta D_\alpha \psi^\alpha \right. \\
 & + iD_\alpha \psi_\beta \chi^{\alpha\beta} - \frac{i}{8} \phi [\chi^{\alpha\beta}, \chi_{\alpha\beta}] - \frac{i}{2} \lambda [\psi_\alpha, \psi^\alpha] \\
 & \left. + \frac{i}{2} \phi [\eta, \eta] - \frac{1}{8} [\phi, \lambda]^2 \right] \quad (4.1)
 \end{aligned}$$

donde el carácter Grassman de los campos $\Phi = (A_\alpha, \phi, \lambda, \eta, \psi_\alpha, \chi_{\alpha\beta})$ es $(0, 0, 0, 1, 1, 1)$.

El campo $\chi_{\alpha\beta}$ es un tensor antisimétrico autodual,

$$\chi_{\alpha\beta} = -\chi_{\beta\alpha} = \frac{1}{2} \epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} \chi^{\gamma\delta} \quad (4.2)$$

y $\tilde{F}^{\alpha\beta}$ es el dual de $F_{\alpha\beta}$ definido como:

$$\tilde{F}^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} F_{\gamma\delta} \quad (4.3)$$

No nos preocuparemos aquí en describir la manera de construir la acción 4.1. Simplemente diremos que el contenido de campos está determinado

de manera de agrupar a los campos que aparecen en la teoría de Floer en multipletes de Lorentz. En el capítulo 6 mostraremos que esta acción puede ser obtenida como resultado del proceso de cuantificación de una teoría clásica.

Notemos, sin embargo, que la teoría posee una invarianza fermiónica. En efecto, la acción (1.1) es invariante ante las siguientes transformaciones:

$$\begin{aligned} \delta A_\alpha &= i\epsilon\psi_\alpha & \psi_\alpha &= -\epsilon D_\alpha\phi \\ \delta\eta &= 2i\epsilon\eta & \delta\lambda &= \frac{1}{2}\epsilon[\phi, \lambda] \\ \delta\phi &= 0 & \delta\chi_{\alpha\beta} &= \epsilon(F_{\alpha\beta} + \tilde{F}_{\alpha\beta}) \end{aligned} \quad (4.4)$$

Luego de describir la manera en que esta teoría puede ser obtenida como resultado de cuantificar una acción clásica, veremos que esta simetría fermiónica no es otra cosa que la simetría BRST asociada con la acción cuántica [60], [61].

Además de la simetría fermiónica 4.4, el Lagrangiano 4.1 posee una simetría U(1) siendo la carga de los campos (0,2,-2,-1,1,-1). Veremos que estas cargas corresponden al número de fantasma (*ghost number*)¹.

En lo que concierne al álgebra de la simetría fermiónica es fácil comprobar que:

$$(\delta_{\epsilon_1}\delta_{\epsilon_2} - \delta_{\epsilon_2}\delta_{\epsilon_1})(\Phi) = T_\rho(\Phi) \quad (4.5)$$

con

$$\rho^a = -2i\epsilon_1\epsilon_2\phi^a \quad (4.6)$$

donde $T_\rho(\Phi)$ denota la acción de una transformación de gauge sobre los campos. Observemos que para obtener 4.5 en el caso en que Φ es $\chi^{\alpha\beta}$ es necesario usar las ecuaciones de movimiento.

Basados en la transformación 4.4 definiremos un operador lineal que actúa sobre el espacio de funcionales de los campos de la siguiente manera:

$$-i\epsilon\{Q, \Theta\} \equiv \delta\Theta \quad (4.7)$$

Si nos restringimos a trabajar con operadores invariantes de gauge, es cierto que Q definido por la relación 4.7 es nilpotente, es decir:

$$Q^2 = 0 \quad (4.8)$$

¹Formalmente, el número de ghost puede definirse como el autovalor del operador Q_c , generador de las transformaciones de escala sobre los ghosts $c \rightarrow e^\theta c$ [92].

Vemos así que Q juega el rol de una carga BRST.

Una de las propiedades más notables de la acción 4.1 es que es en si misma un conmutador BRST, es decir:

$$S = \{Q, V\} \quad (4.9)$$

donde V está dado por

$$V = \frac{1}{4} \int d^4x \text{Tr}(F_{\alpha\beta} \chi^{\alpha\beta} + \frac{1}{2} \psi_\alpha D^\alpha \lambda - \frac{1}{4} \eta[\phi, \lambda]) \quad (4.10)$$

Surge inmediatamente de 4.9-4.10 que el tensor de energía impulso también es un conmutador BRST:

$$T_{\alpha\beta} = \{Q, \frac{2}{\sqrt{g}} \frac{\delta V}{\delta g^{\alpha\beta}}\} \quad (4.11)$$

En la sección siguiente, deduciremos de esta propiedad la independencia de la función de partición respecto de la métrica.

4.2 La función de partición y los invariantes topológicos

La función de partición para la teoría descrita por 4.1 está dada por:

$$Z = \int D\Phi \exp(-\frac{S}{e^2}) \quad (4.12)$$

donde $D\Phi$ es la medida de integración:

$$D\Phi = DA_\mu D\phi D\lambda D\eta D\psi_\alpha DX_{\alpha\beta} \quad (4.13)$$

Como es habitual, hemos factoreado en la acción la constante de acoplamiento e .

Una propiedad que nos resultará de gran utilidad en los desarrollos posteriores está referida a la anulación del valor medio de todo operador que pueda escribirse como un conmutador BRST. En efecto, denotemos con $\langle \Theta \rangle$ el valor medio (no normalizado) de una funcional de los campos:

$$\langle \Theta \rangle = \int D\Phi \exp(-\frac{S}{e^2}) \Theta[\Phi] \quad (4.14)$$

y consideremos el siguiente cambio de variables:

$$\Phi' = \epsilon\{Q, \Phi\} + \Phi . \quad (4.15)$$

Si efectuamos este cambio en 4.14, obtenemos:

$$\begin{aligned} \langle \Theta \rangle &= \int D\Phi' \exp\left(-\frac{S}{e^2}\right) \Theta[\Phi'] \\ &= \int D\Phi' \exp\left(-\frac{S}{e^2}\right) (\Theta[\Phi] + \epsilon\{Q, \Theta[\Phi]\}) \end{aligned} \quad (4.16)$$

en donde hemos usado que $S[\Phi] = S[\Phi']$ ya que 4.15 es una simetría de la teoría.

Si además suponemos que la medida es invariante,

$$D\Phi' = D\Phi \quad (4.17)$$

llegamos entonces a que:

$$\langle \Theta \rangle = \int D\Phi \exp\left(-\frac{S}{e^2}\right) (\Theta + \epsilon\{Q, \Theta\}) \quad (4.18)$$

de donde se deduce inmediatamente que el valor medio de $\{Q, \Theta\}$ se anula:

$$\langle \{Q, \Theta\} \rangle = 0 . \quad (4.19)$$

Como corolario de este resultado podemos concluir que si $\{Q, A\} = 0$ entonces,

$$\langle A\{Q, B\} \rangle = \langle \{Q, AB\} \rangle = 0 . \quad (4.20)$$

Llamaremos invariante topológico a todo objeto que resulte independiente de la métrica de la variedad en que definimos la teoría. Estamos ya en condiciones de presentar al primer invariante topológico de la teoría, que es simplemente la función de partición Z . Para comprobar esto debemos demostrar que Z es independiente de la métrica $g_{\alpha\beta}$ definida en M . Para ello, derivamos 4.12 respecto de la métrica,

$$\begin{aligned} \frac{2}{\sqrt{g}} \frac{\delta Z}{\delta g^{\alpha\beta}} &= \int D\Phi \exp\left(-\frac{S}{e^2}\right) \frac{2}{\sqrt{g}} \frac{\delta S}{\delta g^{\alpha\beta}} \\ &= \langle T_{\alpha\beta} \rangle \end{aligned} \quad (4.21)$$

Pero por 4.11, $T_{\alpha\beta}$ es un conmutador BRST, y por lo tanto:

$$\frac{2}{\sqrt{g}} \frac{\delta Z}{\delta g^{\alpha\beta}} = \langle T_{\alpha\beta} \rangle = 0 \quad (4.22)$$

resultado que prueba que Z es un invariante topológico.

Notemos que para la obtención de 4.22 hemos ignorado la posible dependencia de la medida $D\Phi$ con la métrica $g_{\alpha\beta}$ y hemos usado que las variaciones BRST conmutan con las variaciones respecto de la métrica.

En lo que concierne al primer punto, en la referencia [93] fue estudiada la dependencia de la medida con la métrica, notándose que la definición de una medida invariante conduce a la utilización de nuevas variables de integración (las variables de Fujikawa), que se obtienen a partir de las originales multiplicando éstas por algún factor adecuado del determinante de la métrica. Para estas nuevas variables la conmutación entre las variaciones BRST y las variaciones respecto de la métrica deja de ser válida. Sin embargo, existe un cambio de variables tal que es posible recuperar esta propiedad y mostrar que 4.22 sigue siendo válida.

Antes de evaluar Z explícitamente, probaremos otra de las propiedades fundamentales de la teoría: la función de partición Z es independiente de la constante de acoplamiento e . La demostración sigue las mismas líneas que la anterior. En efecto,

$$\begin{aligned} \delta_e Z &= \delta_e \left(-\frac{1}{e^2} \right) \int D\Phi e^{-S} \\ &= \delta_e \left(-\frac{1}{e^2} \right) \langle \{Q, V\} \rangle \\ &= 0 \end{aligned} \quad (4.23)$$

Por lo tanto, para evaluar Z podemos considerar el límite $e^2 \rightarrow 0$, para el que la integral está dominada por los mínimos clásicos.

Para encontrar estos mínimos, notemos que los términos correspondientes al campo de gauge en 4.1 pueden escribirse como [11]:

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{4} \int_M \text{Tr}(F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} + F_{\alpha\beta} \tilde{F}^{\alpha\beta}) \\ &= \frac{1}{8} \int_M \text{Tr}(F_{\alpha\beta} + \tilde{F}_{\alpha\beta})(F^{\alpha\beta} + \tilde{F}^{\alpha\beta}) \end{aligned} \quad (4.24)$$

Este término, semidefinido positivo, es cero si y sólo si

$$F_{\alpha\beta} = -\tilde{F}_{\alpha\beta} \quad (4.25)$$

ésto es, si y sólo si $F_{\alpha\beta}$ es antidual.

Por lo tanto, el cálculo de Z depende de la expansión alrededor de instantones (más precisamente alrededor de antiinstantones).

La existencia de soluciones de esta ecuación depende de la elección de la variedad M y del fibrado E . Las soluciones de la ecuación 4.25 están descritas por el espacio *moduli* \mathcal{M} , el espacio de soluciones módulo transformaciones de gauge, cuya dimensión viene dada en función de las propiedades de M y del fibrado E . Por ejemplo para el caso en el que el grupo de gauge es $SU(2)$ [94], [95]:

$$d(\mathcal{M}) = 8p_1(E) - \frac{3}{2}(\chi(M) + \sigma(M)) \quad (4.26)$$

donde,

$$p_1(E) = \frac{1}{16\pi^2} \int_M \text{Tr} F_{\alpha\beta} \tilde{F}^{\alpha\beta} = \frac{1}{32\pi^2} \int_M \text{Tr} F \wedge F \quad (4.27)$$

es la carga topológica asociada con el instantón, $\chi(M)$ es la característica de Euler y σ es la signatura de M .

Supongamos por el momento que hemos encontrado un instantón $A_\mu^{inst}(x)$. Para estudiar localmente el espacio de soluciones estamos interesados en conocer las variaciones de A_μ tales que $A_\mu^{inst}(x) + \delta A_\mu$ sea también solución de 4.25, es decir aquellos δA_μ que satisfagan:

$$K_{\alpha\beta}^\rho \delta A_\rho \equiv D_\alpha \delta A_\beta - D_\beta \delta A_\alpha + \epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} D^\gamma \delta A^\delta = 0 \quad (4.28)$$

Ya que no estamos interesados en soluciones que sean transformadas de gauge de la original, suplementamos la ecuación anterior con una condición adicional:

$$D_\alpha \delta A^\alpha = 0 \quad (4.29)$$

Llamaremos n al número de soluciones de 4.28 y 4.29, las cuales como dijimos, describen localmente el espacio *moduli* de 4.25, y por lo tanto $n = d(\mathcal{M})$.

Volvamos ahora a la acción 4.1 y notemos que la ecuación de movimiento para el campo $\chi_{\alpha\beta}$ resulta:

$$D_\alpha \psi_\beta - D_\beta \psi_\alpha + \epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} D^\gamma \psi^\delta = 0 \quad (4.30)$$

mientras que la ecuación para el campo η es:

$$D_\alpha \psi^\alpha = 0 \quad (4.31)$$

Vemos entonces que las ecuaciones 4.30-4.31 coinciden con 4.28-4.29 y por lo tanto la cantidad de modos cero fermiónicos coincide con la dimensión del espacio *moduli*.

A partir de esa observación vemos que Z es diferente de cero sólo en el caso en que $d(\mathcal{M})$ se anule.

Como hemos discutido, en el cálculo de Z es suficiente tomar el límite de e^2 pequeño. Para este caso, expandiremos los campos alrededor del mínimo clásico que corresponde a:

$$A_\alpha = A_\alpha^{inst} \quad (4.32)$$

y los demás campos puestos a cero.

La función de partición se reduce entonces a:

$$Z = \int D\Phi \exp\left(-\frac{S'}{e^2}\right) \quad (4.33)$$

siendo S' la parte cuadrática de S ,

$$\begin{aligned} S' &= \int_M (A_\alpha K_{\alpha\nu}^\rho K_{\nu\beta}^\rho A_\beta + \frac{1}{2} \phi D_\alpha D^\alpha \lambda - i\chi_{\alpha\beta} K_{\alpha\beta}^\rho \psi^\rho - i\eta D_\alpha \psi^\alpha) \\ &= \int_M (\Phi_B \nabla_B \Phi_B + \Psi_F D_F \Psi_F) \end{aligned} \quad (4.34)$$

donde por simplicidad hemos denotado con Φ_B el conjunto de campos bosónicos y con Ψ_F el conjunto de campos fermiónicos.

Vemos entonces que la supersimetría relaciona las excitaciones alrededor de la configuración clásica de tal manera que para cada autovalor de D_F

$$iD_F \Psi_F = \lambda \Psi_F \quad (4.35)$$

con $\lambda \neq 0$ hay un correspondiente autovalor de ∇_B ,

$$\nabla_B \Phi_B = \lambda^2 \Phi_B \quad (4.36)$$

Por lo tanto concluimos que:

$$Z[A_\alpha^{inst}] = \frac{\text{Pfaff}(D_F)}{\sqrt{\det(\nabla_B)}} = \pm \prod_i \frac{\lambda_i}{\sqrt{|\lambda_i^2|}} . \quad (4.37)$$

El doble signo que aparece en 4.37 tiene su origen en que el Pfaffiano es la raíz cuadrada del determinante a menos de un signo.

Para determinar el signo del Pfaffiano, elegiremos una configuración particular A_μ^0 y declararemos que:

$$\text{Pfaff}D_F(A_\mu^0) > 0 . \quad (4.38)$$

Una vez hecha esta elección, determinaremos el signo de $\text{Pfaff}(D_F A_\mu)$ eligiendo una interpolación entre A_μ^0 y A_μ por intermedio de una familia de configuraciones A_μ^t y estableciendo que $\text{Pfaff}(D(A_\mu^t))$ cambie de signo cada vez que $D_F(A_\mu^t)$ tenga un autovalor nulo.

Esta asignación no siempre es consistente. Sin embargo, para la teoría que estamos considerando ha sido demostrado que esta asignación no depende de la interpolación [58].

Por lo tanto, una vez que hemos elegido una configuración y hemos declarado que 4.37 es +1, la contribución de un instantón es igual a $(-1)^{n_i}$, donde n_i debe ser determinado de acuerdo con la prescripción anterior.

Encontramos entonces finalmente que:

$$Z = \sum_i (-1)^{n_i} \quad (4.39)$$

que es precisamente el primer invariante topológico introducido por Donaldson.

Analicemos ahora el caso $d(\mathcal{M}) > 0$. Obviamente las integrales funcionales no nulas serán de la forma:

$$\langle \Theta \rangle = \int D\Phi e^{-S\Theta} \quad (4.40)$$

donde Θ sea capaz de absorber los $n = d(\mathcal{M})$ modos cero fermiónicos.

Notemos que 4.40 es un valor medio no normalizado, ya que no tendría sentido normalizar con Z pues ésta se anula como consecuencia de los modos cero fermiónicos.

Determinemos entonces las condiciones que debe satisfacer Θ para que $\langle \Theta \rangle$ sea un invariante topológico.

La variación de 4.40 ante un cambio de la métrica es:

$$\frac{2}{\sqrt{g}} \frac{\delta \langle \Theta \rangle}{\delta g^{\alpha\beta}} = \langle T_{\alpha\beta} \Theta \rangle + \frac{2}{\sqrt{g}} \langle \frac{\delta \Theta}{\delta g^{\alpha\beta}} \rangle . \quad (4.41)$$

Usando 4.20 el primer término de 4.41 es nulo si:

$$\{Q, \Theta\} = 0 \quad (4.42)$$

mientras que el segundo término no contribuye si:

$$\frac{\delta \Theta}{\delta g^{\alpha\beta}} = \{Q, \rho\} . \quad (4.43)$$

Entonces si Θ obedece las condiciones 4.42 y 4.43, $\langle \Theta \rangle$ es un invariante topológico.

Volviendo a las variaciones 4.4, no es difícil encontrar operadores que satisfagan estos criterios. Por ejemplo,

$$W_0(P) = \frac{1}{2} Tr \phi^2(P) \quad (4.44)$$

en donde P denota un punto en la variedad M . Notemos que W_0 tiene número de fantasma $U = 4$.

Podemos definir entonces nuevos invariantes topológicos:

$$\langle \Theta(k) \rangle = \langle W_0(P_1) \dots W_0(P_k) \rangle . \quad (4.45)$$

Por la discusión anterior $\langle \Theta(k) \rangle$ no depende de la métrica en M . Consecuentemente, debe ser independiente de la elección de los puntos P_1, \dots, P_k . Para comprobar ésto explícitamente veamos que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial W_0}{\partial x^\alpha} &= Tr \phi D_\alpha \phi \\ &= i \{Q, Tr \phi \psi_\alpha\} \\ &\equiv i \{Q, W_1\} \end{aligned} \quad (4.46)$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} W_0(P) - W_0(P') &= \int_{P'}^P \frac{\partial W_0}{\partial x^\alpha} dx^\alpha \\ &= i\{Q, \int_{P'}^P W_1\} \end{aligned} \quad (4.47)$$

y entonces

$$\langle (W_0(P) - W_0(P')) \prod_j W_0(P_j) \rangle = \langle \{Q, i \int_{P'}^P W_1 \prod_j W_0(P_j)\} \rangle = 0 . \quad (4.48)$$

Las propiedades claves que hemos usado en esta demostración han sido:

$$\begin{aligned} \{Q, W_0\} &= 0 \\ dW_0 &= \{Q, W_1\} \end{aligned} \quad (4.49)$$

donde W_0 y W_1 son formas diferenciales de grado 0 y 1 respectivamente.

Este proceso tiene una generalización inmediata:

$$\begin{aligned} dW_1 &= i\{Q, W_2\} & dW_2 &= i\{Q, W_3\} \\ dW_3 &= i\{Q, W_4\} & dW_4 &= 0 \end{aligned} \quad (4.50)$$

donde:

$$W_2 = Tr\left(\frac{1}{2}\psi \wedge \psi + i\phi \wedge F\right) \quad (4.51)$$

$$W_3 = iTr(\psi \wedge F) \quad (4.52)$$

$$W_4 = -\frac{1}{2}Tr(F \wedge F) \quad (4.53)$$

Observemos que W_k es una k -forma con número de ghost $U = 4 - k$.

Para poder seguir adelante, daremos ahora la definición de ciclo de homología y clases de homología de una variedad [96].

Sea a_k una k -cadena en M , es decir, una suma formal:

$$a_k = \sum c_i N_i \quad (4.54)$$

donde N_i es una subvariedad k -dimensional de M y c_i son elementos de un grupo. Diremos que a_k pertenece al conjunto de ciclos homología z_k si su borde es cero,

$$z_k = \{a_k : \partial a_k = 0\} . \quad (4.55)$$

Consideremos ahora el conjunto b_k , compuesto por las k -cadenas que son el borde de alguna $(k + 1)$ -cadena:

$$b_k = \{a_k : a_k = \partial a_{k+1}\} . \quad (4.56)$$

Las clases de homología son los elementos del conjunto:

$$H_k = z_k/b_k . \quad (4.57)$$

Estamos ahora en condiciones de definir nuevos invariantes topológicos. Para ello consideremos las siguientes integrales:

$$I(\gamma) = \int_{\gamma} W_k \quad (4.58)$$

donde γ es un ciclo de homología k -dimensional.

Naturalmente, $I(\gamma)$ es invariante BRST ya que:

$$\{Q, I(\gamma)\} = \int_{\gamma} \{Q, W_k\} = -i \int_{\gamma} dW_{k-1} = 0 . \quad (4.59)$$

Además, de la misma manera en que demostramos que $\langle W_0(P) \rangle$ era independiente de P , podemos demostrar ahora que $\langle I(\gamma) \rangle$ depende sólo de la clase de homología de γ . Para ello debemos demostrar que si γ es un borde, $I(\gamma)$ es un conmutador BRST.

Sea γ el borde de β , $\gamma = \partial\beta$. Entonces,

$$I(\gamma) = \int_{\gamma} W_k = \int_{\beta} dW_k = i\{Q, \int_{\beta} W_{k+1}\} . \quad (4.60)$$

Vemos entonces que si γ es trivial en homología, $I(\gamma)$ es trivial en el sentido BRST.

A partir de $I(\gamma)$ podemos definir los invariantes topológicos de la siguiente manera. Sean $\gamma_1, \dots, \gamma_i, \dots, \gamma_r$ ciclos de homología k_i dimensionales tales que

$$\sum_{i=1}^r (4 - k_i) = d(\mathcal{M}) \quad (4.61)$$

entonces

$$\langle I(\gamma_1) \dots I(\gamma_i) \dots I(\gamma_r) \rangle \quad (4.62)$$

es un invariante topológico

En la referencia [59], Witten ha demostrado que estos invariantes pueden ser pensados como formas diferenciales en el espacio *moduli*.

Para ver esto, consideremos el cálculo del valor medio de un operador Θ :

$$\langle \Theta \rangle = \int D\Phi \exp\left(-\frac{L}{e^2}\right)\Theta \quad (4.63)$$

en el límite de e^2 pequeño. En 4.63 Θ tiene número de ghost $U = d(\mathcal{M})$ de manera de ser capaz de absorber los modos ceros fermiónicos.

Luego de integrar los modos no cero, la medida $D\Phi$ se reduce a:

$$d\mu = da_1 \dots da_n d\psi_1 \dots d\psi_n \quad (4.64)$$

donde a_i, ψ_i con $i = 1, \dots, n$ son los n modos cero bosónicos y fermiónicos.

En lo que concierne al operador Θ , el resultado de integrar los modos no cero nos provee de un operador efectivo:

$$\Theta' = \Phi_{i_1 \dots i_n}(a^k)\psi^{i_1} \dots \psi^{i_n} \quad (4.65)$$

En virtud de las propiedades de anticonmutación de los ψ^i , $\Phi_{i_1 \dots i_n}$ es un tensor antisimétrico con n índices, es decir, es una n -forma en la variedad n -dimensional \mathcal{M} . Así:

$$\langle \Theta \rangle = \int da_1 \dots da_n d\psi_1 \dots d\psi_n \Phi_{i_1 \dots i_n} \psi^{i_1} \dots \psi^{i_n} = \int_{\mathcal{M}} \Phi \quad (4.66)$$

En el límite de acoplamiento débil puede ser demostrado que, dados operadores Θ_k , con $U = n_k$ tal que $\sum n_k = n$, si:

$$\Theta = \Theta_1 \dots \Theta_k \quad (4.67)$$

entonces,

$$\Theta' = \Theta'_1 \dots \Theta'_k \quad (4.68)$$

es decir:

$$\Phi = \Phi^{(1)} \wedge \dots \wedge \Phi^{(k)} \quad (4.69)$$

En el cálculo de valores medios esta propiedad significa entonces:

$$\langle \Theta_{\alpha_1} \dots \Theta_{\alpha_n} \rangle = \int_{\mathcal{M}} \Phi^{(\alpha_1)} \wedge \dots \wedge \Phi^{(\alpha_n)} \quad (4.70)$$

En nuestra discusión anterior, los operadores relevantes eran de la forma:

$$I(\gamma) = \int_{\gamma} W_k \quad (4.71)$$

donde los W_k están dados por 4.46,4.51-4.53 y los γ son k -ciclos de homología en M .

Las formas en \mathcal{M} asociadas con $I(\gamma)$ son:

$$\begin{aligned} \Phi^{\gamma} &= \frac{1}{2} \text{Tr} \langle \phi(P) \rangle^2 && \text{si } \gamma \text{ es un 0-ciclo} \\ \Phi^{\gamma} &= \int_{\gamma} \text{Tr}(\langle \phi \rangle \wedge \psi) && \text{si } \gamma \text{ es un 1-ciclo} \\ \Phi^{\gamma} &= \int_{\gamma} \text{Tr}(\frac{1}{2} \psi \wedge \psi + i \langle \phi \rangle \wedge F) && \text{si } \gamma \text{ es un 2-ciclo} \\ \Phi^{\gamma} &= \int_{\gamma} i \text{Tr}(\psi \wedge F) && \text{si } \gamma \text{ es un 3-ciclo} \\ \Phi^{\gamma} &= \int_M -\frac{1}{2} \text{Tr} F \wedge F && \text{si } \gamma \text{ es un 4-ciclo} \end{aligned} \quad (4.72)$$

En las expresiones anteriores $\langle \phi \rangle$ denota el valor medio efectivo de ϕ (es decir el valor medio sobre los modos no cero).

Vemos así que para cada ciclo en M de dimensión k obtenemos un operador con número de ghost $U = 4 - k$ que corresponde a una $(4 - k)$ -forma en \mathcal{M} . Hemos obtenido así el mapeo de Donaldson entre el espacio $H_k(M)$ de k -homología de M y el espacio $H^{4-k}(\mathcal{M})$ de $(4 - k)$ -cohomología de \mathcal{M} .

Capítulo 5

El método de Batalin y Vilkovisky

Como ha sido señalado anteriormente, las teorías topológicas pueden ser obtenidas como resultado de la cuantificación de una teoría clásica que posea una simetría topológica, es decir, que sea invariante ante reparametrizaciones arbitrarias de los campos [60],[61].

Estas teorías no pueden ser cuantificadas usando el procedimiento usual de Faddeev y Popov [97], ya que el álgebra de los generadores de la simetría cierra solamente en la capa de masa, o sea, una vez que se han usado las ecuaciones de movimiento.

Es por este motivo que resulta necesario la utilización de un método de cuantificación más general, como el de Batalin y Vilkovisky [99]-[101]. Esta técnica de cuantificación es el resultado de una serie de generalizaciones del método de Faddeev y Popov que tuvieron origen en la necesidad de clarificar la aparición de acoplamientos cuárticos de ghost al cuantificar la supergravedad [102].

El interés en este método ha crecido últimamente por resultar muy adecuado para la construcción de las teorías topológicas y porque también ha revelado ser de gran utilidad en la incorporación de la covarianza general en teorías de cuerdas [98].

Originariamente, el método de Batalin y Vilkovisky fue desarrollado para resolver el problema de la cuantificación de teorías con álgebras de gauge abiertas pero *irreducibles*, es decir, álgebras generadas por operadores linealmente independientes [99]. Poco tiempo después fue resuelto el prob-

lema que involucra álgebras *reducibles* [100].

El primer caso será tratado en la sección 1 de este capítulo mientras que en la sección 5.2 será tratada la extensión del método al caso de teorías con álgebras de gauge reducibles.

5.1 El método Batalin y Vilkovisky para álgebras irreducibles

Denotemos con $S_{cl}(\phi)$ la acción clásica de la teoría donde con ϕ indicaremos el conjunto de campos originales $\phi = \{\phi_i\}$ con $i = 1, \dots, n = n_+ + n_-$ (n_+ (n_-) es el número de componentes bosónicas (fermiónicas) del campo). Sea ϕ_0 un punto estacionario de S_{cl} y supongamos que en su entorno valgan las siguientes identidades de Noether:

$$\frac{\partial_r S_{cl}}{\partial \phi_i} R_{\alpha_0}^i \equiv 0 \quad \alpha_0 = 1, \dots, m_0 = m_{0+} + m_{0-} \quad (5.1)$$

Los $R_{\alpha_0}^i$ que aparecen aquí son los generadores de las transformaciones de gauge. En efecto, supongamos que S_{cl} sea invariante ante el cambio:

$$\delta \phi^i = R_{\alpha_0}^i(\phi) \delta \theta^{\alpha_0} \quad (5.2)$$

Entonces,

$$S_{cl}[\phi^i + \delta \phi^i] = S_{cl}[\phi^i] \quad (5.3)$$

Desarrollando el lado izquierdo de 5.3 resulta:

$$S_{cl}[\phi^i + \delta \phi^i] = S_{cl}[\phi^i] + \frac{\partial_r S_{cl}}{\partial \phi_i} \delta \phi^i + O((\delta \theta)^2) \quad (5.4)$$

Luego de comparar 5.4 con 5.3 surgen inmediatamente las identidades de Noether 5.1.

La hipótesis de irreducibilidad implica que los $R_{\alpha_0}^i(\phi)|_{\phi_0}$ son independientes, es decir:

$$\text{rango}(R_{\alpha_0}^i(\phi)|_{\phi_0}) = m_0 \quad (5.5)$$

Como resultado de las identidades de Noether 5.1, el Hessiano (la parte cuadrática de S_{cl}) tiene modos cero. En efecto, derivando respecto de los

campos 5.1 y evaluando en el punto estacionario encontramos que:

$$\left. \frac{\partial_r^2 S_{cl}}{\partial \phi_i \partial \phi_j} \right|_{\phi_0} R_{\alpha_0}^i(\phi_0) = 0 \quad (5.6)$$

Vemos así que el Hessiano de la acción clásica tiene m_0 modos cero que corresponden a los generadores de la simetría.

La existencia de estos modos cero implica que la funcional generatriz:

$$Z[J] = \int D\phi \exp \frac{i}{\hbar} (S_{cl} + J[\phi]) \quad (5.7)$$

no está bien definida.

El objetivo del método de Batalin y Vilkovisky consiste en definir $Z[J]$ a partir de los siguientes postulados básicos [99]:

- No degeneración de la acción (es decir, eliminación de los modos cero asociados con la invarianza de gauge)
- Invarianza BRST (que implicará independencia del fijado de gauge)
- Obtención de un límite clásico correcto.

Como resultado del proceso de cuantificación, el conjunto final de campos será mayor que el original (por ejemplo, incluirá los ghosts usuales de Faddeev y Popov). Denotemos con $\Phi = \Phi^A$ el conjunto final de campos, con $A = 1, \dots, N$.

Por cada Φ^A introduzcamos un anticampo, Φ_A^* , con estadística opuesta y definamos la siguiente operación en el espacio de funcionales de Φ^A y Φ_A^* :

$$(X[\Phi, \Phi^*], Y[\Phi, \Phi^*]) = \frac{\partial_r X}{\partial \Phi^A} \frac{\partial_l Y}{\partial \Phi_A^*} - \frac{\partial_r X}{\partial \Phi_A^*} \frac{\partial_l Y}{\partial \Phi^A} \quad (5.8)$$

Llamaremos a esta operación el anticorquete (*antibracket*) de X e Y ya que tiene las propiedades opuestas al corquete de Poisson.

Consideremos ahora la siguiente clase de hipersuperficies:

$$\Sigma : \Phi_A^* = \frac{\partial \Psi(\Phi)}{\partial \Phi^A} \quad A = 1, \dots, N \quad (5.9)$$

donde $\Psi(\Phi)$ es alguna funcional fermiónica, que llamaremos fermión de gauge (el carácter fermiónico se debe a que los anticampos tienen la estadística opuesta a los campos).

Un resultado fundamental de Batalin y Vilkovisky es que la función de partición:

$$Z = \int D\Phi \exp\left\{\frac{i}{\hbar} W[\Phi, \Phi^*]|\Sigma\right\} \quad (5.10)$$

es invariante ante la transformación fermiónica:

$$\delta\Phi = (\Phi, W)|_{\Sigma\mu} \quad (5.11)$$

siempre que $W[\Phi, \Phi^*]$ satisfaga la siguiente ecuación:

$$\frac{1}{2}(W, W) = i\hbar \Delta W \quad (5.12)$$

$$\Delta \equiv \frac{\partial_r}{\partial\Phi^A} \frac{\partial_l}{\partial\Phi_A^*} \quad (5.13)$$

La transformación 5.11 es de hecho la versión más general de las transformaciones BRST. El fermión de gauge $\Psi(\Phi)$ es arbitrario, módulo los requisitos de no degeneración que discutiremos más adelante. Haciendo la transformación:

$$\delta\Phi = (\Phi, W)|_{\Sigma} \frac{i}{\hbar} \delta\Psi(\Phi)|_{\Sigma} \quad (5.14)$$

y usando 5.12 puede demostrarse que:

$$Z_{\Psi} = Z_{\Psi+\delta\Psi} \quad (5.15)$$

lo que muestra la invarianza de Z ante fijado de gauge.

Si expresamos a W como serie de potencias de \hbar :

$$W[\Phi, \Phi^*] = S[\Phi, \Phi^*] + \sum_{p=1}^{\infty} \hbar^p M_p[\Phi, \Phi^*] \quad (5.16)$$

se tiene a partir de 5.12,

$$(S, S) = 0 \quad (5.17)$$

$$(M_1, S) = i \Delta S \quad (5.18)$$

$$(M_p, S) = i \Delta M_{p-1} - \frac{1}{2} \sum_{q=1}^{p-1} (M_q, M_{p-q}) \quad (5.19)$$

Vemos entonces que si $\Delta S = 0$ las ecuaciones 5.17-5.19 admiten una solución con $M_p = 0$, $p \geq 1$. Debemos notar sin embargo, que ΔS no es una cantidad bien definida y debemos elegir necesariamente un esquema de regularización con el fin de dar sentido a esta expresión. En nuestro trabajo supondremos que existe algún marco de regularización para el cual $M_p = 0 \forall p \geq 1$. Una discusión detallada al respecto puede encontrarse en la referencia [103].

Con esta suposición la ecuación 5.12 se reduce a:

$$(S, S) = 0 \quad (5.20)$$

que es conocida como la ecuación maestra (*master equation*) para la acción cuántica.

Sin embargo, notemos que a pesar de tener una ecuación para determinar la acción cuántica, aún no conocemos el contenido de campos de la teoría. Veremos ahora cómo el requisito de no degeneración y la corrección del límite clásico determina la aparición de los campos de ghost del formalismo de Faddeev y Popov.

El problema de la degeneración se resuelve imponiendo condiciones de gauge sobre los campos en la forma de la ecuación 5.9 de tal manera de eliminar la integración sobre los modos cero. Ya que 5.9 representa N condiciones, necesitamos una solución de 5.20 tal que el Hessiano de la acción cuántica no tenga más de N modos cero.

A partir de 5.20, es fácil comprobar que $\partial^2 S$ es nilpotente en el punto estacionario. Siendo $\partial^2 S$ un operador de $2N \times 2N$ (recordemos que S es función de los campos y de los anticampos) el rango de $\partial^2 S$ es $r \leq N$.

Llamaremos solución propia de 5.20 a la solución cuyo Hessiano tenga rango máximo $r = N$ (es decir mínima cantidad de modos cero). Para esta solución entonces, el Hessiano $\partial^2 S$ tiene exactamente N modos cero que serán "eliminados" con una condición del tipo 5.9.

Ya que para la solución propia, rango e imagen del Hessiano coinciden, $\partial^2 S$ no tiene modos cero que no estén incluidos en si mismo (como una columna o una combinación lineal de ellas).

Por otra parte, como consecuencia del requisito de la corrección del límite clásico

$$S[\Phi, \Phi^* = 0] = S_\alpha[\phi_i], \quad (5.21)$$

sabemos que los $R_{\alpha_0}^i$ son modos ceros de $\partial^2 S$. Con el fin de incluir estos modos cero como columnas del Hessiano, es necesario introducir nuevos

campos, $C_0^{\alpha_0}$ con $\alpha_0 = 1, \dots, m$ de tal manera que:

$$\left. \frac{\partial_r \partial_l S[\Phi, \Phi^*]}{\partial C_{0\alpha_0} \partial \phi_i^*} \right|_{\phi^*=0} = R_{\alpha_0}^i(\phi) . \quad (5.22)$$

De esta forma, el contenido mínimo de campos de la teoría resulta:

$$\Phi_{min} = \{\phi^i, C_0^{\alpha_0}\} . \quad (5.23)$$

Los nuevos campos $C_0^{\alpha_0}$ corresponden a los *ghosts* del método de Faddeev y Popov. Notemos que junto con los *ghosts* $C_0^{\alpha_0}$ debemos introducir los anticampos correspondientes $C_{0\alpha_0}^*$ (sin embargo éstos *no* corresponden a los *anitghosts* usuales de Faddeev y Popov).

Batalin y Vilkovisky han mostrado que siempre es posible encontrar una solución propia de la ecuación maestra con número de ghost cero [101], donde la asignación de número de ghost para los campos es:

$$\begin{aligned} gh(\phi^i) &= 0 & gh(\phi_i^*) &= -1 \\ gh(C_0^{\alpha_0}) &= 1 & gh(C_{0\alpha_0}^*) &= -2 \end{aligned} \quad (5.24)$$

Esta solución puede ser encontrada desarrollando $S[\Phi_{min}, \Phi_{min}^*]$ en serie de anticampos:

$$S[\Phi_{min}, \Phi_{min}^*] = \sum_{s=0}^{\infty} \Phi_{A_1}^* \dots \Phi_{A_s}^* S^{A_1 \dots A_s}(\phi, C_0) . \quad (5.25)$$

Las condiciones de contorno 5.21 y 5.22 implican que:

$$S^0(\phi, C) = S_{cl}(\phi) \quad (5.26)$$

$$S^i(\phi, C) = R_{\alpha_0}^i(\phi) C_0^{\alpha_0} \quad (5.27)$$

mientras que para los otro coeficientes obtenemos un conjunto de ecuaciones diferenciales.

Por ejemplo, para $s = 1$:

$$\frac{\partial_r R_{\alpha_0}^i C^{\alpha_0}}{\partial \phi^k} R_{\beta}^k C^{\beta} = -R_{\gamma}^i S^{\gamma}(\phi, C) - 2S^{ik}(\phi, C) \frac{\partial_r S_{cl}}{\partial \phi_k} \quad (5.28)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial_r S^{\gamma}(\phi, C)}{\partial \phi^j} R_{\alpha_0}^j C^{\alpha_0} &= -\frac{\partial_r S^{\gamma}(\phi, C)}{\partial C^{\alpha_0}} S^{\alpha_0}(\phi, C) - \\ & 2S^{\gamma i}(\phi, C) \frac{\partial_r S_{cl}}{\partial \phi^i} \end{aligned} \quad (5.29)$$

Para $s=2$:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial_r S^{ik}(\phi, C)}{\partial \phi^j} R_{\alpha_0}^j C^{\alpha_0} &= -\frac{\partial_r S^{ik}(\phi, C)}{\partial C^\gamma} S^\gamma(\phi, C) - 3S^{ikj}(\phi, C) \frac{\partial_r S_{cl}}{\partial \phi^j} \\
 &+ (-1)^{\epsilon_k} \left[\frac{\partial_r R_{\alpha_0}^i C^{\alpha_0}}{\partial \phi^j} S^{jk}(\phi, C) + R_\mu^i S^{\mu k}(\phi, C) \right] \\
 &- (-1)^{\epsilon_k(\epsilon_k+1)} \left[\frac{\partial_r R_{\alpha_0}^k C^{\alpha_0}}{\partial \phi^j} S^{ji}(\phi, C) \right. \\
 &\left. + R_\mu^k S^{\mu i}(\phi, C) \right] \tag{5.30}
 \end{aligned}$$

La ecuación 5.28 es la expresión general del conmutador de la transformaciones de gauge, mientras que la ecuación 5.29 es la generalización de la identidad de Jacobi. En cambio, la ecuación 5.30 es completamente nueva.

En el caso que los $S^{ik}(\phi, C)$ son cero, se dice que el álgebra es cerrada. Vemos que para este caso, el álgebra de los conmutadores cierra independientemente de las ecuaciones de movimiento.

A partir de $S[\Phi_{min}, \Phi_{min}^*]$ pueden ser construidas nuevas soluciones propias de la ecuación maestra mediante el simple procedimiento de ampliar el conjunto de campos Φ .

En efecto, introduciendo nuevos campos $\bar{C}_0^{\alpha_0}$, $\pi_0^{\alpha_0}$ y sus respectivos anticampos, puede mostrarse fácilmente que:

$$S[\Phi, \Phi^*] = S[\Phi_{min}, \Phi_{min}^*] + \bar{C}_{0\alpha_0}^* \pi^{\alpha_0} \tag{5.31}$$

es una solución propia de 5.20.

La asignación de número de ghost para los nuevos campos es:

$$\begin{aligned}
 gh(\bar{C}_0^{\alpha_0}) &= -1 & gh(\bar{C}_{0\alpha_0}^*) &= 0 \\
 gh(\pi^{\alpha_0}) &= 0 & gh(\pi_{\alpha_0}^*) &= 0
 \end{aligned} \tag{5.32}$$

Esta libertad en la determinación de S resulta de gran utilidad para la construcción del fermión de gauge. Es fácil comprobar que con el conjunto de campos mínimo 5.23 es imposible construir un fermión de gauge de tal manera de satisfacer 5.9. Esto es así ya que los campos del conjunto mínimo tienen número de ghost positivo mientras que sus anticampos tienen número de ghost negativo. Esta dificultad es superada con la introducción de los nuevos campos.

Notemos por otra parte, que si el fermión de gauge no depende de π_α , este campo actúa como un multiplicador de Lagrange. Esto es así ya que la integración sobre π_α genera las condiciones de gauge:

$$\bar{C}_{0\alpha_0}^* = \frac{\partial \Psi(\Phi)}{\partial \bar{C}_0^{\alpha_0}} . \quad (5.33)$$

A modo de ejemplo, aplicaremos el método de Batalin y Vilkovisky a la teoría de Yang y Mills. La acción clásica viene dada para este modelo por:

$$S_{cl} = -\frac{1}{4} \int d^4x \text{Tr} F_{\mu\nu}^2 . \quad (5.34)$$

Como se sabe, la acción 5.34 es invariante ante las transformaciones:

$$\delta A_\mu^a = D_\mu^{ab} \Lambda_b \quad a, b = 1, \dots, \dim G . \quad (5.35)$$

La derivada covariante juega el rol de los generadores $R_{\alpha_0}^i$ una vez que se han identificado los índices (μ, a) con i , y b con α_0

$$\begin{aligned} R_{\alpha_0}^i &\rightarrow D_\mu^{ab} \\ i &\rightarrow (\mu, a) \\ \alpha_0 &\rightarrow b \end{aligned} \quad (5.36)$$

El conjunto mínimo de campos es:

$$\Phi_{min} = \{A_\mu^a, C^b\} . \quad (5.37)$$

La solución de la ecuación maestra es muy simple para este modelo. En efecto, los únicos coeficientes no nulos resultan ser:

$$\begin{aligned} S^i &\rightarrow S_\mu^a = D_\mu^{ad} C^d \\ S^\beta &\rightarrow S^b = -\frac{1}{2} f^{bde} C^d C^e \end{aligned} \quad (5.38)$$

Por lo tanto, la acción cuántica mínima es:

$$S[\Phi_{min}, \Phi_{min}^*] = \text{Tr} \left(-\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^2 + A_\mu^* D_\mu C - \frac{1}{2} C^* [C, C] \right) . \quad (5.39)$$

Por otra parte, la acción que incluye a los antighost y los multiplicadores de Lagrange es :

$$S[\Phi, \Phi^*] = S[\Phi_{min}, \Phi_{min}^*] + \text{Tr} \bar{C} \pi . \quad (5.40)$$

Si elegimos el fermión de gauge de la siguiente forma:

$$\Psi = \text{Tr} \bar{C} F[A] \quad (5.41)$$

con $F^a[A]$ una condición de gauge, notamos que la acción efectiva es

$$S[\Phi, \Phi^*] = \text{Tr} \left[-\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^2 + \bar{C} \left(\frac{\delta F}{\delta A_\mu} D_\mu C \right) + \pi F \right] \quad (5.42)$$

que es el resultado esperado.

Vemos así que los campos \bar{C}^α son los anitghosts de Faddeev-Popov. Notemos por otra parte, que el último término en 5.39 no tiene ningún efecto en la acción 5.42 ya que no hemos puesto ninguna dependencia en C_α en el fermión de gauge. Veremos sin embargo, que este término tiene efectos en el cálculo de las variaciones BRST.

Analicemos entonces la conexión entre el formalismo de Batalin y Vilkovisky y la simetría BRST.

Como ya hemos discutido, la teoría tiene una simetría fermiónica global dada por la expresión 5.11:

$$\delta \Phi^A = (\Phi^A, W)|_{\Sigma\mu} = \frac{\partial_l W}{\partial \Phi_A^*} |_{\Sigma\mu} \quad (5.43)$$

donde μ es el parámetro de la transformación.

Bajo las condiciones en las que estamos trabajando,

$$W = S \quad (5.44)$$

y por lo tanto:

$$\delta \Phi^A = (\Phi^A, S)|_{\Sigma\mu} = \frac{\partial_l S}{\partial \Phi_A^*} \mu \quad (5.45)$$

Vemos así que la acción cuántica S actúa, vía los anticorchetes, como el generador de las transformaciones BRST.

En lo que concierne a la nilpotencia de la transformación es fácil comprobar que:

$$\delta_{\mu_1} \delta_{\mu_2} \Phi^A = \left[\frac{1}{2} (\Phi^A, (S, S)) + \frac{\partial_r \partial_l S[\Phi, \Phi^*]}{\partial \Phi_B^* \partial_A^*} \frac{d_l S_\Sigma[\Phi]}{d \Phi^B} \right] |_{\Sigma\mu_2\mu_1} \quad (5.46)$$

El primer término del lado derecho, es nulo en virtud de la ecuación maestra 5.20. Por lo tanto:

$$\delta_{\mu_1} \delta_{\mu_2} \Phi^A = \left[\frac{\partial_r \partial_l S[\Phi, \Phi^*]}{\partial \Phi_B^* \partial \Phi_A^*} \frac{d_l S_\Sigma[\Phi]}{d\Phi^B} \right] |_{\Sigma \mu_2 \mu_1} . \quad (5.47)$$

Vemos así que la transformación es siempre nilpotente sobre la capa de masa ya que 5.47 es proporcional a la ecuación de movimiento:

$$\frac{dS_\Sigma[\Phi]}{d\Phi^A} = 0 . \quad (5.48)$$

En lo que concierne a la nilpotencia fuera de la capa de masa, ésta se logra sólo si S no contiene términos cuadráticos en los anticampos. Comparando con la ecuación 5.28 vemos que esto es equivalente al requisito de que el álgebra de los generadores sea cerrada.

Para el ejemplo que hemos considerado, las transformaciones BRST son obtenidas derivando la acción $S[\Phi, \Phi^*]$ respecto de los anticampos:

$$\delta A_\mu = D_\mu C_\mu \quad (5.49)$$

$$\delta C = -\frac{1}{2}[C, C]_\mu \quad (5.50)$$

$$\delta \bar{C} = \pi \quad (5.51)$$

$$\delta \pi = 0 \quad (5.52)$$

Vemos así que el último término en 5.39 es el que determina las propiedades de transformación de los ghosts.

5.2 El método de Batalin y Vilkovisky para álgebras reducibles

Analizaremos ahora la extensión del método de la sección anterior al caso de teorías reducibles, es decir para aquellas teorías en las cuales los generadores de las transformaciones de gauge no son linealmente independientes [100]. En consecuencia, la expresión 5.5 no es más válida y tenemos ahora:

$$\text{rango}(R_{\alpha_0}^i)|_{\phi_0} = m_0 - m_1 < m_0 . \quad (5.53)$$

La solución que hemos encontrado en la sección anterior deja de ser propia ante estas circunstancias. Est es así ya que, siendo los $R_{\alpha_0}^i$ linealmente dependientes, el rango del Hessiano es menor que el número de campos:

$$\text{rango}\left(\frac{\partial^2 S}{\partial \Phi^A \partial \Phi_B^*}\right) = \text{rango}\left(\frac{\partial^2 S_{cl}}{\partial \phi^i \partial \phi^j}\right) + 2\text{rango}(R_{\alpha_0}^i) \quad (5.54)$$

$$= n_0 - m_0 + 2(m_0 - m_1) \quad (5.55)$$

$$< n_0 + m_0 \quad (5.56)$$

En virtud de la ecuación 5.53, existen m_1 modos cero de los $R_{\alpha_0}^i$:

$$R_{\alpha_0}^i Z_{\alpha_1}^{\alpha_0} = 0 \quad \alpha_1 = 1, \dots, m_1 \quad (5.57)$$

que son también modos cero del Hessiano, ya que éste contiene a los $R_{\alpha_0}^i$ como filas.

La existencia de modos cero de $R_{\alpha_0}^i$ implica de alguna manera que el ghost $C_{0\alpha_0}$ se ha convertido en un campo de gauge. Esto puede ser comprobado observando que la parte cuadrática del Lagrangiano de ghost:

$$\bar{C}_{0\alpha_0} \left[\frac{\partial_l \partial_r \Psi}{\partial \bar{C}_{0\alpha_0} \partial \phi_i} R_{\beta}^i \right] C^\beta \quad (5.58)$$

es invariante ante transformaciones generadas por $Z_{\alpha_1}^{\alpha_0}$

Las mismas consideraciones que en la sección anterior nos conduce a introducir nuevos campos, los ghosts de ghosts, $C_1^{\alpha_1}$, de manera de incluir a $Z_{\alpha_1}^{\alpha_0}$ como nuevas columnas del Hessiano. Por lo tanto, ampliamos el conjunto de campos mínimos y requerimos además que:

$$\frac{\partial_l \partial_r S[\Phi, \Phi^*]}{\partial C_{0\alpha_0}^* \partial C_{1\alpha_1}} = Z_{\alpha_1}^{\alpha_0} \quad (5.59)$$

Con esta modificación, es fácil comprobar que el rango del Hessiano, iguala a la cantidad de campos y por lo tanto S se ha convertido en una solución propia.

La asignación de número de ghost para el nuevo campo y su anticampo es:

$$gh(C_1^{\alpha_1}) = 2 \quad gh(C_{1\alpha_1}^*) = -3 \quad (5.60)$$

De la misma manera que en la sección anterior, $S[\Phi_{min}, \Phi_{min}^*]$ puede ser desarrollada en potencias de los anticampos. La ecuación maestra 5.20 da origen, nuevamente a relaciones entre los coeficientes del desarrollo pero que ahora contienen términos que incluyen los $Z_{\alpha_1}^{\alpha_0}$.

En lo que concierne al fijado de gauge vía la funcional fermiónica Ψ , el proceso es ligeramente diferente que en la sección anterior, ya que el caso general requiere el tratamiento de condiciones de gauge redundantes. Solamente diremos que, de la misma manera que para teorías irreducibles, existe la libertad de adicionar a la acción cuantica $S[\Phi_{min}, \Phi_{min}^*]$ términos de la forma:

$$\Delta S = \bar{C}^* \pi \quad (5.61)$$

donde \bar{C} jugará el rol de anitghost y π jugará el rol de multiplicador de Lagrange que generará el fijado de gauge:

$$\bar{C}^* = \frac{\partial \Psi}{\partial \bar{C}} = 0 \quad (5.62)$$

Capítulo 6

Ecuaciones de Bogomol'nyi y Teorías Topológicas

En este capítulo presentaremos otro aporte original de esta tesis: la construcción de una teoría topológica a partir de las ecuaciones de Bogomol'nyi del modelo no Abelian de Higgs presentadas en el capítulo 2 [66].

Como adelantamos en el capítulo 4, la simetría fermiónica que caracteriza a la teoría topológica de Witten, puede ser considerada como la simetría BRST correspondiente a la cuantificación de una teoría clásica apropiada. Una de las maneras de comprender esto se basa en la construcción de Labastida y Pernici [60] quienes mostraron que la acción de la teoría topológica de Yang y Mills puede obtenerse como resultado de cuantificar la teoría clásica descrita por la acción

$$S_{cl} = \int d^4x \sqrt{g} \frac{1}{2} \text{Tr} (G_{\mu\nu}^+ - F_{\mu\nu}^+)^2$$

donde $G_{\mu\nu}^+$ es un campo auxiliar autodual y

$$F_{\mu\nu}^+ = \frac{1}{2}(F_{\mu\nu} + \tilde{F}_{\mu\nu}) .$$

Nótese que la ecuación clásica de movimiento de esta acción es:

$$F_{\mu\nu}^+ = G_{\mu\nu}$$

que, con el campo auxiliar puesto a cero, coincide con la ecuación de autodualidad. A partir de la construcción de Labastida y Pernici, otras teorías

topológicas pudieron ser construidas sistemáticamente tomando como punto de partida las ecuaciones de Bogomol'nyi, que juegan el rol de las ecuaciones de autodualidad para estos modelos [104]-[109].

Ya que como veremos, el álgebra de gauge asociada con estos modelos es abierta y reducible, la cuantificación de estos sistemas debe hacerse con el método de Batalin y Vilkovisky que hemos descrito en el capítulo anterior.

Simultáneamente con la aparición del método de Labastida y Pernici, Baulieu y Singer [61] presentaron una manera alternativa de comprender el vínculo entre la simetría BRST y las teorías topológicas mostrando que la acción de Witten es la que resulta de cuantificar la acción clásica

$$S = Q_T = \frac{1}{4} \int d^4x \sqrt{g} \text{Tr} (F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu})$$

donde Q_T es la carga topológica asociada con los instantones. Las ecuaciones de autodualidad aparecen en este esquema como condiciones de gauge para fijar la simetría topológica.

Por otra parte, la construcción de Labstida y Pernici y Baulieu y Singer permitieron establecer importantes puntos de contacto entre la cuantificación estocástica y las teorías topológicas [105], [110]; es precisamente en el marco de la cuantificación estocástica que resulta posible establecer una relación entre ambos esquemas de construcción de teorías topológicas [111] (para un desarrollo completo de este punto consultar la referencia [63])

Presentaremos en primer término la derivación de Labastida y Pernici para la teoría topológica de Yang y Mills. Luego, la sección 2 analizaremos la conexión entre las ecuaciones de Bogomol'nyi y las teorías topológicas y finalmente construiremos la teoría topológica asociada con las ecuaciones de Bogomol'nyi del capítulo 2 [66].

6.1 La construcción de Labastida y Pernici

Consideremos el siguiente Lagrangiano en $d=4$ dimensiones Euclídeas [60]:

$$L = \text{Tr} \left[\frac{1}{4} (F_{\alpha\beta}^+ - G_{\alpha\beta}^+) (F^{+\alpha\beta} - G^{+\alpha\beta}) \right]. \quad (6.1)$$

donde $G_{\alpha\beta}^+$ es un campo auxiliar antisimétrico y autodual.

En 6.1 usamos la notación:

$$A_{\alpha\beta} = A_{\alpha\beta}^+ + A_{\alpha\beta}^- \quad (6.2)$$

$$A_{\alpha\beta}^\pm = \frac{1}{2}(A_{\alpha\beta} \pm \tilde{A}_{\alpha\beta}) \quad (6.3)$$

$$\tilde{A}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}A^{\gamma\delta} \quad (6.4)$$

El Lagrangiano 6.1 es invariante ante las siguientes transformaciones:

$$\delta A_\alpha(x) = \epsilon_\alpha(x) - D_\alpha \epsilon(x) \quad (6.5)$$

$$\delta G_{\alpha\beta} = D_\alpha \epsilon_\beta - D_\beta \epsilon_\alpha + \frac{1}{2}\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}D^\gamma \epsilon^\delta + [\epsilon, G_{\alpha\beta}] \quad (6.6)$$

donde ϵ es un parámetro infinitesimal asociado con las transformaciones de gauge usuales y ϵ_α está asociado con reparametrizaciones arbitrarias del campo A_α . Notemos que las propiedades de transformación del campo auxiliar $G_{\alpha\beta}^+$ han sido determinadas a partir del requisito de invarianza del Lagrangiano ante transformaciones arbitrarias del campo de gauge.

La ecuación de movimiento asociada con el campo $G_{\alpha\beta}^+$ es:

$$G_{\alpha\beta}^+ = F_{\alpha\beta}^+ \quad (6.7)$$

Observemos por otra parte, que eligiendo convenientemente los parámetros en 6.5-6.6 siempre es posible fijar el gauge

$$G_{\alpha\beta}^+ = 0 \quad (6.8)$$

para el que la ecuación de movimiento 6.7 se transforma en la ecuación de autodualidad:

$$F_{\alpha\beta}^+ = 0 \quad (6.9)$$

Analicemos ahora el álgebra de las transformaciones definidas por 6.5-6.6 y veamos que corresponden al caso de álgebras reducibles que hemos discutido en el capítulo anterior. Para comprobar esto, basta mostrar que existe una combinación de parámetros infinitesimales para los que las transformaciones asociadas no tienen ningún efecto en 6.5-6.6.

Retornando a la notación del capítulo anterior, debemos encontrar modos cero $Z_{\alpha_1}^{\alpha_0}$ tales que

$$\delta\phi^i = R_{\alpha_0}^i Z_{\alpha_1}^{\alpha_0}|_{\phi_0} = 0 \quad (6.10)$$

Con tal fin, elegimos:

$$\epsilon_\alpha = D_\alpha \Lambda \quad (6.11)$$

$$\epsilon = \Lambda \quad (6.12)$$

Insertando estas expresiones en 6.5-6.6 obtenemos:

$$\delta A_\alpha|_{\phi_0} = 0 \quad (6.13)$$

$$\delta G_{\alpha\beta}|_{\phi_0} = [F_{\alpha\beta}^+ - G_{\alpha\beta}, \Lambda]|_{F_{\alpha\beta}^+ - G_{\alpha\beta} = 0} = 0 \quad (6.14)$$

Vemos entonces que $(\Lambda, D_\alpha \Lambda)$ es un modo cero de los generadores del álgebra, lo que indica que ésta es reducible.

Para cuantificar la teoría debemos entonces aplicar el método descrito en la sección 5.2.

Comencemos por identificar el contenido de campos mínimo de la teoría. Este conjunto está constituido por:

a-Los campos originales

$$A_\alpha, G_{\alpha\beta}^+ \quad (6.15)$$

b-Los ghosts asociados con la invarianza 6.5-6.6

$$\epsilon_\alpha \rightarrow \psi_\alpha \quad (6.16)$$

$$\epsilon \rightarrow C \quad (6.17)$$

c-El ghost de ghost asociado con la reducibilidad del álgebra

$$\Lambda \rightarrow \phi \quad (6.18)$$

La asignación de número de ghost para estos campos (y sus respectivos anticampos) es

$$\begin{aligned} \text{gh}(A_\alpha) &= 0 & \text{gh}(A_\alpha^*) &= -1 \\ \text{gh}(G_{\alpha\beta}^+) &= 0 & \text{gh}(G_{\alpha\beta}^{+*}) &= -1 \\ \text{gh}(\psi_\alpha) &= 1 & \text{gh}(\psi_\alpha^*) &= -2 \\ \text{gh}(C) &= 1 & \text{gh}(C^*) &= -2 \\ \text{gh}(\phi) &= 2 & \text{gh}(\phi^*) &= -3 \end{aligned} \quad (6.19)$$

Luego de determinar el conjunto mínimo de campos Φ_{min} debemos encontrar la solución a la ecuación maestra

$$(S[\Phi_{min}, \Phi_{min}^*], S[\Phi_{min}, \Phi_{min}^*]) = 0 \quad (6.20)$$

donde S satisface las condiciones de contorno impuestas por el requisito de un límite clásico correcto:

$$\begin{aligned}
 S(\Phi, 0) &= S_{cl}(\phi) = \int d^4x \sqrt{g} L, \\
 \frac{\partial_l \partial_r S}{\partial A_\alpha^{i*} \partial C^j} \Big|_{\Phi^*=0} &= D_\alpha^{ij}, \\
 \frac{\partial_l \partial_r S}{\partial G_{\alpha\beta}^{i*} \partial C^j} \Big|_{\Phi^*=0} &= -f^{ijk} G_{\alpha\beta}^k, \\
 \frac{\partial_l \partial_r S}{\partial A_\alpha^{i*} \partial \psi_\beta^j} \Big|_{\Phi^*=0} &= -i \delta_{\alpha\beta} \delta^{ij}, \\
 \frac{\partial_l \partial_r S}{\partial G_{\alpha\beta}^{i*} \partial \psi_\gamma^j} \Big|_{\Phi^*=0} &= -i [D_\alpha \delta_{\beta\gamma} - D_\beta \delta_{\alpha\gamma} + \frac{1}{2} \epsilon_{\alpha\beta\sigma\omega} D^\sigma \delta_\gamma^\omega]^{ij}, \\
 \frac{\partial_l \partial_r S}{\partial \psi_\alpha^{i*} \partial \phi^j} \Big|_{\Phi^*=0} &= -(D_\alpha)^{ij}, \\
 \frac{\partial_l \partial_r S}{\partial C^{i*} \partial \phi^j} \Big|_{\Phi^*=0} &= -\delta^{ij}
 \end{aligned} \tag{6.21}$$

La solución de 6.20 puede ser encontrada desarrollando $S[\Phi_{min}, \Phi_{min}^*]$ en serie de anticampos. La solución que satisface las condiciones 6.21 es:

$$\begin{aligned}
 S(\Phi_{min}, \Phi_{min}^*) &= S_{cl} + \int d^4x \sqrt{g} Tr [A_\alpha^* (D^\alpha C - i\psi^\alpha) - \\
 &G_{\alpha\beta}^{+*} (2i D^\alpha \psi^\beta + [C, G_{\alpha\beta}^+]) - \psi_\alpha^* (D^\alpha \phi - \{C, \psi^\alpha\}) - \\
 &C^* (i\phi - \frac{1}{2} [C, C]) - \phi^* [C, \phi] - \\
 &\frac{1}{2} i \{G_{\alpha\beta}^{+*}, G^{+\alpha\beta*}\} \phi].
 \end{aligned} \tag{6.22}$$

La presencia del último término en 6.22, cuadrático en anticampos, es una consecuencia de que el álgebra de las transformaciones es abierta.

Para fijar la invarianza 6.5-6.6 elegiremos el siguiente gauge:

$$G_{\alpha\beta}^+ = 0 \tag{6.23}$$

$$\partial_\alpha A^\alpha = 0 \tag{6.24}$$

Ya que $G_{\alpha\beta}^+$ es autodual, 6.23-6.24 representan cuatro condiciones de gauge. Esto parecería ser contradictorio con el hecho de que en las transformaciones 6.5-6.6 hay cinco parámetros. Sin embargo, éstos parámetros

no son independientes ya que como hemos visto el álgebra es reducible. Las condiciones 6.23-6.24 son por lo tanto, no redundantes¹.

La reducibilidad del álgebra hace que el ghost ψ_α se comporte como un campo de gauge. Para fijar esta "invarianza de la invarianza" impondremos la condición

$$D^\alpha \psi_\alpha = 0 \quad (6.25)$$

Teniendo en cuenta 6.23-6.25 el fermión de gauge queda determinado de la siguiente manera:

$$\Psi(\Phi) = \frac{1}{2} \text{Tr} (\chi^{\alpha\beta} G_{\alpha\beta} + b D^\alpha A_\alpha - \frac{1}{2} \lambda D^\alpha \psi_\alpha) \quad (6.26)$$

donde $\chi^{\alpha\beta}$, b λ son los antighosts correspondientes a las condiciones 6.23-6.25. Notemos que $\chi^{\alpha\beta}$ y b son anticonmutantes mientras que λ es un campo conmutante.

La asignación del número de ghost para los nuevos campos y sus respectivos anticampos es:

$$\begin{aligned} \text{gh}(\chi_{\alpha\beta}) &= -1 & \text{gh}(\chi_{\alpha\beta}^*) &= 0 \\ \text{gh}(b) &= -1 & \text{gh}(b^*) &= 0 \\ \text{gh}(\lambda) &= -2 & \text{gh}(\lambda^*) &= 1 \end{aligned} \quad (6.27)$$

Junto con los antighost introducimos multiplicadores de Lagrange $d_{\alpha\beta}$, d y η de tal modo que:

$$\begin{aligned} \text{gh}(d_{\alpha\beta}) &= 0 & \text{gh}(d_{\alpha\beta}^*) &= -1 \\ \text{gh}(d) &= 0 & \text{gh}(d^*) &= -1 \\ \text{gh}(\eta) &= -1 & \text{gh}(\eta^*) &= 0 \end{aligned} \quad (6.28)$$

De esta forma encontramos la siguiente acción S, dependiente del conjunto de campos ampliado:

$$S[\Phi, \Phi^*] = S[\Phi_{min}, \Phi_{min}^*] + \int d^4x \sqrt{g} \text{Tr} [\chi_{\alpha\beta}^* d^{\alpha\beta} + b^* d - 2i\lambda^* \eta] \quad (6.29)$$

¹En el caso general de teorías reducibles, uno se ve forzado a trabajar con condiciones de gauge redundantes, (es decir con mayor número de condiciones que parametros independientes en la transformación). El tratamiento de este tipo de condiciones requiere la introducción de un extraghost. Para más detalles se puede consultar la referencia [100].

Como hemos explicado en el capítulo anterior, la integración sobre los multiplicadores de Lagrange hace efectivas las condiciones de gauge.

De la misma manera que en la formulación usual de BRST se tiene la libertad de agregar en la acción términos que sean la variación BRST de alguna funcional, en el método de Batalin y Vilkovisky podemos adicionar un término ΔS en 6.29 siempre que $S + \Delta S$ satisfaga la ecuación maestra. La adición de nuevos términos a S no solo cambia la forma de la acción efectiva sino que modifica también las variaciones BRST de los campos.

Con el motivo de identificar la teoría que estamos estudiando con la teoría topológica de Yang y Mills construida por Witten, sumaremos a S la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} \Delta S = & \int d^4x \sqrt{g} \text{Tr} \{ \chi_{\alpha\beta}^* [2(F_{\alpha\beta}^+ - G_{\alpha\beta}) + \{C, \chi_{\alpha\beta}\}] - \lambda^* [C, \lambda] \\ & + \eta^* (\frac{1}{2}[\phi, \lambda] + \{C, \eta\}) \} \end{aligned} \quad (6.30)$$

De esta manera, la acción cuántica resulta:

$$\begin{aligned} S_q = & S(\Phi_{min}, \Phi_{min}^* = \frac{\delta\Psi}{\delta\Phi_{min}}) + \Delta S(\Phi^a, \frac{\delta\Psi}{\delta\Phi^*}) \\ = & \int d^4x \sqrt{g} \text{Tr} [\frac{1}{2}(F_{\alpha\beta}^+ F^{+\alpha\beta} - G_{\alpha\beta}^+ G^{+\alpha\beta}) + iD_\alpha \psi_\beta \chi^{\alpha\beta} \\ & - i\eta D^\alpha \psi_\alpha + \frac{1}{2}\lambda D^\alpha D_\alpha \phi + \frac{1}{2}G_{\alpha\beta}^+ d^{\alpha\beta} - \frac{1}{2}i\lambda\{\psi^\alpha, \psi_\alpha\} - \\ & \frac{1}{8}i\phi\{\chi^{\alpha\beta}, \chi_{\alpha\beta}\} + d\partial^\alpha A_\alpha - ibD^\alpha \psi_\alpha + b\partial^\alpha D_\alpha C] \end{aligned} \quad (6.31)$$

y es invariante ante las siguientes transformaciones BRST:

$$\begin{aligned} \{Q, A_\mu\} &= (i\psi_\mu - D_\mu C) \\ \{Q, \phi\} &= \{C, \phi\} \\ \{Q, \eta\} &= (\frac{1}{2}[\phi, \lambda] + \{C, \eta\}) \\ \{Q, d_{\alpha\beta}\} &= 0 \\ \{Q, \psi_\alpha\} &= (-D_\alpha \phi + \{C, \psi_\alpha\}) \\ \{Q, d\} &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \{Q, C\} &= \left(\frac{1}{2}[C, C] - i\phi\right) \\
 \{Q, b\} &= d \\
 \{Q, \lambda\} &= (2i\eta + [C, \lambda]) \\
 \{Q, \chi_{\alpha\beta}\} &= (d_{\alpha\beta} + 2(F_{\alpha\beta}^+ - G_{\alpha\beta}^+) + \{C, \chi_{\alpha\beta}\}) \\
 \{Q, G_{\alpha\beta}\} &= i(D_{[\alpha}\psi_{\beta]} + \frac{1}{2}\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}D^\gamma\psi^\delta) + \\
 &\quad \frac{1}{2}i[\chi_{\alpha\beta}, \phi] + [C, G_{\alpha\beta}]
 \end{aligned} \tag{6.32}$$

Para obtener la acción en la forma escrita por Witten (ver el capítulo 4), debemos integrar los campos $d_{\alpha\beta}$ y $G_{\alpha\beta}$. Notemos que la integración sobre $d_{\alpha\beta}$ produce una $\delta(G_{\alpha\beta})$. Por lo tanto, podemos ponerlos a cero y la acción S_q resulta entonces:

$$\begin{aligned}
 S_q &= \int d^4x \sqrt{g} \text{Tr} \left[\frac{1}{2}(F_{\alpha\beta}^+ F^{+\alpha\beta}) + iD_\alpha\psi_\beta\chi^{\alpha\beta} \right. \\
 &\quad \left. - i\eta D^\alpha\psi_\alpha + \frac{1}{2}\lambda D^\alpha D_\alpha\phi - \frac{1}{2}i\lambda\{\psi^\alpha, \psi_\alpha\} - \right. \\
 &\quad \left. \frac{1}{8}i\phi\{\chi^{\alpha\beta}, \chi_{\alpha\beta}\} + d\partial^\alpha A_\alpha - ibD^\alpha\psi_\alpha + b\partial^\alpha D_\alpha c \right]
 \end{aligned} \tag{6.33}$$

La correspondiente simetría BRST se obtiene de 6.32 poniendo $G_{\alpha\beta}^+$ y $d_{\alpha\beta}$ a cero.

La teoría descrita por 6.33 es equivalente a la de Witten una vez que la cuantificación BRST asociada a la simetría de gauge usual es llevada a cabo en esta última teoría, salvo por los dos últimos términos en 4.1. Sin embargo estos términos son una variación BRST:

$$\frac{1}{2}\phi[\eta, \eta] - \frac{1}{8}[\phi, \lambda]^2 = \{Q, ([\phi, \lambda]\eta)\} \tag{6.34}$$

y por lo tanto no cambian la física del problema.

Comprobamos así que la teoría topológica de Yang y Mills presentada por Witten puede ser obtenida como el resultado de cuantificar la teoría 6.1 y de eliminar luego los campos auxiliares.

Notemos que las transformaciones BRST definidas por 6.31 son nilpotentes sobre la capa de masa tal como es garantizado por el método de Batalin y Vilkovisky. Cambiando el ΔS podemos obtener una teoría para

la cual, la carga BRST es nilpotente aún fuera de la capa de masa. Con tal fin, elegimos ΔS como:

$$\Delta S = Tr \{(\chi_{\alpha\beta}^* \{C, \chi^{\alpha\beta}\} + d_{\alpha\beta}^* ([d^{\alpha\beta}, C] + [\chi^{\alpha\beta}, \phi]))\} \quad (6.35)$$

El efecto de ΔS resulta en un cambio de la acción cuántica, que toma ahora la forma:

$$\begin{aligned} S_q = & \int d^4x \sqrt{g} Tr \left[\frac{1}{2} (F_{\alpha\beta}^+ - G_{\alpha\beta}^+)^2 + i D_\alpha \psi_\beta \chi^{\alpha\beta} - i \eta D^\alpha \psi_\alpha \right. \\ & + \frac{1}{2} D_\alpha \lambda \{C, \Psi^\alpha\} + \frac{1}{2} \lambda D^\alpha D_\alpha \phi + \frac{1}{2} G_{\alpha\beta}^+ d^{\alpha\beta} - \frac{1}{2} i \lambda \{\psi^\alpha, \psi_\alpha\} - \\ & \left. \frac{1}{8} i \phi \{\chi^{\alpha\beta}, \chi_{\alpha\beta}\} + d \partial^\alpha A_\alpha - i b D^\alpha \psi_\alpha + b \partial^\alpha D_\alpha C \right] \quad (6.36) \end{aligned}$$

También han cambiado las transformaciones BRST de los campos $\chi_{\alpha\beta}$, $d_{\alpha\beta}$, λ y η ya que hemos modificado los términos que involucran a sus anticampos:

$$\{Q, d_{\alpha\beta}\} = [d_{\alpha\beta}, c] + [\chi_{\alpha\beta}, \phi] \quad (6.37)$$

$$\{Q, \chi_{\alpha\beta}\} = d + [\chi_{\alpha\beta}, C] \quad (6.38)$$

$$\{Q, \lambda\} = 2i\eta \quad (6.39)$$

$$\{Q, \eta\} = 0 \quad (6.40)$$

Si integramos ahora el campo auxiliar $G_{\alpha\beta}^+$, S_q se convierte en:

$$\begin{aligned} S_q = & \int d^4x \sqrt{g} Tr \left[\frac{1}{2} (F_{\alpha\beta}^+) d_{\alpha\beta} - \frac{1}{8} d_{\alpha\beta} d^{\alpha\beta} + i D_\alpha \psi_\beta \chi^{\alpha\beta} \right. \\ & - i \eta D^\alpha \psi_\alpha + \frac{1}{2} D_\alpha \lambda \{C, \psi^\alpha\} + \frac{1}{2} \lambda D^\alpha D_\alpha \phi - \frac{1}{2} i \lambda \{\psi^\alpha, \psi_\alpha\} - \\ & \left. \frac{1}{8} i \phi \{\chi^{\alpha\beta}, \chi_{\alpha\beta}\} + d \partial^\alpha A_\alpha - i b D^\alpha \psi_\alpha + b \partial^\alpha D_\alpha C \right] \quad (6.41) \end{aligned}$$

siendo las transformaciones BRST para esta acción:

$$\{Q, A_\mu\} = i\psi_\mu - D_\mu C$$

$$\{Q, \phi\} = \{C, \phi\}$$

$$\{Q, \eta\} = 0$$

$$\{Q, d_{\alpha\beta}\} = [d_{\alpha\beta}, C] + [\chi_{\alpha\beta}, \phi]$$

$$\begin{aligned}
 \{Q, \psi_\alpha\} &= -D_\alpha \psi + \{C, \psi_\alpha\} \\
 \{Q, d\} &= 0 \\
 \{Q, C\} &= \frac{1}{2}[C, C] - i\phi \\
 \{Q, b\} &= d \\
 \{Q, \lambda\} &= 2i\eta \\
 \{Q, \chi_{\alpha\beta}\} &= d_{\alpha\beta} + \{C, \chi_{\alpha\beta}\}
 \end{aligned} \tag{6.42}$$

Es fácil comprobar que las transformaciones 6.42 son nilpotentes fuera de la capa de masa.

Como era de esperar, la acción puede ser escrita como una variación BRST. En efecto:

$$S = \{Q, \frac{1}{8}\chi^{\alpha\beta}(F_{\alpha\beta}^+ + d_{\alpha\beta}) - \frac{1}{2}D^\alpha \psi_\alpha + b\partial^\alpha A_\alpha\} \tag{6.43}$$

de donde resulta la independencia de Z respecto de la métrica y de la constante de acoplamiento.

6.2 Las ecuaciones de Bogomol'nyi y las teorías topológicas

Como vimos en la sección anterior, la teoría topológica de Yang y Mills puede ser obtenida cuantificando la acción clásica:

$$S_{cl} = \int d^4x \sqrt{g} \text{Tr} (G_{\mu\nu}^+ - F_{\mu\nu}^+)^2 \tag{6.44}$$

Luego del proceso de cuantificación, se llega a una la acción cuántica de la forma:

$$S_Q = S_{cl} + S_{gh} + S_{FG} \tag{6.45}$$

Notemos que al eliminar el campo auxiliar, la acción clásica resulta:

$$S_{cl} = \int d^4x \sqrt{g} \frac{1}{2} \text{Tr} (F_{\mu\nu}^+)^2 \tag{6.46}$$

$$= \int d^4x \sqrt{g} \frac{1}{4} (F_{\mu\nu}^2 + F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu}) \tag{6.47}$$

es decir, la acción clásica de la teoría de Yang y Mills más la carga topológica.

Este hecho sugiere inmediatamente la aplicación de la construcción de Labastida y Pernici a otros modelos que admitan ecuaciones de Bogomol'nyi, ya que como vimos, el rasgo distintivo de estas ecuaciones es que al elevarlas al cuadrado, se obtiene la acción más la carga topológica:

$$S = \int d^d x (E(\phi)^2) + Q \quad (6.48)$$

Siguiendo este camino, se han construido teorías topológicas asociadas, por ejemplo, con las ecuaciones de Bogomol'nyi del modelo de Georgi-Glashow [107], del modelo sigma [107], y del modelo Abelian de Higgs bidimensional entre otros [108].

Presentaremos ahora el modelo topológico asociado con las ecuaciones de Bogomol'nyi del modelo no Abelian de Higgs construidas en el capítulo 2. Como resultado tendremos una teoría topológica con simetría de gauge no Abelian espontáneamente rota [66]. Un ejemplo previo en este sentido es el de la teoría topológica asociada con el modelo de Georgi-Glashow [107]. Sin embargo, tal como explicamos en el capítulo 2, el esquema de ruptura de simetría para este modelo es bastante peculiar, ya que es necesario tomar el límite de Prasad y Somerfield [26] en el que no hay acoplamiento $\lambda\phi^4$. Luego, nuestro modelo constituye el primer ejemplo genuino de una teoría topológica asociada a una simetría no Abelian espontáneamente rota.

6.2.1 La teoría topológica de los vórtices no Abelianos

Con el objeto de construir una teoría topológica para los vórtices no Abelianos como lo anunciamos más arriba, consideremos la siguiente acción [66]:

$$S_c = \int d^2 x \sqrt{g} \text{Tr} (|G - E|^2 + |G_\mu - E_\mu|^2 + |H_\mu - F_\mu|^2) \quad (6.49)$$

donde $E = 0$, $E_\mu = 0$ y $H_\mu = 0$ son las ecuaciones de Bogomol'nyi del capítulo 2:

$$E \equiv \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu} F_{\mu\nu} - \psi \text{Tr}(\phi^2 - \phi_0^2) \quad (6.50)$$

$$E_\mu \equiv D_\mu^+ \phi - i[\psi, D_\mu^+ \phi] \quad (6.51)$$

$$F_\mu \equiv D_\mu^+ \psi \quad (6.52)$$

y G , G_μ y H_μ son campos auxiliares. En 6.52,

$$D_\mu^+ = \frac{1}{2}(D_\mu + i\epsilon_{\mu\nu}D_\nu). \quad (6.53)$$

La acción 6.49 es invariante ante el siguiente conjunto de transformaciones infinitesimales:

$$\delta A_\mu = \epsilon_\mu - D_\mu\omega \quad (6.54)$$

$$\delta\phi = \lambda - [\phi, \omega] \quad (6.55)$$

$$\delta\psi = \eta - [\psi, \omega] \quad (6.56)$$

$$\delta G = \epsilon_{\rho\mu}D_\rho\epsilon_\mu - 2\psi\text{Tr}(\phi\lambda) - \psi\text{Tr}(\phi^2 - \phi_0^2) - [G, \omega] \quad (6.57)$$

$$\delta G_\mu = (\delta_{\mu\nu} + i\epsilon_{\mu\nu})(-[\phi, \epsilon_\nu] - \epsilon_{\nu\rho}[\psi, [\phi, \epsilon_\rho]] + D_\nu\lambda) \quad (6.58)$$

$$+ \epsilon_{\nu\rho}[\psi, D_\rho\lambda] - \epsilon_{\nu\rho}[D_\rho\phi, \eta]) - [G_\mu, \omega] \quad (6.59)$$

$$\delta H_\mu = (\delta_{\mu\nu} + i\epsilon_{\mu\nu})(-[\psi, \epsilon_\nu] + D_\nu\eta) - [H_\nu, \omega] \quad (6.60)$$

Las leyes de transformación básicas son las dadas por 6.54-6.56, y están suplementadas con las leyes de transformación de los campos auxiliares (determinadas a partir del requisito de invarianza de la acción clásica). En 6.54-6.56, ω es un parámetro asociado con las transformaciones de gauge usuales mientras que ϵ_μ , λ y η corresponden a variaciones arbitrarias de los campos A_μ , ϕ y ψ respectivamente.

Las transformaciones anteriores son tales que podemos elegir un gauge en el cual los campos auxiliares se anulen. En este caso las ecuaciones clásicas de la teoría resultan ser las ecuaciones de Bogomol'nyi.

En lo que concierne al álgebra de las transformaciones, se puede comprobar que es reducible. De la misma manera que en el caso de la sección anterior, la reducibilidad del álgebra se prueba mostrando que existe una elección de parámetros tales que la transformación asociada no tiene ningún efecto en las transformaciones 6.54-6.60. Esta combinación de parámetros está dada por:

$$\epsilon_\mu = D_\mu\Lambda \quad (6.61)$$

$$\omega = \lambda \quad (6.62)$$

$$\lambda = -[\Lambda, \phi] \quad (6.63)$$

$$\eta = -[\Lambda, \psi] \quad (6.64)$$

En vista de este hecho, procederemos a cuantificar la teoría usando el método de Batalin y Vilkovisky. Para ello comenzamos adicionando al conjunto de campos iniciales, los ghosts asociado con la invarianza 6.54-6.60:

$$\epsilon_\mu \rightarrow \psi_\mu \quad (6.65)$$

$$\omega \rightarrow C \quad (6.66)$$

$$\lambda \rightarrow \rho \quad (6.67)$$

$$\eta \rightarrow \xi \quad (6.68)$$

y sus respectivos anticampos. El número de ghost para los campos en 6.65-6.68 es 1 mientras que para sus anticampos es -2. Además de estos campos, debemos incluir en el conjunto mínimo, al ghost de ghost asociado con la reducibilidad del álgebra:

$$\Lambda \rightarrow \sigma \quad (6.69)$$

con número de ghost 2 y su anticampo, con número de ghost -3. Con estos campos en el conjunto mínimo, podemos construir entonces la solución de la ecuación maestra que satisface las condiciones de contorno impuestas por el requisito de corrección del límite clásico.

Para fijar el gauge, elegiremos las siguientes condiciones:

$$G = 0 \quad (6.70)$$

$$G_\mu = 0 \quad (6.71)$$

$$H_\mu = 0 \quad (6.72)$$

$$\partial_\mu A_\mu = 0 \quad (6.73)$$

$$D_\mu \psi_\mu = 0 \quad (6.74)$$

Estas condiciones son implementadas a través del fermión de gauge:

$$\Psi = XG + X_\mu G_\mu + \tau_\mu H_\mu + \bar{C} \partial_\mu A_\mu + \bar{\sigma} D_\mu \psi_\mu \quad (6.75)$$

Aquí hemos introducido los antighosts X , X_μ , τ_μ (con número de ghost -1), y $\bar{\sigma}$ (con número de ghost -2). Junto con estos campos debemos introducir multiplicadores de Lagrange d , d_μ , e_μ y a , asociados con las condiciones 6.70-6.73 (con número de ghosts 0), y el multiplicador b , asociado con la condición 6.74, con número de ghost -1.

Estos campos y sus correspondientes anticampos son usados para construir un nuevo término ΔS que es sumado a la acción mínima de tal manera que la acción completa continúe siendo solución de la ecuación maestra:

$$S[\Phi, \Phi^*] = S[\Phi_{min}, \Phi^*] + \Delta S[\Phi, \Phi^*] \quad (6.76)$$

$$\begin{aligned} \Delta S = \int d^2x \sqrt{g} Tr \{ & \bar{C}^* a + \bar{\sigma}^* b + X^*(d - [X, C]) + X_\mu^*(d^\mu - [X^\mu, C]) \\ & + \tau_\mu^*(e^\mu - [\tau^\mu, C]) - d^*([d, C] + [X, \sigma]) \\ & - d_\mu^*([d^\mu, C] + [X^\mu, \sigma]) - e^*([e, C] + [\tau, \sigma]) \} \end{aligned} \quad (6.77)$$

Tal como explicamos en las secciones precedentes, la acción cuántica final se obtiene restringiendo los anticampos a la hipersuperficie:

$$\Sigma : \Phi^* = \frac{\partial \Psi}{\partial \Phi} \quad (6.78)$$

Luego de integrar los campos auxiliares G , G_μ y H_μ llegamos a la siguiente expresión para la acción cuántica:

$$\begin{aligned} S_Q = \int d^2x \sqrt{g} Tr \{ & [\frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu} F_{\mu\nu} - \psi Tr(\phi^2 - \phi_0^2)] d - \frac{1}{4} d^2 \\ & + (D_\mu^+ \phi - i[\psi, D_\mu \phi]) d_\mu - \frac{1}{4} d_\mu^2 + (D_\mu \psi) e_\mu - \frac{1}{4} e_\mu^2 \\ & + X[\epsilon_{\rho\mu} D_\rho \psi_\mu - 2\psi Tr(\phi\rho) - \xi Tr(\phi^2 - \phi_0^2)] + \frac{1}{4} [X, X] \sigma \\ & + X_\nu (D_\nu \rho + \epsilon_{\nu\mu} [\phi, D_\mu \rho] - \epsilon_{\nu\mu} [D_\rho \phi, \xi] - [\phi, \psi_\nu] - \epsilon_{\nu\mu} [\psi, [\phi, \psi_\rho]]) \\ & + \frac{1}{4} [X_\mu, X_\mu] \sigma + \tau_\mu (-[\psi, \psi_\mu] + D_\mu \xi) + \frac{1}{4} [\tau_\mu, \tau_\mu] \\ & \sigma + (-\partial_\mu \bar{C} + [\psi_\mu, \sigma])(\psi_\mu - D_\mu C) + (\partial_\mu A_\mu) a + (D_\mu \psi_\mu) b \} \end{aligned} \quad (6.79)$$

La acción cuántica 6.79 resulta invariante ante las siguientes transformaciones BRST:

$$\begin{aligned} \{Q, A_\mu\} &= \psi_\mu - D_\mu C \\ \{Q, \phi\} &= \rho - [\phi, C] \\ \{Q, \psi\} &= \xi - [\psi, C] \\ \{Q, \psi_\mu\} &= -(D_\mu \sigma + [c, \psi_\mu]) \\ \{Q, C\} &= -(\sigma + \frac{1}{2} [C, C]) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \{Q, \rho\} &= -([\phi, \sigma] + [C, \rho]) \\
 \{Q, \xi\} &= -([\psi, \sigma] + [C, \xi]) \\
 \{Q, \sigma\} &= [\sigma, c] \\
 \{Q, \bar{C}\} &= a \\
 \{Q, \bar{\sigma}\} &= b \\
 \{Q, X\} &= (d - [X, C]) \\
 \{Q, X_\mu\} &= d_\mu - [X_\mu, C] \\
 \{Q, \tau_\mu\} &= e_\mu - [\tau_\mu, C] \\
 \{Q, d\} &= [d, C] + [X, \sigma] \\
 \{Q, d_\mu\} &= [d_\mu, C] + [X_\mu, \sigma] \\
 \{Q, e_\mu\} &= [e_\mu, C] + [\tau_\mu, \sigma]
 \end{aligned} \tag{6.80}$$

Es de notar que las transformaciones 6.80 son nilpotentes aún fuera de la capa de masa.

Notemos ahora que la acción 6.79 puede ser escrita como la variación BRST de una funcional V ,

$$S_Q = \{Q, V\} \tag{6.81}$$

con V dado por:

$$\begin{aligned}
 V &= \int d^2x \sqrt{g} \text{Tr} \{X[\frac{1}{4}d - \epsilon_{\mu\nu}F_{\mu\nu} - \psi \text{Tr}(\phi^2 - \phi_0^2)] \\
 &\quad + X_\mu(\frac{1}{4}d_\mu - D_\mu^+ \phi + i[\psi, D_\mu^+ \phi]) + \tau_\mu(\frac{1}{4}e_\mu - D_\mu^+ \psi) \\
 &\quad - \bar{C}\partial_\mu A_\mu - \bar{\sigma}D_\mu \psi_\mu\}
 \end{aligned} \tag{6.82}$$

Tal como demostramos en el capítulo 4, de una relación como 6.81 se deduce inmediatamente la independencia la función de partición respecto de la métrica:

$$\frac{1}{2\sqrt{g}} \frac{\delta Z}{\delta g^{\mu\nu}} = \langle T_{\mu\nu} \rangle = 0 \tag{6.83}$$

lo que muestra que Z es un invariante topológico.

Por razones similares, Z es independiente de la constante de acoplamiento:

$$\frac{\delta Z}{\delta e^2} = 0 \tag{6.84}$$

Por lo tanto, es posible evaluar Z en el límite de e pequeño donde la función de partición está dominada por los mínimos clásicos, que en este caso corresponden a las soluciones de las ecuaciones de Bogomol'nyi, es decir, a los vórtices no Abelianos. 6.52.

De la misma manera que en la teoría de Yang y Mills, podemos construir ahora los invariantes topológicos asociados con esta teoría. Con el fin de encontrar los operadores W_k a partir de los cuales podemos construir luego tales invariantes, consideraremos las ecuaciones *zig-zag*:

$$\begin{aligned}
 \{Q, W_0\} &= 0 \\
 W_0 &= \frac{1}{2} \text{Tr } \sigma^2 & dW_0 &= \{Q, W_1\} \\
 W_1 &= \text{Tr } \sigma \psi_\mu dx^\mu & dW_1 &= \{Q, W_2\} \\
 W_2 &= \text{Tr } (\psi_\mu \psi_\nu + F_{\mu\nu} \sigma) dx^\mu \wedge dx^\nu & dW_2 &= 0
 \end{aligned} \tag{6.85}$$

Estos operadores constituyen la versión en dos dimensiones de los operadores W_k del capítulo 4. Obviamente, ya que se trata de una teoría bidimensional, la cadena se corta en W_2 .

Hemos construido entonces una teoría topológica a partir de la cuantificación de una acción clásica Gaussiana asociada con las ecuaciones de Bogomol'nyi del modelo no Abeliano de Higgs en dos dimensiones. El método de cuantificación es el mismo que el usado por Labastida y Pernici para obtener la teoría de Witten a partir de la cuantificación BRST de una acción clásica, donde ahora las ecuaciones de Bogomol'nyi juegan el rol de las ecuaciones de autodualidad.

La acción cuántica que resulta es la del modelo de Higgs no Abeliano, para una relación particular de los parámetros, más términos de ghosts.

De una manera análoga a la discutida en el capítulo 4, podemos ahora definir:

$$I(\gamma) = \int_\gamma W_k \tag{6.86}$$

donde γ es un ciclo de homología en la variedad bidimensional M en la que está definida la teoría.

De esta manera, si $\gamma_1, \dots, \gamma_i, \dots, \gamma_r$ son ciclos de homología k_i dimensionales en M tales que

$$\sum_1^r (4 - k_i) = d(\mathcal{M}) \tag{6.87}$$

donde $d(\mathcal{M})$ es la dimensión del espacio moduli asociado con nuestras ecuaciones,

$$\langle I(\gamma_1) \dots I(\gamma_r) \rangle \tag{6.88}$$

es un invariante topológico.

Conclusiones

Hemos presentado en este trabajo de tesis un estudio de ecuaciones de autodualidad en teorías de gauge con rotura de simetría así como la utilización de tales ecuaciones en la construcción de teorías topológicas de campos.

Como señalamos en la introducción, las ecuaciones de autodualidad (o ecuaciones de Bogomol'nyi) juegan un papel importante en el análisis de las ecuaciones de movimiento de una teoría de campos clásica. La obtención de estas ecuaciones es un primer paso en la búsqueda de soluciones exactas en particular de soluciones multisolitónicas.

Las ecuaciones halladas en esta tesis, constituyen el primer ejemplo de ecuaciones de autodualidad en una teoría no Abeliiana en la que se produce rotura de simetría via un campo de Higgs.

Presentamos así las ecuaciones de autodualidad de dos modelos no Abelianos que admiten soluciones tipo vórtice.

En primer lugar, construimos las ecuaciones de Bogomol'nyi para el modelo no Abeliano de Higgs (capítulo 2). Las ecuaciones de autodualidad encontradas constituyen así la extensión no Abeliiana de las ecuaciones de autodualidad del modelo de Higgs estudiadas originariamente por de Vega y Schaposnik [30] y Bogomol'nyi [27]. La propuesta de un ansatz para las soluciones permite reducir estas ecuaciones a las del modelo Abeliano y de esta manera pudimos aplicar el análisis de la referencia [30] a su estudio.

Para obtener estas ecuaciones utilizamos el procedimiento de Bogomol'nyi que consiste en reescribir la energía como una suma de cuadrados más un término proporcional a la carga topológica (en este caso asociada al flujo magnético del vórtice). Se obtiene así una cota para la energía y las ecuaciones de autodualidad resultan de exigir que esta cota sea saturada.

Las características distintivas de las ecuaciones de autodualidad que

hemos encontrado están ligadas al carácter no Abelianiano del modelo estudiado. En efecto, los vórtices en teorías de gauge con grupo $SU(N)$ están caracterizados por una carga topológica $n \in Z_n$ en contraste con el caso abeliano en el que $n \in Z$. Esto cambia drásticamente el carácter de la cota para la energía: mientras que en el caso $U(1)$ es de carácter puramente topológico, en el caso $SU(2)$ el flujo magnético es proporcional a la carga topológica *modulo 2*:

$$E \geq \eta^2 \pi (p + 2k) \quad p \in Z_2 \quad k \in Z$$

Hemos reescrito aquí la cota para la energía haciendo resaltar que el flujo magnético tiene, además de la contribución al número topológico p , una contribución no topológica asociada con el entero k .

Es interesante señalar que este tipo de soluciones asociadas con cotas del tipo descrito anteriormente puede tener implicaciones importantes en las aplicaciones de vórtices en cosmología. En efecto, en el estudio de la evolución de las cuerdas cósmicas, la conservación de la carga topológica juega un papel central (en los procesos de división de cuerdas, recombinación, etc.). Para este tipo de soluciones que hemos discutido se tiene dos enteros (p y k) lo que en principio implicaría nuevas condiciones suplementarias en la descripción de estos procesos. Este aspecto no ha sido discutido en esta tesis quedando como un problema abierto de interés.

Hemos presentado también las ecuaciones de Bogomol'nyi para una teoría no Abeliana de Chern-Simons-Higgs en la que la energía cinética para el campo de gauge está dada por un término de Chern-Simons. Estas ecuaciones constituyen la versión no Abeliana de las recientemente estudiadas por Hong, Kim y Pac [48] e independientemente por Jackiw y Weinberg [49].

Un primer punto a señalar es que cuando el término de Chern-Simons está presente pueden hallarse ecuaciones de Bogomol'nyi sólo si el potencial de Higgs es de orden seis (*cf.* con el caso del modelo anterior en el que el término de energía cinética es el habitual $-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2$ y para el cual existen ecuaciones de Bogomol'nyi con un potencial de Higgs cuártico). Conviene señalar aquí que la introducción de un término de Chern-Simons requiere trabajar necesariamente en un espacio tiempo de tres dimensiones y justamente en tal espacio, un potencial de orden sexto corresponde a una

constante de acoplamiento sin dimensiones en acuerdo con los principios de renormalizabilidad.

Es interesante señalar que a pesar de ser una teoría cualitativamente distinta a la discutida en el capítulo 2, la cota que hemos obtenido para la energía coincide en los dos modelos. Luego, el análisis del carácter no topológico de la cota es el mismo.

Notemos por otra parte, que al introducir el término de Chern-Simons, hemos agregado en la teoría un nuevo parámetro. Si bien éste no aparece en la expresión de las cotas halladas para la energía, en cambio sí lo hace en la relación de parámetros para los cuales esta cota es saturada, es decir aquella relación de parámetros para los cuales existen las ecuaciones de Bogomol'nyi.

Así mientras que en el caso tratado en el capítulo 2, las ecuaciones de Bogomol'nyi corresponden a:

$$g = e^2$$

(donde g es la constante en el término cuártico del potencial de Higgs y e es la carga eléctrica), en el sistema de Chern-Simons-Higgs las ecuaciones de Bogomol'nyi corresponden al caso:

$$g = \frac{e^2}{4\mu}$$

(donde g es la constante en el término séxtuple del potencial y μ es el coeficiente de Chern-Simons). De esta manera μ aparece parametrizando la relación de constantes de acoplamiento para las cuales la cota en la energía es saturada.

Es interesante notar que mientras en el caso Abeliano μ puede tomar en principio cualquier valor, en nuestro modelo se encuentra constreñido a valores discretos de acuerdo a la ecuación 3.17. Esto a su vez restringe los valores de g de acuerdo con :

$$g = \frac{4\pi^2}{e^2 m^2}$$

donde m es un entero.

Teniendo en cuenta que la relación de parámetros $g = e^2$ señala la transición de fase entre superconductividad tipo I y tipo II para el modelo de Ginzburg y Landau, sería interesante analizar el significado de esta relación

en las teorías de superconductividad a altas temperaturas. En este sentido nuestro modelo resulta de interés en el marco de las sugerencias recientes en torno a la eventual necesidad de estructuras no Abelianas [112]. En particular, recordemos que el factor estadístico $\Delta\vartheta$ en nuestro caso no Abeliano es:

$$\Delta\vartheta = \frac{\pi n m^2}{2}$$

por lo que los semiones, herramientas básicas en muchos modelos, aparecen naturalmente para el caso $m = n = 1$.

Hemos presentado también en esta tesis una de las aplicaciones más interesantes de las ecuaciones de autodualidad, esto es la construcción de una teoría topológica para un modelo con simetría de gauge no Abeliana con rotura de simetría.

Señalamos en el capítulo 6 que como consecuencia de que la función de partición de las teorías topológicas no depende de la métrica, los observables corresponden a invariantes topológicos. Por otra parte, son teorías en las que la aproximación semiclásica deviene exacta. Es por este motivo, que invariantes de gran interés matemático pueden ser calculados usando técnicas bien conocidas de la teoría de campos. En cuanto a las aplicaciones físicas se ha sugerido que los modelo de cuerdas podrían ser comprendidos como una de las fases de este tipo de teorías.

El modelo que hemos presentado en el capítulo 6, corresponde a una teoría topológica en dos dimensiones. Para obtenerla, utilizamos las ecuaciones de Bogomol'nyi del modelo no Abeliano de Higgs para proponer una acción clásica y luego cuantificarla usando el método de Batalin y Vilkovisky. Si bien el Lagrangiano cuántico resultante es en apariencia complicado (véase la ecuación 6.79) puede escribirse como la transformada BRST de una funcional sencilla de los campos originales, fantasmas y campos auxiliares. Esta propiedad permite mostrar en forma simple la independencia de la función de partición respecto de la métrica y de la constante de acoplamiento e así como construir otros invariantes topológicos calculando valores de expectación de vacío de ciertos operadores.

Una cuestión interesante que se abre a partir de los resultados obtenidos para nuestro modelo concierne la conexión entre ecuaciones de Bogomol'nyi y supersimetría. Esta conexión había sido señalada en los trabajos orig-

inales para el modelo Abelian de Higgs [30]. En efecto, la relación de parámetros para el cual existen las ecuaciones de Bogomol'nyi corresponde al caso en el que el modelo admite una extensión supersimétrica. Este misma relación fue explotada por otros autores en la construcción de modelos supersimétricos para los que las ecuaciones de movimiento en el sector bosónico eran ecuaciones de autodualidad [113] y [51].

Vimos en el capítulo 6 que las ecuaciones de Bogomol'nyi y la simetría BRST asociada con la simetría topológica son los ingredientes básicos para construir nuestro modelo topológico. La simetría BRST que conecta campos conmutantes y anticonmutantes puede ser asociada con una supersimetría (ver para el caso abeliano [108]). Más aún, el hecho de que la acción cuántica en nuestro modelo se pueda escribir como una transformada BRST garantiza que

$$\langle T_{\mu\nu} \rangle = 0$$

que es la versión cuántica de la condición

$$T_{\mu\nu} = 0$$

propiedad que caracteriza a las soluciones de la ecuación de autodualidad. Vemos así que nuestro modelo, y en general las teorías topológicas, constituye un terreno ideal para investigar esta conexión entre supersimetría y autodualidad.

Otro problema abierto en el que el modelo que hemos presentado puede resultar de utilidad se relaciona con el estudio de gravitación en dos dimensiones. Recientemente se han construido teorías en dos dimensiones [114] con un contenido de campos similar al de nuestro modelo a partir de un Lagrangiano que recuerda al operador W_2 presentado en la ecuación 6.85. Quizás sea este el campo más prometedor para aplicar la construcción que hemos dado de un modelo topológico no Abelian en dos dimensiones.

Bibliografía

- [1] R.F.Dashen, B.Hasslacher y A.Neveu, *Phys. Rev.* **D10** (1974) 4130.
- [2] J.Goldstone y R.Jackiw, *Phys. Rev.* **D11** (1975) 1486.
- [3] R.Rajaraman, *Phys. Rep.* **21C** (1975) 85; R.Jackiw, *Rev. Mod. Phys.* **49** (1977) 681.
- [4] A.Actor, *Rev. Mod. Phys.* **51** (1979) 461.
- [5] T.H.Skyrme, *Nucl. Phys.* **31** (1962) 556.
- [6] D.Finkelstein, *J. Math. Phys.* **7** (1966) 1218.
- [7] J.Rubinstein, *J. Math. Phys.* **11** (1970) 258.
- [8] H.B.Nielsen y P.Olesen, *Nucl. Phys.* **B61** (1973) 45.
- [9] G.'t Hooft, *Nucl. Phys.* **B79** (1974) 270.
- [10] A.M.Polyakov, *JETP Lett.* **20** (1974) 194.
- [11] A.A.Belavin, A.M.Polyakov, A.S.Schwarz y Yu.Tyupkin, *Phys. Lett.* **59** (1975) 85.
- [12] R.Rajaraman, *Solitons and Instantons*, North-Holland (1982).
- [13] *Solitons and Particles*, Ed. por C.Rebbi y G.Soliani, World Scientific (1984).
- [14] S.Coleman, "New Phenomena in subnuclear Physics", *Proc. Int.School Ettore Majorana*, Ed. por A. Zichichi, Plenum (1975); "The Whys of Subnuclear Physics", *Proc. Int.School Ettore Majorana*, Ed.

por A.Zichichi, Plenum (1979); "The Magnetic Monopole Fifty Years On", publicación de Harvard.

- [15] P.Goddard y D.Olive, *Rep. Prog. Phys.* **41** (1978) 1357.
- [16] P.Goddard y P.Mansfield, *Rep. Prog. Phys.* **49** (1986) 725.
- [17] R.Jackiw y C.Rebbi, *Phys. Rev. Lett.* **37** (1976) 172.
- [18] C.Callen, R.Dashen y J.Gross, *Phys. Lett.* **B63** (1976) 334.
- [19] G.'t Hooft, *Phys. Rev. Lett.* **37** (1976) 8; *Phys. Rev.* **D14** (1976) 3432.
- [20] A.Polyakov, *Nucl. Phys.* **B120** (1977) 429.
- [21] S.Coleman, "The Uses of Instantons", *Proc. Int.School Ettore Majorana*, Ed. por A.Zichichi, Plenum (1977).
- [22] D.Olive, S.Sciuto y R.Crewther, *Riv.Nuovo.Cim.* **8** (1979) 1.
- [23] E.Witten, *Phys. Rev. Lett.* **38** (1977) 121; R.Jackiw, C.Nohl y C.Rebbi, *Phys. Rev.* **D15** (1977) 1642.
- [24] M.F.Atiyah, N.J.Hitchin, V.G.Drinfeld y Yu.I.Manin, *Phys. Lett.* **A65** (1978) 185.
- [25] A.S.Schwartz, *Phys. Lett.* **B67** (1977) 172; M.Atiyah, N.J.Hitchin y I.M.Singer, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* **74** (1977) 2662.
- [26] M.K.Prasad y C.M.Sommerfield, *Phys. Rev. Lett.* **35** (1975) 760.
- [27] E.Bogomol'nyi, *Sov. J. Nucl. Phys.* **24** (1976) 448.
- [28] W.Nahm, "The construction of all self-dual multimonopoles by the ADHM method" en *Monopoles in Quantum Field Theory*, Ed. por N.S.Craigi, P.Goddard y W.Nahm, World Scientific (1982).
- [29] N.Ercolani y A.Sinha, *Comm. Math. Phys.* **125** (1989) 385.
- [30] H.J.de Vega y F.A.Schaposnik, *Phys. Rev.* **D14** (1976) 1100.

- [31] E.Weinberg, *Phys. Rev.* **D19** (1979) 936.
- [32] C.Taubes, *Comm. Math. Phys.* **72** (1980) 277.
- [33] P.Genes, *Superconductivity of Metals and Alloys*, Benjamin (1966).
- [34] A.Salam y J.Stathdee, *Nucl. Phys.* **B97** (1975) 293.
- [35] P.Fayet, *Il Nuovo Cim.* **31** (1976) 626.
- [36] N.J.Hitchin, *Proc. London. Math. Soc.* **3** (1987) 59.
- [37] E.Witten, *Phys. Lett.* **B86** (1979) 283.
- [38] B.Julia y A.Zee, *Phys. Rev.* **D11** (1975) 2227.
- [39] M.V.Manías, C.M.Naón, F.A.Schaposnik y M.Trobo, *Phys. Lett.* **B171** (1986) 199.
- [40] J.Schonfeld, *Nucl. Phys.* **B185** (1981) 157.
- [41] S.Deser, R.Jackiw y S.Templeton, *Phys. Rev. Lett.* **48** (1982) 975 ;
Ann. Phys. (NY) **140** (1982) 372.
- [42] H.J.De Vega y F.A.Schaposnik, *Phys. Rev. Lett.* **56** (1986) 2564;
Phys. Rev. **D34** (1986) 3206.
- [43] S.K.Paul y A.Khare, *Phys. Lett.* **B174** (1986) 420.
- [44] C.N.Kumar y A.Khare, *Phys. Lett.* **B178** (1986) 385.
- [45] R.B.Laughlin, *Phys. Rev.* **B3** (1983) 3383; "Fractional Statistics in the Quantum Hall Effect", publicación de Standford.
- [46] R.B.Laughlin "Why I think high Tc Superconductivity and the Fractional Quantum Hall Effect are related", publicación de Standford; A.Fetter, C.Hanna y R.B.Lauglin, *Phys. Rev.* **B38** (1989) 9679; Y.H.Chen, F.Wilczek, E.Witten y B.I.Halperin, *Int. Journ. Mod. Phys.* **B3** (1989) 1001; A.Zee, "Semionics:a theory of high temperature superconductivity", en *High Temperature Superconductivity*, Ed. por K.Bedell, D.Pines y J.R.Schriffer, Addison-Wesley (1990).

- [47] E.Fradkin y F.A.Schaposnik, *Phys. Rev. Lett.* (en prensa).
- [48] J.Hong, Y.Kim y P.Y.Pac, *Phys. Rev. Lett.* **64** (1990) 2230.
- [49] R.Jackiw y E.Weinberg, *Phys. Rev. Lett.* **64** (1990) 2234.
- [50] R.Jackiw, K.Lee y E.Weinberg, "Self-Dual Chern Simons Solitons", CTP 1876 (1990).
- [51] C.Lee, K.Lee y E.Weinberg, *Phys. Lett. B* (en prensa).
- [52] F.A.Schaposnik, *Phys. Rev.* **D18** (1978) 1183.
- [53] E.Witten, *Nucl. Phys.* **B156** (1979) 269.
- [54] G.Veneziano, *Nucl. Phys.* **B159** (1979) 213.
- [55] R.D.Peccei y H.R.Quinn, *Phys. Rev. Lett.* **38** (1977) 1440; *Phys. Rev.* **D16** (1977) 1791.
- [56] N.Manton, *Phys. Rev.* **D28** (1983) 2019; F.Klinkhamer y N.Manton, *ibid.* **30**, (1984) 2212.
- [57] Para una lista completa de referencias consultar, M.V.Manías, Tesis Doctoral, U.N.L.P (1989).
- [58] S.Donaldson, *J. Diff. Geom.* **18** (1983) 269; *J. Diff. Geom.* **26** (1987) 397; "Polynomial invariants for smooth four-manifolds", publicación de Oxford (1988).
- [59] E.Witten, *Comm. Math. Phys.* **117** (1988) 353.
- [60] J.M.Labastida y M.Pernici, *Phys. Lett.* **B212** (1988) 56.
- [61] L.Baulieu y I.M.Singer, *Nucl. Phys.* (Proc.Suppl.) **B5** (1988) 12.
- [62] Para una lista de referencias consultar: F.Schaposnik, " Topological Field Theories and Two Dimensional Instantons", *Proc. VIth Swieca Summer School (1989)*, Ed. O.Eboli, World Scientific (1990).
- [63] L.F.Cugliandolo, Tesis Doctoral, U.N.L.P., (1991)

- [64] L.F.Cugliandolo, G.Lozano y F.A.Schaposnik, *Phys. Rev.* **D40** (1989) 3440.
- [65] L.F.Cugliandolo, G.Lozano, M.V.Manías y F.A.Schaposnik, *Mod. Phys. Lett. A* (en prensa).
- [66] L.F.Cugliandolo, G.Lozano y F.A. Schaposnik, *Phys. Lett.* **B234** (1990) 52.
- [67] S.Mandelstam, *Phys. Lett.* **53** (1975), 476.
- [68] H.C.Tze y Z.F.Ezawa, *Nucl. Phys.* **B100** (1975) 1; *Phys. Rev.* **D14** (1976) 1006.
- [69] A.Schwarz, *Nucl. Phys.* **B208** (1982) 141
- [70] R.E.Behrends, J.Dreitlein, C.Fronstal y W.Lee, *Rev. Mod. Phys.* **34** (1962) 1.
- [71] C.N.Kumar y A.Kharee, *Phys. Rev. Lett.* **59** (1987) 377; H.J.de Vega y F.A.Schaposnik, *Phys. Rev. Lett.* **59** (1987) 378.
- [72] S.Paul, *Phys. Rev.* **D35** (1987) 3280.
- [73] L.Jacobs y C.Rebbi, *Phys. Rev.* **B19** (1979) 4489.
- [74] R.S.Ward, *Comm. Math. Phys.* **79** (1981) 317.
- [75] E.Wilczek, "Lectures on Fractional Statistics and Anyon Superconductivity" IAS-SNS-HEP 89/59.
- [76] E.Wilczek, *Phys. Rev. Lett.* **49** (1982) 957.
- [77] R.Jackiw, "Topological Investigations in Field Theory", 1983 Les Houches Summer School, editado por S.de Witt y R.Stora, North-Holland (1984).
- [78] R.Jackiw, "Topics in Planar Physics" CTP 1824 (1989).
- [79] C.Hagen, *Ann. Phys. (NY)* **157** (1984) 342.

- [80] E.Witten, *Comm. Math. Phys.* **121** (1989) 351; *Nucl. Phys.* **B311** (1989) 46.
- [81] S.Elitzur, G.Moore, A.Schwimmer y N.Seiberg, *Nucl. Phys.* **B326** (1989) 46.
- [82] G.V.Dunne, R.Jackiw y C.A.Trugenberger, *Ann. Phys. (NY)* **194** (1989) 197.
- [83] A.Polyakov, *Mod. Phys. Lett.* **A3** (1988) 325.
- [84] G.Lozano, M.V.Manías y F.A.Schaposnik, *Phys. Rev.* **D38** (1988) 601.
- [85] D.Jatkar y A.Khare, *Phys. Lett.* **B236** (1990) 283.
- [86] E.Witten, *Comm. Math. Phys.* **117** (1988) 353.
- [87] E.Witten, *Phys. Lett.* **B206** (1988) 601.
- [88] E.Witten, *Nucl. Phys.* **B311** (1989) 46.
- [89] V.F.R.Jones, *Inv. Math.* **72** (1983) 1, *Bull. AMS* **12** (1985) 103, *Ann. Math.* **126** (1987) 335.
- [90] M.Atiyah, "New invariants of Three and Four Dimensional Manifolds" en "The Symposium on the Mathematical Heritage of Herman Weyl", editado por R.Wells *et al.* (Univ. of North Carolina) (1987).
- [91] A.Floer, "An Instanton Invariant for Three Manifolds". publicación del Courant Institute (1987); *Bull. AMS* **16** (1987) 279.
- [92] T.Kugo y I.Ojima, *Suppl. Prog. Theor. Phys* **66** (1979) 1.
- [93] L.Cugliandolo, G.Lozano y F.Schaposnik, *Phys. Lett.* **B244** (1990) 249; *Phys. Lett.***B** (en prensa).
- [94] M.Atiyah, N.Hitchin y I.Singer, *Proc. Roy. Soc. London* **A362** (1978) 423.
- [95] J.Madore, *Phys. Rep.* **75** (1981) 126; Gu Chaohao, *Phys. Rep.* **80** (1981) 251.

- [96] T.Eguchi, P.Gilkey y A.Hanson, *Phys. Rep.* **66** (1980) 213
- [97] L.D.Faddeev y V.N.Popov, *Phys. Lett.* **B25** (1967) 29.
- [98] D.Friedan, E.Martinec y S.Shenker, *Nucl. Phys.* **B271** (1986) 93;
W.Siegel, *Phys. Lett.* **B151** (1985) 391, 396.
- [99] A.Batalin y G.A.Vilkovisky, *Phys. Lett.* **B102** (1981) 27.
- [100] A.Batalin y G.A.Vilkovisky, *Phys. Rev.* **D28** (1983) 2567.
- [101] A.Batalin y G.A.Vilkovisky, *J. Math. Phys.* **26** (1985) 172.
- [102] R.Kallosh, *Pis'ma JETP (USSR)* **26** (1977) 573; B.de Witt y van
Holten, *Phys. Lett.* **B 79** (1979) 384.
- [103] W.Troost, P.van Nieuwenhuizen y A.Van Proeyen, "Anomalies and the
Batalin and Vilkovisky Lagrangian Formalism", CERN-TH-5512/89.
- [104] D.Birmingham, M.Raskowski y G.Thompson, *Phys. Lett.* **B212**
(1988) 187.
- [105] D.Birmingham, M.Raskowski y G.Thompson, *Phys. Lett.* **B214**
(1988) 381.
- [106] D.Birmingham, M.Raskowski y G.Thompson, *Nucl. Phys.* **B315**
(1989) 577.
- [107] D.Birmingham, M.Raskowski y G.Thompson, I.C.T.P 88-387.
- [108] F.A.Schaposnik y G.Thompson, *Phys. Lett.* **B224** (1989) 379.
- [109] J.M.Labastida y M.Pernici, "A Lagrangian for Topological Gravity
and its BRST Quantization" , IASSNS-HEP-88/21, (1988).
- [110] L.Baulieu y B.Grossman, *Phys. Lett.* **B212** (1988) 351.
- [111] L.F.Cugliandolo, G.Lozano, H.Montani y F.A.Schaposnik, *Int.*
Journ. Mod. Phys. **A5** (1990) 3777.
- [112] A.Zee "2+1 dimensional Field Theory and Superconductivity", en
Swieca Summer School 1991 , en prensa.

- [113] P.di Vecchia y S.Ferrara, *Nucl. Phys.* **B130** (1977) 93.
- [114] A.Chammseddine y D.Wyler, "Topological Gravity in 1+1 dimensions", *Phys. Lett B* (en prensa); E.Witten, "Surprises with Topological Field Theories", publicación de Princeton 1990.

Entrada Bibliotecaria el 1º de marzo de 1991
T. 31

